Appunti di Analisi Matematica 3

Angilè E. *Framba G.* *Pistolato F.* *Rastrelli M.*

corso tenuto dal

Prof. Giovanni Alberti

Anno accademico 2018/2019

Indice

1 Integrazione secondo Lebesgue **5**

1.1 Definizioni . . . 5

1.2 Costruzione dell'integrale . . . 12

1.3 Teoremi di convergenza per l'integrale . . . 17

1.4 Esercizi . . . 21

2 Spazi $\mathbf{L}^p$ **25**

2.1 Proprietà degli spazi $\mathbf{L}^p$ . . . 25

2.1.1 Definizioni . . . 25

2.1.2 Disuguaglianze integrali . . . 27

2.1.3 Completezza . . . 33

2.1.4 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni . . . 35

2.1.5 Approssimazioni . . . 38

2.1.6 Separabilità . . . 40

2.1.7 Alcuni esercizi . . . 42

2.2 Prodotto di convoluzione . . . 44

2.2.1 Definizioni e regolarità . . . 44

2.2.2 Derivabilità del prodotto di convoluzione . . . 53

3 Spazi di Hilbert **57**

3.1 Definizioni e teorema delle basi . . . 57

3.2 Spazi di Hilbert complessi . . . 68

3.3 Esercizi . . . 69

4 Serie di Fourier **78**
4.1 Differenziabilità e decadimento dei coefficienti 80
4.2 Equazione delle onde ed equazione del calore 86
4.3 Varianti della serie di Fourier 98

5 Trasformata di Fourier **102**
5.1 Definizioni e prime proprietà 102
5.2 L'antitrasformata e il teorema di inversione 108
5.3 Estensione della trasformata allo spazio L^2 110
5.4 Ripasso di analisi complessa 118
5.4.1 Analiticità della trasformata 123
5.5 L'equazione del calore sulla retta reale 124
5.6 Trasformata in più variabili 126

6 Funzioni armoniche **128**
6.1 Legami con le proprietà della media 128
6.2 Armonicità e olomorfia 133

Appunti del corso tenuto dal Prof. Alberti nel primo semestre dell'a.a. 2018-2019.

Siamo contenti di esserci riusciti nonstante Silvio. Per segnalare sviste ed errori usare l'indirizzo angile@mail.dm.unipi.it.

Gio ringrazia Ema per la bella idea, entrambi ringraziano Franci per averci mostrato come si fa un file LaTeX e averci accompagnati nell'impresa.

Mario barrare se presente ☒.

Elenco delle lezioni

1 Lezione (24 settembre 2018) 5
2 Lezione (26 settembre 2018) 7
3 Lezione (27 settembre 2018) 15
4 Lezione (1 ottobre 2018) 17
5 Lezione (3 ottobre 2018) 22

6 Lezione (4 ottobre 2018) 25
7 Lezione (8 ottobre 2018, mattina) 28
8 Lezione (8 ottobre 2018, pomeriggio) 33
9 Lezione (15 ottobre 2018) 37
10 Lezione (17 ottobre 2018) 40
11 Lezione (18 ottobre 2018) 44
12 Lezione (22 ottobre 2018) 52

13 Lezione (24 ottobre 2018) 57
14 Lezione (25 ottobre 2018) 63
15 Lezione (29 ottobre 2018) 66
16 Lezione (31 ottobre 2018) 71
17 Lezione (5 novembre 2018) 75

18 Lezione (7 novembre 2018) 78
19 Lezione (8 novembre 2018) 80
20 Lezione (12 novembre 2018) 84
21 Lezione (14 novembre 2018) 86

22 Lezione (15 novembre 2018) 89
23 Lezione (19 novembre 2018) 93
24 Lezione (21 novembre 2018) 95
25 Lezione (22 novembre 2018) 98
26 Lezione (28 novembre 2018) 102
27 Lezione (29 novembre 2018) 105
28 Lezione (3 dicembre 2018) 108
29 Lezione (5 dicembre 2018) 112
30 Lezione (10 dicembre 2018) 115
31 Lezione (11 dicembre 2018) 118
32 Lezione (12 dicembre 2018) 123
33 Lezione (13 dicembre 2018) 126
34 Lezione (17 dicembre 2018) 133

Capitolo 1

Misura e integrazione secondo Lebesgue

Lezione 1 (24 settembre 2018)**.**

Il motivo di questo capitolo risiede nel fatto che la teoria dell'integrazione secondo Riemann è mancante sotto alcuni aspetti. Pur essendo l'unico integrale approssimabile numericamente, preferiamo una diversa teoria per due motivi. Il primo è che la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann non è chiusa per convergenza puntuale, il secondo è il fatto che vogliamo poter "passare al limite sotto il segno di integrale". Queste osservazioni saranno essenziali quando definiremo gli spazi L^p e dimostreremo la loro completezza (ipotesi sotto la quale possiamo usare dei metodi di punto fisso), assente nel caso dell'integrazione secondo Riemann per il primo motivo detto sopra.

1.1 Definizioni

Sia X un insieme.

Definizione 1.1 (Algebra)**.** Una famiglia $\mathfrak{F}$ di sottoinsiemi di X si dice **algebra di insiemi di** X se:

- $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$,
- $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$,
- $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$,
- $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^C$.

Nella definizione non c'è veramente bisogno di assumere la chiusura per intersezione finita. Segue infatti dalla chiusura per unione finita e per complementare. Alla stessa maniera $X = \emptyset^c$ e viceversa, quindi per la chiusura per complementare, basta verificare che sia contenuto uno dei due.

In questo corso vedremo per lo più $X = \mathbb{R}$, o $X = \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2 (σ-algebra)**.** Un'algebra $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice **σ-algebra** se è chiusa rispetto a unione numerabile e intersezione numerabile.

Anche in tal caso richiedere la chiusura per intersezione numerabile è superfluo.

Definizione 1.3 (Misura additiva, σ-additiva)**.** Data un'algebra $\mathfrak{F}$ su $\mathbb{X}$, una funzione $\mu : \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ è una **misura additiva** se:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $E_1, .., E_n \in \mathfrak{F}$ a due a due disgiunti $\Rightarrow \mu(E_1 \cup ... \cup E_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(E_k)$.

Data una σ-algebra $\mathfrak{F}$ su $\mathbb{X}$ una funzione $\mu : \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ è una **misura σ-additiva** se:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\{E_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{F}$ disgiunti tra loro $\Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Definizione 1.4 (Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan)**.** Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice **misurabile secondo Peano-Jordan** se la funzione caratteristica del sottoinsieme è integrabile secondo Riemann.

Osserviamo che una definizione equivalente a quella appena data potrebbe essere la seguente: un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se $\forall \varepsilon > 0$ esistono due sottoinsiemi $Q_\varepsilon, P_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che :

- $P_\varepsilon \subseteq E \subseteq Q_\varepsilon$,
- $Q_\varepsilon, P_\varepsilon$ sono unione finita di parallelepipedi disgiunti,
- $vol_n(Q_\varepsilon) - vol_n(P_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Con il termine *parallelepipedo* intendiamo la naturale nozione di prodotto cartesiano tra gli intervalli di $\mathbb{R}$ della forma $[a_i, b_i]$ e con vol_n ci riferiamo al volume di un generico parallelepipedo $P \subseteq \mathbb{R}^n$, definito come il prodotto della lunghezza degli intervalli $vol_n(P) = \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Esempio 1.5. $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ non è misurabile secondo Riemann.

Dimostrazione. Ogni parallelepipedo A che contiene E deve contenere anche $[0,1]$, per densità di $\mathbb{Q}$. Quindi $vol_n(A) \geq vol_n([0,1]) = 1$ (per monotonia della misura, dimostrata nella Proposizione 1.17). Poiché $\mathbb{Q}$ è discreto, ogni unione finita di parallelepipedi B contenuta in E è unione finita di punti in $[0,1]$. Perciò $vol_n(B) = 0$. Quindi $vol_n(A) - vol_n(B) \geq 1 - 0 = 1 \nleq \varepsilon$. □

Definizione 1.6. (Misura di Lebesgue di un aperto) Dato A un aperto di $\mathbb{R}^n$, ne definiamo la misura di Lebesgue come

$$\mathcal{L}^n(A) \stackrel{def}{=} \sup\{vol_n(E) \mid E \subseteq A,\ E \text{ è unione finita di parallelepipedi}\}.$$

Per quanto riguarda un generico sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.7 (Insieme misurabile secondo Lebesgue)**.** Diremo che $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **misurabile secondo Lebesgue** se $\forall \varepsilon > 0$ esistono un insieme chiuso P_ε e un insieme aperto Q_ε tali che

- $P_\varepsilon \subseteq E \subseteq Q_\varepsilon$,
- $\mathcal{L}^n(Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

La scrittura $\mathcal{L}^n(Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon)$ ha significato poiché l'insieme in considerazione è un aperto, infatti $Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon = Q_\varepsilon \cap P_\varepsilon^{\mathsf{c}}$ e l'intersezione finita di aperti è ancora un aperto.

Enunciamo il seguente risultato.

Teorema 1.8. *La classe $\mathfrak{M}^n$ dei misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra.*

Definizione 1.9 (Misura di Lebesgue)**.** Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue. Definiamo la **misura di Lebesgue** di E come

$$\mathcal{L}^n(E) \stackrel{def}{=} \inf\{\mathcal{L}^n(\Omega) \mid \Omega \supseteq E, \Omega \text{ è un aperto}\}$$

Teorema 1.10. *La misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ è una misura σ-additiva su $\mathfrak{M}^n$. Inoltre $\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(C) \mid C \subseteq E,\ C \text{ chiuso}\}$.*

Lezione 2 (26 settembre 2018)**.**

Esercizio 1.11 (Controesempio di Vitali)**.** $\mathfrak{M}^1 \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Svolgimento. Si consideri su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Sia E l'insieme ottenuto scegliendo uno e un solo elemento da

$[0,1] \cap \mathcal{A}$ per ogni $\mathcal{A}$ classe di equivalenza. Tale costruzione è possibile poiché $[0,1] \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ per qualsiasi $\mathcal{A}$ e se supponiamo vero l'**assioma della scelta**.

$\forall q \in \mathbb{Q}$ segue che $(\mathrm{E}+q) \cap \mathrm{E} = \emptyset$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x \in (\mathrm{E}+q) \cap \mathrm{E}$. Questo contraddirebbe l'unicità di $x \in \mathrm{E}$ come rappresentante della propria classe di equivalenza, poiché x apparterrebbe anche a $(\mathrm{E}+q)$ e quindi si potrebbe scrivere come $y+q$, con $y \in \mathrm{E}$. Perciò si avrebbe che $y - x = (x-q) - x \in \mathbb{Q}$, cioè $[x] = [y]$.

Denotiamo con E_q l'insieme $(\mathrm{E}+q)$ e con F l'insieme $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathrm{E}_q$, si ha che

$$[0,1] \subseteq \mathrm{F} \subseteq [-1,2]$$

Il primo contenimento è dovuto al fatto che per ogni $x \in [0,1]$ esiste $y \in \mathrm{E}$ per il quale $[x] = [y]$ e quindi esiste $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ t.c. $x = y + q$ perciò $x \in \mathrm{E}_q$. Il secondo contenimento è invece del tutto banale.

Supponendo $\mathrm{E} \in \mathfrak{M}^1$ si troverebbe che, data l'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue:

$$\forall q \in \mathbb{Q} \quad \mathcal{L}^1(\mathrm{E}_q) = \mathcal{L}^1(\mathrm{E}).$$

Di conseguenza, per chiusura per unione numerabile di $\mathfrak{M}^1$ e per σ-additività della misura di Lebesgue F è misurabile e ha misura pari alla somma delle misure dei vari E_q. Se questi fossero di misura nulla, allora

$$\mathcal{L}^1(\mathrm{F}) = 0 \text{ in contraddizione con } [0,1] \subseteq \mathrm{F},$$

mentre se avessero misura positiva m

$$\mathcal{L}^1(\mathrm{F}) = +\infty \text{ in contraddizione con } \mathrm{F} \subseteq [-1,2].$$

□

Osservazione 1.12. Per trovare l'assurdo si è utilizzata la monotonia della misura che è dimostrata in seguito, nella Proposizione 1.17.

Osservazione 1.13. Osserviamo anche che tale risultato è valido per una qualsiasi misura σ-additiva, σ-finita e invariante per traslazione. Tale esempio dimostra anche il fatto che non sia possibile estendere una misura invariante per traslazioni (tranne quelle banali) a tutto l'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.14. Sia $\mathfrak{F}$ una σ-algebra, $E \in \mathfrak{F}$ e $f : E \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **$\mathfrak{F}$-misurabile** (o semplicemente **misurabile**) se per ogni aperto A di $\mathbb{R}$ si ha che $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$.

Per verificare tale proprietà è sufficiente provarla per una famiglia che genera la σ-algebra in arrivo.

Definizione 1.15 (Boreliani)**.** Dato un generico spazio metrico (X, d), si dice **σ-algebra di Borel** la più piccola σ-algebra che contiene gli aperti della topologia indotta dalla distanza. Inoltre per ogni numero naturale n denotiamo con $\mathfrak{B}^n$ la σ-algebra di Borel relativa a $\mathbb{R}^n$ con l'usuale distanza euclidea.

Gli elementi di tale σ-algebra si dicono *boreliani.* Inoltre, una funzione misurabile rispetto a $\mathfrak{B}^n$ si dice **boreliana**.

Osservazione 1.16. La definizione data è una buona definizione poiché l'intersezione è non vuota, infatti contiene almeno $\mathcal{P}(X)$, e l'intersezione di σ-algebre è una σ-algebra.

Elenchiamo ora alcune proprietà di una misura :

Proposizione 1.17. *Sia μ una misura σ-additiva definita su $\mathfrak{F}$, allora:*

1. *è monotona, cioè se $E \subseteq F$ con $E, F \in \mathfrak{F} \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$,*
2. *passa al limite su unioni crescenti, cioè se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ...$ sono elementi di $\mathfrak{F}$, allora $\mu(\bigcup_k E_k) = \sup_k \mu(E_k)$,*
3. *passa al limite su intersezioni decrescenti definitivamente limitate, cioè se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq ...$ sono elementi di $\mathfrak{F}$ ed esiste un indice k tale per cui $\mu(E_k) < \infty$, allora $\mu(\bigcap_k E_k) = \inf_k \mu(E_k)$.*

Dimostrazione.

1. Una misura σ-additiva è anche finitamente additiva, perciò $\mu(F) = \mu(E \cup (F \setminus E)) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.
2. Poniamo $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1 \ldots$, $F_k = E_k \setminus E_{k-1}$. Osserviamo che gli F_i sono tutti disgiunti tra di loro e che $E = \bigcup\limits_k E_k = \bigsqcup\limits_k F_k$, quindi si avrà che
$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) = \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) = \sup_n \mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) = \sup_k \mu(E_n).$$
Il seguente risultato si può scrivere in modo equivalente come
$$E_k \uparrow E \Rightarrow \mu(E_k) \uparrow \mu(E).$$
3. Possiamo assumere senza perdita di generalità che $k = 1$. Definiamo la successione F_k come $F_n = E_1 \setminus E_n$. Proviamo che è una successione di insiemi crescente a $F = E_1 \setminus E$, dove $E = \cap_k E_k$. Infatti, se $E_n \supset E_{n+1}$, passando al complementare abbiamo che $E_n^C \subset E_{n+1}^C$ e

dunque $E_1 \cap E_n^C \subset E_1 \cap E_{n+1}^C$, cioè $E_1 \setminus E_n \subset E_1 \setminus E_{n+1}$. Questo per definizione implica $F_n \subset F_{n+1}$. Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} F = E_1 \setminus E = E_1 \setminus (\cap_n E_n) &= E_1 \cap (\cap_n E_n)^C \\ = E_1 \cap \left(\cup_n E_n^C\right) &= \bigcup_n \left(E_1 \cap E_n^C\right) = \bigcup_n (E_1 \setminus E_n) = \cup F_n. \end{aligned}$$

Perciò si ha che $\mu(F_n) \uparrow \mu(F)$ per il secondo punto dimostrato. Tuttavia questo vuol dire che $\mu(E_1 \setminus E_n) \uparrow \mu(E_1 \setminus E)$. Usando il primo punto possiamo dire che $\mu(E_1) - \mu(E_n) \uparrow \mu(E_1) - \mu(E)$. Ciò vuol dire che

$$\sup\left(\mu(E_1) - \mu(E_n)\right) = \mu(E_1) + \sup\left(-\mu(E_n)\right) = \mu(E_1) - \mu(E),$$

poiché $\sup\left(-\mu(E_n)\right) = -\inf \mu(E_n)$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si conclude.

□

Esercizio 1.18. *$E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ è Lebesgue-misurabile, e ha misura nulla.*

Dimostrazione. E è unione numerabile di punti, che chiameremo q_n. Chiamiamo $E_n = \{q_1, ..., q_n\}$, successione crescente di insiemi. Si verifica immediatamente che $\bigcup_n E_n = E$. Quindi:

$$\mu(E) = \sup_n \mu(E_n) = \sup_n 0 = 0$$

□

Lemma 1.19 (Completezza della misura di Lebesgue)**.** *Sia $E \in \mathfrak{M}^n$ un insieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue tale che $\mathcal{L}^n(E) = 0$. Se E' è un sottoinsieme di E, allora è misurabile secondo Lebesgue e $\mathcal{L}^n(E') = 0$.*

Dimostrazione. Bisogna solo mostrare che ogni sottoinsieme è misurabile. Una volta dimostrato, per monotonia della misura, si conclude.

Per definizione di misura di Lebesgue si ha che se $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $Q_\varepsilon \supseteq E$ e un chiuso $P_\varepsilon \subseteq E$ tali che $\mathcal{L}^n(Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Poiché E è trascurabile, ogni chiuso contenuto è trascurabile, quindi senza perdita di generalità possiamo prendere $P_\varepsilon = \emptyset$, perciò

$$\mathcal{L}^n(Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon) = \mathcal{L}^n(Q_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

A questo punto per ogni sottoinsieme $E' \subseteq E$ e per ogni ε positivo, possiamo considerare il medesimo Q_ε come aperto contenente E' e l'insieme vuoto come chiuso, banalmente contenuto in E', tali che

$$\mathcal{L}^n(Q_\varepsilon \setminus \emptyset) \leq \varepsilon.$$

Perciò E' è misurabile e ha misura nulla. □

È bene osservare che non tutte le σ-algebra rispettano la proprietà del lemma precedente, un esempio infatti sono i boreliani su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.20 (σ-algebra completa)**.** Una σ-algebra dotata di una misura tale che ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla è misurabile ed è anch'esso trascurabile (Definizione 1.25) si dice **completa rispetto alla misura.**

Tale proprietà ci permette di dimostrare che la cardinalità di $\mathfrak{M}^1$ è pari a quella delle parti di $\mathbb{R}$. Nel seguente esempio infatti esibiamo un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ misurabile, trascurabile, di cardinalità pari a quella del continuo[1]. Per il lemma appena dimostrato ogni suo sottoinsieme è misurabile, perciò $|C| = 2^{\mathfrak{c}} \leq |\mathfrak{M}^1|$. Dato che $\mathfrak{M}^1 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, vale anche la disuguaglianza inversa. Perciò $|\mathfrak{M}^1| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Esempio 1.21 (L'insieme di Cantor)**.** Consideriamo $C_0 = [0, 1]$. Poniamo $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Costruiamo C_2 operando su ciascuna componente connessa di C_1 come fatto in C_0: li dividiamo in tre parti e consideriamo solo le parti estremali. Definiamo $C = \cap_n C_n$.

Gli insiemi C_n sono misurabili poiché unione disgiunta di 2^n intervalli connessi di lunghezza 3^{-n}. Anche C è misurabile, poiché intersezione decrescente di misurabili definitivamente limitati (Proposizione 1.17). Questo fatto ci permette di calcolare la misura di C: infatti vale che

$$\mathcal{L}^1(C) = \inf_n \mathcal{L}^1(C_n) = \inf_n 2^n \cdot 3^{-n} = \inf_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Esercizio 1.22. *Qual è la cardinalità di $\mathfrak{M}^n$?*

Soluzione. È pari a $2^{\mathfrak{c}}$. □

Esercizio 1.23. *Qual è la cardinalità di $\mathfrak{B}^n$?*

Soluzione. È pari a $\mathfrak{c}$. □

Proposizione 1.24 (Proprietà delle funzioni misurabili)**.** *Valgono le seguenti proprietà.*

- *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathfrak{F}$-misurabile e $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione boreliana, allora la funzione $g \circ f$ è $\mathfrak{F}$-misurabile.*

[1] Nel corso di Elementi di Teoria degli Insiemi, si definisce cardinalità del continuo la cardinalità dell'insieme numerico $\mathbb{R}$. Si denota $\mathfrak{c}$ e si dimostra essere uguale alla cardinalità delle parti di $\mathbb{N}$. Denotiamo $\aleph_0$ la cardinalità dei naturali. Sarà equivalente dire che un insieme è numerabile oppure che ha cardinalità $\aleph_0$. Per quanto detto, diamo per buono che $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

- *La somma, il prodotto, il massimo e il minimo di funzioni misurabili sono ancora funzioni misurabili.*
- *Data una successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{\mathbb{N}}$ misurabili e definite sullo stesso dominio, sono misurabili anche le seguenti funzioni:*

$$f(x) = \sup_n f_n(x),$$
$$f(x) = \inf_n f_n(x),$$
$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$
$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Suggerimento di dimostrazione. L'ordine di presentazione delle funzioni è l'ordine in cui dimostrarne la misurabilità. □

1.2 Costruzione dell'integrale

Con il termine **spazio di misura** intenderemo una terna ordinata $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ dove X è un insieme, $\mathfrak{F}$ una σ-algebra su X e μ una misura σ-additiva definita su $\mathfrak{F}$.

Definizione 1.25. Sia $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura. Un insieme $E \in \mathfrak{F}$ si dice **trascurabile** se ha misura nulla oppure è contenuto in un insieme di misura nulla.

Definizione 1.26. Data una σ-algebra $\mathfrak{F}$ su X e una misura μ su $\mathfrak{F}$, diremo che una proprietà $P(x)$ con x in X è **vera μ-quasi ovunque** se l'insieme degli $x \in X$ per cui la proprietà è falsa è **trascurabile**.

D'ora in avanti lavoreremo per costruire l'integrale su un generico spazio di misura $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ fissato; inoltre molto spesso quando parleremo di una funzione definita su un insieme E sottointenderemo che sia un elemento della σ-algebra $\mathfrak{F}$.

Definizione 1.27. Una funzione $f : E \to [0, +\infty]$ si dice **semplice** se è combinazione lineare finita di funzioni indicatrici di insiemi misurabili disgiunti $E_1, ..., E_n$ tali che $\cup E_i = E$.

La funzione può essere scritta nella forma $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{E_k}(x)$ con $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1.28. L'insieme delle funzioni semplici su E sono un sottoinsieme proprio delle funzioni misurabili sullo stesso dominio, infatti la controimmagine di un aperto è unione finita degli E_k e unione finita di misurabili è ancora misurabile. D'ora in avanti chiameremo $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni semplici su un certo dominio.

Possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.29. (Integrale di una funzione semplice) Sia $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{E_k}(x)$ una funzione semplice. Definiamo il suo integrale come

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(E_i).$$

Mostriamo che è *ben definito*, cioè che non dipende dalla rappresentazione scelta per f.

Lemma 1.30. *La precedente definizione è ben posta. Più precisamente, se f è una funzione semplice che ammette due rappresentazioni diverse, cioè $f(x) = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{F_j}$, allora vale che $\sum_i \alpha_i \mu(E_i) = \sum_j \beta_j \mu(F_j)$.*

Dimostrazione. Usando l'additività della misura su insiemi disgiunti si ha che

$$\sum_i \alpha_i \mu(E_i) = \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(E_i \cap F_j).$$

Analogamente vale che

$$\sum_j \beta_j \mu(F_j) = \sum_j \beta_j \sum_i \mu(F_j \cap E_i) = \sum_{i,j} \beta_j \mu(F_j \cap E_i).$$

Tuttavia, le due scritture $\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ e $\sum_j \beta_j \mathbb{1}_{F_j}$ identificano la stessa funzione e quindi sull'intersezione di E_i e F_j, i coefficienti α_i e β_j devono coincidere. Si avrà dunque

$$\sum_{i,j} \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i,j} \beta_j \mu(E_i \cap F_j).$$

Dato che gli E_i, così come gli insiemi F_j, erano insiemi disgiunti possiamo concludere che

$$\sum_i \alpha_i \mu(E_i) = \sum_j \beta_j \mu(F_j).$$

□

Osservazione 1.31. Con la stessa idea di ridursi a partizioni comuni del dominio è facile mostrare che per ogni $\alpha, \beta \geq 0$ e per φ e ψ funzione semplice, $\alpha\varphi + \beta\psi$ è ancora una funzione semplice e

$$\int_X \alpha\varphi + \beta\psi\ d\mu = \alpha \int_X \varphi\ d\mu + \beta \int_X \psi\ d\mu\ .$$

L'integrale delle funzioni semplici appena definito ci serve per dare la seguente definizione.

Definizione 1.32 (Integrale di una funzione misurabile a segno costante)**.** Sia $f : E \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Definiamo il suo integrale come

$$\int_E f(x) d\mu(x) \overset{def}{=} \sup \left\{ \int_E g(x) d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{S},\; g \leq f \;\forall x \in E \right\}.$$

Vogliamo che l'operazione di integrale appena definita goda delle solite proprietà: monotonia, linearità, etc. Per provarlo abbiamo bisogno di introdurre un'estensione delle funzioni semplici.

Definizione 1.33 (Funzione semplice generalizzata)**.** Siano E_k insiemi misurabili tali che $\bigcup\limits_{i \geq 1} E_k = E$, non necessariamente disgiunti. Siano α_k coefficienti non negativi. Poniamo

$$\mathcal{S}' \overset{def}{=} \left\{ f : E \to [0, +\infty] \;\middle|\; f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{E_k} \right\}.$$

In questo caso si richiede che i coefficienti siano non negativi per evitare casi di convergenza non assoluta e quindi a garantire la buona definizione delle funzioni. Tale richiesta non era necessaria nel caso delle funzioni semplici propriamente dette, poiché gli insiemi E_i su cui le abbiamo definite erano disgiunti.

Lemma 1.34. *Sia $f \in \mathcal{S}'$, allora $\int_E f(x)\; d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \mu(E_i)$.*

Dimostrazione non svolta. Un suggerimento è costruire a partire da $\{ E_i \}_{\mathbb{N}}$ un'unione numerabile disgiunta. □

Lemma 1.35. *Sia f misurabile, allora valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned} \int_E f \; d\mu &= \sup \left\{ \int_E g \; d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{S}',\; g \leq f \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_E g \; d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{S}',\; g \geq f \right\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione svolta più avanti. □

Possiamo ora dare la definizione di integrale per una funzione misurabile generica.

Definizione 1.36 (Integrale di una funzione misurabile)**.** Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Definiamo il suo integrale come

$$\int_E f \, d\mu \overset{def}{=} \int_E f^+ - \int_E f^- \, d\mu.$$

Tale integrale è ben definito solo se almeno uno dei due addendi è finito, cioè a valori in $\mathbb{R}$.

Definizione 1.37 (Funzione integrabile, funzione sommabile)**.** Definiamo **integrabili** le funzioni misurabili il cui integrale è ben definito. Se entrambi i termini sono limitati, allora diremo che f è **sommabile** o **in** L^1.

Lezione 3 (27 settembre 2018)**.**

Dimostrazione del Lemma 1.35. Ricordiamo l'enunciato: data f misurabile e a valori in $[0, +\infty]$, allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\int_E f \, d\mu &\overset{A}{=} \inf \left\{ \int_E g \, d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{S}', g \geq f \right\} \\ &\overset{B}{=} \sup \left\{ \int_E g \, d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{S}', g \leq f \right\}.\end{aligned}$$

Per monotonia dell'integrale (dimostrata sotto), sono vere $\overset{A}{\leq}$ e $\overset{B}{\geq}$.

Poiché $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, si ha anche che vale la $\overset{B}{\leq}$, infatti

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E g \, d\mu \middle| g \in \mathcal{S}, g \leq f \right\} \overset{B}{\leq} \sup \left\{ \int_E g \, d\mu \;\middle|\; g \in \mathcal{S}', g \leq f \right\}.$$

Proviamo $\overset{A}{\geq}$. Se $\int_E f d\mu = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, fissiamo $\delta > 0$. Supponiamo che $\mu(E) < +\infty$ [2]. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $E_n = \{ x \in E \mid n\delta \leq f(x) \leq (n+1)\delta \}$ e $E_\infty = \{ x \in E \mid f(x) = \infty \}$, che son tutti misurabili, per misurabilità di f.

Poniamo $g = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\delta \cdot \mathbb{1}_{E_n} \right) + (\infty) \cdot \mathbb{1}_{E_\infty}$. Di conseguenza abbiamo che $g \in \mathcal{S}'$ e $g \leq f \leq g + \delta$. Ora però abbiamo che

$$\int_E g d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_E (g+\delta) d\mu \leq \int_E g d\mu + \delta\mu(E).$$

[2] Se non fosse così, bisognerebbe partizionare l'insieme in insiemi di misura finita e disgiunti, per poi utilizzare l'additività dell'integrale per insiemi disgiunti. Per fare questo serve che la misura sia σ -finita

Poiché i due estremi distano meno di $\delta\mu(E)$, anche $\int_E f d\mu$ e $\int_E (g+\delta) d\mu$ distano meno di $\delta\mu(E)$. La dimostrazione si conclude grazie all'arbitrarietà di δ.

□

Proposizione 1.38. *Siano $f, g : E \to [0, +\infty]$ misurabili, e $\alpha > 0$ una costante reale, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *se $f \leq g$, allora $\int_E f \ d\mu \leq \int_E g \ d\mu$,*
2. *$\int_E \alpha f \ d\mu = \alpha \int_E f d\mu$,*
3. *se f_1, f_2 sono funzioni misurabili a valori in $[0, +\infty]$, allora*
$$\int_E (f_1 + f_2) \ d\mu = \int_E f_1 \ d\mu + \int_E f_2 \ d\mu$$
.

Dimostrazione. I primi due risultati sono lasciati come facile esercizio, si svolgono senza usare il Lemma 1.35. Dimostriamo il terzo enunciato. Ci servirà il Lemma 1.35.

Per caratterizzazione dell'estremo superiore per ogni ε positivo esiste una funzione $\mathcal{S}' \ni g_1 \leq f_1$ tale che $\int_E g_1 \ d\mu \leq \int_E f_1 \ d\mu \leq \int_E g_1 \ d\mu + \varepsilon$ e una funzione $\mathcal{S}' \ni g_2 \leq f_2$ tale che $\int_E g_2 \ d\mu \leq \int_E f_2 \ d\mu \leq \int_E g_2 \ d\mu + \varepsilon$ allora vale che

$$\begin{aligned}\int_E f_1 + f_2 \ d\mu &\geq \int_E g_1 + g_2 \ d\mu \\ &= \int_E g_1 \ d\mu + \int_E g_2 \ d\mu \\ &\geq \left(\int_E f_1 \ d\mu + \int_E f_2 \ d\mu \right) - 2\varepsilon,\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza centrale è dovuta al fatto che $g_1, g_2 \in \mathcal{S}'$.
D'altra parte per la caratterizzazione dell'estremo inferiore trovo una funzione $\mathcal{S}' \ni g_1 \geq f_1$ tale che $\int_E g_1 \ d\mu \geq \int_E f_1 \ d\mu \geq \int_E g_1 \ d\mu - \varepsilon$ e una funzione $\mathcal{S}' \ni g_2 \geq f_2$ tale che $\int_E g_2 \ d\mu \geq \int_E f_2 \ d\mu \geq \int_E g_2 \ d\mu - \varepsilon$ quindi

$$\begin{aligned}\int_E f_1 + f_2 \ d\mu &\leq \int_E g_1 + g_2 \ d\mu \\ &= \int_E g_1 \ d\mu + \int_E g_2 \ d\mu \\ &\leq \left(\int_E f_1 \ d\mu + \int_E f_2 \ d\mu \right) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

da cui segue l'uguaglianza. □

Proposizione 1.39. *L'insieme delle funzioni L^1 è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e l'integrale è un'applicazione lineare.*

Osservazione 1.40. Consideriamo un insieme X, la σ-algebra delle parti e la misura μ che conta i punti. In tal caso si può dimostrare che per ogni funzione positiva f vale che

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup_{X' \subset X \text{ finito}} \sum_{x \in X'} f(x).$$

In questa maniera si è unificata gran parte della teoria delle serie con quella della misura, vedendo le prime come integrali su $\mathbb{N}$ con la misura che conta i punti. La teoria delle serie però non viene coperta totalmente perché esistono $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che non stanno in L^1, la cui serie però converge, come ad esempio $f(n) = -\dfrac{1}{n}$. Infatti $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il criterio di Leibniz.

1.3 Teoremi di convergenza per l'integrale

Lezione 4 (1 ottobre 2018)**.**

Consideriamo ancora una volta un generico spazio di misura $(X, \mathfrak{F}, \mu)$. Vogliamo capire sotto quali condizioni una successione di funzioni $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ che converge (puntualmente) a una funzione f garantisce che $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$.

Enunciamo prima alcuni risultati preliminari utili alla trattazione del problema.

Lemma 1.41. *Siano E_1, E_2 due insiemi in $\mathfrak{F}$. Se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, allora $\int_{E_1} f \; d\mu + \int_{E_2} f \; d\mu = \int_{E_1 \cup E_2} f \; d\mu$.*

Lemma 1.42. *Sia $E \in \mathfrak{F}$ tale che $\mu(E) = 0$. Per ogni funzione misurabile $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ si ha che $\int_E f \; d\mu = 0$.*

Una conseguenza immediata di questo lemma è la seguente.

Proposizione 1.43. *Date due funzioni $f, \tilde{f} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che l'insieme $\{x \in E | f(x) \neq \tilde{f}(x)\}$ ha misura nulla, allora $\int_E f \; d\mu = \int_E \tilde{f} \; d\mu$.*

Inquadriamo ora il *setting* del problema:

- $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili a valori in $\overline{\mathbb{R}}$,
- $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile,

- per ogni $x \in E$ vale che $f_n(x) \to f(x)$.

Più precisamente, la terza proprietà si richiede che valga μ-quasi ovunque, ovvero che per ogni $x \notin N$, dove $\mu(N) = 0$, si abbia che $f_n(x) \to f(x)$ come successioni di numeri reali.

Teorema 1.44 (di convergenza monotona, o Beppo Levi). *Sia* $\{f_n(x)\}_{\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili e* $f(x)$ *una funzione come nelle ipotesi definite sopra. Supponiamo che la convergenza delle* f_n *sia monotona, cioè* $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f(x)$ *quasi certamente.*

Allora, quando $n \to +\infty$*, si ha:*

$$\int_E f_n \; d\mu \to \int_E f \; d\mu.$$

Dimostrazione. Siccome $f_n \leq f$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per monotonia dell'integrale abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_E f_n \; d\mu \leq \int_E f \; d\mu.$$

Perciò la successione degli integrali è crescente. Per concludere è sufficiente provare che il RHS è il sup della successione degli integrali delle f_n: dobbiamo quindi mostrare che

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ tale che } m < \int_E f \; d\mu, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \int_E f_n \; d\mu \geq m \quad \forall n \geq n_0.$$

Per caratterizzazione dell'estremo superiore esiste una funzione semplice inferiore $g \leq f$ tale che $m < \int_E g \; d\mu \leq \int_E f d\mu$.

Supponiamo di avere una funzione semplice g tale per cui valgano le disuguaglianza strette $g(x) < f(x)$ $\forall x \in E$ e $\int_E g \; d\mu > m$. Consideriamo gli insiemi $E_n = \{x \in E \; | f_n(x) \geq g(x)\}$. Poiché $f_n \uparrow f$ e $g < f$, allora vale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$E_n \subseteq E_{n+1} \quad \wedge \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E.$$

Poiché $g \in \mathcal{S}'$, possiamo scriverla come combinazione lineare di indicatrici di insiemi misurabili $g = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{F_i}$ e usare la definizione di integrale di funzione semplice:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_i \alpha_i \mu(F_i \cap E_n).$$

Poiché $(F_i \cap E_n) \uparrow F_i$, sappiamo per proprietà di una misura che $\mu(F_i \cap E_n) \uparrow \mu(F_i)$, perciò il limite sopra è uguale a

$$\sum_i \alpha_i \mu(F_i) = \int_E g \; d\mu > m.$$

Inoltre per costruzione di E_n, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\int_E f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} g \, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza la definizione di limite mi garantisce l'esistenza di un numero naturale n_0 tale che

$$\int_E f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} g \, d\mu > m \qquad \forall n \geq n_0.$$

□

Commenti sulla dimostrazione.

- Nelle ipotesi abbiamo assunto che la successione di funzioni fosse crescente sull'intero dominio a meno di un sottoinsieme trascurabile: denotiamo con T questo sottoinsieme e poniamo $\tilde{E} = E \setminus T$, allora gli insiemi considerati nella dimostrazione diventano $\tilde{E}_n = \{x \in \tilde{E} | f_n(x) \geq g(x)\}$ e vale ancora la proprietà $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k = \tilde{E}$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{E}_n} g \, d\mu = \int_{\tilde{E}} g \, d\mu = \int_{\tilde{E}} g \, d\mu + \int_T g \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

- Nel corso della dimostrazione abbiamo supposto che per ogni numero reale $m < \int_E f \, d\mu$ esista una funzione semplice g tale che :

$$g(x) < f(x) \; \forall x \in E \qquad m < \int_E g \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$$

  La definizione di integrale ci garantisce una funzione $\tilde{g} \leq f$. Ripercorriamo quindi la costruzione fatta durante la dimostrazione del Lemma 1.35 e otteniamo una

$$\tilde{g} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n\delta \cdot \mathbb{1}_{E_n} \right) + (\infty) \cdot \mathbb{1}_{E_\infty}$$

  con $E_n = \{ \, x \in E \mid n\delta \leq f(x) \leq (n+1)\delta \, \}$.

  Fissiamo ε e scegliamo una successione di ε_i tale che $\sum \varepsilon_i < \varepsilon$. La funzione cercata è della forma $g = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n\delta - \varepsilon_n) \cdot \mathbb{1}_{E_n} \right) + (\infty) \cdot \mathbb{1}_{E_\infty}$. Ciò che facciamo per $n = 0$ è irrilevante, poiché, anche se vale l'uguaglianza con f, il contributo sull'integrale è nullo.

Lemma 1.45 (di Fatou)**.** *Sia* $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili e non negative. Allora*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Inoltre se le funzioni $\{ f_n \}_{\mathbb{N}}$ *sono a valori reali estesi ed esiste una funzione integrabile* $g : E \to [0, +\infty]$ *che le domina, i.e.* $f_n \leq g \ \forall \ n$*, allora vale che*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Usando la definizione di $\liminf$ si ha che

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \sup_m (\inf_{n\geq m} \int_E f_n \, d\mu)$$

Ora osserviamo che $f_n \geq \inf\limits_{n\geq m} f_n \ \forall n \geq m$ quindi

$$\int_E f_n \, d\mu \geq \int_E \inf_{n\geq m} (f_n) \, d\mu \quad \forall n \geq m \Rightarrow \inf_{n\geq m} (\int_E f_n \, d\mu) \geq \int_E \inf_{n\geq m} (f_n) \, d\mu$$

e poiché $\inf\limits_{n\geq m} (f_n) \nearrow \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ per $m \to \infty$, allora posso applicare il teorema di convergenza monotona per cui

$$\sup_m (\inf_{n\geq m} \int_E f_n \, d\mu) \geq \sup_m (\int_E \inf_{n\geq m} (f_n) \, d\mu) = \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Per dimostrare il secondo enunciato è sufficiente applicare il lemma alla successione $\{g - f_n\}$ e osservare che, in generale $\liminf(-f) = -\limsup f$. Ricordiamo che per g integrabile intendiamo che il suo integrale su E esiste ed è finito. □

Teorema 1.46 (di convergenza dominata, o di Lebesgue)**.** *Siano* $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili e* f *una funzione misurabile tutte a valori in* $\overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $f_n \to f$ *quasi ovunque.*
Supponiamo esista una funzione

$$g : E \to [0, +\infty] \ \textit{tale che} \int_E g \, d\mu < \infty \quad e \quad |f_n| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

$$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$$

Dimostrazione.
Osservazioni iniziali :

- $f_n \leq g \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \leq g$
- le funzioni $g - f_n, \ g + f_n$ sono positive per ogni $n \in \mathbb{N}$ e rispettano quindi le ipotesi del lemma di Fatou
- $\liminf_{n\to\infty} -f_n = -\limsup_{n\to\infty} f_n$

Per la terza osservazione vale che

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E g - f_n \ d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E g \ d\mu - \int_E f_n \ d\mu = \int_E g \ d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu$$

Applicando il lemma di Fatou alla funzione $g - f_n$ e utilizzando l'uguaglianza appena dimostrata si ha che

$$\begin{aligned}\int_E g \ d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu &= \liminf_{n\to\infty} \int_E g - f_n \ d\mu \\ &\geq \int_E \liminf_{n\to\infty} g - f_n \ d\mu \\ &= \int_E g - f \ d\mu\end{aligned}$$

da cui

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu \leq \int_E f \ d\mu$$

Applicando invece il lemma di Fatou alla funzione $g + f_n$ si ha che

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E g + f_n \ d\mu \geq \int_E g \ d\mu + \int_E f \ d\mu \Rightarrow \int_E f \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu$$

per cui

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu \leq \int_E f \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu$$

□

1.4 Esercizi

Esercizio 1.47. *Sia $f : E \to [0, +\infty]$ una funzione positiva e misurabile, sia $\{E_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{F}$ una successione di insiemi misurabili tali che $E_n \nearrow E$. Allora*

$$\int_{E_n} f \ d\mu \to \int_E f \ d\mu$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\int_{E_n} f \ d\mu = \int_E f \cdot \mathbb{1}_{E_n} \ d\mu$$

poiché f è positiva si ha che la successione di funzioni $(f \cdot \mathbb{1}_{E_n}) \nearrow (f \cdot \mathbb{1}_E)$ e applicando la convergenza monotona

$$\int_E f \cdot \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$$

□

Osservazione 1.48. Al posto di positiva posso supporre la funzione f integrabile poichè in questo modo posso ricondurmi alla differenza di due integrali $\int f^+ \, d\mu$ e $\int f^- \, d\mu$ di funzioni positive.

Lezione 5 (3 ottobre 2018)**.**

Una variante interessante dell'esercizio precedente è supporre di avere la funzione f sommabile e al posto della convergenza monotona di $(\mathbb{1}_{E_n})$ a $\mathbb{1}_E$ solo la convergenza puntuale $(\mathbb{1}_{E_n}) \to \mathbb{1}_E \ \forall x \in E$. In questo caso è possibile applicare il teorema di convergenza dominata prendendo $g = |f|$ che ha integrale finito per ipotesi di sommabilità e ogni funzione della successione $f \cdot \mathbb{1}_{E_n} \leq g$

Esercizio 1.49. *Sia $f : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione positiva misurabile, poniamo*

$$\lambda(E) \stackrel{def}{=} \int_E f \, d\mu$$

Mostriamo che è una misura.

Dimostrazione. Banalmente vale che la misura dell'insieme vuoto è nulla, infatti si ha che

$$\lambda(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = 0.$$

Vogliamo mostrare che data una successioni di insiemi misurabili $\{E_n\}_\mathbb{N}$ disgiunti tra loro valga che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)$$

Per proprietà dell'integrale l'uguaglianza vale su tutte le somme finite e passando al limite si ha che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} f \, d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} f \, d\mu$$

e l'ultima uguaglianza è una conseguenza del fatto che $\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e f è positiva (esercizio precedente). □

Esercizio 1.50. *Consideriamo la successione* $\{a_n\}_{\mathbb{N}}(m)$ *dipendente dal parametro naturale* m *e tale per cui per ogni* n *fissato si abbia che* $(a_n)(m) \to a_{n,\infty}$ *per* $m \to \infty$*. Ci chiediamo sotto quali ipotesi si ha che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) \to \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\infty}$$

Lemma 1.51. *Gli aperti di* $\mathbb{R}^n$ *sono tutti misurabili secondo Lebesgue.*

Lemma 1.52 (caratterizzazione delle funzioni misurabili secondo Lebesgue)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *una funzione. Allora* f *è misurabile secondo Lebesgue se e solo se* $\sup\{\int_E g \ d\mu \ |g \in \mathcal{S}', g \leq f\} = \inf\{\int_E g \ d\mu \ |g \in \mathcal{S}', g \geq f\}$.

Proposizione 1.53. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann, allora* f *è misurabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.*

Esercizio 1.54. *Caso particolare di integrale: sia* $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ *funzione e* μ *la misura che conta i punti su* $\mathbb{N}$*, se* f *integrabile (voglio cioè la convergenza assoluta della serie), allora:*

$$\int_{n \in \mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

Si consideri quindi la successione a due indici a_n^m *al variare di* $n \in \mathbb{N}$ *e* $m \in \mathbb{N}$*, sotto quali ipotesi, per* $m \to +\infty$ *si ha che:*

$$a_n^m \to a_n^\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\infty$$

Ho la convergenza puntuale, serve qualcosa di più. Bisogna passare per la traduzione in termini di serie dei teoremi di Beppo Levi e Lebesgue.

Esercizio 1.55. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata e integrabile secondo Riemann. Allora:*

- f *è misurabile secondo Lebesgue*
- *I due integrali coincidono*

Dimostrazione. Per cominciare, riduciamoci al caso "f continua ". Che f sia misurabile secondo Lebesgue segue banalmente dalla continuità e dal fatto che gli aperti sono misurabili secondo Lebesgue. Per quanto riguarda il secondo punto, sappiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_1 \cdots I_n \; partizione \, di \, [a, b] \; t.c.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_i} f(x)\right)|I_i| - \sum_{i=1}^{n}\left(\inf_{x\in I_i} f(x)\right)|I_i| \leq \varepsilon$$

Ma allora:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\inf_{x\in I_i} f(x)\right)\mathbb{1}_{I_i} \overset{def}{=} g(x) \leq f(x) \leq \tilde{g}(x) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_i} f(x)\right)\mathbb{1}_{I_i}$$

Dunque (notazione ovvia):

$$\int g \leq I_R \leq \int \tilde{g} \quad e \quad \int g \leq I_L \leq \int \tilde{g}$$

D'altro canto si ha che g e $\tilde{g}$ sono arbitrariamente vicine, da ciò segue che

$$I_R = I_L$$

Notiamo che la soluzione del secondo punto funziona per funzioni arbitrarie, a patto di aver mostrato il punto uno. Dunque rimane solo da mostrare il primo punto senza ipotesi di continuità: si potrebbe fare passando per la caratterizzazione delle funzioni misurabili secondo Lebesgue, dimostrando cioè la seconda freccia nel Lemma 1.52. □

Teorema 1.56. *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, sia $D(f)$ l'insieme dei punti di discontinuità di f. Allora:*

$$D(f) \in \mathfrak{M}^n$$

Inoltre:

$$f \textit{ integrabile secondo Riemann } \Leftrightarrow \mathcal{L}^n(D(f)) = 0$$

Enunciamo ora due risultati fondamentali che verranno utilizzati per tutto il resto del corso.[1]

Teorema 1.57 (di Fubini)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile, cioè $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{p+q})$, allora per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$ si ha che le x-sezioni $y \mapsto f(x,y)$ sono ancora sommabili; inoltre la funzione quasi definita su $\mathbb{R}^p$ da $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ è in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^p)$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy\right)dx$$

Teorema 1.58 (di Tonelli)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che l'integrale iterato*

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy\right)\,dx$$

esiste finito, allora f è in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{p+q})$.

Capitolo 2

Spazi L^p

2.1 Proprietà degli spazi L^p

2.1.1 Definizioni

Lezione 6 (4 ottobre 2018)**.**

Nonostante definiremo questi nuovi concetti per generici spazi di misura $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, andando avanti con la trattazione spesso si tratterà il caso $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}^n, \mathcal{L}^n)$, cioè il caso degli spazi dotati della misura di Lebesgue.

Definizione 2.1. (Norma L^p) Sia p un numero reale in $[1, +\infty)$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Poniamo:

$$\|f\|_p \stackrel{def}{=} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Chiameremo funzioni L^p le funzioni f tali per cui $\|f\|_p < +\infty$.

La funzione appena definita non è una vera e propria norma sulla spazio delle funzioni L^p bensì una *seminorma*, questo perché non vale la proprietà $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$, infatti una funzione ha norma L^p nulla se e solo se la funzione è nulla su tutto il dominio a meno di un insieme trascurabile.

Per questo motivo uno spazio L^p viene definito come una spazio quoziente dove due funzioni sono equivalenti se coincidono su tutto il dominio a meno di un insieme a misura nulla.

Definizione 2.2. (spazio L^p) Sia $N \stackrel{def}{=} \{f |\ f = 0\ \mu - q.o., f\ misurabile\}$ l'insieme delle funzioni misurabili nulle quasi ovunque definiamo allora :

$$\mathrm{L}^p(X, \mu) \stackrel{def}{=} {\{f : X \to \mathbb{R} \quad | \quad \|f\|_p < +\infty,\ f\ misurabile\}}/{N}.$$

Quindi:

$$[f_1] = [f_2] \Leftrightarrow f_1 - f_2 \in N \Leftrightarrow f_1 = f_2 \, q.o.$$

Essendo un quoziente tra due spazi vettoriali, anche L^p è uno spazio vettoriale.

Sullo spazio L^p appena definito si ha che $\|\cdot\|_p$ è effettivamente una norma. Non è difficile mostrare che rispetta le condizioni:

- $\|f\|_p \geq 0 \quad \forall f \in \mathrm{L}^p$
- $\|\alpha f\|_p = \alpha \|f\|_p \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathrm{L}^p$
- $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Per quanto riguarda invece la proprietà della disuguaglianza triangolare $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ la dimostrazione non è affatto immediata e verrà trattata più avanti.

Vediamo alcune proprietà basilari di alcuni spazi L^p per p fissato:

- Nel caso $p = 1$ si ha che:

  $f \in \mathrm{L}^1 \Leftrightarrow \int_X |f| \, d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < +\infty \Leftrightarrow f$ sommabile.
- Nel caso $p = 2$ si ha che :

  La norma $\|\cdot\|_2$ è indotta dal prodotto scalare: $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu$ infatti $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
- Per $p \neq 2$ si ha invece che:

  $\|f\|_p$ non deriva da un prodotto scalare, infatti non vale l'identità del parallelogramma:

  $$\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right)$$

Proviamo ora ad estendere il concetto di spazio L^p per $p = +\infty$. Per farlo è necessario definire il concetto di *estremo superiore essenziale* di una funzione. Data una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si pone:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X}(f) \overset{def}{=} \min\{\, c \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq c \ q.o.\}$$

che ci permette di definire $\|f\|_\infty \overset{def}{=} \text{ess sup}_X |f|$.

Esercizio 2.3. *Verificare che:*

- *l'*ess sup *esiste sempre;*
- *vale la disuguaglianza triangolare:*

  $$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

2.1.2 Disuguaglianze integrali

Teorema 2.4 (disuguaglianza di Jensen)**.** *Sia E un insieme della σ-algebra $\mathfrak{F}$ con $\mu(E) = 1$ e I un intervallo reale aperto. Consideriamo una funzione $f : E \to I$ sommabile e una $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convessa, allora è* ben definita *e vale la seguente disuguaglianza:*

$$\varphi\left(\int_E f\ d\mu\right) \leq \int_E \varphi \circ f\ d\mu$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è ben definita in quanto la funzione composta $\varphi \circ f\ d\mu$ è ancora misurabile e $\int_E f\ d\mu \in I$ per il teorema della media integrale.

Dimostriamo la disuguaglianza prima per funzioni semplici e in seguito per ogni funzione misurabile.

Osserviamo che una funzione semplice assume un numero finito di valori. Siano $y_1, ..., y_n$ i valori assunti da f, poniamo allora per ogni i:

$$E_i = f^{-1}(\{y_i\}).$$

Si avrà quindi che $f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{E_i}$ per cui:

$$\varphi\left(\int_E f\ d\mu\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\ y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\varphi(y_i) = \int_E \varphi \circ f\ d\mu,$$

dove la disuguaglianza centrale segue dal fatto che φ è convessa e la sommatoria $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\ y_i$ è una combinazione convessa degli y_i poiché

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu(E) = 1.$$

Per f qualunque si procede per approssimazione. Supponiamo che f e φ siano limitate e consideriamo una successione di funzioni semplici equilimitate che tendono a f puntualmente: $f_n \to f$.
Sappiamo che:

$$\varphi\left(\int_E f_n\ d\mu\right) \leq \int_E \varphi \circ f_n\ d\mu \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi se mostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\int_E f_n\ d\mu\right) = \varphi\left(\int_E f\ d\mu\right) \qquad \text{LHS}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi\circ f_n\ d\mu = \int_E \varphi\circ f\ d\mu \qquad \text{RHS}$$

passando al limite nella disuguaglianza ho la tesi.

Il primo limite segue dalla continuita di φ (conseguenza della convessità) e dalla equilimitatezza delle f_n che mi garantisce la convergenza dominata e quindi:

$$\int_E f_n\ d\mu \to \int_E f\ d\mu.$$

Per quanto riguarda il secondo limite, per limitatezza di φ segue che la successione $\{\varphi\circ f_n\}_{\mathbb{N}}$ è equilimitata e quindi ancora una volta il teoerema di convergenza dominata mi garantisce il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Questa dimostrazione vale sotto ipotesi di limitatezza di f e φ. In assenza di queste si procede come di seguito.

Poniamo $y_0 = \int_E f\ d\mu$, per convessità di φ esiste una funzione affine $\psi \le \varphi$ e tale che: $\psi(y_0) = \varphi(y_0)$. Dato che f è a valori in $\mathbb{R}$ si ha che ψ è una retta, cioè $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $\psi(y) = \varphi(y_0) + m(y - y_0) \quad \forall y \in I$. Allora si ha che

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi\left(f(x)\right)\ d\mu &\ge \int_E \psi(f(x))\ d\mu \\
&= \int_E \varphi(y_0) + m(f(x) - y_0)\ d\mu \\
&= m\left(\int_E f(x)\ d\mu - y_0\right) + \int_E \varphi(y_0)\ d\mu.
\end{aligned}$$

Poichè $y_0 = \int_E f\ d\mu$, $\varphi(y_0)$ è una costante e $\mu(E) = 1$, vale la tesi

$$\int_E \varphi\left(f(x)\right)\ d\mu \ge \varphi(y_0) = \varphi\left(\int_E f(x)\ d\mu\right).$$

□

Osservazione 2.5. Nella dimostrazione che sfrutta l'esistenza di una funzione affine non si usa veramente che f sia a valori reali, funzionerebbe anche con una funzione vettoriale a valori in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 2.6. $\mu(E) = a \in \mathbb{R}$, *come cambia Jensen?*

Claim di Framba e Pinzy:

$$\varphi\left(\frac{\int_E f(x)\ d\mu}{a}\right) \le \frac{\int_E \varphi\circ f(x)\ d\mu}{a}$$

Lezione 7 (8 ottobre 2018, mattina)**.**

Definizione 2.7 (esponente coniugato)**.** Dato $p \in [1, +\infty]$, chiameremo esponente coniugato a p il valore $q \in [1, +\infty]$ tale che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Per convenzione diremo: $p = +\infty \Leftrightarrow q = 1$ e $p = 1 \Leftrightarrow q = +\infty$.

Teorema 2.8 (disuguaglianza di Young)**.** *Per ogni* $p \in (1, +\infty)$ *e* $a, b \geq 0$, *si ha:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

(Caso particolare: $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$*)*

Dimostrazione. Nei casi $a = 0$, $b = 0$ la tesi è banale, si può dunque supporre $a, b > 0$.

Per monotonia del logaritmo la disuguaglianza vale se e solo se

$$\log(ab) = \log a + \log b = \frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

Per *concavità* del logaritmo si ha che la disuguaglianza è vera, infatti $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ è una combinazione convessa di a^p e b^q grazie al fatto che p e q sono esponenti coniugati. □

Osservazione 2.9. Il logaritmo è *strettamente* concavo, quindi nella disuguaglianza di Young vale l'uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$.

Teorema 2.10 (disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano* $p, q \in [1, +\infty]$ *esponenti coniugati e* f, g *due funzioni misurabili a valori in* $[0, +\infty]$*, allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\int_X fg \; d\mu \leq \left(\int_X f^p \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \; d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Osservazione 2.11. Le funzioni devono essere positive solo per garantire l'esistenza dell'integrale, se questo è già noto allora la disuguaglianza si può estendere anche per funzioni a valori in $\mathbb{R}$: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Dimostrazione. Dimostriamo due casi separatamente:

- CASO $p, q \in (1, +\infty)$

  Supponiamo $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, allora per Young puntualmente vale la disuguaglianza:

$$\int_X fg \; d\mu \leq \int_X \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q} \; d\mu = \frac{1}{p}\left(\int_X f^p \; d\mu\right) + \frac{1}{q}\left(\int_X g^q \; d\mu\right)$$

che per definizione di norma p, è uguale a:

$$\frac{1}{p}(\|f\|_p)^p + \frac{1}{q}(\|g\|_q)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q$$

Se invece $\|f\|_p, \|g\|_q \in (0, +\infty)$ ci si riconduce a quanto appena svolto. Scriviamo infatti:

$$f = \alpha\tilde{f} \text{ con } \|\tilde{f}\|_p = 1 \text{ e } \alpha = \|f\|_p$$

$$g = \beta\tilde{g} \text{ con } \|\tilde{g}\|_q = 1 \text{ e } \beta = \|g\|_q.$$

Allora, dato che $\|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_q = 1$, per quanto visto:

$$\int_X fg\ d\mu = \alpha\beta\int_X \tilde{f}\tilde{g} \leq \alpha\beta\|\tilde{f}\|_p\|\tilde{g}\|_q = \alpha\beta = \|f\|_p\|g\|_q.$$

Infine, bisogna analizzare i casi in cui non posso normalizzare, vale a dire se $\|f\|_p, \|g\|_q \in \{0, +\infty\}$. Si potrebbero incontrare problemi se $\|f\|_p = 0$, ma in quel caso si avrebbe $f(x) = 0$ quasi ovunque e quindi anche il prodotto $f \cdot g$ sarebbe nullo quasi ovunque.

- caso $p, q \in \{1, +\infty\}$

  Supponiamo $p = 1, q = +\infty$; per definizione della norma $\|\cdot\|_\infty$ si ha che $g(x) \leq \|g\|_\infty$ quasi ovunque, quindi:

$$\int_X fg\ d\mu \leq \int_X f\|g\|_\infty\ d\mu = \|g\|_\infty\int_X f\ d\mu = \|f\|_1\|g\|_\infty.$$

□

Esercizio 2.12. *Supponiamo $\|f\|_p, \|g\|_q \in (0, +\infty)$ allora:*

$$\int_X fg\ d\mu = \|f\|_p\|g\|_p \Leftrightarrow \exists m > 0 \text{ tale che } g^q(x) = mf^p(x) \text{ q.o.}$$

Dimostrazione. Per dimostrare "$\Leftarrow$" è sufficiente effettuare una sostituzione.

Per quanto riguarda l'altra implicazione scriviamo:

$$f = \|f\|_p\tilde{f} \text{ con } \|\tilde{f}\|_p = 1$$

$$g = \|g\|_q\tilde{g} \text{ con } \|\tilde{g}\|_q = 1$$

per cui si avrà che

$$\int_X fg\ d\mu = \|f\|_p\|g\|_q\int_X \tilde{f}\tilde{g}\ d\mu \Rightarrow \int_X \tilde{f}\tilde{g}\ d\mu = 1$$

Osservando che

$$\int_X \tilde{f}\tilde{g} = \int_X \frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q}$$

allora deve valere l'uguaglianza

$$\tilde{f}\tilde{g} = \frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q} \quad \text{q.o.}$$

e quindi per la disuguaglianza di Young si ha che:

$$\tilde{f}^p = \tilde{g}^q \text{ q.o.}$$

Si nota ora che, come desiderato:

$$\tilde{f}^p = \tilde{g}^q \text{ q.o.} \Leftrightarrow \frac{f^p}{\|f\|_p} = \frac{g^q}{\|g\|_q} \text{ q.o.} \Leftrightarrow g^q = \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q} f^p \text{ q.o.}$$

□

Il prossimo risultato mostra che le norme L^p rispettano la disuguaglianza triangolare sulle funzioni misurabili.

Teorema 2.13 (disuguaglianza di Minkowsky)**.** *Per ogni* $p \in [1, +\infty]$*, date due funzioni* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *misurabili si ha che:*

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

Dimostrazione. Esaminiamo il caso $p \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned}
(\|f_1 + f_2\|_p)^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p \; d\mu \\
&= \int_X |f_1 + f_2|^{p-1} |f_1 + f_2| \; d\mu \\
&\leq \int_X |f_1 + f_2|^{p-1} |f_1| \; d\mu + \int_X |f_1 + f_2|^{p-1} |f_2| \; d\mu.
\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder a entrambi gli integrali ottenuti si ha che:

$$\begin{aligned}
(\|f_1 + f_2\|_p)^p &\leq \| \; (|f_1 + f_2|)^{p-1} \|_q (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \\
&= \left(\int_X |f_1 + f_2|^{(p-1)q} \; d\mu \right)^{\frac{1}{q}} (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p)
\end{aligned}$$

e per la relazione tra esponenti coniugati si ricavano $(p-1)q = p$ e $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, quindi:

$$\left(\int_X |f_1 + f_2|^p \; d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) = (\|f_1 + f_2\|_p)^{p-1} (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \, .$$

Quindi, dividendo per $(\|f_1 + f_2\|_p)^{p-1}$, si ha la tesi. □

Osservazione 2.14. Se $(\|f_1 + f_2\|_p)^{p-1} \in \{0, +\infty\}$ non posso dividere.

Nel caso in cui $(\|f_1 + f_2\|_p)^{p-1} = 0$ la tesi è banalmente vera.

Nel caso in cui $(\|f_1 + f_2\|_p)^{p-1} = +\infty$ invece mi basta mostrare che uno tra $\|f_1\|_p$ e $\|f_2\|_p$ è pari a $+\infty$.

Per la convessità di $y \mapsto |y|^p$ vale la seguente disuguaglianza :

$$\begin{aligned}\int_X |f_1 + f_2|^p \; d\mu &= 2^p \int_X \left|\frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2}\right|^p \; d\mu \\ &\leq 2^p \int_X \frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} \; d\mu \\ &= 2^{p-1} \int_X |f_1|^p + |f_2|^p \; d\mu\end{aligned}$$

per cui si ha che

$$(\|f_1 + f_2\|_p)^p \leq 2^{p-1} \left[(\|f_1\|_p)^p + (\|f_2\|_p)^p\right].$$

e quindi almeno uno tra $\|f_1\|_p$ e $\|f_2\|_p$ assume $+\infty$ come valore.

Da quanto dimostrato sopra, segue che $\|\cdot\|_p$ è effettivamente una norma sullo spazio L^p e più avanti mostreremo che lo rende uno spazio di Banach, cioè completo.

Esercizio 2.15. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue e t un valore reale tale che $0 < t < \mathcal{L}^1(A)$, si dimostri che esiste un sottoinsieme E di A tale che*

$$E \in \mathfrak{M}^1 \quad e \quad \mathcal{L}^1(E) = t.$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per sottoinsiemi di misura finita. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo $E_x = A \cap (-\infty, x]$ e consideriamo la funzione $f(x) = \mathcal{L}^1(E_x)$, allora se f fosse continua avendo che:

$$f(-\infty) = 0 \qquad f(+\infty) = \mathcal{L}^1(A)$$

per il teorema dei valori intermedi otterrei la tesi.

Mostriamo la continuità prima da sinistra e poi da destra in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0^+} \mathcal{L}^1(E_x) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}^1(A \cap (-\infty, x_0 + {}^1\!/\!{}_n]) = \mathcal{L}^1(A \cap (-\infty, x_0]) = f(x_0)$$

conseguenza del fatto che la misura di una successione decrescente di insiemi a misura finita tende all'*estremo inferiore* delle misure degli insiemi.

Invece

$$\lim_{x\to x_0^-} \mathcal{L}^1(A\cap(-\infty,x]) = \mathcal{L}^1(A\cap(-\infty,x_0)) = \mathcal{L}^1(A\cap(-\infty,x_0])$$

grazie alla trascurabilità dei punti.

Dalla dimostrazione appena svolta si può osservare che questo metodo non necessita realmente della misura di Lebesgue, ma soltanto che i punti siano trascurabili secondo la misura in considerazione. □

2.1.3 Completezza

Lezione 8 (8 ottobre 2018, pomeriggio)**.**

Lemma 2.16 (disuguaglianza di Chebyshev)**.** *Sia $g : X \to [0,+\infty]$ una funzione misurabile e $\delta > 0$. Allora:*

$$\mu\left(\{x \mid g(x)\geq\delta\}\right) \leq \frac{\int_X g\ d\mu}{\delta}$$

Dimostrazione. Poniamo $E = \{x\in X|g(x)\geq\delta\}$, allora

$$\delta\mu(E) = \int_X \delta\mathbb{1}_E\ d\mu \leq \int_X g\ d\mu$$

□

Lemma 2.17. *Sia $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili, poniamo $A = \{x \mid x\in A_n$ frequentemente in $n\}$. Se la serie $\sum\limits_{n\geq1}\mu(A_n)$ è convergente, allora $\mu(A) = 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n\geq m}^{\infty} A_n\right)$$

è intersezione di una successione di insiemi decrescente e limitata, perciò:

$$\mu(A) = \inf_m \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \inf_m \sum_{n=m}^{\infty}\mu(A_n) = 0.$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che si tratta della coda di una serie convergente. □

Lemma 2.18. *Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ successione in X tale che*
$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$
Allora $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\ m > n \geq n_0$:
$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$$
□

Teorema 2.19. *$L^p = L^p(X, \mu)$ è uno spazio normato completo, ovvero data $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ successione di Cauchy, esiste $f \in L^p$ tale che $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Dimostrazione. Considero la successione di Cauchy $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$, allora è possibile costruire una successione crescente di numeri naturali $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni k vale
$$\|f_{n_{k+1}} - f_n\|_p \leq 4^{-k} \quad \forall n \geq n_k$$
e in particolare $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 4^{-k}$.

Per ogni k naturale pongo
$$A_k := \{x \in X \mid \quad |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \geq 2^{-k}\}$$
e per il lemmma 2.16 con $g = |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p$ e $\delta = 2^{-kp}$ si ha che
$$\mu(A_k) \leq \frac{\int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p \, d\mu}{2^{-kp}} = \frac{(\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p)^p}{2^{-kp}} \leq 2^{-kp}.$$
Applicando il lemma 2.17 alla successione di insiemi $\{A_k\}$ si ha che l'insieme A dei punti che appartengono *frequentemente* alla successione ha misura nulla e per ogni $x \in X \setminus A$ la successione $\{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, infatti se $x \notin A$ allora $x \notin A_k$ definitivamente, quindi esiste un indice k_0 tale per cui $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k} \quad \forall\ k \geq k_0$ quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ converge e per il lemma 2.18 vale quanto detto.

A questo punto si può definire
$$f(x) \overset{def}{=} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) & \text{se } x \in X \setminus A \\ 0 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

che è *misurabile* poichè è limite di funzioni misurabili q.o. e si può mostrare che $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$, infatti

$$\begin{aligned}
(\|f - f_{n_k}\|_p)^p &= \int_X |f - f_{n_k}|^p \, d\mu \\
&= \int_X \lim_{h\to\infty} |f_{n_h} - f_{n_k}|^p \, d\mu \\
&= \int_X \liminf_{h\to\infty} |f_{n_h} - f_{n_k}|^p \, d\mu \\
\text{(lemma di Fatou)} &\leq \liminf_{h\to\infty} \int_X |f_{nh} - f_{n_k}|^p \, d\mu \\
&= \liminf_{h\to\infty} (\|f_{n_h} - f_{n_k}\|_p)^p \leq 4^{-kp}.
\end{aligned}$$

Dato che f è stata definita come limite puntuale delle f_{n_k}, passando al limite si ha che $\|f - f_{n_k}\|_p \leq 4^{-k}$, quindi $\|f - f_{n_k}\|_p \to 0$, ma se una successione di Cauchy ammette sottosuccessione convergente, allora anche la successione stessa è convergente da cui la tesi

$$\|f - f_n\|_p \to 0.$$

□

2.1.4 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Consideriamo una successione di funzioni $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ con $f_n : X \to \mathbb{R}$ e una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ allora diamo le seguenti definizioni:

(i) **convergenza uniforme :** diremo che $f_n \to f$ uniformemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \ \ \forall n \geq n_0$$

(ii) **convergenza puntuale :** diremo che $f_n \to f$ puntualmente se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

(iii) **convergenza puntuale q.o. :** diremo che $f_n \to f$ puntualmente quasi ovunque se esiste un sottoinsieme E *trascurabile* di X tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \setminus E \quad \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

(iv) **convergenza in** L^p **:** supponiamo che $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ e f siano funzioni in L^p, allora diremo che $f_n \to f$ in L^p se

$$\|f_n - f\|_p \to 0$$

(v) **convergenza in misura :** supponiamo che $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ sia uno spazio di misura, allora diremo che una successione di funzioni misurabili f_n converge in misura a una funzione misurabile f se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Tra le nozioni appena elencate esistono delle relazioni più o meno ovvie.

Al lettore dovrebbero essere ben note le implicazioni *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* e *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*.

Dimostriamo ora i risultati meno intuitivi.

Proposizione 2.20 (($\mu(X) < \infty$) $\to$ *(iii)*$\Rightarrow$*(v)*)**.** *Se la misura dell'intero spazio X è finita, allora la convergenza puntuale q.o. implica la convergenza in misura.*

Dimostrazione. Fisso $\varepsilon > 0$ e considero la successione di insiemi

$$B_n^\varepsilon = \{x \in X |\ \exists m \geq n : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per $n \to \infty$ si ha che:

$$B_n^\varepsilon \searrow B = \{x \in X |\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente }\},$$

ma B è contenuto nell'insieme E dei punti del dominio dove la successione non converge. Questo per ipotesi è *trascurabile*: ovvero esiste un insieme D di misura nulla che lo contiene, e che quindi contiene B.

Per concludere, ricordiamo che la misura di X è finita, quindi valgono le ipotesi del terzo punto della proposizione 1.17 , per cui si ha:

$$\mu(B_n^\varepsilon) \searrow \mu(B) \leq \mu(D) = 0$$

□

Osservazione 2.21. Se $\mu(X)$ non fosse finita, ad esempio $X = \mathbb{R}$, si potrebbero avere situazioni del tipo

$$f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty)} \to f \equiv 0,$$

dove la convergenza è puntuale su tutto $\mathbb{R}$, ma $\forall \varepsilon < 1$ positivo si ha che

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \mu([n, +\infty)) = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 2.22 (*(iv)*$\Rightarrow$*(v)*)**.** *Se una successione di funzioni converge in* $\mathrm{L}^p(X, \mu)$*, allora converge anche in misura.*

Dimostrazione. Fisso $\varepsilon > 0$, allora per il lemma 2.16 vale

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p\}\right) \leq \frac{\int_X |f_n - f|^p \, d\mu}{\varepsilon^p} = \left(\frac{\|f_n - f\|_p}{\varepsilon}\right)^p$$

e l'ultimo termine tende a 0 per ipotesi. □

Lezione 9 (15 ottobre 2018)**.**

Proposizione 2.23. *Se una successione $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ converge in misura a f, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente a f quasi ovunque.*

Dimostrazione. Fisso $\varepsilon > 0$ e considero la successione di insiemi

$$A_n^\varepsilon = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

per ipotesi di convergenza in misura vale che $\mu(A_n^\varepsilon) \to 0$, quindi $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste un numero naturale n_k tale che $\mu(A_{n_k}^{1/k}) \leq 2^{-k}$, per cui la serie $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_{n_k}^{1/k})$ converge e quindi per il lemma 2.17 l'insieme $A = \{x \in X \mid x \in A_{n_k}^{1/k} \text{ freq.}\}$ ha misura nulla, per cui vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in (X \setminus A)\ \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon\ \forall k \geq k_0.$$

□

Proposizione 2.24 (Severini-Egorov)**.** *Sia X uno spazio di misura finita e $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione di funzioni che tende puntualmente a f quasi ovunque, allora per ogni $\delta > 0$ esiste un sottoinsieme $E \subseteq X$ tale che*

$$\mu(E) \leq \delta \quad \text{e} \quad f_n \to f \text{ uniformemente in } X \setminus E.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ considero la successione di insiemi definita da

$$B_n^\varepsilon = \{x \in X \mid \exists m \geq n : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Per costruzione ogni successione così definita è decrescente e vale che $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n^\varepsilon$ coincide con l'insieme di punti in X tali per cui $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ *frequentemente* e per ipotesi la misura di tale insieme deve essere nulla.

Inoltre la misura di X finita mi permette di usare la terza proprietà della proposizione 1.17 per cui è possibile passare al limite :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n^\varepsilon) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^\varepsilon\right) = 0.$$

Ora grazie al limite infinitesimo, fissando $\delta > 0$, posso costruire una successione di numeri naturali $\{n_k\}_{k\geq 1}$ crescente tale che

$$\mu\left(B_{n_k}^{1/k}\right) \leq \frac{\delta}{2^k} \qquad \forall k \geq 1.$$

Considero l'insieme $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{n_k}^{1/k}$, allora avrò che $\mu(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_{n_k}^{1/k}) \leq \delta$ e se $x \notin E$, allora $x \notin B_{n_k}^{1/k}$ $\forall k$, quindi vale la convergenza uniforme in $X \setminus E$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_k \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \leq \varepsilon \quad \forall x \in (X \setminus E)\ \forall m \geq n_k$$

□

2.1.5 Approssimazioni

Definizione 2.25. Sia (X, d) uno spazio metrico, dati due sottoinsiemi F e G di X con $F \subseteq G$, diremo che F è **denso** in G se per ogni elemento $g \in G$ e per ogni ε positivo esiste un elemento $f \in F$ tale che $d(f, g) \leq \varepsilon$.

Nelle dimostrazioni tornerà molto utile avere presente una caratterizzazione della definizione appena data; infatti F è denso in G se e solo se per ogni elemento g in G esiste una successione $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ in F che lo *approssima*, vale a dire una successione in F che converge a g.

Sarà utile anche ricordare che dati tre sottoinsiemi di X tali che $F \subseteq G \subseteq H$, se F è denso in G e G è denso in H, allora F è denso in H.

Proposizione 2.26. *Le funzioni limitate di* L^p *formano un sottoinsieme denso di* L^p.

Dimostrazione. Data una funzione f in L^p considero la successione di funzioni

$$f_n = \begin{cases} n & \forall x : f(x) > n \\ f & \forall x : -n \leq f(x) \leq n \\ -n & \forall x : f(x) < -n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Essa converge puntualmente a f e se lo facesse anche in L^p si avrebbe la tesi.

Osserviamo che per ogni $x \in X$ vale la disuguaglianza $|f_n(x) - f(x)| \leq |f(x)|$, quindi la successione di funzioni $|f_n(x) - f(x)|^p$ è dominata dalla funzione $|f(x)|^p$ la quale ha integrale finito per ipotesi.

Per il teorema di convergenza dominata si ha che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \longrightarrow 0.$$

□

Proposizione 2.27. *Sia $\mathfrak{F}$ una σ-algebra su $\mathbb{R}^n$ contenente le palle aperte e μ una misura su $\mathfrak{F}$. Le funzioni a supporto limitato in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ formano un sottoinsieme denso.*

Dimostrazione. Data una funzione f in L^p considero la successione di funzioni

$$f_n = \begin{cases} f(x) & \forall x \in B(0,n) \\ 0 & \forall x \notin B(0,n) \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Come nella dimostrazione precedente la successione $|f_n - f|^p$ è dominata da $|f|^p$ che mi garantisce nuovamente la convergenza in L^p. □

Proposizione 2.28. *Sia $\mathfrak{F}$ una σ-algebra su $\mathbb{R}^n$ contenente le palle aperte e μ una misura su $\mathfrak{F}$. Le funzioni a supporto compatto in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ formano un sottoinsieme denso.*

Proposizione 2.29. *Le funzioni semplici di L^p formano un sottoinsieme denso.*

Dimostrazione. È sufficiente approssimare una qualunque funzione limitata avendo già dimostrato la loro densità in precedenza. Data una funzione limitata f in L^p, definiamo la successione di insiemi $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ nel seguente modo

$$A_k = \left\{ x \in X | \; \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\} \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

Consideriamo allora la successione di funzioni

$$f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{n} \cdot \mathbb{1}_{A_k} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{k+1}{n} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; ;$$

esse sono semplici grazie alla limitatezza di f.

Per ogni numero naturale n vale la stima $|f_n - f| \leq \frac{1}{n}$, quindi f_n converge uniformemente a f; si verifica facilmente che la successione di funzioni $|f_n(x) - f(x)|^p$ è dominata dalla funzione $|f(x)|^p$ e quindi possiamo concludere che vale la convergenza in L^p.

□

Ricordiamo che con il termine **supporto** di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ in generale si intende l'insieme dei punti del dominio che non vengono mappati in zero. Tuttavia, molto più spesso, se X è uno spazio topologico allora prenderemo come **supporto** la chiusura di $f^{-1}(\{0\}^{\mathsf{c}})$.

Proposizione 2.30. *Le funzioni continue e a supporto compatto in $\mathbb{R}^d$ formano un sottoinsieme denso di L^p.*

Dimostrazione. Dato che le funzioni semplici sono dense in L^p è sufficiente approssimare una generica funzione indicatrice $f(x) = \mathbb{1}_E$ di un insieme misurabile tramite funzioni continue a supporto compatto. Mi basta considerare i sottoinsiemi E con misura finita, infatti se così non fosse le funzioni indicatrici non sarebbero in L^p poiché l'integrale non sarebbe finito.

Fisso $\varepsilon > 0$ e considero l'aperto Ω e il compatto K tali che $K \subseteq E \subseteq \Omega$ e $\mathcal{L}^d(\Omega \setminus K) \leq \varepsilon$; ora considero una funzione continua $g(x)$ a valori in $[0, 1]$ tale che

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in K \\ 0 & \forall x \in \Omega^{\mathsf{c}} \end{cases} ;$$

ne è un esempio la funzione

$$g(x) = \frac{dist(x, \Omega^{\mathsf{c}})}{dist(x, \Omega^{\mathsf{c}}) + dist(x, K)}.$$

Per costruzione della funzione g valgono le seguenti stime

$$\begin{aligned} \int_X |f - g|^p \, d\mathcal{L}^d &= \int_{\Omega\setminus K} |f - g|^p \, d\mathcal{L}^d \\ &\leq \int_{\Omega\setminus K} d\mathcal{L}^d \\ &\leq \mathcal{L}^d(\Omega \setminus K) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ogni funzione g così definita è sempre approssimabile con una successione di sue restrizioni ad un supporto compatto grazie alla Proposizione 2.28. Essendo restrizioni di una funzione continua esse sono ancora continue, quindi vale la tesi. □

2.1.6 Separabilità

Lezione 10 (17 ottobre 2018)**.**

Definizione 2.31. Sia (X, d) spazio metrico, si dice **separabile** se esiste $D \subseteq X$ denso e al più numerabile.

Proposizione 2.32. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ misurabile secondo $\mathcal{L}^d$, allora per ogni $1 < p < +\infty$ si ha che $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{L}^d)$ è separabile.*

Dimostrazione. Svolgeremo la dimostrazione solo per il caso $X = \mathbb{R}$.

Consideriamo l'insieme D composto dalle combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Q}$ delle funzioni indicatrici degli intervalli reali con estremi razionali.

Quest'insieme è numerabile perché è un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale a base numerabile.

Poichè le funzioni semplici sono dense in L^p, è sufficiente approssimare le indicatrici $\mathbb{1}_E(x)$ con $\mathcal{L}^d(E) < +\infty$: sappiamo che ogni insieme misurabile E si può approssimare tramite insiemi aperti Ω, che a loro volta sono unione numerabile di intervalli disgiunti e quindi esiste una successione di intervalli $\{I_n\}$ tale che

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \mathbb{1}_{I_n}\right) \to \mathbb{1}_\Omega \qquad \text{per } m \to \infty.$$

A questo punto ogni indicatrice di intervallo reale $\mathbb{1}_{I_n}$ è limite in L^p di funzioni appartenenti a D per cui vale la tesi.

□

Osservazione 2.33. Bisognerebbe svolgere alcune verifiche, ad esempio:

È noto che dato un insieme E misurabile secondo Lebsgue e di misura finita esiste una successione A_n di aperti contenenti E tale che $\mathcal{L}^d(A_n \setminus E) \to 0$. È vero che questo implica $\mathbb{1}_{A_n} \to \mathbb{1}_E$ in L^p?

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_E\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_E|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{A_n \setminus E} \mathbb{1} \, dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\mathcal{L}^d(A_n \setminus E)\right)^{1/p} \to 0
\end{aligned}$$

Nota. Per $p = +\infty$ l'integrale non è l'espressione della norma, perciò non si può applicare il procedimento dell'osservazione. Infatti, a meno che l'insieme $A_n \setminus E$ non sia trascurabile si ha sempre:

$$\|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_E\|_{+\infty} = 1.$$

Proposizione 2.34 (Criterio di non separabilità)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico, se esiste un $\delta > 0$ per cui si possa trovare un sottoinsieme $E \subset X$ non numerabile tale che per ogni $x_1, x_2 \in E$ $d(x_1, x_2) > \delta$ allora si ha che X non è separabile.*

Dimostrazione. Consideriamo le palle $B(x, \frac{\delta}{3})$ al variare di x in E, queste sono tutte disgiunte e sono più che numerabili. Un denso deve perciò intersecarle tutte, ma allora non può essere numerabile, perché dovrebbe avere almeno un elemento in ogni palla. □

Esercizio 2.35. *Vale il viceversa della proposizione precedente?*

Proposizione 2.36. *Lo spazio* L^∞ *non è separabile.*

Dimostrazione. Considero l'insieme:

$$E = \{\mathbb{1}_{(-\infty,a]} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Questo è chiaramente più che numerabile e gli elementi sono tali che:

$$\|\mathbb{1}_{(-\infty,a)} - \mathbb{1}_{(-\infty,b)}\|_\infty = 1$$

□

2.1.7 Alcuni esercizi

Esercizio 2.37. *Trovare una funzione continua* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *con integrale improprio finito ma non integrabile secondo Lebesgue.*

Un esempio è la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ per cui si ha che

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

ma sia l'integrale della parte positiva, sia quello della parte negativa divergono.

Esercizio 2.38. *Dire per quali* $\alpha \geq 1$ *e* p *si ha che:*

$$\frac{1}{1 + |x|^\alpha} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d).$$

Notiamo anzitutto che, se $f \geq 0$, per Beppo Levi si ha che:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{B_r} f\, dx.$$

Inoltre per le funzioni dipendenti dal solo modulo di x è utile passare in coordinate sferiche, cioè scrivere

$$\int f(|x|)\, dx = \int f(\rho) C_d \rho^{d-1}\, d\rho,$$

dove C_d è il volume $(d-1)$-dimensionale di S^{d-1}, che coincide con d volte il volume d-dimensionale di B^d.

Nel nostro caso si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\int_{B(0,R)} \left(\frac{1}{1+|x|^\alpha}\right)^p dx = \int_0^R \left(\frac{1}{1+\rho^\alpha}\right)^p C_d \rho^{d-1}\, d\rho.$$

Di conseguenza, passando al limite otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{1+|x|^\alpha}\right)^p dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\rho^\alpha}\right)^p C_d \rho^{d-1}\, d\rho.$$

Per confronto asintotico, l'integrale precedente converge se e solo se converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{\alpha\rho-d+1}}\, d\rho,$$

che è finito quando $\alpha\rho > d$.

Esercizio 2.39. *Dire per quali $\alpha, \beta \geq 1$ e p si ha che:*

$$\frac{1}{|x|^\alpha + |x|^\beta} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d).$$

Supponiamo che $\alpha \leq \beta$.

Esercizio 2.40. *Dimostrare che se X ha misura finita, allora si ha che $\mathrm{L}^p(X) \subseteq \mathrm{L}^q(X)$ per $p > q$ e l'inclusione è continua.*

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che per ogni $y \geq 0$ vale una delle due disuguaglianze:

$$y > 1 \Rightarrow y^q < y^p \quad e \quad 0 \leq y < 1 \Rightarrow y^q < 1,$$

quindi si ha che $y^q < 1 + y^p$. Allora per ogni $f \in \mathrm{L}^p$ si ha che:

$$(\|f\|_q)^q = \int_X |f|^q\, d\mu \leq \int_X 1 + |f|^p\, d\mu = \mu(X) + (\|f\|_p)^p < \infty.$$

Per provare la continuità dell'inclusione, si suggerisce di applicare la disuguaglianza di Jensen alla funzione $x^{\frac{p}{q}}$, che grazie al fatto che $p > q$ è convessa, osservando che

$$|f-g|^p = (|f-g|^q)^{\frac{p}{q}}.$$

□

Teorema 2.41 (Lusin)**.** *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ con $\mathcal{L}^d(E) < \infty$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme E' (che posso supporre chiuso) contenuto in E tale che:*

$$\mathcal{L}^d(E \setminus E') \leq \varepsilon \text{ e la restrizione di } f \text{ a } E' \text{ è continua.}$$

Esiste una versione più forte del teorema che dimostra l'esistenza di una $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua che coincide con f su E'.

Dimostrazione. Consideriamo il caso f limitata.

Dalla limitatezza di f e dal fatto che E ha misura finita segue che $f \in \mathrm{L}^1$. Allora esiste una successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}$ continue tali che:

$$f_n \to f \text{ in } \mathrm{L}^1.$$

Esiste dunque una sottosuccessione di indici n_k tale che:

$$f_{n_k} \to f \text{ q.o.}$$

Per Severini-Egorov dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $E' \subseteq E$ tale che:

$$\mathcal{L}(E \setminus E') \leq \varepsilon \text{ e } f_n \to f \text{ uniformemente.}$$

La conclusione segue dal fatto che il limite uniforme di funzioni continue è continuo. □

2.2 Prodotto di convoluzione

2.2.1 Definizioni e regolarità

Lezione 11 (18 ottobre 2018)**.**

Definizione 2.42 (Prodotto di convoluzione)**.** Definiamo *prodotto di convoluzione* di due funzioni f, $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ la funzione che ad ogni $x \in \mathbb{R}^d$ associa

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\ dy,$$

dove dy denota la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^d(\mathbb{R}^d)$.

Esempio 2.43. La distribuzione continua di massa $\rho(x)$ in $\mathbb{R}^3$ genera il potenziale gravitazionale:

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\rho(y)\ dy.$$

Il termine $\frac{1}{|x-y|}\rho(y)$ è il potenziale di una massa $\rho(y)$ concentrata in y. Notiamo che $V(x) = \frac{1}{|x|} * \rho$. Osserveremo più avanti che il prodotto di convoluzione riesce a modellare tutte le equazioni lineari a coefficienti costanti. Questo fatto suggerisce che la funzione appena introdotta sia alla base di concetti molto importanti.

Vediamo alcune proprietà.

Proposizione 2.44. *Il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e lineare in ciascun fattore. La funzione che definisce è misurabile e a valori in* $[0, +\infty]$.

Osservazione 2.45. Abbiamo descritto il prodotto di convoluzione sulle sole funzioni misurabili a valori positivi. Di conseguenza è improprio parlare di linearità, poiché lo spazio delle funzioni su cui lo definiamo non è uno spazio vettoriale. Proviamo una semilinearità, cioè che vale l'uguaglianza nel caso di funzioni positive e di coefficienti positivi. Una volta dimostrata l'estensione a tutte le funzioni misurabili, la linearità segue.

Dimostrazione. La commutatività segue dalla formula di cambio per l'integrale. Infatti dato il cambio $z = x - y$, con Jacobiano di modulo 1, si ha che

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\ dz \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

L'associatività segue dalla linearità dell'integrale di funzioni misurabili, così come la semilinearità. La misurabilità è una conseguenza del Teorema di Fubini. Infatti esso garantisce che per ogni funzione misurabile $r(x, y)$ a segno costante definita su uno spazio prodotto $X \times Y$ i due integrali

$$\phi(x) = \int_Y r(x,y)\ dy \qquad \psi(y) = \int_X r(x,y)\ dx$$

siano funzioni misurabili. Ponendo quindi $r(x, y) = f(x - y)g(y)$ si ha che essa è misurabile poiché prodotto di funzioni misurabili e che l'applicazione

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} r(x,y)\ dy$$

è misurabile e questa è proprio la definizione di $f * g(x)$. □

Osservazione 2.46. Dal momento che valutiamo f in $x - y$, non possiamo restringere la definizione di $f * g$ a un aperto di $\mathbb{R}^d$. Lo spazio $\mathbb{R}^d$ ci serve globalmente.

Cerchiamo ora dei risultati che ci garantiscano l'esistenza del prodotto di convoluzione per funzioni di segno generico in un opportuno spazio L^p.

Proposizione 2.47. *Siano* f, $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ *due funzioni in* L^1. *Allora si ha che* $||f * g||_1 = ||f||_1 \cdot ||g||_1$.

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Fubini. Ricordiamo che le funzioni f e g sono positive, perciò $f * g(x)$ è positivo in ogni x e dunque si ha

$$\begin{aligned}
||f * g||_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)| \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \ dx \right] \ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \ dx \right] \ dy \\
&= ||f||_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \ dy \\
&= ||f||_1 \cdot ||g||_1,
\end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio segue dal fatto che la misura di Lebesgue è invariante per traslazione e riflessione. □

Corollario 2.48. *Se f, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono due funzioni in L^1, allora è ben definito ed è finito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ il prodotto di convoluzione $f * g(x)$. Inoltre vale la disuguaglianza $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$.*

Dimostrazione. Il prodotto $f * g(x)$ è ben definito se la funzione $r(y) = f(x-y)g(y)$ è in L^1 per ogni x fissato, ovvero se

$$\int_{\mathbb{R}^d} |r(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \ dy < +\infty.$$

Tale funzione coincide con $|f| * |g|(x)$. Poiché $|f|$ e $|g|$ sono funzioni positive in L^1, il prodotto $(|f| * |g|)$ è in L^1 per la Proposizione precedente, perciò assume valori finiti quasi ovunque. Allora per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$(|f| * |g|)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |r(y)| \ dy < +\infty.$$

Questo dimostra la buona definizione e la finitezza ad x fissato. Inoltre si ha che

$$\begin{aligned}
||f * g(x)||_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right| \ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \ dy \right] \ dx \\
&= ||f||_1 \cdot ||g||_1.
\end{aligned}$$

□

Le dimostrazioni precedenti sono basate sul fatto che le funzioni siano in un opportuno spazio L^p. Se avessimo considerato funzioni continue non saremmo riusciti a dimostrare nulla. Cerchiamo ora dei risultati in L^p con $p > 1$. Lo schema sarà il seguente: proposizione per funzioni a segno costante, corollario che generalizza a funzioni di segno qualunque.

Proposizione 2.49. *Siano f, $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ tali che $f \in \mathrm{L}^p$ e $g \in \mathrm{L}^1$. Allora si ha che $||f * g||_p \leq ||f||_p \cdot ||g||_1$.*

Dimostrazione. Sfruttiamo un'opportuna disuguaglianza di Holder, valida solo per $p < \infty$. Il caso $p = \infty$ viene lasciato per esercizio.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)^{\frac{1}{p}} g(y)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y)\ dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\ dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y)\ dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot ||g||_1^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

dove $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Adesso abbiamo che

$$\begin{aligned} ||f * g||_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g(x))^p\ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y)\ dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot ||g||_1^{\frac{1}{q}} \right]^p\ dx \\ &= ||g||_1^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y)\ dy \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p\ dx \\ &= ||g||_1^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y)\ dy \right)\ dx \\ &= ||g||_1^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p\ dx \right)\ dy \\ &= ||g||_1^{\frac{p}{q}} \cdot ||f||_p^p \cdot ||g||_1 \\ &= ||f||_p^p \cdot ||g||_1^p, \end{aligned}$$

grazie al Teorema di Fubini e all'invarianza per traslazione e riflessione della misura di Lebesgue. □

Osservazione 2.50. Tale disuguaglianza permette di recuperare in L^p il fatto che la norma della media sia minore o uguale della media delle norme.

Infatti, supponiamo che $\int g = 1$, allora ricaviamo che

$$||f * g||_p \leq ||f||_p.$$

Grazie al fatto che la misura di Lebesgue è invariante per traslazione e riflessione, possiamo scrivere

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-x}(f(-y))g(y)\ dy,$$

cioè interpretare $f * g(x)$ come una media pesata rispetto alla distribuzione di probabilità g delle traslate di f.

Corollario 2.51. *Se f, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono tali che $f \in \mathrm{L}^p$ e $g \in \mathrm{L}^1$, allora è ben definito ed è finito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ il prodotto di convoluzione $f * g(x)$. Inoltre vale la disuguaglianza $||f * g||_p \leq ||f||_p \cdot ||g||_1$.*

Dimostrazione. Sia $r(y) = f(x-y)g(y)$. Richiedere che $f * g$ sia ben definita e finita quasi ovunque è equivalente a richiedere che $r(y) = f(x-y)g(y) \in \mathrm{L}^1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Osserviamo che il modulo delle funzioni f e g sono ancora funzioni in L^p e L^1 e sono positive. Per la Proposizione precedente si ha che $(|f| * |g|) \in \mathrm{L}^p$ e perciò $|f| * |g|$ assume valori finiti quasi ovunque. Perciò $r(y) \in \mathrm{L}^1$ per quasi ogni x. Inoltre si ha che

$$||f * g||_p \leq ||(|f| * |g|)||_p \leq ||f||_p \cdot ||g||_1.$$

□

Proposizione 2.52. *Siano f, $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ tali che $f \in \mathrm{L}^p$ e $g \in \mathrm{L}^q$, dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora si ha che $||f * g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$.*

Dimostrazione. Possiamo usare direttamente la disuguaglianza di Holder:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\ dy \\ &\leq ||f||_p \cdot ||g||_q, \end{aligned}$$

sempre grazie al fatto che la funzione $f(x - \cdot)$ ha medesima norma in L^p di f. Tale risultato ci dice che in ogni punto $x \in \mathbb{R}^d$ la funzione f è limitata. Di conseguenza $\sup_{\mathbb{R}^d}(f * g) \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$. Poichè si ha $||f * g||_\infty \leq \sup_{\mathbb{R}^d}(f * g)$, vale anche che

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

□

In modo analogo a quanto fatto nei corollari precedenti si ha il seguente risultato.

Corollario 2.53. *Se f, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono tali che $f \in \mathrm{L}^p$ e $g \in \mathrm{L}^q$, dove p e q sono coniugati, allora è ben definito ed è finito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ il prodotto di convoluzione $f * g(x)$. Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ vale la disuguaglianza $|f * g(x)| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$.*

La dimostrazione della proposizione precedente ci suggerisce che tale prodotto di convoluzione sia dotato di qualche proprietà di continuità.

Proposizione 2.54. *Se f, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono tali che $f \in \mathrm{L}^p$ e $g \in \mathrm{L}^q$, dove p e q sono coniugati, allora $f * g$ è uniformemente continua.*

Per dimostrarla ci serve un risultato preliminare.

Lemma 2.55. *Data $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ con $p < \infty$ e $h \in \mathbb{R}^d$, sia $\tau_h f(x) \stackrel{def}{=} f(x-h)$. Allora $\tau_h f \to f$ in L^p per $h \to 0$ e l'applicazione $h \mapsto \tau_h f$ è continua.*

Dimostrazione. Una volta dimostrato che $\tau_h f \to f$ in L^p, la continuità dell'applicazione $h \mapsto \tau_h f$ segue per continuità per successioni. Proviamo dunque la convergenza in L^p. Preliminarmente lo dimostriamo per funzioni in un insieme denso. Sia $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, ovvero una funzione continua a supporto compatto. Per continuità di f in ogni punto di $\mathbb{R}^d$, abbiamo che la funzione

$$g_h(x) = f(x-h) - f(x) \to 0$$

per $h \to 0$. Perciò

$$(\|\tau_h f - f\|_p)^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g_h(x)|^p \, dx.$$

Se dimostriamo che la convergenza è dominata, allora l'ultimo integrale converge a 0 per $h \to 0$ grazie al Teorema. Data la compattezza del supporto di f, questo è contenuto in una palla aperta di raggio R. Perciò quello di g_h è contenuto in $\mathcal{B}_{R+h}(0)$. Grazie al fatto che $h \to 0$, possiamo supporre $h \leq 1$ e dunque abbiamo la dominazione con una funzione in L^1:

$$|g_h(x)| \leq 2||f||_\infty \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{R+1}(0)}(x).$$

Osserviamo che la nozione di convergenza l'abbiamo data per funzioni in una famiglia ad un parametro $h \in \mathbb{R}^d$, che è equivalente a farlo per indici naturali.

Consideriamo ora una generica $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Per densità, fissato ε, esiste $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tale che $||f - g||_p \leq \varepsilon$. Di conseguenza per disuguaglianza triangolare e invarianza per traslazione della misura di Lebesgue, si ha che

$$\begin{aligned}||\tau_h f - f||_p &\leq ||\tau_h f - \tau_h g||_p + ||\tau_h g - g||_p + ||g - f||_p \\ &= ||\tau_h g - g||_p + 2||f - g||_p\end{aligned}$$

$$\leq 2\varepsilon + ||\tau_h g - g||_p.$$

Grazie a quanto provato preliminarmente, sappiamo che

$$\limsup_{h\to 0} ||\tau_h g - g||_p = 0.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \liminf_{h\to 0} ||\tau_h f - f||_p &\leq \limsup_{h\to 0} ||\tau_h f - f||_p \\ &= \limsup_{h\to 0} ||\tau_h g - g||_p + 2||f - g||_p = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Poiché ε è arbitrario, abbiamo che $\lim_{h\to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$. □

Dimostrazione della Proposizione 2.54. Il lemma sopra è stato dimostrato solo per spazi L^p con $p \neq \infty$, quindi svolgiamo a parte il caso limite $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ e $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Procediamo per densità: sia $K \in \mathcal{C}_c \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ una funzione continua a supporto compatto allora il prodotto convolutivo $f * K$ è uniformemente continuo, infatti si ha che

$$|f * K(x) - f * K(x')| \leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |K(x-y) - K(x'-y)| \; dy$$

e K è uniformemente continua, poiché è una funzione continua a supporto compatto.

Sia $\{K_n\}_\mathbb{N} \subseteq \mathcal{C}_c$ una successione di funzioni che tenda a g in L^1, allora ci basterà mostrare che $f * K_n \longrightarrow f * g$ uniformemente per avere la tesi, infatti limite uniforme di funzioni uniformemente continue è a sua volta una funzione uniformemente continua:

$$\begin{aligned} |f * K_n - f * g| &\leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x-y) - g(x-y)| \; dy \\ &= \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(t) - g(t)| \; dt \\ &= \|f\|_\infty \|K_n - g\|_1 \end{aligned}$$

e $\|K_n - g\|_1$ è arbitrariamente piccolo per $n \to \infty$ ed è indipendente da x.

Mostriamo ora il caso $p \neq \infty$. Dato $\varepsilon > 0$, cerchiamo h tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si abbia

$$|f * g(x-h) - f * g(x)| \leq \varepsilon.$$

$$|f * g(x-h) - f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-h-y) g(y) \; dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \; dy \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-h-y) - f(x-y))\, g(y)\, dy \right| \\
&\leq ||f(x-h-\cdot) - f(x-\cdot)||_p \cdot ||g(\cdot)||_q \\
&= ||\tau_h f - f||_p \cdot ||g||_q,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato in successione la definizione di $f * g$, l'associatività dell'integrale, la disuguaglianza di Holder poiché $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e l'invarianza per traslazione/riflessione della misura. Poiché $||\tau_h f - f||_p$ è infinitesima per $h \to 0$ esiste h_0 tale che per ogni $h \geq h_0$ si ha $||\tau_h f - f||_p \leq \frac{\varepsilon}{||g||_q}$. Perciò abbiamo concluso. □

Le disuguglianze finora dimostrate sono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
||f * g||_1 &\leq ||f||_1 \cdot ||g||_1; \\
||f * g||_p &\leq ||f||_p \cdot ||g||_1; \\
||f * g||_\infty &\leq ||f||_p \cdot ||g||_q.
\end{aligned}
$$

Ci chiediamo se sia possibile determinare $r \geq 1$ tale che

$$||f * g||_r \leq ||f||_p \cdot ||g||_s,$$

dove $p,\ s \geq 1$. La risposta è affermativa e il risultato è conosciuto come *"Young's convolution inequality"* il quale afferma che:

Proposizione 2.56. *Sia f una funzione in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ e g una in $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$, allora per ogni $r \in [1, +\infty]$ tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$$

vale la seguente disuguaglianza

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dimostrazione del Teorema 2.41. Dimostriamo il caso in cui f è qualunque. Grazie alla densità delle funzioni limitate è sufficiente provare il seguente Lemma. □

Lemma 2.57. *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E' \subset E$ tale che $\mathcal{L}^d(E \setminus E') \leq \varepsilon$ tale che f è limitata su E'.*

Dimostrazione. Dato $n \in \mathbb{N}$ pongo $A_n = \{\, x \in E \mid |\, f(x)| > n \,\}$. Sia $E' = E \setminus A_n$. Proviamo che $\mathcal{L}^d(A_n) \to 0$. Infatti A_n è una successione decrescente al vuoto in uno spazio di misura finita. □

Qui va espansa la divagazione sulla liceità del cambio di variabile quando integro secondo Lebesgue. Non la ho chiarissima, nel frattempo vado avanti.

Lezione 12 (22 ottobre 2018)**.**

Esercizio 2.58. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Se $h : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora la norma L^∞ coincide con la norma del sup, vale a dire:*

$$\|h\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|h(x)|.$$

Soluzione. Per la definzione di norma L^∞ vale la disuguaglianza

$$\|h\|_\infty = \min\{c \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq c \ \text{ q.o.}\} \leq \sup|h(x)|.$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza inversa, fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo $x_0 \in \Omega$ tale che $(\sup|h| - \varepsilon/2) \leq |h(x_0)| \leq \sup|h|$.

Per continuità di h esiste $\delta > 0$ tale che:

$$(\sup|h| - \varepsilon) \leq h(x) \leq \sup|h| \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Dato che $\mathcal{L}^d(B_\delta(x_0))$ è strettamente positiva si ha che $\|h\|_\infty \geq (\sup|h| - \varepsilon)$ e quindi vale la tesi per arbitrarietà di ε. □

Inizia una parte di esercizi quantomeno da sistemare, magari da svolgere

Esercizio 2.59. *Sia f una funzione con supporto A e g una funzione con supporto B, allora il prodotto convolutivo $(f*g)(x)$ ha il supporto nell'insieme $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.*

Osservazione 2.60. Variando A e B su insiemi trascurabili il prodotto in convoluzione non cambia, quindi un enunciato migliore dovrebbe parlare di *supporto essenziale*, ovvero definire f come nulla q.o. fuori da A.

Esercizio 2.61. *Siano $p, q \neq +\infty$ esponenti coniugati, allora:*

$$(f * g)(x) \to 0 \text{ se } |x| \to +\infty$$

Usando l'esercizio precedente sulla somma dei supporti si può facilmente concludere che per ogni funzione f e g a supporto compatto vale la tesi.

Mostriamo che l'operatore bilineare di convoluzione:

$$* : \mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q \to \mathrm{L}^\infty$$

è un operatore continuo.

Per la Proposizione 2.52 si ha che $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$; consideriamo una successione $(f_n, g_n) \to (f, g)$ in $\mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q$, allora si ha che

$$\begin{aligned}\|f_n * g_n - f * g\|_\infty &= \|f_n * g_n - f * g_n + f * g_n - f * g\|_\infty \\ &= \|(f_n - f) * g_n - f * (g_n - g)\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q.\end{aligned}$$

Ora sappiamo che fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$ e $\|g_n - g\|_q \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_o$ e usando che $\|g_n\| \leq \|g_n - g\| + \|g\|$ si ha che

$$\begin{aligned}\|f_n * g_n - f * g\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \\ &\leq \varepsilon(\varepsilon + \|g\|_q) + \|f\|_p \varepsilon.\end{aligned}$$

definitivamente e per ogni ε arbitrariamente piccolo.

Consideriamo ora la restrizione dell'operatore alle funzioni a supporto compatto:

$$* : \mathrm{L}^p_c \times \mathrm{L}^q_c \to \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$$

e per continuità esso manda la chiusura nella chiusura: per densità si ha che $\overline{\mathrm{L}^p_c} \times \overline{\mathrm{L}^q_c} = \mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q$ e che la chiusura di $\overline{\mathcal{C}_c}$ in L^∞ è $\mathcal{C}_0$, vale a dire le funzioni continue infinitesime ovvero quelle che all'infinito tendono a 0 (da provare).

Esercizio 2.62. *Esiste un elemento neutro per il prodotto in convoluzione nello spazio delle funzioni positive? E posta $f \in \mathrm{L}^p$ e $g \in \mathrm{L}^1$?*

$$\exists g \text{ t.c. } f * g = f \ \forall f\,?$$

La risposta è che una tale funzione non esiste. Invece, come misura, funziona la δ di Dirac, infatti:

$$\delta(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in E \\ 0 & \text{se } 0 \notin E \end{cases};$$

Quindi posta g nulla dappertutto fuorché nell'origine e tale che $\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, dy = 1$ si ottiene che:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y)\, dy = f(x).$$

2.2.2 Derivabilità del prodotto di convoluzione

Fissato un $h \in \mathbb{R}^d$ denoteremo con τ_h la funzione traslata $f(x - h)$ di una funzione $f(x)$. Consideriamo due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: applicando le varie definizioni e un paio di uguaglianze non giustificate, ma verosimili, si ha che per

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f * g)(x) - (f * g)(x - h)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f*g)(x) - \tau_h(f*g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f*g)(x) - (\tau_h f*g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(f-\tau_h f)*g](x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(f-\tau_h f)}{h} * g \right)(x) \\
&= (f'*g)(x).
\end{aligned}
$$

Per simmetria dovrebbe anche valere che $\frac{d}{dx}(f*g)(x) = (f*g')(x)$. Cerchiamo delle ipotesi sotto le quali tali uguaglianze sono valide.

Proposizione 2.63. *Sia $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che f, $f' \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ con q coniugato a p. Allora il prodotto convolutivo è di classe $\mathcal{C}^1$ e vale l'uguaglianza $\frac{d}{dx}(f*g) = f'*g$.*

Osservazione 2.64. È sufficiente provarlo per funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Nel caso di funzioni vettoriali si ha che il prodotto di convoluzione è ben definito, inoltre si usa la nozione di gradiente e non di derivata, e l'uguaglianza si prova componente per componente.

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.54 sia il prodotto $f*g$, sia $f'*g$ sono uniformemente continui, quindi se $f'*g$ fosse la derivata di $f*g$ rispetterebbe la richiesta di continuità della derivata. Di conseguenza, provata l'uguaglianza, avremmo automaticamente che $f*g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo, per dimostrare che vale l'identità $(f*g)' = f'*g$ mi basta mostrare che

$$
f*g(x) - f*g(0) = \int_0^x f'*g(t)\ dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f'*g(t)\ dt &= \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t-y)g(y)\ dy\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^x f'(t-y)g(y)\ dt\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left[\int_0^x f'(t-y)\ dt \right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left[f(x-y) - f(0-y)\right]\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\ dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(0-y)g(y)\ dy
\end{aligned}
$$

$$= f * g(x) - f * g(0).$$

Posso scambiare gli integrali grazie al Teoerema di Fubini: per attuare lo scambio nel secondo segno di uguaglianza, bisogna provare che

$$\int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t-y)g(y)\ dy\ dt$$

è finito quasi ovunque. Ma vale

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(t-y)g(y)\right| dy\ dt &\leq \int_0^x ||f'||_p ||g||_q dt \\ &= |x| \cdot ||f'||_p \cdot ||g||_q\end{aligned}$$

per la Proposizione 2.52. □

Teorema 2.65. *Sia $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione tale che $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\ dx = 1$ e f una funzione in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ con $p < +\infty$. Ponendo per ogni $\delta > 0$*

$$g_\delta(x) = \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

allora si ha che $(g_\delta * f) \in \mathrm{L}^p$ e $(g_\delta * f) \to f$ in L^p per $\delta \to 0$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}(f * g_\delta)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g_\delta(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\left(\frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{y}{\delta}\right)\right)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\delta t) g(t)\ dt \qquad \left(t = \frac{y}{\delta}, dt = \frac{dy}{\delta^d}\right).\end{aligned}$$

Per proprietà di g si ha che $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(t)\ dt$ e quindi

$$\begin{aligned}|(f * g_\delta)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta t) - f(x)||g(t)|\ dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta t) - f(x)||g(t)|^{1/p}|g(t)|^{1/q}\ dt \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta t) - f(x)|^p |g(t)|\ dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|\ dt\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

È bene osservare che se $f \in \mathrm{L}^1$ e quindi $p = 1$ è sufficiente fermarsi alla prima disuguaglianza per procedere con la dimostrazione.

Sostituendo la disuguaglianza ottenuta si ha che

$$\begin{aligned}(\|f * g_\delta - f\|_p)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (\|g\|_1)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta t) - f(x)|^p \cdot |g(t)|\ dt\ dx \\ &= (\|g\|_1)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta t) - f(x)|^p dx\ dt \\ &= (\|g\|_1)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|(\|\tau_{\delta t} f - f\|_p)^p\ dt\end{aligned}$$

Per continuità delle traslazioni $\tau_{\delta t} f \xrightarrow{\delta \to 0} f$, quindi $\|\tau_{\delta t} - f\|_p \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}^d$. Per concludere è sufficiente quindi la convergenza sotto il segno di integrale e poiché

$$|g(t)| \cdot \|\tau_{\delta t} f - f\|_p^p \leq |g(t)|\,(\|\tau_{\delta t} f\|_p + \|f\|_p)^p \leq |g(t)| 2^p ||f||_p^p$$

$g(t)$ è per ipotesi in L^1 e dunque vale il Teorema di Convergenza Dominata.

□

Osservazione 2.66. Non è strettamente necessario che $\int g(t)\ dt$ abbia valore unitario, in tal caso $(g_\delta * f) \to (\int g\ dt) f$.

Corollario 2.67. *Sia g una funzione continua a supporto compatto in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = 1$. Se $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ e $p < \infty$, allora $f * g_\delta \to f$ in L^p e $f * g_\delta \in C^\infty$. Inoltre $\nabla(f * g_\delta) = f * \nabla^h g_\delta$. Se $d = 1$, allora $(f * g_\delta)^{(n)} = f * (g_\delta)^{(n)}$.*

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

3.1 Definizioni e teorema delle basi

Lezione 13 (24 ottobre 2018)**.**

Sia X un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita o infinita dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, ovvero un'applicazione

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

bilineare, simmetrica e definita positiva. Lo denoteremo d'ora in avanti con $(X, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ per brevità.

Grazie alla positività di $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, possiamo dotare X di una norma:

$$\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La verifica che si tratti effettivamente di una norma non viene svolta, ma notiamo che è una conseguenza della disuguaglianza di Schwarz. Essa soddisfa l'identità del parallelogramma (proprietà equivalente delle norme indotte da prodotto scalare):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

Inoltre vale la *formula di restituzione*, cioè per ogni x, $y \in X$ si ha che

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right).$$

Tale formula ci permette di dimostrare che il prodotto scalare è una mappa continua, grazie alla continuità della norma e delle operazioni di somma e differenza. Più precisamente:

Dimostrazione. Siano $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{\mathbb{N}}$ due successioni in X che tendono rispettivamente a x e y in X, per definzione di continuità è sufficiente mostrare che $|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \to 0$. Infatti

$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\ &\leq |\langle x - x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y - y_n\rangle| \\ &\leq \|x - x_n\|\|y\| + \|x_n\|\|y - y_n\|\end{aligned}$$

e poiché sia $\|x - x_n\|$ che $\|y - y_n\|$ tendono a 0, vale la tesi. □

Oppure :

Proposizione 3.1. *Sia $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione a valori in X. Se x_n converge a x cioè $\|x_n - x\| \to 0$, allora $\|x_n\| \to \|x\|$, cioè la norma è continua. In particolare lo è il prodotto scalare per composizione di funzioni continue.*

Dimostrazione. Segue immediatamente da una proprietà della disuguaglianza triangolare:

$$\Big| \|x_n\| - \|x\| \Big| \leq \|x_n - x\| \to 0$$

□

Osservazione 3.2. Lo spazio vettoriale X può avere dimensione finita oppure infinita. Questo rende pertinente l'ultima proprietà elencata. Infatti in dimensione finita ogni mappa lineare è continua, mentre in dimensione infinita questo non vale più. Un esempio di tale fatto verrà dato più avanti, si veda Esempio 3.30.

Definizione 3.3 (Spazio di Hilbert)**.** Uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare si dice *spazio di Hilbert* se la distanza indotta dalla norma (a sua volta indotta dal prodotto scalare) lo rende uno spazio metrico completo.

Vediamo alcuni esempi di spazi di Hilbert.

Esempio 3.4. Uno spazio vettoriale X di dimensione finita n è di Hilbert per qualsiasi scelta del prodotto scalare. Infatti data una base $\mathfrak{B}$ ortonormale, è possibile definire un'applicazione che associa al vettore $x \in X$ il vettore in $\mathbb{R}^n$ delle sue componenti nella base $\mathfrak{B}$. Grazie all'ortonormalità di $\mathfrak{B}$ l'applicazione così definita è un'isometria con $\mathbb{R}^n$, che è completo. Perciò X è completo.

Esempio 3.5. Lo spazio $\mathrm{L}^2(X, \mu)$ è di Hilbert. Infatti abbiamo già dimostrato (Teorema 2.19) che se dotato del prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)\ d\mu(x),$$

è uno spazio metrico completo.

Esempio 3.6. Lo spazio ℓ^2 è definito come l'insieme delle successioni quadrato sommabili

$$\ell^2 \stackrel{def}{=} \left\{ \{x_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \quad \middle| \quad \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 < +\infty \right\},$$

che è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, dotato del prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i.$$

Si può dimostrare che è uno spazio di Hilbert. Dobbiamo verificare che il prodotto scalare sia ben definito. Tuttavia, osserviamo che lo spazio descritto è un caso particolare di $\mathrm{L}^2(X, \mu)$ con $X = \mathbb{N}$ e μ la misura che conta i punti, cioè se $A \subset \mathbb{N}$ si pone

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{se è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esibiamo alcuni spazi metrici non completi.

Esempio 3.7. Consideriamo lo spazio vettoriale

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

quozientato per lo spazio delle funzioni nulle μ-quasi ovunque. Lo dotiamo del prodotto scalare definito come $\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} fg \, d\mu$. Prendendo la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{n}{2}x + \frac{2-n}{4} & \forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \textit{per } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \quad \forall n \geq 2$$

si ha che essa converge alla funzione gradino discontinua nel punto $x = 1/2$. Perciò tale spazio ammette una successione di Cauchy in norma, ma avente limite al di fuori di $X/_\sim$.

Osservazione 3.8. Provando a porre

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ integrabile secondo Riemann}\}$$

si ha che il prodotto scalare si annulla per ogni funzione nulla al di fuori di un insieme trascurabile e ci si ritrova dunque a dover quozientare. Anche in questo modo, però si trova che X non è completo. Come controesempio bisogna trovare una funzione $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ che non coincida quasi ovunque con una funzione continua.

Un controesempio che non funziona è il seguente: sia $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione che approssimi l'indicatrice dell'insieme di Dirichlet D. Dato che D è trascurabile, la successione tende ad essere nulla q.o. e la funzione identicamente nulla è continua.

Definizione 3.9 (Sistema ortonormale)**.** Un sottoinsieme $\mathfrak{F}$ di X si dice sistema ortonormale di X se:

- $\langle e, e \rangle = 1 \quad \forall\, e \in \mathfrak{F}$;
- $\langle e, e' \rangle = 0 \quad \forall\, e, e' \in \mathfrak{F}$ con $e \neq e'$.

Diremo che un sistema ortonormale $\mathfrak{F}$ è **massimale** se per ogni sistema ortonormale $\mathfrak{F}'$ che contiene $\mathfrak{F}$ si ha che $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$.

Definizione 3.10 (Base di Hilbert)**.** Definiamo *base di Hilbert* un sistema ortonormale massimale di uno spazio di Hilbert.

Osservazione 3.11. In dimensione infinita è improprio parlare di base a proposito di un sistema ortonormale massimale. La definizione precedente viene data in virtù di alcune forti analogie con le basi di spazi vettoriali di dimensione finita che proveremo più avanti.

Facciamo vedere che se X è completo e di dimensione infinita, un sistema ortogonale massimale non è una base. Prendiamo ad esempio $\mathfrak{F} \subset \ell^2$ in questo modo:

$$\mathfrak{F} = \{e_n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\},$$

dove $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ ha un'unica coordinata non nulla, la n-esima, cioè $(e_n)_i = \delta_{i,n}$. Si verifica facilmente che questo è un sistema ortonormale. È anche massimale: supponiamo di scegliere un $x \in \ell^2$ tale che $\forall i \in \mathbb{N}$ $\langle x, e_i \rangle = 0$, ma questo viene verificato solo dalla stringa nulla. Quindi non esiste un elemento non nullo in ℓ^2 che appartenga all'ortogonale di $\mathfrak{F}$ e da questo segue che ogni sistema ortonormale contenente $\mathfrak{F}$ coincide con $\mathfrak{F}$.

Se fosse una base, allora ogni elemento di X si potrebbe scrivere come combinazione lineare finita di elementi di $\mathfrak{F}$. Tuttavia $\mathrm{Span}\langle\mathfrak{F}\rangle$ è il sottospazio delle successioni che hanno un numero *finito* di coordinate non nulle, ma è un sottoinsieme proprio di ℓ^2. Infatti la stringa avente coordinate $(x_n) = \frac{1}{n}$ è un elemento di ℓ^2, ma non ha coordinate nulle. Tale proprietà si riacquista nel momento in cui prendiamo in considerazione le combinazioni lineari *infinite* di elementi di $\mathfrak{F}$.

Si può inoltre dimostrare che $\mathrm{Span}(\mathfrak{F})$ è denso in ℓ^2 rispetto alla norma, quindi non è di Hilbert in quanto un denso proprio non può essere completo.

Osservazione 3.12. Grazie al Lemma di Zorn si dimostra non solo che esiste sempre un sistema ortonormale massimale, ma che ogni sistema ortonormale è contenuto in un sistema ortonormale massimale.

Esercizio 3.13. *Trovare un sistema ortonormale massimale per* $\mathrm{L}^2([0,1])$.

Le proprietà di ℓ^2 emerse nell'Osservazione 3.11 non sono particolarità di tale spazio. Vale infatti un risultato molto importante.

Teorema 3.14 (delle basi di Hilbert)**.** *Siano X uno spazio di Hilbert e $\mathfrak{F} = \{e_i\}_{\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile. Per ogni elemento $x \in X$ e per ogni indice $i \in \mathbb{N}$ poniamo $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Valgono le seguenti proprietà.*

- *Vale la disuguaglianza di Bessel:* $\sum\limits_{\mathbb{N}} x_i^2 \leq \|x\|^2$.
- *La serie* $\sum x_i e_i$ *converge ad un elemento* $\overline{x} \in X$. *Inoltre* $\overline{x}$ *è la proiezione ortogonale di* x *sullo spazio generato dagli elementi del sistema ortonormale.*
- *Si ha che* $\sum\limits_{\mathbb{N}} x_i^2 = \|\overline{x}\|^2$ *e quindi* $\|\overline{x}\| \leq \|x\|$.
- *L'elemento* $x - \overline{x}$ *è ortogonale a ogni* $e_i \in \mathfrak{F}$, *perciò* $x - \overline{x} \in (\mathit{Span}(\mathfrak{F}))^{\perp}$.
- *Se* $\mathfrak{F}$ *è un sistema massimale, allora si ha che* $x = \overline{x} = \sum\limits_{\mathbb{N}} x_i e_i$ *e* $\|x\|^2 = \sum\limits_{\mathbb{N}} x_i^2$.

Osservazione 3.15. Il caso finito-dimensionale è stato già dimostrato nei corsi di Algebra Lineare. Se invece la cardinalità di $\mathfrak{F}$ è più che numerabile, definiamo le serie come sup delle sottosomme finite (va definito bene, non è immediato, ma si fa). Tuttavia, tale caso viene ignorato poiché ritenuto poco interessante. Si può infatti dimostrare che una serie convergente ha al più numerabili termini non nulli.

Prima di dimostrarlo abbiamo bisogno di un risultato preliminare.

Lemma 3.16. *Sia* $\mathfrak{F} = \{e_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots\}$ *un sistema ortonormale numerabile di uno spazio di Hilbert* X. *Se* $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ *è una successione reale quadrato sommabile, allora vale che:*

- *la serie* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i e_i$ *converge ad un elemento* $\overline{x} \in X$;
- $\langle \overline{x}, e_i \rangle = a_i$ *per ogni* $i \in \mathbb{N}$;
- $\|\overline{x}\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i^2$.

Dimostrazione. Useremo spesso il fatto che $\|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$. Questa è una conseguenza dell'ortonormalità dei vettori $e_i \in \mathfrak{F}$. Diventa evidente una volta osservato che

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \rangle.$$

Per il primo punto mostriamo che le somme finite $x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$ sono una successione di Cauchy, così da poter concludere per completezza. Sia $m > n$, allora:

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{m} a_i e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} a_i^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2.$$

Quest'ultima è la coda di una serie convergente, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si ha $\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i^2 \leq \varepsilon$.

Il secondo punto si dimostra grazie alla continuità del prodotto scalare. Sia $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, allora possiamo scrivere l'uguaglianza

$$\langle \overline{x}, e_i \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, e_i \rangle = a_i,$$

una volta osservato che il prodotto scalare è nullo se $i > n$ e a_i altrimenti. Quindi, dato che n tende ad infinito, per ogni i definitivamente varrà l'uguaglianza desiderata.

Per l'ultimo punto basta notare che grazie alla continuità del prodotto scalare possiamo scrivere:

$$\|\overline{x}\|^2 = \lim_{N \to +\infty} \|x_N\|^2 = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i^2 \right) = \sum_{0}^{\infty} a_i^2.$$

□

Dimostrazione del Teorema 3.14. Proviamo il primo punto. Fissiamo un N e scriviamo: $x = x_0 e_0 + \cdots + x_N e_N + y$. Avendo definito $x_i = \langle x, e_i \rangle$, si ha che y è ortogonale a e_i per ogni $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$. Infatti:

$$\langle y, e_i \rangle = \langle x - \sum_{0}^{N} x_j e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \sum_{0}^{N} x_j e_j, e_i \rangle =$$

$$= \langle x, e_i \rangle - \langle x_i e_i, e_i \rangle = x_i - x_i = 0.$$

Grazie all'ortogonalità possiamo scrivere che:

$$\|x\|^2 = ||\sum_{i=0}^{N} x_i^2 + y||^2 = \sum_{0}^{N} x_i^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{0}^{N} x_i^2.$$

Il secondo e il terzo punto seguono direttamente dal lemma precedente.

Proviamo il quarto punto. Dato che $\langle x, e_i \rangle = x_i$ per ipotesi e $\langle \overline{x}, e_i \rangle = x_i$ per il secondo punto del lemma precedente, si ha che

$$\langle x - \overline{x}, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle \overline{x}, e_i \rangle = x_i - x_i = 0.$$

Passiamo all'ultimo punto. Supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia massimale. Poiché $x - \overline{x}$ è ortogonale ad ogni $e_i \in \mathfrak{F}$, se per assurdo non fosse il vettore nullo otterremmo ortonormale $\mathfrak{F}'$:

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \cup \left\{ \frac{x - \overline{x}}{\|x - \overline{x}\|} \right\}$$

strettamente più grande di $\mathfrak{F}$, contraddicendo la sua massimalità. Perciò $\overline{x} = x$. □

Tale dimostrazione giustifica il nome *base* di Hilbert, infatti un simile sistema ha molte proprietà analoghe a quelle di cui godono le basi di spazi vettoriali di dimensione finita.

Lezione 14 (25 ottobre 2018)**.**

Definizione 3.17 (Sistema ortonormale completo)**.** Un sistema ortonormale $\mathfrak{F}$ si dice *completo* se il sottospazio generato è denso, ovvero se

$$\overline{Span(\mathfrak{F})} = X.$$

Proposizione 3.18. *Sia X uno spazio di Hilbert, allora un sistema ortonormale è completo se e solo se è massimale.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Dimostriamo che la completezza implica la massimalità. Supponiamo $\mathfrak{F}$ non sia massimale, allora esiste un vettore x non nullo, di norma unitaria e perpendicolare a ogni $e_i \in \mathfrak{F}$. Di conseguenza si ha che $x_i = \langle x, e_i \rangle = 0$ e perciò

$$\overline{x} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i = 0.$$

Perciò $x = x - \overline{x} \in \overline{Span(\mathfrak{F})}^{\perp}$, ma allora non può appartenere a $\overline{Span(\mathfrak{F})}$ e dunque $\mathfrak{F}$ non può essere completo.

($\Leftarrow$) Viceversa, se $\mathfrak{F} = \{ e_i \}$ è massimale, allora sappiamo che a ogni vettore in X posso associare la serie $\sum x_i e_i$ convergente al vettore stesso, dunque x è un punto di accumulazione per l'insieme delle somme finite e quindi lo è, a maggior ragione, per $Span(\mathfrak{F})$. Vale quindi la tesi perché ogni elemento di X appartiene alla chiusura di $Span(\mathfrak{F})$. □

Osservazione 3.19. È nella seconda parte della dimostrazione ($\Leftarrow$) che usiamo che X sia di Hilbert. Infatti senza la completezza dello spazio non è più necessariamente vero il teorema delle basi di Hilbert, perciò non potremmo più approssimare un generico elemento di X con una serie di elementi in $Span(\mathfrak{F})$.

Proposizione 3.20. *Uno spazio di Hilbert X di dimensione infinita ammette una base di Hilbert $\mathfrak{F}$ numerabile se e solo se è separabile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Notiamo che, essendo $Span(\mathfrak{F})$ denso in X e $Span_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{F})$ denso in $Span(\mathfrak{F})$, allora $Span_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{F})$ è un sottoinsieme denso in X e numerabile per ipotesi di numerabilità sul sistema $\mathfrak{F}$.

($\Leftarrow$) Viceversa, se per assurdo supponessimo $\mathfrak{F}$ più che numerabile troveremmo facilmente un assurdo grazie al criterio di non separabilitá (Proposizione 2.34). Possiamo infatti applicarla sfruttando il fatto che:

$$\forall\, e, e' \in \mathfrak{F} \quad \|e - e'\| = \sqrt{2}$$

e trovare così che X non è separabile. □

Osservazione 3.21. Più in generale, si può dimostrare che due basi distinte di un Hilbert hanno sempre la stessa cardinalità.

Abbiamo già osservato che l'esistenza di un sistema ortonormale massimale che completi un dato sistema per un dato spazio di Hilbert è garantita dal Lemma di Zorn. Quest'ultimo però si limita alla sola esistenza e non fornisce un metodo per trovare esplicitamente un sistema ortonormale massimale, né garantisce alcuna ipotesi su tale sistema. Per fare questo si può ricorrere all'algoritmo di Gram-Schmidt. Quindi, dato un sistema ortonormale, se questo risulta essere massimale l'algoritmo si ferma, altrimenti si prende un $x \notin \overline{Span(\mathfrak{F})}$, lo si ortogonalizza come mostrato:

$$\tilde{x} = x - \sum x_i e_i = x - \overline{x}$$

e lo si normalizza, scegliendo quindi:

$$e_{i+1} = \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}.$$

In alternativa, è possibile sfruttare il teorema spettrale, ma questa costruzione non è oggetto del corso.

Osservazione 3.22. Se X è uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, allora ogni base di Hilbert $\mathfrak{F} = \{e_i\}$ determina un'isometria di X in ℓ^2. Un esempio è l'applicazione che manda ogni $x \in X$ nella stringa delle sue coordinate rispetto $\mathfrak{F}$:

$$T : X \longrightarrow \ell^2$$

$$x = \sum x_i e_i \longmapsto \{x_i\}_{\mathbb{N}}.$$

Che sia un'isometria segue dal fatto che $\|x\|_X^2 = \sum x_i^2 = \|Tx\|_{\ell^2}^2$ (la linearità viene lasciata al lettore volenteroso). Tale applicazione è anche un'isomorfismo di spazi vettoriali, infatti iniettività e surgettività si riducono ad una veloce verifica:

- $Tx = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \sum x_i e_i = 0$
- $\forall a = \{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \ell^2$ prendendo $x = \sum a_i e_i$ si ha che $Tx = a$.

Teorema 3.23 (Identità di Parseval)**.** *Sia X spazio di Hilbert, allora:*

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi in due maniere distinte.

Possiamo usare l'applicazione T definita sopra e mostrare che essa preserva il prodotto scalare, vale a dire che per ogni x, y in X vale l'uguaglianza $\langle Tx, Ty \rangle_{\ell^2} = \langle x, y \rangle_X$. Per dimostrare ciò è sufficiente usare il fatto che l'applicazione T conserva la norma e concludere grazie alla formula di polarizzazione.

Alternativamente, si può sfruttare un'altra uguaglianza nota:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum (x_i+y_i)^2 - \sum (x_i-y_i)^2\right) = \sum x_i y_i.\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è vera grazie alla convergenza assoluta delle serie, che garantisce di poter sommare due serie sommando i loro coefficienti. □

Osservazione 3.24. Sottolineiamo come, data una base di Hilbert $\mathfrak{F}$ per uno spazio X di dimensione infinita, si ottiene che:

$$Span(\mathfrak{F}) \subsetneq \overline{Span(\mathfrak{F})} = X.$$

Quindi $Span(\mathfrak{F})$ è denso e non è chiuso, ovvero si scopre che i sottospazi di uno spazio di Hilbert non sono necessariamente chiusi.

In particolare un qualsiasi sottoinsieme proprio e denso di uno spazio di Hilbert non è completo.

Teorema 3.25. *Sia X spazio di Hilbert e $Y \subseteq X$ un suo sottospazio chiuso. Allora:*

(i) $\forall x \in X \quad \exists\, y \in Y \ \exists\, \tilde{y} \in Y^\perp$ *tali che* $x = y + \tilde{y}$*;*

(ii) *y e $\tilde{y}$ sono unici;*

(iii) *y è univocamente determinato come punto di minima distanza di Y da x.*

Osservazione 3.26. Osserviamo che, in breve, i primi due punti enunciano che X è la somma diretta di Y e $Y^{\perp}$.

Dimostrazione. Notiamo che Y, essendo un sottospazio chiuso di uno spazio completo, è a sua volta uno spazio completo.

(i) Si scelga $\mathfrak{F} = \{e_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ una base di Hilbert di Y e la si estenda a una base di Hilbert per X: $\mathfrak{F}' = \{e_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ con $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. Per ogni $x \in X$, $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i e_i$ si consideri $y = \sum_{i \in \mathcal{J}} x_i e_i$. Si ha che y è ben definito, $y \in \overline{Y} = Y$ e $x - y \perp \overline{Span(\mathfrak{F})} = Y$, quindi $\tilde{y} = x - y \in Y^{\perp}$.

(ii) Supponiamo $x = y_1 + \tilde{y_1} = y_2 + \tilde{y_2}$, allora $y_1 - y_2 (\in Y) = \tilde{y_2} - \tilde{y_1} (\in Y^{\perp})$ e poichè $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ si ha che $y_1 - y_2 = \tilde{y_1} - \tilde{y_2} = 0$ e quindi le due scritture coincidono.

(iii) Per ogni $z \in Y$ poniamo :

$$f(z) = \|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2.$$

A questo punto $x - y \in Y^{\perp}$ e $y - z \in Y$, quindi sono ortogonali per cui la norma al quadrato della somma coincide con la somma delle norme al quadrato, dunque:

$$f(z) = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 = f(y) + \|y - z\|^2 \geq f(y).$$

Quindi nell'ultima disuguaglianza vale l'uguale se e solo se si ha $z = y$, per cui y è il punto del sottospazio Y con la distanza minore da x.

□

Osservazione 3.27. L'ipotesi che Y sia chiuso è necessaria, altrimenti per esempio basterebbe scegliere Y denso non chiuso e si otterrebbe che $Y^{\perp} = \overline{Y}^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}$.

Lezione 15 (29 ottobre 2018)**.**

Teorema 3.28. *Sia $(X, \langle \, , \rangle)$ uno spazio di Hilbert, supponiamo $\lambda : X \to \mathbb{R}$ sia un' applicazione lineare e continua, allora esiste unico $y \in X$ tale che per ogni $x \in X$ valga*

$$\lambda(x) = \langle y, x \rangle.$$

Dimostrazione. Se $\lambda \equiv 0$ basta scegliere $y = 0$.

Supponiamo quindi che il $Ker(\lambda)$ non coincida con l'intero dominio, osserviamo che per continuità di λ esso deve essere un sottospazio chiuso, quindi $X = Ker(\lambda) \oplus Ker(\lambda)^\perp$.

Inoltre $\dim Ker(\lambda)^\perp = 1$, infatti se così non fosse, si avrebbe $\dim Ker(\lambda)^\perp > 1$ e quindi la restrizione del funzionale λ a tale sottospazio dovrebbe essere iniettiva poichè avrebbe nucleo banale, il che è assurdo dato che la dimensione dell'immagine può essere al più 1.

Prendiamo un vettore non nullo x_0 in $Ker(\lambda)^\perp$, $x_0 \neq 0$ e poniamo

$$y = \frac{\lambda(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0.$$

Per ogni $x \in Ker(\lambda)$ si ha che $x \perp y$ e quindi $\langle x, y\rangle = \lambda(x) = 0$.

Invece notiamo che:

$$\langle x_0, y\rangle = \frac{\lambda(x_0)}{\|x_0\|^2}\langle x_0, x_0\rangle = \frac{\lambda(x_0)}{\|x_0\|^2}\|x_0\|^2 = \lambda(x_0)$$

e poiché ogni vettore di $Ker(\lambda)^\perp$ è un multiplo di x_0 si ha che:

$$\langle x, y\rangle = \alpha\langle x_0, y\rangle = \alpha\lambda(x_0) = \lambda(x) \quad \forall x \in Ker(\lambda)^\perp.$$

Per quanto riguarda la parte di unicità, fissata una base di Hilbert $\mathfrak{F} = \{e_i\}$ sappiamo determinare univocamente le coordinate di y:

$$y_n = \langle e_n, y\rangle = \lambda(e_n),$$

quindi anche y risulta essere univocamente determinato. □

Osservazione 3.29. L'ipotesi che X sia di Hilbert è necessaria. Infatti, consideriamo $X = \left\{x \in \ell^2 \mid x_n = 0 \text{ definitamente}\right\} = Span(\{e_n\})$, il quale è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare ma non è di Hilbert. Prendiamo il funzionale:

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \langle x, y_0\rangle, \quad y_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\right),$$

questo è continuo su ℓ^2, e a maggior ragione lo è su X. Abbiamo già mostrato il vettore che rappresenta λ, il quale però non appartiene a X. Se supponessimo esistere un vettore in X che rappresenti λ dovremmo poterne determinare le coordinate:

$$y_n = \langle e_n, y\rangle = \lambda(e_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Queste sono però diverse da 0 per ogni n, quindi ancora si ha che $y \notin X$.

Esempio 3.30. Sia X uno spazio vettoriale di dimensione infinita dotato di prodotto scalare (non è necessario che sia uno spazio di Hilbert). Costruiamo un funzionale lineare non continuo.

Sia $\mathfrak{F} = \{e_i\}_{\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile. Possiamo allora definire il funzionale

$$\lambda(x) = \sum 2^i x_i \quad \forall\, x \in Span(\mathfrak{F}).$$

È ben definito e lineare in $Span(\mathfrak{F})$ poiché per ogni $x \in Span(\mathfrak{F})$ si ha che $x_i \neq 0$ solo per un numero finito di indici. Per il Lemma di Zorn esiste una base $\mathcal{B}$ di X che contiene il sistema ortonormale $\mathfrak{F}$ e posso così estendere linearmente il funzionale all'intero spazio vettoriale X. Tuttavia l'applicazione appena costruita non è continua, infatti è sufficiente considerare la successione di vettori $\{x_m\}$ definita da:

$$x_m = \frac{e_m}{2^m}.$$

La successione tende al vettore nullo poiché la norma dei vettori tende a 0, ma poichè $\lambda(x_m) \equiv 1$ si ha che

$$\lim_{m \to \infty} \lambda(x_m) = 1 \neq 0 = \lambda(0)$$

e quindi il funzionale è discontinuo nell'origine.

3.2 Spazi di Hilbert complessi

Sia ora X uno spazio vettoriale a coefficienti in $\mathbb{C}$. Lo dotiamo di un prodotto *hermitiano*, vale a dire un operatore $\langle\,,\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ che sia

- lineare nella prima variabile, cioè $\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle z, y\rangle$;
- anticommutativo, ovvero: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
- definito positivo, cioè $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Combinando le prime due proprietà si ottiene l'antilinearità della seconda componente:

$$\langle y, \alpha x + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle y, x\rangle + \overline{\beta}\langle y, z\rangle.$$

Inoltre si ha che $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$ e quindi $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Anche in questo caso è possibile definire una norma:

$$\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Ancora una volta, notiamo che è verificata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Analogamente al caso reale si definiscono le basi di Hilbert e si dimostra il teorema delle basi, con l'unica accortezza di definire:

$$x_i = \langle x, e_i \rangle,$$

e non lo stesso prodotto a termini invertiti, in quanto il prodotto hermitiano è lineare solo nella prima variabile.

Questa sottigliezza si ripercuote anche sul teorema di rappresentabilità, per antilinearità infatti abbiamo che:

$$\lambda(x) = \langle x, y \rangle \Rightarrow c\lambda(x) = \langle x, \overline{c}y \rangle.$$

3.3 Esercizi

Esercizio 3.31. *Sia* $X = \mathrm{L}^2([0,1], \mathcal{L}^1)$ *e* $Y = \{$*funzioni costanti su [0,1]*$\}$. *Trovare lo spazio ortogonale a* Y.

Notiamo che Y è chiuso, infatti lo sono tutti i sottospazi di dimensione finita di un Hilbert, e il nostro sottospazio è il generato dalla funzione $f \equiv 1$:

$$Y = Span(1).$$

Per questo

$$f \in Y^\perp \Leftrightarrow \langle f, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_X f \; dx = 0,$$

quindi troviamo:

$$Y^\perp = \left\{ f \in \mathrm{L}^2([0,1]) \middle| \int_0^1 f \; dx = 0 \right\}.$$

Esercizio 3.32. *Sia* $X = \mathrm{L}^2([-1,1], \mathcal{L}^1)$ *e* $Y = \{$*funzioni pari su [-1,1]*$\}$. *Si tratta di una buona definizione? È un sottospazio chiuso? Determinare infine lo spazio ortogonale a* Y.

Svolgimento. . Per dare una buona definizione bisogna tenere conto del fatto che una classe in L^p è definita al di fuori di un insieme di misura nulla, perciò basta definire le funzioni pari come le funzioni tali per cui valga la relazione $f(-x) = f(x)$ per quasi ogni x in $[-1,1]$.

Si può verificare la chiusura in due maniere distinte: è possibile usare la definizione e quindi mostrare che Y contiene ogni suo punto di accumulazione oppure mostrare che Y è il luogo di zeri di una funzione continua.

Per il primo modo consideriamo una successione $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ di funzioni pari, ovvero:

$$f_n(-x) = f_n(x) \quad \forall\, x \notin N_n \text{ con } N_n \text{ trascurabile.}$$

Supponiamo che f_n tenda a una certa f in L^2, vogliamo dimostrare che f è pari. Dalla convergenza in L^p segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza puntuale quasi ovunque

$$\exists n_k \text{ t.c. } f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \forall\, x \notin N, \text{ con } N \text{ trascurabile},$$

e quindi:

$$f_{n_k}(-x) \to f(-x) \quad \forall\, x \notin -N.$$

Da questo segue che:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \notin N \cup -N \cup \left(\bigcup N_{n_k}\right).$$

Quest'ultimo insieme, essendo unione numerabile di trascurabili, lo è a sua volta e quindi il limite della successione è pari.

Più elegantemente, avremmo potuto considerare:

$$Y = \{f \mid \quad Tf = 0 \text{ per q.o. } x\} \text{ con } (Tf)(x) = f(x) - f(-x).$$

A questo punto, se si dimostra che T è continua, segue che Y sia chiuso. Però T è chiaramente continua, in quanto differenza di due funzioni continue: l'identità e l'operatore di riflessione dell'argomento.

Per determinare $Y^\perp$ proviamo a caratterizzare le funzioni f tali per cui $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} fg\, dx = 0$ per ogni funzione pari g. Sfruttando che $g(x) = g(-x)$ quasi ovunque si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx &= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)g(x)dx \quad \text{poniamo } y = -x \\
&= \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_1^0 f(-y)g(-y)dy \\
&= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(-y)g(y)dy \\
&= \int_0^1 \left(f(x) + f(-x)\right) g(x)dx
\end{aligned}$$

Ora vorremmo che l'ultimo integrale si annulli per ogni funzione g in $\mathrm{L}^2([-1,1])$ pari, ma per la restrizione dell'integrale all'intervallo $[0,1]$ vogliamo che valga per ogni funzione $g \in \mathrm{L}^2([0,1])$. Quindi $f(-x) + f(x)$ deve essere ortogonale ad ogni funzione g di $\mathrm{L}^2([0,1])$ e perciò deve essere identicamente nulla quasi ovunque, ovvero la funzione f sull'intervallo $[-1,1]$ deve essere dispari.

Alternativamente, avremmo potuto notare che il prodotto puntuale tra una funzione pari e una dispari è sempre una funzione dispari e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico $[-1,1]$ è nullo. Questo garantisce che le funzioni dispari di $L^2[-1,1]$ siano contenute in $Y^\perp$. Per ottenere l'uguaglianza basta mostrare che ogni $f \in L^2([-1,1])$ si può scrivere come somma di una pari ed una dispari. Si può fare facilmente come di seguito:

$$f = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

□

Esercizio 3.33. *Sia $X = L^2([0,3],\mathcal{L}^1)$ e Y le funzioni periodiche di periodo 1 sull'intervallo $[0,3]$. Determinare se si tratta di una buona definizione e caratterizzare il suo spazio ortogonale $Y^\perp$.*

Svolgimento. Data una funzione f in $L^2([a,b])$ diremo che è *periodica* se esiste una costante $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per quasi ogni x dell'intervallo.

Per individuare $Y^\perp$ usiamo la definizione di spazio ortogonale, se f è una funzione di Y allora vale che :

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x)g(x)dx &= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_1^2 f(x-1)g(x)dx + \int_2^3 f(x-2)g(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g(x+1)dx + \int_0^1 f(x)g(x+2)dx \\
&= \int_0^1 f(x)[g(x)+g(x+1)+g(x+2)]\, dx.
\end{aligned}$$

Con la stessa osservazione dell'esercizio precedente notiamo che le funzioni periodiche di periodo 1 su $[0,3]$ se ristrette all'intervallo $[0,1]$ coincidono con lo spazio $L^2([0,1])$, perciò la funzione $[Tg](x) = g(x)+g(x+1)+g(x+2)$ deve essere identicamente nulla per quasi ogni x di $[0,1]$, quindi

$$Y^\perp = \left\{ g \in L^2([0,3]) \mid\, [Tg](x) = 0 \text{ per quasi ogni } x \text{ in } [0,1] \right\}$$

□

Lezione 16 (31 ottobre 2018)**.**

Proposizione 3.34. *Sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare tra spazi normati, allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

a) T continua;

b) T continua in 0;

c) T è "limitata", cioè esiste una costante c tale che $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ per ogni $x \in X$;

d) T è lipschitziana

Dimostrazione. Le implicazioni $d \Rightarrow a \Rightarrow b$ sono banali.

$b \Rightarrow c$) Se T è continua nell'origine allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|Tx - T0\|_Y \leq \varepsilon$ per ogni $x \in X$ tale che $\|x - 0\|_X \leq \delta$ ovvero $\|x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \varepsilon$. Poiché T è lineare, vale che:

$$T(x) = \frac{\|x\|_X}{\delta} T\Big(\delta \frac{x}{\|x\|_X}\Big).$$

In particolare

$$\Big\|\delta \frac{x}{\|x\|_X}\Big\|_X \leq \delta \implies \Big\|T\Big(\delta \frac{x}{\|x\|_X}\Big)\Big\|_Y \leq \varepsilon$$

quindi:

$$\|T(x)\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|x\|_X$$

Infine, per mostrare che $c \Rightarrow d$ basta osservare che:

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq c\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X.$$

□

Esercizio 3.35. *Sia $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura finita, allora per ogni $1 \leq p < q < \infty$ vale l'inclusione $\mathrm{L}^q(X, \mu) \subsetneq \mathrm{L}^p(X, \mu)$ e l'immersione è continua.*

Svolgimento. Mostriamo che ogni funzione in L^q è anche una funzione L^p. Si consideri una generica funzione $f \in \mathrm{L}^q$ e gli esponenti coniugati $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$, allora applicando la disuguaglianza di Hölder si ha che:

$$\begin{aligned}
(\|f\|_p)^p &= \int_X |f(x)|^p \, dx \\
&\leq \left(\int_X (|f(x)|^p)^{\frac{q}{p}} \, dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_x 1^{q/q-p} \, dx\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^q\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \mu(X)^{\frac{q-p}{q}} = (\|f\|_q)^p \cdot \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}.
\end{aligned}$$

per cui se imponiamo $\omega = \mu(X)^{\frac{q-p}{qp}}$ vale che :

$$\|f\|_p \leq \omega\|f\|_q \quad \forall f \in \mathrm{L}^q.$$

Si consideri ora l'applicazione di inclusione $T : L^q \hookrightarrow L^p$, allora per ogni successione di funzioni $\{f_n\}_{\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^q$ che converge a f in L^q vale la *limitatezza* della proposizione precedente:

$$\|T(f_n) - f\|_p = \|f_n - f\|_p \leq \omega\|f_n - f\|_q$$

ed essendo T lineare, per la proposizione precedente l'inclusione T è anche continua. □

Esercizio 3.36. *Consideriamo lo spazio ℓ^p delle successioni p-sommabili. Mostrare che $\ell^p \subsetneq \ell^q$ se $p < q$.*

Svolgimento. Sia $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ sia convergente, allora la successione può assumere valori superiori a 1 soltanto per un numero finito di indici, per cui, almeno definitivamente $|x_n|^p \geq |x_n|^q$ per ogni $q > p$.

Per mostrare che l'inclusione è stretta è sufficiente considerare le successioni $\{\frac{1}{n^\alpha}\}_{\mathbb{N}}$ al variare del parametro reale positivo α, infatti

$$\frac{1}{x^\alpha} \in \ell^p \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$$

e quindi le successioni con parametro compreso tra $\frac{1}{q}$ e $\frac{1}{p}$ sono successioni di ℓ^q ma non di ℓ^p. □

Esercizio 3.37. *Che relazione c'è fra* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *e* $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ *con* $p < q$ *?*

Soluzione. Non vale né un contenimento né l'altro.

Dal momento che $\mathrm{L}^p([0,1])$ e $\mathrm{L}^q([0,1])$ sono loro sottospazi e abbiamo visto che $L^p[0,1] \supsetneq \mathrm{L}^q[0,1]$, se ci fosse una relazione di contenimento dovremmo avere $L^p(\mathbb{R}) \supsetneq \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$.

D'altronde anche gli spazi ℓ^p e ℓ^q ammettono delle immersioni, tramite l'applicazione

$$T : \{x_n\}_{\mathbb{N}} \mapsto f(x) = \begin{cases} x_n & \text{se } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che l'immersione T è anche un'isometria, infatti:

$$\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx} = \sqrt[p]{\sum_{i \geq 0} |x_i|^p},$$

ma per quanto visto nell'esercizio precedente se ci fosse un contenimento sarebbe $L^p(\mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$. □

Esercizio 3.38. *Un sottoinsieme di ℓ^2 chiuso e limitato non è necessariamente compatto.*

Dimostrazione. Uno spazio di dimensione finita se è limitato, allora è anche totalmente limitato e se è chiuso allora è completo, quindi è uno spazio compatto. In dimensione infinita però un sottospazio limitato non è detto che sia totalmente limitato. Consideriamo per esempio la sfera unitaria di ℓ^2

(cioè gli elementi di ℓ^2 che hanno norma unitaria) e dimostriamo che non è possibile ricoprirla con un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$. Se prendiamo infatti un generico sistema ortonormale numerabile non finito $\mathfrak{F} = \{e_n\}_{\mathbb{N}}$ avremo che $\|e_n\|_2 = 1$ e che $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ per ogni $m \neq n$. Gli e_n quindi distano più di $\frac{1}{2}$ l'uno dall'altro e non è possibile ricoprirli con un numero finito di palle di tale raggio.

Dalle considerazioni fatte vale più in generale che in ogni spazio di Hilbert un qualunque sistema ortonormale $\mathfrak{F}$ numerabile non finito è un sottoinsieme limitato, in quanto ogni elemento ha norma 1, e chiuso in quanto una successione convergente a termini in $\mathfrak{F}$, definitivamente dovrebbe avere termini a distanza minore di $\sqrt{2}$ ma allora la successione è costantemente un elemento di $\mathfrak{F}$ (almeno definitivamente). Tuttavia un tale sottoinsieme non è mai compatto. □

Esercizio 3.39. *Il sottospazio* $Y = \{\mathbb{1}_E \mid E \subseteq [0,1],\ E \textit{ misurabile } \}$ *di* $\mathrm{L}^p[0,1]$ *è chiuso.*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che $Y \subseteq \mathrm{L}^p([0,1])$:

$$\int_0^1 |\mathbb{1}_E|^p \, dx \leq \int_0^1 1 \, dx.$$

Consideriamo una successione di insiemi misurabili $\{E_n\}_{\mathbb{N}}$ contenuti in $[0,1]$ tale che la successione delle funzioni indicatrici $\mathbb{1}_{E_n}$ tenda a una certa f in L^p; allora a meno di sottosuccessione si ha che $\mathbb{1}_{E_{n_k}}(x) \to f(x)$ per quasi ogni x di $[0,1]$, quindi esiste un sottoinsieme misurabile E di $[0,1]$ tale che la funzione f coincida con $\mathbb{1}_E$ quasi ovunque. □

Esercizio 3.40. *Trovare, se esiste, un sottoinsieme* E *di* $[0,1]$ *tale che per ogni intervallo* $I \subseteq [0,1]$ *valgano le disuguaglianze* $0 < |E \cap I| < |I|$.

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che $Y \subseteq \mathrm{L}^p$ è un sottospazio chiuso e quindi metrico completo. Si può quindi applicare il teorema di Baire per dimostrare l'esistenza di un sottoinsieme E che soddisfi la richiesta. Basta mostrare la tesi per $\{I_n\}$ intervalli base della topologia di $[0,1]$. Poniamo:

$$Z = \{\mathbb{1}_E \in Y \mid 0 < |E \cap I_n| < |I_n| \ \forall n\} = \bigcap_n A_n,$$

dove:

$$A_n = \{\mathbb{1}_E \in Y \mid 0 < |E \cap I_n| < |I_n|\}.$$

Bisognerebbe dimostrare che:

- A_n sono aperti;

- A_n sono densi in Y;

da cui Z è denso in Y, in particolare è non vuoto. Per il primo serve che la funzione $\mathbb{1}_E \to |E \cap I_n|$ sia continua, mentre per il secondo bisogna mostrare che si possono approssimare gli insiemi E tali che:

$$|E \cap I_n| = 0 \text{ o } |I_n|.$$

□

Lezione 17 (5 novembre 2018)**.**

Osservazione 3.41. Sia $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura, allora la funzione a valori in $\mathbb{R}$ definita da $T : f \mapsto \int_X f \; d\mu$ è continua in L^1. Grazie alla Proposizione 3.34, infatti, è sufficiente notare che:

$$\left| \int_X f \; dx \right| \leq \int_X |f| \; dx = \|f\|_1.$$

Inoltre se lo spazio è di misura finita, allora la stessa funzione $f \mapsto \int_X f \; d\mu$ è continua su L^p per ogni $p < \infty$, infatti, poiché la misura dell'intero spazio è finita, L^p si immerge con continuità in L^1

Alternativamente, usando la disuguaglianza di Hölder:

$$\left| \int_X f \; dx \right| \leq \|f\|_p \|1\|_q = \|f\|_p \; \mu(X)^{\frac{1}{q}}.$$

Osservazione 3.42. La funzione $f \to \int_E f \; dx$ non è ben definita su $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ per $p > 1$. L'integrale infatti può non avere valore finito, come nel caso di $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, oppure non esistere, come nel caso di $f(x) = \frac{sgn(x)}{1+|x|}$.

Esercizio 3.43. *Consideriamo* $Y = \{f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \mid f \textit{ a supporto compatto}\}$, *allora ci si può chiedere se l'integrale* $\int_E f \; dx$ *è ben definito per ogni* $f \in Y$ *e se la funzione che associa a ogni funzione in* Y *il valore dell'integrale è continua? Se non fosse continua, trovare una successione di funzioni in* Y *tali che* $f_n \to 0$ *in* L^p *ma* $\int_E f_n$ *non tenda a* 0*.*

Esercizio 3.44. *Trovare una base di Hilbert per lo spazio* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$*.*

Svolgimento. Cominciamo considerando $f_{0,0} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ e tutte le sue traslazioni al variare di n in $\mathbb{Z}$: $f_{0,n}(x) = f_{0,0}(x-n) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$. Queste formano un sistema ortonormale dato che sono funzioni di norma unitaria e ortogonali tra loro, tuttavia non si tratta ancora di un sistema massimale.

Procediamo quindi considerando $f_{1,0} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ e le sue traslazioni $f_{1,n}(x) = f_{1,0}(x-n)$ al variare di n tra gli interi. Ancora una volta notiamo che sono tutte di norma unitaria e che sono ortogonali in quanto definite su insiemi disgiunti. Mostriamo che sono ortogonali alle $f_{0,n}$ consideriamo $f_{1,m}$ e $f_{0,n}$, se $m \neq n$ allora le due sono definite su supporti disgiunti e quindi sono ortogonali, se invece $m = n$ troviamo che:

$$\int_{\mathbb{R}} f_{0,n}(x) f_{1,n}(x)\ dx = \int_{n}^{n+\frac{1}{2}} dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} dx = 0.$$

Procediamo adesso con $f_{2,0}(x) = f_{1,0}(2x)$ e quindi $f_{2,n}(x) = f_{2,0}(x - \frac{n}{2}) = f_{1,n}(2x - n)$. Queste hanno norma $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi bisogna rinormalizzare : $f_{2,n}(x) = \sqrt{2} f_{1,n}(2x)$. Proseguendo in questo modo otteniamo una famiglia di funzioni a due parametri:

$$f_{k,n}(x) = 2^{\frac{k-1}{2}} f_{1,0}(2^{k-1}x - n).$$

Mostriamo che tale famiglia $\mathfrak{F}$ è una base di Hilbert. Per ogni funzione vale $\|f\|_2 = 1$ e l'ortogonalità si dimostra in maniera analoga a quanto fatto per il caso $k = 2$, quindi il sistema è ortonormale. Per la massimalità è sufficiente mostrare che la chiusura $Y = \overline{Span(\mathfrak{F})}$ coincide con l'intero spazio $L^2(\mathbb{R})$. Procediamo per passi:

- $\mathbb{1}_{[0,2^k]} \in Y$.

  Infatti se $k = 0$ trovo $\mathbb{1}_{[0,1]} = f_{0,0}$, se $k = 1$ utilizzo $g_1 = \frac{1}{2}(f_{0,0} + f_{1,0})$ e in generale $g_k = \frac{1}{2}\left(g_{k-1} + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}} f_{k,0}\right)$.

- $\mathbb{1}_{[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]} \in Y$

  Si dimostra alla stessa maniera.

- $\mathbb{1}_{[\frac{n}{2^k}, \frac{m}{2^k}]} \in Y$.

  Queste si possono definire per mezzo di somme finite delle precedenti. Questo comporta dei problemi negli estremi che però hanno misura nulla e quindi non alterano gli integrali né la classe in L^2. Notiamo che da questo punto segue banalmente che ogni indicatrice di intervallo ad estremi razionali diadici appartiene ad Y.

- $\mathbb{1}_{[a,b]} \in Y \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

  Dato che stiamo considerando $\overline{Span\mathfrak{F}}$ basta trovare una successione di elementi appartenenti a $Span\mathfrak{F}$ che approssimi. I razionali diadici sono densi in $\mathbb{R}$, quindi possiamo trovare due successioni di diadici: $a_n \to a$ e $b_n \to b$. Con un rapido calcolo si verifica che $\mathbb{1}_{[a_n,b_n]} \to \mathbb{1}_{[a,b]}$ in L^2.

- $\mathbb{1}_A \in Y \quad \forall A$ aperto di misura finita

Noto che per ogni aperto A esistono $\{I_n\}$ intervalli numerabili e tali che A sia la loro unione disgiunta. Sappiamo dunque che $A_n = \bigcup_{m=1}^{n} I_n \in Y$, dobbiamo mostrare che $\mathbb{1}_{A_n} \to \mathbb{1}_A$ in L^2, a questo punto, essendo Y chiuso, si avrà che $\mathbb{1}_A \in Y$.

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_n}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_n}|^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-A_n} \; dx = |A - A_n| =$$

$$= |\bigcup_{m=n+1}^{+\infty} A_m| = \sum_{m=n+1}^{+\infty} |I_m|,$$

che in quanto coda di una serie convergente, tende a 0 quando $n \to 0$.

- $\mathbb{1}_E \in Y \quad \forall E$ misurabile di misura finita.

  Per definizione esistono $\{A_n\}$ aperti tali che: $E \subseteq A_n$ e $|A_n \setminus E| \to 0$. Devo mostrare che $A_n \to E$ in L^2, ma questo è vero:

  $$\|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_E\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_E|^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n \setminus E} \; dx = |A_n \setminus E| \to 0.$$

- $\{$funzioni semplici$\} \in Y$.

  In quanto Y è uno spazio vettoriale e le funzioni semplici sono combinazioni lineari di indicatrici di insiemi misurabili.

- Ogni funzione di $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ appartiene alla chiusura poiché le funzioni semplici sono dense in L^2.

□

Osservazione 3.45 (Base di Haar)**.** Modificando la base che abbiamo costruito si ottiene una base di Hilbert dello spazio $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ detta "di Haar". Definita $f_{1,0} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, basta consideriare la famiglia:

$$\mathfrak{F} = \left\{ f_{k,n}(x) = 2^{\frac{k}{2}} f_{1,0}(2^k x - n) \quad | \quad k, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Osservazione 3.46. Queste hanno integrale nullo. Ma l'integrale non è continuo in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quindi questo non crea problemi.

Data f a supporto compatto e di integrale non nullo, questa si approssima in L^2 con funzioni a integrale nullo.

Capitolo 4

Serie di Fourier

Lezione 18 (7 novembre 2018)**.**

D'ora in avanti con la scrittura $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ indicheremo lo spazio vettoriale complesso delle funzioni L^2 con dominio $[-\pi,\pi]$ e a valori in $\mathbb{C}$. Osservare che il prodotto scalare di tale spazio è definito come

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\ \overline{g}\ dx \qquad \forall f, g \in \mathrm{L}^2(-\pi,\pi).$$

Introduciamo un sistema ortonormale che risulterà fondamentale per lo sviluppo della teoria.

Teorema 4.1. *Poniamo* $\mathfrak{F} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}_{\mathbb{Z}}$, *allora* $\mathfrak{F}$ *è una base di Hilbert per* $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$.

Dalle proprietà di base di Hilbert segue il seguente

Corollario 4.2. *Data una funzione* $f \in \mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$, *poniamo*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\rangle \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

allora vale l'identià di Parseval e la serie

$$\sum_{\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx \text{ è convergente.}$$

Inoltre la successione delle somme parziali $\sum\limits_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ *converge a* f *in* L^2.

Sia K uno spazio metrico compatto, consideriamo gli spazi $\mathcal{C}(K)$ e $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ delle funzioni continue, a dominio in K e a valori, rispettivamente, reali e complessi. In entrambi consideriamo la metrica indotta dalla norma del *sup*.

Dato un sottoinsieme $\mathscr{A}$ di $\mathcal{C}(K)$ diremo che esso è un' **algebra** se è un sottospazio vettoriale chiuso rispetto al prodotto puntuale di funzioni e diremo che *separa i punti* di K se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in K$ esiste una funzione $f \in \mathscr{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Teorema 4.3 (Stone-Weierstrass)**.** *Se $\mathscr{A}$ è una sotto-algebra di $\mathcal{C}(K)$ che separa i punti e contiene le funzioni costanti, allora $\mathscr{A}$ è densa in $\mathcal{C}(K)$.*

Se $\mathscr{A}$ è una sotto-algebra di $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ che separa i punti, contiene le funzioni costanti ed è chiusa per coniugio ($f \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathscr{A}$), allora $\mathscr{A}$ è densa in $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.

Esempio 4.4. Consideriamo l'insieme delle funzioni polinomiali a dominio nell'intervallo $[0,1]$, allora abbiamo che esso è una sotto-algebra di $\mathcal{C}([0,1])$ che separa i punti (basta considerare l'identità $f(x) = x$) e contiene le costanti, quindi per il teorema di Stone-Weierstrass le funzioni polinomiali sono dense in $\mathcal{C}([0,1])$ e quindi ogni funzione continua su un intervallo reale compatto può essere approssimata con funzioni polinomiali.

Grazie al teorema appena enunciato proviamo a dimostrare che $\mathfrak{F} = \{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{\mathbb{Z}}$ è una base di Hilbert.

Quozientiamo l'intervallo reale $[-\pi,\pi]$ per la relazione che identifica gli estremi $-\pi$ e π (ottenendo così S^1) e poniamo allora $K = {}^{[-\pi,\pi]}/_{\sim} \simeq S^1$; chiamiamo *polinomi trigonometrici* gli elementi dello $Span(\mathfrak{F})$ e osserviamo che formano una sotto-algebra di $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.

Il polinomio trigonometrico e^{ix} separa K poiché è iniettivo a meno degli estremi $-\pi$ e π, inoltre $\mathfrak{F}$ contiene le costanti ed è chiusa per coniugio grazie alla relazione $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$. Valendo le ipotesi del Teorema di Stone-Weierstrass si ha che i polinomi trigonometrici approssimano, secondo la norma del sup, le funzioni continue su K a valori complessi e tali che $f(-\pi) = f(\pi)$. Per mostrare che l'approssimazione vale anche per la norma L^2 è sufficiente osservare che

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2 \, dx} \leq \sqrt{2\pi(\|f-g\|_\infty)^2} = \sqrt{2\pi}\|f-g\|_\infty$$

e quindi se una successione converge per la norma $\|\cdot\|_\infty$ converge anche per $\|\cdot\|_2$ da cui la chiusura secondo la norma L^2 di $Span(\mathfrak{F})$ coincide con $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ che, a sua volta, è denso in $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$. Quindi $\mathfrak{F}$ forma un sistema ortonormale completo e per la caratterizzazione della massimalità vale che è una base di Hilbert per $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$.

4.1 Differenziabilità e decadimento dei coefficienti

Lezione 19 (8 novembre 2018).

Per quanto visto nella lezione precedente ogni funzione f in $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ può essere espressa tramite la sua serie di Fourier che converge a essa in norma L^2, vale a dire che per $N \to +\infty$ si ha che

$$\|\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} - f\|_2 \longrightarrow 0.$$

Mostreremo che sotto alcune ipotesi di differenziabilità della funzione si ha che la convergenza migliora e in un certo senso anche il *viceversa*, cioè con ipotesi sulla velocitá di decadimento dei coefficienti e quindi con il miglioramento della convergenza della serie posso avere informazioni sul grado di differenziabilità della funzione.[2]

Consideriamo inzialmente funzioni $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ che siano $\mathcal{C}^1$ sull'intero dominio e tali che il valore agli estremi dell'intervallo coincida, vale a dire $f(-\pi) = f(\pi)$.

Teorema 4.5. *Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{C}^1$ tale che $f(-\pi) = f(\pi)$, allora la serie $\sum\limits_{\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2$ converge, quindi anche la serie del modulo dei coefficienti $\sum_{\mathbb{Z}}|c_n|$, quindi la serie di Fourier converge totalmente.*

Per la dimostrazione dimostriamo preliminarmente tre lemmi.

Lemma 4.6. *Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ come sopra, allora per ogni n in $\mathbb{Z}$ vale*

$$c_n(f') = in \cdot c_n(f)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -inf(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = in\ c_n(f) \end{aligned}$$

□

Lemma 4.7. *Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ come sopra, allora la serie $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2$ converge.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che la norma L^2 della derivata di f è finita grazie all'ipotesi di derivabilità con continuità, per cui

$$(\|f'\|_2)^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |inc_n(f)|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2$$

e quindi la tesi.

□

Lemma 4.8. *Data una successione $\{c_n\}_{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$,se la serie $\sum\limits_{\mathbb{N}} n^2|c_n|^2$ è convergente, allora lo è anche $\sum\limits_{\mathbb{N}} |c_n|$.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\sum_{\mathbb{N}} |c_n| = \sum_{\mathbb{N}} n|c_n| \cdot \frac{1}{n} \leq \sqrt{\sum_{\mathbb{N}} n^2 |c_n|^2} \sqrt{\sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}}$$

□

Dimostrazione del Teorema 4.5. Per il secondo lemma la serie $\sum_{\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2$ è convergente. Grazie al terzo lemma vale la prima implicazione del teorema, mentre per avere la convergenza totale osserviamo che il modulo dei coefficienti coincide con $\|c_n e^{inx}\|_\infty$ per cui la serie converge totalmente.

□

Fissato un intero $k \geq 1$ con la notazione $\mathcal{C}^k_{per}$ indicheremo lo spazio delle funzioni $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ con classe di regolarità $\mathcal{C}^{k-1}$ sull'intero domino e $\mathcal{C}^k$ a tratti tali che tutte le derivate fino all'ordine $k-1$ coincidano negli estremi, vale a dire

$$\left[D^h(f)\right](-\pi) = \left[D^h(f)\right](\pi) \quad \forall\ h \leq k-1.$$

Con regolarità $\mathcal{C}^k$ a tratti si intende che è possibile dividere l'intervallo $[-\pi, \pi]$ in un numero finito di sottointervalli con parte interna disgiunta tra di loro e tali per cui la derivata $k-$esima sia continua e abbia limite finito in ogni estremo dei sottointervalli.

I tre lemmi precedenti per il caso $\mathcal{C}^1_{per}$ possono essere riadattati al caso generico con i seguenti risultati:

Lemma 4.9. *Sia $f \in \mathcal{C}^k_{per}$ allora*

(i) $c_n(D^h(f)) = (in)^h c_n(f) \quad \forall h \leq k;$

(ii) *la serie* $\sum_{\mathbb{Z}} |n|^{2k}|c_n|^2$ *è convergente;*

(iii) *data una successione* $\{c_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, *se la serie* $\sum_{\mathbb{N}} |n|^{2\beta}|c_n|^2$ *converge per un certo* $\beta > 0$, *allora la serie* $\sum_{\mathbb{N}} |n|^{\alpha}|c_n|$ *converge* $\forall \alpha < \beta - \frac{1}{2}$

Dimostrazione.

(i) Si dimostra per induzione sfruttando il procedimento usato nel caso $k = 1$.

(ii) È una conseguenza del primo punto e di quanto fatto nel caso $k = 1$.

(iii) Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che

$$\sum_{\mathbb{N}} |n|^{\alpha}|c_n| = \sum_{\mathbb{N}} |n|^{\alpha+(\beta-\alpha)} \frac{|c_n|}{|n|^{\beta-\alpha}} \leq \sqrt{\sum_{\mathbb{N}} n^{2\beta}|c_n|^2} \sqrt{\sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{n^{2(\beta-\alpha)}}}$$

e quindi $\sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{n^{2(\beta-\alpha)}}$ è finita se e solo se $2(\beta - \alpha) > 1$ e quindi se e solo se $\alpha < \beta - \frac{1}{2}$. □

Ora possiamo generalizzare i risultati precedenti con il

Teorema 4.10. *Sia* f *una funzione in* $\mathcal{C}^k_{per}$,*allora*

- *la serie* $\sum_{\mathbb{Z}} |n|^{2k}|c_n|^2$ *converge e per ogni* $\alpha < k - \frac{1}{2}$ *sono convergenti tutte le serie della forma* $\sum_{\mathbb{Z}} |n|^{\alpha}|c_n|$;
- *l'ordine di infinitesimo di* $|c_n|$ *è o-piccolo di* $|\frac{1}{n^k}|$ *per* $n \to \pm\infty$.
- *le serie* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f^h)e^{inx}$ *convergono totalmente alle funzioni* f^h *per ogni* $h \leq k - 1$.

Dimostrazione. Sono quasi tutti risultati immediati del lemma precedente. Per dimostrare l'ordine di infinitesimo dei coefficienti è sufficiente osservare che la successione $|n|^{2k}|c_n|^2$ è infinitesima (è sommabile) e quindi infinitesima lo è anche $\sqrt{|n|^{2k}|c_n|^2} = |n|^k|c_n|$. Per la convergenza assoluta delle serie associate alle derivate si ha che:

$$\sum \|c_n(f^{(h)})e^{inx}\|_{\infty} = \sum |(in)^h c_n(f)| \|e^{inx}\|_{\infty} = \sum |n|^h |c_n(f)|$$

e per quanto dimostrato se $h \leq k - 1 < k - \frac{1}{2}$ si ha convergenza totale delle derivate fino all'ordine $k - 1$-esimo. □

Teorema 4.11. *Data una funzione $f \in \mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$, se i coefficienti di Fourier $c_n(f)$ hanno ordine di infinitesimo $o(|\frac{1}{n^\alpha}|)$ per $\alpha > k+1$, allora la serie $\sum_{\mathbb{Z}} |n|^k |c_n|$ converge, da cui segue che f coincide quasi ovunque con una funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che sia 2π-periodica e $\mathcal{C}^k$.*

Dimostrazione. Se per ipotesi $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$ per $n \to \pm\infty$ con $\alpha > k+1$, allora $|n|^k |c_n(f)| = o\left(\frac{1}{|n|^\beta}\right)$ con $\beta > 1$ per cui $\forall \varepsilon > 0$ si ha che definitivamente $|n|^k |c_n(f)| \leq \frac{\varepsilon}{|n|^\beta}$ e quindi tranne che per un numero finito di indici vale la disuguaglianza

$$\sum_{\mathbb{Z}} |n|^k |c_n(f)| \leq \sum_{\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{|n|^\beta} < \infty.$$

Ricordiamo il teorema di scambio per le derivate: se una successione di funzioni $f_n \to f$ puntualmente, e la successione delle derivate $f'_n \to g_\infty$ uniformemente allora f è derivabile e il limite delle derivate è la derivata del limite: $f' = g_\infty$.

Nel nostro caso data la serie $\sum c_n(f) e^{inx}$ abbiamo visto che le serie delle derivate $\sum (in)^h c_n(f) e^{inx}$ convergono totalmente (e quindi uniformemente) fino all'ordine $k-$esimo e quindi f è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$. Osservare che le derivate rispettano ancora la relazione $c_n(f^{(h)}) = (in)^h c_n(f)$ precedentemente dimostrata in modo differente. □

Esercizio 4.12. *Calcoliamo i coefficienti di Fourier di alcune funzioni:*

- $f(x) = e^{i2x} \Rightarrow c_n(f) = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$
- $f(x) = cos(2x) = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \Rightarrow c_n(f) = \begin{cases} 0 & n \neq \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = \pm 2 \end{cases}$
- $f(x) = x$

  Se $n = 0$,si ha che

  $$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \; dx = 0$$

  .

  Se $n \neq 0$, allora

  $$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} \; dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[x \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ni} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \; dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi \frac{(-1)^n}{-in} \right) = i \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

- $f(x) = x^2$

  Se $n = 0$, si ha che

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \; dx = \frac{\pi^2}{3}$$

.

Se $n \neq 0$ posso usare il lemma sui coefficienti della derivata per cui

$$c_n(x^2) = \frac{c_n(2x)}{in} = 2\frac{c_n(x)}{in} = 2\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Una simpatica conseguenza di quanto appena fatto è la seguente

$$f(\pi) = \pi^2 = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0}\frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

e riorganizzando si ha che

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lezione 20 (12 novembre 2018)**.**

Sia $f \in \mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$, consideriamo allora le somme parziali

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{-N}^{N} e^{inx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \; dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{-N}^{N} e^{in(x-y)} \; dy \end{aligned}$$

e poniamo $D_N(x-y) = \sum\limits_{-N}^{N} e^{in(x-y)}$, per cui

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{-N}^{N}(e^{it})^n = e^{-itN}\sum_{0}^{2N}(e^{it})^n \\ &= \frac{e^{-it(N+\frac{1}{2})}}{e^{-it(\frac{1}{2})}}\left(\frac{e^{it(2N+1)}-1}{e^{it}-1}\right) \\ &= \frac{e^{it(N+\frac{1}{2})} - e^{-it(N+\frac{1}{2})}}{e^{it(\frac{1}{2})} - e^{-it\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \end{aligned}$$

poichè $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Se estendiamo $D_n(t)$ ponendo

$$\tilde{D}_N = \begin{cases} D_N(t) & \forall t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) D_N(x-y)\, dy = \frac{f * D_N(x)}{2\pi}.$$

Le funzioni $D_N(t)$, al variare di $N \in \mathbb{Z}$, conservano alcune proprietà comuni, esse infatti sono 2π-periodiche, pari, analitiche e il loro integrale su $[-\pi, \pi]$ vale sempre 2π, infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} e^{itn} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0it}\, dt = 2\pi.$$

Lemma 4.13. *Sia $\{g_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione di funzioni positive in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} g_n\, dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\forall r > 0$ valga*

$$\int_{-\infty}^{-r} g_n\, dx + \int_{r}^{\infty} g_n\, dx \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty;$$

allora per ogni funzione f continua su $\mathbb{R}$ si ha che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f * g_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ per } n \to \infty.$$

Osserviamo che la successione di funzioni $\{\frac{1}{2\pi}\tilde{D}_N\}_{\mathbb{Z}}$, anche se non sono positive, rispettano le altre ipotesi del lemma avendo integrale unitario sulla retta reale e tendendo ad "accumulare" le oscillazioni sull'origine per $N \to \pm\infty$, tuttavia non è vero che $\left(f * (\frac{1}{2\pi}\tilde{D}_N)\right)(x) \to f(x)$ per ogni funzione continua, per avere la convergenza è sufficiente però che f sia Holderiana .

Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano una costante positiva c e un esponente $\alpha \in (0, 1]$ per cui:

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|^{\alpha} \quad \forall x, y \in [-\pi, \pi];$$

allora, fissato un punto $x \in [-\pi, \pi]$, si ha che :

$$\begin{aligned} f * \tilde{D}_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t)\, dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} D_n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]\, D_N(t)\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{|t|^\alpha}\frac{|t|^\alpha}{\sin\frac{t}{2}}\ \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt \\
\text{(Holderianità)} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c\ \frac{|t|^\alpha}{\sin\frac{t}{2}}\ \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt.
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che $\frac{|t|^\alpha}{\sin\frac{t}{2}} \in \mathrm{L}^1[-\pi,\pi]$, infatti è $O\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right)$ per $t \to 0^+$ e quindi è possibile applicare il lemma di Riemann (4.23) per cui l'integrale tende a 0 per $n \to \pm\infty$.

4.2 Equazione delle onde ed equazione del calore

Lezione 21 (14 novembre 2018).

Equazione del calore.

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Proviamo a impostare il problema dell'equazione del calore

$$
\begin{cases}
u_t = \alpha\ u_{xx} & \text{equazione} \\
u(t,-\pi) = u(t,\pi) \quad \forall\ t \geq 0 & \text{condizioni al bordo} \\
u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) \quad \forall\ t \geq 0 & \quad\text{''} \\
u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x & \text{condizione iniziale}
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

e cerchiamo una soluzione $u(t,x) : [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ con $T > 0$.

Le condizioni che abbiamo imposto al bordo richiedono che la soluzione abbia almeno classe di regolarità $\mathcal{C}^2_{per}$, quindi proviamo a cercarne una esprimendola attraverso la sua serie di Fourier.

Formalmente si ha che

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)e^{inx} \qquad u(0,x) = u_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{inx}$$

allora derivando si ottiene

$$u_t(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}c_n(t)e^{inx}$$

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(t) e^{inx}$$

Per ottenere $u_t = u_{xx}$ è sufficiente eguagliare i coefficienti delle derivate, ottenendo così $\frac{d}{dt}c_n(t) = -n^2 c_n(t)$, infatti per ogni n in $\mathbb{Z}$, la funzione $c_n(t)$ risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

quindi $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$, per cui la funzione

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$$

risolve il problema dell'equazione del calore.

Lemma 4.14. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, consideriamo una successione di funzioni $\{f_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^1(\Omega)$ a valori reali. Se la serie associata a tale successione converge totalmente a una funzione f e convergono totalmente anche le somme delle n derivate parziali, vale a dire $\sum_{\mathbb{N}} \|\partial_{x_i} f_n\|_\infty < +\infty \quad \forall i$, allora la funzione f è di classe $\mathcal{C}^1$ sul dominio Ω.*

Teorema 4.15 (esistenza)**.** *Se la funzione $u_0(x)$ della condizione iniziale ha i coefficienti tali che la serie $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n^0|$ è convergente, allora*

(i) la funzione $u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$ è ben definita ed è continua sul dominio $[0,+\infty) \times [-\pi,\pi]$ ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $(0,+\infty) \times [-\pi,\pi]$;

(ii) $u(t,x)$ risolve il problema dell'equazione del calore;

(iii) se $u_0(x)$ è a valori reali, allora anche $u(t,x)$ è a valori reali.

Dimostrazione. (i) Ricordiamo che il limite di funzioni continue, se uniforme, è sempre continuo, quindi se mostrassimo che la convergenza delle serie è totale, avremmo la tesi e infatti

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \|c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}\|_\infty = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n^0| < \infty \text{ per ipotesi.}$$

Per quanto riguarda la derivabilità: per ogni coppia di interi positivi h e k e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$\varphi_{h,k}^{(n)}(t,x) = \frac{\partial^h}{\partial t^h} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}] = c_n^0 (-n^2)^h e^{-n^2 t} (in)^k e^{inx},$$

allora per ogni $\delta > 0$ si ha che

$$\sup\left\{|\varphi_{h,k}^{(n)}(t,x)| \;\middle|\; (t,x) \in [\delta,+\infty) \times [-\pi,\pi]\right\} = c_n^0 |n|^{2h+k} e^{-n^2\delta}$$

ed essendo la successione dei sup per $n \to \pm\infty$ infinitesima e dell'ordine di $o(e^{-n^2\frac{\delta}{2}})$ si ha che le serie associate a tali successioni convergono totalmente e per il lemma precedente, dato che tali serie convergono per ogni h e k positivi e per ogni δ strettamente maggiore di 0 si ha che $u(t,x) \in \mathcal{C}^\infty$.

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ poniamo $f_n = c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$ e osserviamo che risolvono l'equazione $u_t = u_{xx}$ per ogni (t,x) in $\mathbb{R}^2$. Avendo convergenza uniforme su $[0,+\infty) \times [-\pi,\pi]$ è possibile scambiare la derivata per cui anche la serie risolve l'equazione su tale dominio.

(iii) Ricordiamo preliminarmente che $c_n^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) e^{inx}\,dx$ e quindi che $c_{-n}^0 = \overline{c_n^0}$ dato che $u_0(x)$ è a valori reali.

$$\begin{aligned}
u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} &= c_0^0 + \sum_{n\geq 1}\left(c_n^0 e^{inx} + c_{-n}^0 e^{-inx}\right) e^{-n^2 t} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\,dx + \sum_{n\geq 1}\left(c_n^0 e^{inx} + \overline{c_n^0 e^{inx}}\right) e^{-n^2 t}
\end{aligned}$$

Vale la tesi poiché la somma di due valori complessi coniugati è reale. □

Teorema 4.16 (unicità). *Data una funzione $u : [0,T)\times[-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ continua sull'intero dominio e di regolarità $\mathcal{C}^2$ su $(0,T)\times[-\pi,\pi]$, se risolve il problema dell'equazione del calore, allora u è unica.*

Dimostrazione. Siano $c_n(t)$ i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $u(t,\cdot)$ al variare di t in $[0,T)$e mostriamone l'unicità in quanto soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}.$$

Sappiamo che i coefficienti sono dati dalla relazione

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x) e^{-inx}\,dx.$$

Per integrali dipendenti da parametro $c_n(t)$ è continua su $[0,T)$ ed è $\mathcal{C}^1$ in $(0,T)$ con

$$\partial_t c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \partial_t u(t,x)\; e^{-inx}\,dx = c_n(u_t(t,\cdot)).$$

Poiché $u_t = u_{xx}$ i coefficienti delle derivate devono coincidere, per cui $c_n(u_t(t,\cdot)) = c_n(u_{xx}(t,\cdot))$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \partial_t u(t,x)\ e^{inx}\ dx = (-in)^2 c_n(t)$$

da cui

$$\dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t).$$

□

Lezione 22 (15 novembre 2018)**.**

Equazione delle onde.

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

e proviamo a impostare un problema con tale equazione

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\ u_{xx} & \text{equazione} \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) \quad \forall\ t > 0 & \text{condizione al bordo} \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) \quad \forall\ t > 0 & \quad " \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in [-\pi,\pi] & \text{condizione iniziale} \\ u_t(0,x) = u_1(x) \quad \forall x \in [-\pi,\pi] & \quad " \end{cases}$$

e cerchiamo una soluzione $u(t,x) : [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ con $T > 0$.

Risoluzione Formale. Possiamo provare a cercare una soluzione espressa come serie di Fourier eguagliando i coefficienti delle derivate parziali. Una volta che avremo trovato dei coefficienti che rispettino l'equazione, dovremo mostrare che *ben definiscono* una soluzione e allora enunceremo e dimostreremo rigorosamente i teoremi di esistenza e unicità.

Imponiamo quindi

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$$

e le condizioni iniziali

$$u_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{inx} \qquad u_1(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^1 e^{inx}$$

per cui le derivate parziali saranno:

$$u_{tt} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \ddot{c}_n(t) e^{inx} \qquad u_{xx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (in)^2 c_n(t) e^{inx}.$$

Per soddisfare l'equazione imponiamo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, ed eguagliamo i coefficienti:

$$\ddot{c}_n(t) = -c^2 n^2 c_n(t).$$

per cui il coefficiente ennesimo deve risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -c^2 n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1. \end{cases}$$

Per $n = 0$ si ha che

$$\begin{cases} \ddot{y} = 0 \\ y(0) = c_0^0 \\ \dot{y}(0) = c_0^1. \end{cases} \implies c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$$

mentre per ogni intero non nullo è di facile verifica che i coefficienti della forma

$$c_n(t) = c_n^0 \cos(cnt) + \frac{c_n^1}{cn} \sin(cnt)$$

risolvono il problema di Cauchy.

Per $n \neq 0$ possiamo scrivere i coefficienti nella forma $\alpha_n e^{icnt} + \beta_n e^{-icnt}$, infatti:

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n^0 \cos(cnt) + \frac{c_n^1}{cn} \sin(cnt) \\ &= \frac{c_n^0}{2} \left(e^{icnt} + e^{-icnt}\right) + \frac{c_n^1}{2icn} \left(e^{icnt} - e^{-icnt}\right) \\ &= \left(\frac{c_n^0}{2} + \frac{c_n^1}{2cni}\right) e^{icnt} + \left(\frac{c_n^0}{2} - \frac{c_n^1}{2cni}\right) e^{-icnt} \\ &= \alpha_n e^{icnt} + \beta_n e^{-icnt} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \alpha_n e^{in(ct+x)} + \sum_{n \neq 0} \beta_n e^{-in(ct-x)} \\ &= c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^-(x+ct) + \varphi^+(x-ct). \end{aligned}$$

Notiamo che φ^- e φ^+ sono a media nulla e sono la somma di due onde che traslano una in verso opposto all'altra. Giustifichiamo ora il risultato ottenuto con un teorema di esistenza e uno di unicità.

Teorema 4.17 (esistenza I). *Se le condizioni iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$ sono tali che entrambe le serie associate $\sum_{\mathbb{Z}} n^2 |c_n^0|$ e $\sum_{\mathbb{Z}} |n \cdot c_n^1|$ siano convergenti, allora la funzione:*

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left(\alpha_n e^{in(x+ct)} + \beta_n e^{in(x-ct)}\right)$$

definisce una funzione $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times[-\pi,\pi])$ *(o meglio* $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 2π*-periodica) che risolve il problema.*

Dimostrazione. Affinché $u(t,x)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, è sufficiente che per ogni coppia di interi $h,k\geq 0$ e tali che $h+k\leq 2$ si abbia la convergenza totale di

$$\sum_{n\neq 0}\partial_x^h\partial_t^k\left[\alpha_n e^{in(x+ct)}+\beta_n e^{in(x-ct)}\right]$$

Svolgeremo soltanto il caso $h=2$ e $k=0$. Ricordiamo intanto che

$$\alpha_n=\left(\frac{c_n^0}{2}+\frac{c_n^1}{2cni}\right)\qquad\beta_n=\left(\frac{c_n^0}{2}-\frac{c_n^1}{2cni}\right)$$

Derivando si ha

$$\sum_{n\neq 0}\partial_x^2\left[\alpha_n e^{in(x+ct)}+\beta_n e^{in(x-ct)}\right]=\sum_{n\neq 0}(-n^2)\left[\alpha_n e^{in(x+ct)}+\beta_n e^{in(x-ct)}\right]$$

per cui la serie dei *sup* al variare di $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ è dominata da

$$\sum_{n\neq 0}\left|c_n^0\right|n^2+\sum_{n\neq 0}\left|n\ c_n^1\right|$$

che è finita per ipotesi e quindi vale la convergenza totale della derivata.

È chiaro che u sia 2π-periodica in x, e perciò soddisfa le condizioni al bordo. □

Lemma 4.18. *Siano* φ^+ *e* φ^- *due funzioni di classe* $\mathcal{C}^2_{per}$ *e* c_0^0 *e* c_0^1 *due costanti reali, allora la funzione:*

$$u(t,x)=c_0^0+c_0^1t+\varphi^+(x-ct)+\varphi^-(x+ct),$$

è di classe $\mathcal{C}^2$ *e risolve il problema* $u_{tt}=c^2u_{xx}$ *con le condizioni al bordo.*

Dimostrazione. Le verifiche che la funzione sia $\mathcal{C}^2$ e rispetti le condizioni al bordo sono lasciate al lettore.

Per verificare che risolva l'equazione è sufficiente derivare :

$$u_{tt}=(-c)^2\ddot{\varphi}^+(x-ct)+c^2\ddot{\varphi}^-(x+ct)$$

$$u_{xx}=\ddot{\varphi}^+(x-ct)+\ddot{\varphi}^-(x+ct).$$

□

Teorema 4.19 (esistenza II)**.** *Sia $u_0(x) \in \mathcal{C}^2_{per}$ e $u_1(x) \in \mathcal{C}^1_{per}$, allora esiste una soluzione del problema nella forma:*

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x - ct) + \varphi^-(x + ct),$$

dove $\varphi^+, \varphi^- \in \mathcal{C}^2$.

Dimostrazione. Cerchiamo $\varphi^+, \varphi^- \in \mathcal{C}^2_{per}$ e c_0^0, c_0^1 tali che:

$$\begin{cases} u(0,x) = c_0^0 + \varphi^+(x) + \varphi^-(x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = c_0^1 - c\dot{\varphi}^+(x) + c\dot{\varphi}^-(x) = u_1(x). \end{cases}$$

Derivando la prima equazione:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^+(x) + \dot{\varphi}^-(x) = \dot{u}_0(x) \\ -\dot{\varphi}^+(x) + \dot{\varphi}^-(x) = \frac{1}{c}\left(u_1(x) - c_0^1\right). \end{cases}$$

Le funzioni al RHS sono entrambe di classe $\mathcal{C}^1$ a media nulla, il determinante della matrice associata al sistema non è nullo, segue che esistono e sono uniche le soluzioni del sistema $\dot{\varphi}^+$ e $\dot{\varphi}^-$ funzioni $\mathcal{C}^1_{per}$ a integrale nullo su $[-\pi, \pi]$. Il prossimo lemma garantisce che le primitive siano $\mathcal{C}^2_{per}$. □

Lemma 4.20. *Se $f \in \mathcal{C}^k_{per}$ e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, allora ogni primitiva F ha regolarità $\mathcal{C}^{k+1}_{per}$.*

Dimostrazione. Per il teorema del calcolo integrale ogni primitiva F è $\mathcal{C}^{k+1}$ e vale che

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0,$$

quindi $F(-\pi) = F(\pi)$. □

Il teorema di unicità si dimostra esattamente come per l'equazione del calore.

Teorema 4.21 (unicità)**.** *Siano $T_0 \le 0 \le T_1$ e $u : [T_0, T_1] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^2$ soluzione del problema, allora u è unica.*

Dimostrazione. Siano $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t, \cdot)$:

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t,x) e^{-inx}\, dx.$$

Allora si ha che c_n è di classe $\mathcal{C}^2$ e risolve:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 c^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1. \end{cases}$$

Quindi grazie al teorema di Cauchy ogni c_n è univocamente determinato. □

Lezione 23 (19 novembre 2018)**.**

Esercizio 4.22. *Consideriamo un successione di funzioni positive* $\{g_n\}_{\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *tali che* $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\ dx = 1$ *e il supporto di* g_n *sia contenuto all'interno dell'intervallo* $[-\delta_n, \delta_n]$ *con* $\delta_n \to 0$*. Allora se una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua in* $\tilde{x} \in \mathbb{R}$*, allora* $f * g_n(\tilde{x}) \to f(\tilde{x})$*.*

Svolgimento. Poiché le funzioni della successione hanno integrale unitario su $\mathbb{R}$ si ha che

$$\begin{aligned} f * g_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{x} - y) g_n(y)\ dy - f(\tilde{x}) \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} [f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})] g_n(y)\ dy \end{aligned}$$

per cui vale la stima $|f * g_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})| g_n(y)\ dy$.

Osserviamo che, grazie alla continuità di f in $\tilde{x}$, si ha che

$$\sup_{-\delta_n \leq y \leq \delta_n} |f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})| \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

e quindi è possibile concludere:

$$\begin{aligned} |f * g_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})| g_n(y)\ dy \\ &= \int_{-\delta_n}^{\delta_n} |f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})| g_n(y)\ dy \\ &\leq \sup_{-\delta_n \leq y \leq \delta_n} |f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})| \int_{-\delta_n}^{\delta_n} g(y)\ dy \\ &= \sup_{-\delta_n \leq y \leq \delta_n} |f(\tilde{x} - y) - f(\tilde{x})| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.23 (Riemann)**.** *Per ogni funzione* g *in* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*, si ha che*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\alpha x)\ dx = 0$$

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione preliminare per il caso in cui g è continua e con supporto contenuto in un intervallo $[-m, m]$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\alpha x)\ dx &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \frac{\pi}{\alpha}) \sin(\alpha t - \pi)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \frac{\pi}{\alpha})(-\sin(\alpha t))\ dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x - \frac{\pi}{\alpha}) \sin(\alpha x)\ dx. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\alpha x)\ dx &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\alpha x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\frac{\pi}{\alpha})\sin(\alpha x)dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x)-g(x-\frac{\pi}{\alpha})\right]\sin(\alpha x)\ dx\end{aligned}$$

Poiché $g(x) - g(x-\frac{\pi}{\alpha})$ è continua e il supporto è contenuto in un insieme compatto K, allora la funzione deve essere limitata, per cui

$$\left[g(x)-g(x-\frac{\pi}{\alpha})\right]\sin(\alpha x)$$

può essere dominata grazie ad una funzione che assuma il valore $(2\sup g(x))$ su K e sia nulla fuori dal compatto in questione. Poiché l'integranda tende alla funzione identicamente nulla e vale il teorema di convergenza dominata, allora si ha la tesi.

Se invece consideriamo una generica funzione $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, per la densità delle funzioni continue a supporto compatto in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\tilde{g} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R})$ tale che $\|\tilde{g} - g\|_1 \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\alpha x)\ dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} (g(x)-\tilde{g}(x))\sin(\alpha x)\ dx\\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)-\tilde{g}(x)|\sin(\alpha x)\ dx\\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx + \|g-\tilde{g}\|_1\\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx + \varepsilon\end{aligned}$$

Ricordando che l'integrale $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx$ rispetta le condizioni del caso precedente, vale che

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\alpha x)\ dx \leq \limsup_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx + \varepsilon = \varepsilon.$$

D'altra parte

$$\liminf_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\alpha x)\ dx \geq \liminf_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)\sin(\alpha x)\ dx - \varepsilon = -\varepsilon.$$

Per arbitrarietà di ε si può concludere che

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\alpha x)\ dx = 0.$$

□

Esercizio 4.24. *Trovare le soluzioni di*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + cos(x) \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

Soluzione formale. Ponendo $u(t,x) = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx}$, allora si ha che

$$u_t(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{c}_n(t)e^{inx}$$
$$u_{xx}(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(t)e^{inx}$$
$$cos(x) = \frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix}$$

così posso imporre

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \dot{c}_n(t)e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(t)e^{inx} - \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)e^{inx} + \left(\frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix}\right)$$

e eguagliando i coefficienti si ha che i $c_n(t)$ devono risolvere

$$\begin{cases} \dot{y} = (-n^2 - 1)y + \frac{1}{2}\delta_{n,-1} + \frac{1}{2}\delta_{n,1} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Se $n = \pm 1$ allora l'equazione è $\dot{y} = -2y + \frac{1}{2}$ e quindi le soluzioni sono

$$c_{\pm 1}(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4},$$

mentre per $n \neq \pm 1$ l'unica soluzione è la funzione identicamente nulla. Per cui la soluzione del problema è

$$u(t,x) = \frac{1}{4}(1 - e^{-2t})(e^{-ix} + e^{ix}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})cos(x).$$

Lezione 24 (21 novembre 2018)**.**

Esercizio 4.25. *Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del sistema:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u_{xx}(\cdot, -\pi) = u_{xx}(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = x \end{cases}$$

Svolgimento. Nell'esercizio 4.12 avevamo calcolato i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = x$ per cui i coefficienti c_n^0 della condizione iniziale sono dati da

$$c_n^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ i\frac{(-1)^n}{n} & \text{se } n \neq 0 \end{cases}.$$

Calcolando u_t e u_{xxx} si ha che i coefficienti delle serie di Fourier soddisfano la condizione

$$\dot{c}_n(t) = -in^3 c_n(t),$$

e che quindi il coefficiente ennesimo risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -in^3 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y(t) = \alpha e^{-in^3 t} \\ y(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ i\frac{(-1)^n}{n} & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

per cui:

$$c_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \frac{(-1)^n i}{n} e^{-in^3 t} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sostituendo nella serie troviamo che:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n i}{n} e^{-in^3 t} e^{inx} \\ &= \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n i}{n} e^{in(x - n^2 t)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n i}{n} e^{i(nx - n^3 t)} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n i}{-n} e^{i(n^3 t - nx)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n i}{n} \left(e^{i(nx - n^3 t)} - e^{-i(nx - n^3 t)} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{-2(-1)^n}{n} \sin(nx - n^3 t) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2}{n} \sin(n^3 t - nx). \end{aligned}$$

Adesso dobbiamo verificare che questa sia davvero una soluzione e indagarne l'unicità. Occupiamoci in primis di quest'ultima, supponiamo quindi di avere una soluzione $u(t, x) : [0, T) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ che sia $\mathcal{C}^1$ nella prima variabile e $\mathcal{C}^3$ nella seconda. Sebbene l'ulteriore regolarità venga richiesta unicamente in $(0, T) \times [-\pi, \pi]$, c'è necessità della continuità sull'intero dominio, altrimenti, una volta fissate le condizioni iniziali, per trovare una soluzione basterebbe porre $u(t, x) = 0$ per $t > 0$.

Mostriamo che, se una soluzione rispetta le regolarità appena elencate, allora è unica. Consideriamo i coefficienti $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)e^{-inx}\,dx$, questi sono continui in 0 e rispettano la condizione iniziale $c_n(0) = c_n^0$. Sono inoltre $\mathcal{C}^1$ in $(0,T)$ e la derivata è data da

$$\frac{d}{dt}c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_t(t,x)e^{-inx}\,dx = c_n(u_t(t,x)).$$

Grazie al Lemma 4.6 sappiamo che

$$c_n(u_{xxx}(t,x)) = -in^3 c_n(u(t,x))$$

per cui i coefficienti di Fourier della soluzione risolvono il problema di Cauchy individuato nella risoluzione formale e ciò li individua univocamente.

Adesso sappiamo che, se una soluzione dovesse esistere, essa sarebbe unica, tentiamo perciò di dimostrarne l'esistenza. Per le ipotesi di regolarità su $u(t,x)$ il Teorema 4.10 garantisce la convergenza totale della serie su $(0,T)\times[-\pi,\pi]$, tuttavia per ogni $\delta > 0$ si ha che

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sup_{[\delta,T)\times[-\pi,\pi]} \left|\frac{-i(-1)^n}{n}e^{i(nx-n^3t)}\right| = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{-i(-1)^n}{n}\right| = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{n}\right|$$

e non vale quindi la convergenza totale, il che è assurdo.

Il problema quindi non ammette soluzione.

□

Esercizio 4.26. *Trovare una condizione iniziale $u_0(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty_{per}$ tale che il problema dell'equazione del calore* (4.1) *non abbia soluzione per tempi negativi, cioè per $t \in (-\delta, 0]$ per ogni δ positivo.*

Svolgimento. Se poniamo i coefficienti della condizione iniziale $c_n^0 = e^{-|n|}$, allora $u_0(x) \in \mathcal{C}^\infty$, infatti tutte le derivate

$$\partial_x^k u_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|n|}(in)^k e^{inx}$$

convergono totalmente e quindi posso applicare il Lemma 4.14 che mi garantisce la regolarità della funzione.

Supponiamo esista una soluzione definita in $(-\delta,0]\times[-\pi,\pi]$ che sia continua su tutto il dominio, $\mathcal{C}^1$ nella variabile t per tempi strettamente negativi e $\mathcal{C}^2$ nella seconda variabile sempre per tempi strettamente negativi. Tale soluzione per quanto visto avrebbe i coefficienti che risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

quindi $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t} = e^{-|n|}e^{-n^2 t}$ e quindi

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(|n|+tn^2)} e^{inx}.$$

Tuttavia per ogni t_0 fissato in $(-\delta, 0)$ la successione dei coefficienti $c_n(t_0)$ diverge per $n \to \pm\infty$, il che è assurdo perché $u(t_0, \cdot) \in \mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ per la sua regolarità, ma ogni funzione in $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ ha la successione dei coefficienti sempre infinitesima per questioni di convergenza($\|f\|_2^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |c_n|^2$). $\square$

Ci si potrebbe chiedere se esistono condizioni iniziali per cui il problema ammette soluzioni anche per tempi negativi. Rispettano tale condizione la famiglia dei polinomi trigonometrici, cioè le funzioni che hanno solo un numero finito di coefficienti di Fourier non nulli.

4.3 Varianti della serie di Fourier

Lezione 25 (22 novembre 2018).

Invece di considerare lo spazio complesso $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$, proviamo a considerare $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$, vale a dire le funzioni a valori reali con dominio $[-\pi,\pi]$ e a scriverne la *serie di Fourier reale.*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \end{aligned}$$

Teorema 4.27. *La famiglia* $\mathfrak{F} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\}_{\mathbb{N}}$ *è un sistema ortonormale massimale di* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$.

Proviamo a ricavare i coefficienti dalla serie di Fourier complessa:

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) \\ &= c_0 + \sum_{n\geq 1} \left[c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) + c_{-n}(\cos(nx) - i\sin(nx))\right] \\ &= c_0 + \sum_{n\geq 1} (c_n + c_{-n}) cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) sin(nx). \end{aligned}$$

quindi si ha che $a_0 = c_0, a_n = (c_n + c_{-n}), b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Osserviamo inoltre che f è a valori reali se e solo se $c_n = \overline{c_{-n}}$.

Consideriamo ora il caso delle funzioni in più variabili e quindi $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi]^2)$ lo spazio delle funzioni a valori complessi con dominio in $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

Notazione. Per comodità, dati due vettori $n = (n_1, n_2)$ e $x = (x_1, x_2)$, con la scrittura $n \cdot x$ intenderemo il loro prodotto $n_1 x_1 + n_2 x_2$.

Teorema 4.28. *La famiglia* $\mathfrak{F} = \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{inx} \middle| n \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ *è un sistema ortonormale massimale di* $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi]^2)$

Osservazione 4.29. Se $f \in \mathcal{C}^1_{per} = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} | f \in \mathcal{C}^1 e\ 2\pi{-}per\ in\ x_1\ e\ x_2\}$ allora $\forall n \in \mathbb{Z}^2$ vale che:

$$c_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = i n_1 c_n(f) \text{ da cui } \frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i n c_n e^{i n_1 x_1 + i n_2 x_2}$$

Teorema 4.30. *La famiglia* $\mathfrak{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \sin(nx) \right\}_{\mathbb{N}}$ *è un sistema ortonormale massimale di* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(0,\pi)$.

Dimostrazione. Derivo la scrittura di f dalla serie di Fourier reale in $[-\pi,\pi]$. Prendo quindi $\tilde{f}$ estensione dispari di f a $[-\pi,\pi]$(impongo che in 0 f valga 0, tanto su L^2 posso modificare i valori puntuali a piacimento).

$$\tilde{f}(x) = \cancel{a_0} + \sum_{n\geq 1} \cancel{a_n \cos(nx)} + b_n \sin(nx)$$

infatti

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx)\ dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(nx)\ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\ dx \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.31. *Se $f \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ e il valore al bordo è dato da $f(0) = f(\pi) = 0$, allora $b_n(f'') = -n^2 b_n(f)$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} b_n(f'') &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'' \sin(nx)\ dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\cancel{\Big[f'(x)\sin(nx)\Big]_0^\pi} - \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi f'(x)\cos(nx)\ dx = \\ &= \frac{2n}{\pi}\cancel{\Big[f(x)\cos(nx)\Big]_0^\pi} - \frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi f'(x)\sin(nx)\ dx = \\ &= -n^2 b_n \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.32. *Risolvere la seguente equazione alle derivate parziali per $x \in [0,\pi]$*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

Svolgimento. Consideriamo come sempre :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx) \quad \text{con} \quad b_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin(nx)\ dx \text{ e}$$

$$u_0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^0 \sin(nx), \;\; b_n^0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(t,x)\sin(nx)\ dx.$$

Allora:

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\sin(nx) = u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t)\sin(nx).$$

cioè $b_n(t)$ risolve : $\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = b_n^0 \end{cases}$. da cui ottengo $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$.

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^0 e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

è la soluzione cercata.

Teorema 4.33 (di Esistenza)**.** *Se u_0 è tale che $\sum |b_n^0| < \infty$, allora la soluzione $u : [0,\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ è continua e $\mathcal{C}^\infty$ su $(0,\infty) \times [0,\pi]$.*

Teorema 4.34 (di Unicità)**.** *Se $u : [0, \infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ è continua, $\mathcal{C}^1$ in t e $\mathcal{C}^2$ in x su $(0, T) \times [0, \pi]$ e risolve l'equazione differenziale, allora è unica.*

Osservazione 4.35. Le serie di Fourier per questo tipo di equazioni (calore, onde ecc.) sono comode poiché: $(e^{inx})'' = \lambda e^{inx}$ e $(\sin(nx))'' = \lambda \sin(nx)$, cioè sono autovettori rispetto all'operatore D^2.

Teorema 4.36. *Sia X spazio con prodotto scalare e X' sottospazio denso.$T : X' \to X$ lineare e autoaggiunto, cioè $Tx \cdot y = x \cdot Ty$, allora autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.*

Il teorema spettrale (non trattato nel corso) garantisce quando posso trovare un sistema ortonormale massimale di autovettori.

Esempio 4.37. Dimostriamo che $T := D^2 : X' \to X$ è autoaggiunto con $X = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ e $X' = \{u \in C^2([-\pi, \pi]) | u(-\pi) = u(\pi), \dot{u}(-\pi) = \dot{u}(\pi)\}$.

Dimostrazione. Siano u e $v \in X'$

$$
\begin{aligned}
Tu \cdot v &= \int_{-\pi}^{\pi} u''v \; dx = \\
&= \cancel{\Big[u'v\Big]_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} u'v' \; dx = \\
&= -\cancel{\Big[uv'\Big]_{-\pi}^{\pi}} + \int_{-\pi}^{\pi} uv'' \; dx = \\
&= u \cdot Tv
\end{aligned}
$$

□

Capitolo 5

Trasformata di Fourier

5.1 Definizioni e prime proprietà

Lezione 26 (28 novembre 2018).

Per quanto visto in precedenza data una funzione f in $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ sappiamo che è possibile associarle una serie di funzioni che converge alla funzione in L^2 :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\cdot e^{inx}, \quad \text{dove} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Tuttavia, nulla vieta di estendere l'intervallo. Sia $f : [-\alpha\pi, \alpha\pi] \to \mathbb{C}$, allora possiamo associare ad f una seconda funzione $\tilde{f}(x) = f(\alpha x)$ definita sull'intervallo $[-\pi,\pi]$ per cui valga

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx}\\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx}\\
(\alpha t \mapsto z) \qquad &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} \frac{1}{\alpha}f(z)e^{-in\frac{z}{\alpha}}\,dz\right)e^{inx}
\end{aligned}$$

e quindi per ogni $x \in [-\alpha\pi, \alpha\pi]$ la funzione iniziale è espressa da

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\alpha}\left(\int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} f(t)e^{-i\frac{n}{\alpha}t}\,dt\right)e^{i\frac{n}{\alpha}x}$$

Giunti a questo punto è lecito chiedersi se sia possibile rappresentare funzioni definite sull'intera retta reale; per farlo è necessario *passare al limite.*

Sfruttiamo la definizione di integrale come limite delle somme di Riemann. Data una funzione integrabile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} g(n\delta) \cdot \delta = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\ dy.$$

Riorganizzando la scrittura trovata per f è possibile osservare che coincide con una somma di Riemann se poniamo $\delta = \frac{1}{\alpha}$; per cui

$$f(x) = \sum_{y=\frac{n}{\alpha}, n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} f(t) e^{-iyt}\ dt \right) e^{iyx} \right] \frac{1}{\alpha}$$

e passando al limite per $\alpha \to \infty$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\ dt \right) e^{iyx}\ dy.$$

Sebbene i conti appena svolti siano del tutto *formali* (non abbiamo neanche dato ipotesi su f affichè la scrittura abbia senso), il risultato appena ottenuto è, se vogliamo, l'estensione della nozione di combinazione lineare dal caso delle somme discrete all'integrale continuo. I coefficienti di tale combinazione non dipendono più (come nel caso della serie di Fourier) da un parametro n intero, ma dal parametro reale y.

Questi nuovi "coefficienti" saranno l'argomento principale del capitolo. D'ora in avanti con la scrittura $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ intenderemo lo spazio complesso delle funzioni sommabili a valori in $\mathbb{C}$, vale a dire $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Definizione 5.1. Data una funzione f in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, definisco la **trasformata di Fourier** di f come la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data dalla relazione

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy}\ dx.$$

La *buona definizione* della trasformata è garantita dalla regolarità L^1 di f.

La trasformata è sempre continua sull'intera retta reale grazie alla dominazione data dalla funzione $g = |f|$.

La trasformata di una funzione è sempre infinitesima per $y \to \pm\infty$. Questa è una conseguenza della generalizzazione del lemma di Riemann (4.23).

Indichiamo con $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e infinitesime all'infinito e dotiamolo della norma del *sup*. La trasformata è un funzionale lineare

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

È un funzionale continuo, infatti è *limitato*:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}f\|_\infty &= \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy} dx \right| \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iyx}| \; dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \; dx = \|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Studiamo il comportamento della trasformata rispetto alle traslazioni:

- ricordando la notazione $\tau_h f(x) = f(x-h)$, si ha che

  $$\mathcal{F}[\tau_h f](y) = e^{-ihy} \cdot \mathcal{F}[f](y).$$

  Infatti valgono le uguaglianze

  $$\mathcal{F}[\tau_h f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(t+h)y} dt = e^{-ihy}\widehat{f}(y);$$

- per ogni δ reale e diverso da zero, poniamo $\sigma_\delta f(x) = \frac{1}{\delta} f(\frac{x}{\delta})$. Di conseguenza abbiamo che

  $$\left[\mathcal{F}(\sigma_\delta f)\right](y) = \left[\mathcal{F}f\right](\delta y),$$

  infatti valgono le uguaglianze

  $$\left[\mathcal{F}(\sigma_\delta f)\right](y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta} f(\frac{x}{\delta}) e^{-iyx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iy\delta t} dt = \left[\mathcal{F}f\right](\delta y).$$

Per quanto concerne la derivabilità dimostriamo un lemma preliminare e quindi la relazione tra la trasformata e la trasformata della derivata.

Lemma 5.2. *Se $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e anche la sua derivata appartiene a $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, allora* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \; dt.$$

Quindi per ipotesi di sommabilità di f' si ha che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \left(f(0) + \int_0^\infty f'(t) \; dt \right) \in \mathbb{R}.$$

Essendo anche f, per ipotesi, sommabile su $\mathbb{R}$ il limite a $\pm\infty$ è infinitesimo. □

Proposizione 5.3. *Sia $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, se anche la derivata $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, allora la trasformata della derivata è $\widehat{(f')}(y) = iy\widehat{f}(y)$.*

Dimostrazione. È una conseguenza delle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\widehat{(f')}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx \\
\text{(per parti)} \qquad &= \left[f(x)e^{-ixy}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-iy)e^{-iyx}\,dx \\
&= iy\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx = (iy)\widehat{f}(y).
\end{aligned}$$

Osservare che $\left[f(x)e^{-ixy}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ perché f è infinitesima per quanto visto nel lemma precedente. □

Lezione 27 (29 novembre 2018)**.**

Proposizione 5.4. *Sia f una funzione di $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tale che $xf(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, allora la trasformata $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la sua derivata è data dalla relazione $\frac{d}{dy}\widehat{f}(y) = [\mathcal{F}(-ixf)](y)$.*

Dimostrazione. Formalmente si ha che

$$\frac{d}{dy}\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dy}e^{-ixy}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-ixy}\,dx = [\mathcal{F}(-ixf)](y)$$

La derivazione sotto il segno di integrale può non essere rigorosa se l'intervallo di integrazione non è limitato, proviamo a sistemare la dimostrazione:

$$\frac{\widehat{f}(y+h) - \widehat{f}(y)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{e^{-ix(y+h)} - e^{-ixy}}{h}\right)\,dx$$

Avendo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-ix(y+h)} - e^{-ixy}}{h} = -ixe^{-ixy}$$

ci è sufficiente la convergenza dominata per avere la tesi, quindi

$$\begin{aligned}
\left|f(x)\frac{e^{-ix(y+h)} - e^{-ixy}}{h}\right| &\le |f(x)|\;|e^{-iyx}|\left|\frac{e^{-ixh}-1}{hx}\right||x| \\
&\le |x\;f(x)|\;\left\|\frac{e^{-it}-1}{t}\right\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Per ipotesi $xf(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $\frac{e^{-it}-1}{t}$ è limitata su tutto $\mathbb{R}$ per cui vale la dominazione e quindi la tesi. □

Diamo ancora una dimostrazione alternativa: indichiamo con $g(y)$ la trasformata della funzione $(-ix)f(x)$, allora è sufficiente mostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ vale la relazione $\widehat{f}(y) - \widehat{f}(0) = \displaystyle\int_0^y g(t)\ dt$. Sia $y > 0$, allora

$$\begin{aligned}
\int_0^y g(t)\ dt &= \int_0^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-itx} dx \right) dt \\
\text{(Fubini)} &= \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x) \left(\int_0^y e^{-itx} dt \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x) \left[\frac{e^{-ixt}}{-ix} \right]_0^y dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-ixy} - 1 \right)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\ dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \\
&= \widehat{f}(y) - \widehat{f}(0).
\end{aligned}$$

Osserviamo che è possibile invertire l'ordine di integrazione grazie al fatto che la funzione è globalmente L^1:

$$\int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} \left| -ixf(x)e^{-itx} \right|\ dx\ dt = \int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\ dx\ dt = y\|xf(x)\|_1.$$

Osservazione 5.5. Se f è una funzione di classe $\mathcal{C}^h$ e $f, f', ..., f^{(h)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, allora $\mathcal{F}[f^{(h)}](y) = (iy)^h \widehat{f}(y)$ e in particolare $\widehat{f}(y) = o\left(\dfrac{1}{|y|^h}\right)$ per $y \to \pm\infty$.

Se una funzione $f \in \mathrm{L}^1$ è tale che $x^h f \in \mathrm{L}^1$, allora la trasformata $\widehat{f}$ è di classe $\mathcal{C}^h$, e le sue derivate sono date da $\frac{d^h}{dy^h}\widehat{f}(y) = \mathcal{F}[(-ix)^h f](y)$.

Esercizio 5.6. *Calcoliamo la trasformata di Fourier di alcune funzioni*

- $f(x) = e^{-|x|}$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(y) = &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iyx}\ dx \\
= &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\big(\cos(yx) - i\sin(yx)\big)\ dx \\
= &\,2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(yx)\ dx \\
\textit{(integrando per parti 2 volte)} = &\,\frac{2}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

- $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$

$$\hat{f}(y) = \int_{-1}^{1} e^{-ixy}\ dx = 2\frac{\sin(y)}{y}.$$

- $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-iyx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - iyx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2 - \frac{y^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}\, dx \\
(*) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = e^{-\frac{y^2}{2}}.
\end{aligned}$$

In $(*)$ è stata fatta la sostituzione $x + iy = t \to dx = dt$. Non è però una mappa $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quindi non è esattamente un cambio di variabili. Si può interpretare però come un integrale complesso su $\gamma_1(t) = t + iy$, ma è equivalente farlo su $\gamma_2(t) = t$ con $t \in \mathbb{R}$; infatti per il teorema dei residui, gli integrali sui rettangoli chiusi aventi per basi i cammini $\gamma_{1,R}(t) = t + iy$ e $\tilde{\gamma}_{2,R}(t) = -t$ con $t \in [-R, R]$ sono sempre nulli perché non ci sono singolarità all'interno e gli integrali sulle altezze tendono a 0 per $R \to \infty$, quindi

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz + \int_{\tilde{\gamma}_{2,R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 0$$

e allora basta osservare che

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx \\
&\lim_{R\to+\infty} \int_{\tilde{\gamma}_{2,R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} (-1) e^{-\frac{1}{2}(-t)^2}\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt
\end{aligned}$$

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2}\, dx$$

Consideriamo la funzione complessa $f(z) = \dfrac{e^{-izy}}{1+z^2}$:

  - *Se $y > 0$, $|e^{-izy}|$ è limitata $\Leftrightarrow \mathfrak{Im}(z) < 0$*
  - *Se $y < 0$, $|e^{-izy}|$ è limitata $\Leftrightarrow \mathfrak{Im}(z) > 0$.*

$f(z)$ presenta due poli semplici $z_{1,2} = \pm i$ con rispettivi residui

$$r_{1,2} = \frac{e^{-i(\pm i)y}}{\pm 2i} = \pm \frac{e^{\mp y}}{2i}$$

. Consideriamo come sempre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz$$

A questo punto consideriamo le curve chiuse $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{2,R}$ che hanno come supporto l'unione tra la semicirconferenza centrata in 0 e raggio R, superiore e inferiore rispettivamente, e l'intervallo $[-R, R]$ e che sono percorse in senso antiorario e orario rispettivamente.
Se $y < 0$ allora, per la considerazione di prima, integro su $\gamma_{1,R}$, infatti:

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz + \int_{\partial^+ B(0,R)} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma_{1,R}} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz \overset{(*)}{=} 2\pi i r_1$$

e:

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial^+ B(0,R)} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz\Big| &\le \int_{\partial^+ B(0,R)} \frac{|e^{-izy}|}{|1+z^2|}\,dz \\ &\le \int_{\partial^+ B(0,R)} \frac{1}{1+R^2}\,dz = \frac{\pi R}{1+R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0\end{aligned}$$

L'uguaglianza $(*)$ vale per il teorema dei residui e in particolare vale per ogni $R > 1$, quindi:

$$\widehat{f}(y) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{e^{-izy}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \frac{e^y}{2i} = \pi e^y$$

In modo analogo si risolve per $y > 0$ con l'unica differenza che questa volta per applicare il teorema dei residui devo cambiare segno poiché $\gamma_{2,R}$ è percorsa in senso orario. Per concludere si ottiene quindi

$$\widehat{f}(y) = \pi e^{-|y|}$$

.

5.2 L'antitrasformata e il teorema di inversione

Lezione 28 (3 dicembre 2018).

Proposizione 5.7. *Siano f e g due funzioni in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, allora il loro prodotto di convoluzione $f * g$ appartiene ancora a $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ e vale che $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.*

Dimostrazione. Il prodotto $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ per quanto visto al Corollario 2.48, inoltre si ha che

$$\begin{aligned}
\widehat{f} \cdot \widehat{g}(y) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\ dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ity}\ dt\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i(x+t)y}\ dt\right]\ dx\\
(t+x \mapsto s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(s-x)e^{-isy}\ ds\right]\ dx\\
(Fubini) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(s-x)\ dx\right] e^{-isy}\ ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f * g]\,(s)e^{-iys}\ ds = \mathcal{F}(f * g)
\end{aligned}$$

Per applicare Fubini servirebbe che $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)g(t)|\ dt\ dx$ sia finito, ma questo è garantito dal teorema di Tonelli (1.58) e dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\ dt\ dx = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

□

Definizione 5.8. Data una funzione $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ definiamo l' *antitrasformata* di Fourier come

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}\ dy.$$

Tale funzionale viene indicato con $\mathcal{F}^*$ ed è aggiunto alla trasformata.

Teorema 5.9 (di inversione di Fourier)**.** *Sia f una funzione in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tale che anche la sua trasformata $\widehat{f}$ sia in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, allora*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{ixy}\ dy,\ \ \textit{cioè}\ [\mathcal{F}^*\mathcal{F}f](x) = 2\pi f(x).$$

Dimostrazione. Scelgo una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata tale che $g(0) = 1$, allora per $\delta \to 0$ l'integrale

$$\mathcal{I}(x) = \int g(\delta y)\hat{f}(y)e^{ixy}\ dy$$

tende puntualmente a

$$[\mathcal{F}^*\mathcal{F}f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{ixy}\ dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie alla dominazione data da $|g(\delta y)\hat{f}(y)e^{ixy}| \leq \|g\|_\infty |\widehat{f}(y)|$.

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\iint g(\delta y) f(t) e^{-iyt} e^{ixy} \; dt \; dy &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\delta y) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(x-t)y} \; dt \; dy \\
(Fubini) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\mathcal{F}^* g(\delta y)](x-t) \; dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{\delta} \check{g} \left(\frac{x-t}{\delta} \right) \right) \; dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\sigma_\delta \check{g} \right] (x-t) \; dt \\
&= \left(f * \sigma_\delta \check{g} \right) (x)
\end{aligned}$$

e per $\delta \to 0$ si ha che $\left(f * \sigma_\delta \check{g} \right) (x) \longrightarrow \left(\int \check{g}(t) dt \right) f(x)$ in L^1 (Teorema 2.65), quindi

$$[\mathcal{F}^* \mathcal{F} f](x) = const \cdot f(x).$$

Scelgo una funzione g con le proprietà richieste in precedenza e che mi permetta di applicare Fubini (è sufficiente che sia sommabile su $\mathbb{R}$) e tale che anche l'antitrasformata sia in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, un esempio è dato da :

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Dato che g è una funzione pari, allora la sua trasformata e la sua antitrasformata coincidono :

$$\widehat{g}(y) = \check{g}(y) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

e quindi vale la tesi, dato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(y) \; dy = 2\pi.$$

□

Osservazione 5.10. La trasformata di una funzione $f \in \mathrm{L}^1$ non è sempre una funzione sommabile. Un controesempio è dato da $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, infatti $\hat{f}(y) = 2\frac{\sin(y)}{y}$ non appartiene a $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

5.3 Estensione della trasformata allo spazio L^2

Lemma 5.11. *Se f è una funzione sia in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ che in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, allora anche la sua trasformata $\widehat{f}$ appartiene a $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ e $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.*

Dimostrazione. Data una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata tale che $g(0) = 1$ se consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\delta y)\widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\, dy,$$

allora per $\delta \to 0$ il limite è

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(y)|^2\, dy;$$

tuttavia non è detto che $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Scelgo quindi una funzione $g(y)$ continua, pari, positiva, decrescente per $y > 0$ e tale che $g(0) = 1$: per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha che $g(\delta y) \uparrow g(0)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(\delta y)|\hat{f}(y)|^2\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\delta y)\hat{f}(y)\overline{\hat{f}(y)}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\delta y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx\right)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity}\, dt\right)} \\
&= \iiint g(\delta y)f(x)\overline{f(t)}e^{iy(t-x)}dt\, dx\, dy \\
&= \iint f(x)\overline{f(t)}\left(\frac{1}{\delta}\check{g}\left(\frac{t-x}{\delta}\right)\right)\, dt\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\left(f * \sigma_\delta \check{g}\right)(t)\, dt = \langle f * \sigma_\delta \check{g}, f\rangle
\end{aligned}$$

e per $\delta \to 0$ il limite in L^2 è $c\langle f, f\rangle = c(\|f\|_2)^2$ e, come nella dimostrazione del teorema di inversione, la costante c è il valore dell'integrale dell'antitrasformata di g, quindi 2π. □

Osservazione 5.12. La stessa dimostrazione fatta per un'unica funzione f può essere effettuata anche per due funzioni f e g in $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ e mostra che

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle.$$

Una conseguenza del lemma appena dimostrato è la possibilità di estendere la trasformata di Fourier all'intero dominio $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Sappiamo che una funzione $f : E(\subseteq X) \to Y$ uniformemente continua tra due spazi metrici può essere estesa alla chiusura del dominio $\overline{E}$ con continuità se lo spazio Y in arrivo è *completo*. Per concludere quindi basta osservare che $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ è denso in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (pensare per esempio alle funzioni semplici) e il funzionale $\mathcal{F}$ della trasformata è uniformemente continuo.

Corollario 5.13. *È possibile estendere la trasformata di Fourier a ogni funzione in* L^2. *Per tale estensione vale ancora* $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.

Lezione 29 (5 dicembre 2018).

Lemma 5.14. *Sia f una funzione in* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *tale che per quasi ogni* $y \in \mathbb{R}$ *esiste il limite*

$$L(y) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)e^{-ixy}\ dy,$$

allora L coincide con $\hat{f}$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Poniamo, per ogni $N > 0$, $f_N = f \cdot \mathbb{1}_{[-N,N]}$; poiché ogni f_N appartiene a $L^2([-N,N])$, allora, per quanto visto nell' esercizio 3.35, appartiene anche a $\mathrm{L}^1([-N,N])$, quindi a $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ e applicando la trasformata si ha che $\widehat{f_N} = \int_{-N}^{N} f(x)e^{-ixy}\ dx$.

Da una parte sappiamo che se $f_N \to f$ in L^2, allora anche $\widehat{f_N} \to \widehat{f}$ in L^2; d'altra parte, per ipotesi, si ha che $\lim_{N\to\infty} \widehat{f_N}(y) = L(y)$ per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$, quindi $\widehat{f} = L$ quasi ovunque. □

Proposizione 5.15. *Per ogni funzione in* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *vale che* $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = 2\pi f$.

L'enunciato equivale a mostrare che $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = 2\pi Id$ e quindi se mostrassimo che vale l'uguaglianza per una famiglia di funzioni che è densa di $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ avremmo la tesi poiché due operatori continui che coincidono su un sottoinsieme denso coincidono anche sull'intero dominio.

Cerchiamo quindi un sottoinsieme di L^2 su cui sia possibile applicare il Teorema di inversione dimostrato per le funzioni in L^1 che hanno la trasformata ancora in L^1 (5.9). Per farlo sono sufficienti i seguenti due risultati: il primo ci dà alcune condizioni sufficienti affinchè la trasformata di una funzione sia in L^1, mentre il secondo garantisce una classe di funzioni che soddisfano largamente tali condizioni e che formano un sottoinsieme denso di L^2.

Proposizione 5.16. *Sia f una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ con un rappresentante di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e tale che la sua derivata sia in* $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$*, allora anche la trasformata $\hat{f}$ appartiene a* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathcal{F}[f'](y) = iy\widehat{f}$, allora, dato che $\mathcal{F}[f'] \in \mathrm{L}^2$, anche $|y|\widehat{f} \in \mathrm{L}^2$. Mostriamo che (chiamiamo $B = [-1,1]^C$):

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\ dy = \int_{-1}^{1} \hat{f}\ dy + \int_B \hat{f}\ dy$$

è limitato. Il primo addendo è minore uguale di $2\|\hat{f}\|_\infty$, mentre al secondo posso applicare la disuguaglianza di Holder :

$$\int_B \hat{f}\ dy = \int_B |y|\widehat{f}\ \frac{1}{|y|}$$

$$\begin{aligned}&\leq \left(\int_B |y|^2 \widehat{f}^2 \, dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B \frac{1}{|y|^2} dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|y\widehat{f}\,\|_{2(B)} \left\|\frac{1}{y}\right\|_{2(B)}\end{aligned}$$

e quindi ho la tesi. □

Lemma 5.17. *Indichiamo con $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R})$ le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con supporto compatto: esse formano un sottoinsieme denso di $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che L^p_c è denso in L^p. Ci basta quindi mostrare che $\mathcal{C}_c^\infty$ è denso in L^p_c: infatti, data $f \in \mathrm{L}^p_c$, poniamo $f_\varepsilon = f * \sigma_\varepsilon g$, dove

$$g \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1.$$

In questo modo abbiamo che le funzioni f_ε sono a supporto compatto e di classe $\mathcal{C}^\infty$ grazie alla regolarità di g, infatti non è difficile notare che f e g rispettano le ipotesi della Proposizione 2.63 per la differenziabilià del prodotto di convoluzione. Infine, per la Proposizione 2.65 $f_\varepsilon \to f$ in L^p. □

Proposizione 5.18. *Siano f e g due funzioni appartenenti a $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, allora $\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che $\mathcal{F}[fg]$ è ben definito perché il prodotto di due funzioni L^2 è una funzione L^1 per una semplice applicazione della disuguaglianza di Holder. Allo stesso modo $\hat{f} * \hat{g}$ è ben definito perché vale la disuguaglianza $|\hat{f} * \hat{g}| \leq \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2$ grazie al risultato ottenuto nel capitolo 2 con la condizione degli esponenti coniugati (2.53).

Sappiamo che $f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^*\mathcal{F}f$ e $g = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^*\mathcal{F}g$, per cui, *formalmente*,

$$fg = \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f\right) \left(\mathcal{F}^*\mathcal{F}g\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}^* \left[\hat{f} * \hat{g}\right]$$

e passando alla trasformata si avrebbe

$$\mathcal{F}\left[fg\right] = \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}\mathcal{F}^* \left[\hat{f} * \hat{g}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f} * \hat{g}\right);$$

tuttavia il passaggio contrassegnato con $(*)$ richiede che le funzioni $\hat{f}$ e $\hat{g}$ siano in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ come nella dimostrazione della Proposizione 5.7, per garantire lo scambio degli integrali:

$$\left(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f\right) \left(\mathcal{F}^*\mathcal{F}g\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t) e^{i(y+t)x} dt\right] \, dy$$

$$\begin{aligned}(y+t\mapsto z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(z-y)e^{izx}dz\right]\,dy\\ (*) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)\hat{g}(z-y)\,dy\right]e^{izx}\,dz\\ &= \mathcal{F}^*\left[\hat{f}*\hat{g}\right].\end{aligned}$$

Scegliamo quindi $f, g, \in \mathcal{C}_c^1$, allora f e $g \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, ciò rende i passaggi svolti sopra legittimi. Grazie al lemma precedente sappiamo che $\mathcal{C}_c^1$ è denso in L^2. Concludiamo notando che gli operatori:

$$(f,g) \to \mathcal{F}(fg)$$

$$(f,g) \to \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

sono entrambi continui (composizione di continue) e dunque se coincidono su un denso coincidono su tutto $\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2$. □

Esercizio 5.19 (Disuguaglianza isoperimetrica nel piano)**.** *Sia γ un curva chiusa e semplice di lunghezza L e con sostegno in $\mathbb{R}^2$. Sia A l'area della regione racchiusa da γ, allora*

$$4\pi A \leq L^2.$$

Dimostrazione. Supponiamo che γ sia di classe $\mathcal{C}^1$ e parametrizzata sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ in senso antiorario. Supponiamo inoltre che $|\dot{\gamma}| = const$, in questo modo

$$\begin{cases}\gamma(-\pi) = \gamma(\pi)\\ \dot{\gamma}(-\pi) = \dot{\gamma}(\pi)\end{cases}$$

e quindi $\gamma \in \mathcal{C}_{per}^1$, ammettendo così lo sviluppo in serie di Fourier

$$\gamma(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\gamma)e^{int}.$$

Sappiamo che $L = \int_{-\pi}^{\pi}|\dot{\gamma}|\,dt = 2\pi|\dot{\gamma}|$, allora

$$L^2 = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|\dot{\gamma}|^2\,dt = (2\pi)^2\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = (2\pi)^2\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2.$$

Per il teorema della Divergenza, dato un campo $\vec{E} = (S(x,y), T(x,y))$ su un sottoinsieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si ha che

$$\iint_{\Omega} div(\vec{E})\,dxdy = \int_{\partial\Omega^+} -T\,dx + S\,dy$$

dove con $\partial\Omega^+$ intendiamo una parametrizzazione del bordo in senso antiorario. Considero un campo a divergenza unitaria, per esempio $\vec{E} = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$, allora

$$\begin{aligned} A &= \iint_A div(\vec{E})\ dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_\gamma -y\ dx + x\ dy \\ &= -\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\gamma}\dot{\gamma}\ dt \end{aligned}$$

infatti, posto $z = x + iy$ si ha:

$$\overline{z}dz = (x - iy)(dx + idy) = xdx + ydy + i(xdy - ydx)$$

e qundi:

$$\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\gamma}\dot{\gamma}\ dt = \frac{i}{2}\int_\gamma \overline{z}dz = \frac{i}{2}\int_\gamma xdx + ydy + i(xdy - ydx),$$

ma poiché la forma $xdx + ydy$ è esatta in $\mathbb{R}^2$, allora l'integrale sul cammino chiuso γ è nullo. Quindi:

$$\frac{i}{2}\int_\gamma \overline{z}dz = \frac{1}{2}\int_\gamma ydx - xdy.$$

Perciò:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\gamma}\dot{\gamma}\ dt \\ &= -i\pi\langle\dot{\gamma}, \gamma\rangle \\ &= -i\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}(inc_n)\overline{c}_n = \pi\sum_{-\infty}^{+\infty} n|c_n|^2. \end{aligned}$$

Osservare che l'uguaglianza $\langle\dot{\gamma}, \gamma\rangle = \sum(inc_n)\overline{c_n}$ è dovuta all'adattamento del Teorema delle basi (3.14) agli spazi di Hilbert complessi.

Ora per disuguaglianza puntuale per ogni intero $n \in \mathbb{Z}$ tra gli addendi:

$$4\pi A = 4\pi^2\sum_{-\infty}^{+\infty} n|c_n|^2 \leq 4\pi^2\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2 = L^2.$$

Notiamo che $n = n^2$ se e solo se $n = 0$ o $n = 1$. Quindi per verificare l'uguaglianza (e massimizzare quindi l'area) è necessario che $c_n = 0$ per ogni $n \neq 0$ e $n \neq 1$, ovvero $\gamma(t) = c_0 + c_1e^{it}$, che è la parametrizzazione del bordo di un disco. □

Lezione 30 (10 dicembre 2018).

Osservazione 5.20 (Iniettività della trasformata di Fourier)**.** È facile verificare che la trasformata di Fourier è iniettiva su L^2 in quanto a meno di un fattore 2π è un'isometria. Per dimostrarlo su L^1 ricorriamo alla linearità e mostriamo che il nucleo è banale:

$$\widehat{f} = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\check{\widehat{f}} = \frac{1}{2\pi}\check{0} = 0 \quad q.o.$$

Proviamo a estendere la scrittura in serie di Fourier anche alle funzioni L^1.

Proposizione 5.21. *Sia $f \in \mathrm{L}^1(-\pi, \pi)$, imponiamo come coefficienti della serie di Fourier*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx,$$

allora sono infinitesimi per $n \to \pm\infty$ e individuano univocamente f.

Dimostrazione. Il primo risultato è una semplice conseguenza del Lemma di Riemann, infatti $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ se viene estesa alla funzione nulla fuori dall'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Per quanto riguardo l'univocità, grazie alla linearità dei coefficienti è sufficiente dimostrare che se $c_n(f) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $f(x) = 0$ quasi ovunque.

Se tutti i coefficienti sono nulli, allora ogni integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = 0$ per ogni $g(x)$ polinomio trigonometrico ($g(x) \in \mathrm{Span}(\{e^{inx}\}_{\mathbb{Z}})$). Da questo segue che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = 0$ per ogni g continua con condizioni al bordo $g(-\pi) = g(\pi)$. Infatti per ognuna di queste g trovo una successione g_n di polinomi trigonometrici che ci tendono uniformemente (Stone-Weierstrass). La convergenza uniforme e la continuità delle funzioni in gioco garantiscono che $\exists\, M$ tale che $M \geq \|g_n\|_\infty\, \forall n$e quindi, considerando $M|f(x)|$, per convergenza dominata si ha che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x)\, dx \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = 0.$$

A questo punto, data una funzione $h(x)$ limitata e misurabile trovo una successione di funzioni $\{h_n\}$ continue con condizione di periodicità agli estremi che tenda ad h puntualmente q.o. e tale che le h_n siano equilimitate imponendo, ad esempio, che:

$$h_n(x) = \|h\|_\infty \qquad \text{se } h_n(x) > \|h\|_\infty.$$

Quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = 0 \quad \forall g \in \mathrm{L}^\infty$$

e prendendo $g = sgn(f) \in \mathrm{L}^\infty$ si ha che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sgn(f(x))\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx = 0$$

e quindi la tesi dato che $f(x)$ deve essere nulla quasi ovunque. □

Esercizio 5.22. *Ricordiamo il sistema dell'Esercizio 4.32:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & su\ [0,T] \times [0,\pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 & condizioni\ di\ Dirichlet \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot). \end{cases}$$

Per questo problema avevamo dimostrato l'unicità della soluzione in ogni intervallo dove esiste: $I \times [0,\pi]$ t.c. $0 \in I$. Si può trovare però una soluzione distinta da quella trovata togliendo le condizioni di Dirichlet e imponendo che:

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi)$$
$$u_x(\cdot, 0) = u_x(\cdot, \pi).$$

Esercizio 5.23. *Consideriamo lo spazio:*

$$X = \left\{ f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \,|\, f \in \mathcal{C}^2, f'(0) = f'(\pi) = 0 \right\}$$

e l'operatore linare $T : X \to \mathrm{L}^2$ definito da $Tf = f''$.

- *T autoaggiunta?*

  X è denso in L^2: le $\mathcal{C}^2$ lo sono e imporre condizioni in due punti non altera nulla in L^2. Per mostrare $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle\ \forall\, f, g \in X$ si usa il solito trucco dell'integrazione per parti.

- *T semidefinita?*

  Svolgendo i conti del primo punto si trova che $\langle Tf, g\rangle = -\int_0^\pi f'(x)g'(x)$, quindi si trova che, per ognif: $\langle Tf, f\rangle = -\int_0^\pi |f'(x)|^2 \leq 0$.

- *T definita negativa?*

  No, infatti dal punto precedente troviamo $\langle Tf, f\rangle = 0$ per ogni f costante.

- *Base di Hilbert di L^2 di autovettori di T.*

  Cerchiamo una f tale che $Tf = \lambda f$ ovvero $f'' = \lambda f$. Sapendo che T è semidefinita negativa, sappiamo che gli autovettori λ sono reali negativi:

$$\begin{cases} \ddot{y} = \lambda y \\ \dot{y}(0) = \dot{y}(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha \cos\sqrt{-\lambda} t + \beta \sin\sqrt{-\lambda} t \\ \dot{y}(0) = \dot{y}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i conti, troviamo soluzioni non banali se $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ *t.c.* $\sqrt{-\lambda} = k$*, quindi:*

$$y = \alpha \cos kt.$$

Otteniamo quindi il sistema ortonormale $\{c_n cos(nt)\}$ *per* $\mathrm{L}^2(0, \pi)$*.*

(La densità? Tipo come per i seni?)

5.4 Ripasso di analisi complessa

Lezione 31 (11 dicembre 2018)**.**

Questa lezione sarà solamente un ripasso di alcuni concetti fondamentali dell'analisi complessa e in generale non verranno fornite le dimostrazioni degli enunciati. Consideriamo un cammino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^1$. Lasceremo senza troppe preoccupazioni una leggera ambiguità tra γ e la curva che essa parametrizza, ovvero il suo sostegno $\gamma([a, b])$. Per quanto riguarda l'insieme d'arrivo, useremo a seconda dei casi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Chiameremo *1-forma* su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una mappa che associa ad ogni punto di A un elemento del duale:

$$\begin{aligned} &\omega : A \to (\mathbb{R}^2)^* \\ &\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \end{aligned}$$

quindi con "duale" ci riferiamo a $Span(dx, dy)$ dove:

$$dx : (x, y) \to x \quad dy : (x, y) \to y,$$

ponendo così :

$$dz = dx + idy.$$

Definiamo l'integale di una forma lungo una curva come:

$$\int_\gamma \omega \overset{def}{=} \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

Esso dipende solo dalla curva e dall'orientazione e non dalla parametrizzazione di γ.

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Diciamo che $f : A \to \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso in un punto $z \in A$ se esiste il limite del rapporto incrementale:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}.$$

Data $f : A \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, Scriviamo che:

$$f = \mathfrak{Re}(f) + i\mathfrak{Im}(f) \simeq (\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f)).$$

Se f è differenziabile in $z = x + iy \simeq (x, y)$, allora:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{Re}(f)}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{Re}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathfrak{Im}(f)}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{Im}(f)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Se inoltre f è differenziabile in z in senso complesso, allora è soddisfatto il seguente sistema (equazioni di Cauchy-Riemann):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathfrak{Im}(f)}{\partial x} = -\frac{\partial \mathfrak{Re}(f)}{\partial y} \end{cases}.$$

Le equazioni di C-R sono una conseguenza del fatto che, se una funzione f è differenziabile in senso complesso, allora il differenziale di f deve essere un operatore lineare da $\mathbb{C}$ in sé, per cui deve essere la moltiplicazione per un numero complesso. Le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^2$ in sé sono rappresentano la moltiplicazione per un numero complesso solo se la matrice associata rispetta C-R:

$$f(z) = (a + ib)z \qquad f(x, y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Osservazione 5.24. Una matrice è detta *conforme* se l'applicazione lineare a cui è associata preserva gli angoli tra i vettori. Le applicazioni *conformi* da $\mathbb{R}^2$ in sè stesso sono tutte rappresentate solamente dalle matrici della forma :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

per cui le funzioni olomorfe hanno derivata conforme con determinante positivo.

Proposizione 5.25. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, allora lo spazio delle funzioni olomorfe su A è chiuso per somma, prodotto e composizione.*

La definizione di integrale di una *1-forma* dato in precedenza si può estendere anche alle forme a coefficienti complessi, cioè se $\omega = Pdx + Qdy$ e P, Q sono funzioni a valori in $\mathbb{C}$, allora

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \; dt = \int_a^b P(\gamma(t))\dot{\gamma}_x(t) + Q(\gamma(t))\dot{\gamma}_y(t) \; dt \; \in \mathbb{C}.$$

Diremo che ω è una forma *esatta* se si può scrivere come il differenziale di una funzione, cioè se esiste una funzione f di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\omega(x, y) = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Diremo invece che ω è *chiusa* se è localmente esatta.

Teorema 5.26 (di Gauss-Green)**.** *Sia A un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia γ una parametrizzazione in senso antiorario del bordo di A, allora:*

$$\int_\gamma \omega = \int_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Teorema 5.27 (di Morera)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua, allora f è olomorfa se e solo se la forma associata $f(z)dz$ è chiusa.*

Esempio 5.28. Il logaritmo complesso di un numero $z \neq 0$ è un numero $w \in \mathbb{C}$ tale che $z = e^w$. Chiaramente, se w è logaritmo complesso di z allora lo sono anche tutti i suoi traslati della forma $\{w + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dato $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aperto, una funzione $g : A \to \mathbb{C}$ è una determinazione del logaritmo complesso se $z = e^{g(z)}$ per ogni $z \in A$. Su un dominio semplicemente connesso esiste sempre una determinazione.

Se una determinazione g è continua, allora è anche olomorfa (si mostra più facilmente assumendo $g \in \mathcal{C}^1$) e la sua derivata è $g'(z) = \frac{1}{z}$.

Dimostrazione. Sappiamo che, su A, $\frac{1}{z}$ è olomorfa, quindi per Morera abbiamo $\frac{1}{z}dz$ chiusa, ovvero localmente esatta, quindi localmente esiste una g tale che $dg = \frac{1}{z}dz$. Se però A è semplicemente connesso, allora la forma $\frac{1}{z}dz$ essendo chiusa è anche esatta, e perciò la primitiva g esiste globalmente. □

Questo enunciato vale più in generale, non serve che $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sia semplicemente connesso, è sufficiente che non esista un cammino in A che passi attorno all'origine.

Osservazione 5.29. La parte reale del logaritmo è sempre univocamente determinata: $\mathfrak{Re}(w) = log|z|$ e prende il nome di argomento del logaritmo, la parte immaginaria $\mathfrak{Im}(w)$ invece non è univocamente determinata.

Osserviamo che, se $(0, +\infty) \times \{0\} \subseteq A$ e $g(x, 0) = \log x$, allora g è la *determinazione standard* del logaritmo su A.

Per finire, data g determinazione del logaritmo su A e $a \in \mathbb{C}$, si definisce per ogni $z \in A$:

$$z^a = e^{ag(z)},$$

che dipendendo da g non è univoca, fuorché per gli a interi.

Se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, allora valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$f(z)dz \text{ esatta} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x} \Leftrightarrow f \text{ soddisfa C-R.}$$

allora se γ parametrizza ∂A in senso antiorario, abbiamo che per il teorema di Gauss-Green:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_A 0\ dx\ dy.$$

Se f è olomorfa su $A = B(0, r)$ allora, fissato un punto $y \in A$, la funzione $g(z) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ si estende per continuità in y e $g(y) = f'(y)$. Da questo:

$$\int_\gamma g(z)\ dz = 0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-y}\ dz - f(y)\int_\gamma \frac{1}{z-y}\ dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-y}\ dz - 2\pi i f(y).$$

Per questo troviamo:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-y}\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\frac{1}{1-\frac{y}{z}}\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{y}{z}\right)^k\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty} y^k\left(\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}}\ dz\right), \end{aligned}$$

ovvero la serie di Taylor di f centrata in 0.

Se invece f è olomorfa su $A = B(0, R) \setminus B(0, r)$, dove $R > r$, e continua su $\overline{A}$ allora, indicando con γ_0 e γ_1 rispettivamente le parametrizzazioni delle circonferenze di bordo di raggio R e r, troviamo:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z-y}\ dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-y}\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\ dz\right) y^k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z) z^{k-1}\ dz\right) y^{-k} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k y^k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{-k} y^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k y^k, \end{aligned}$$

ovvero la seria di Laurent di f.

Definiamo ora il *residuo* di una funzione in un punto. Data f olomorfa su $A \setminus \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ per un numero finito di punti $\{z_i\}$, il residuo di f in ciascun punto è:

$$Res_f(z_i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} f(z)\ dz,$$

dove γ_i parametrizza il bordo di una curva che gira attorno a z_i, e nessun altro z_j, una volta e in senso antiorario. Adesso, essendo $z^k dz$ esatta per ogni $k \neq -1$, abbiamo che $\int f(z)$ dipende solo dal coefficiente (-1)-esimo dello sviluppo in serie di Laurent:

$$Res_f(z_i) = a_{-1}.$$

Teorema 5.30 (dei residui)**.** *Sia f olomorfa su $A\setminus\{z_i\}$, continua su $\overline{A}\setminus\{z_i\}$ e sia γ una parametrizzazione di ∂A in senso antiorario. Allora:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res_f(z_j).$$

Esempio 5.31 (Calcolo dei residui)**.** Se f ha una singolarità in z_j e $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con g, h olomorfe anche in z_j e $g(z_j) \neq 0$, z_j zero semplice per h. Allora: $Res_f(z_j) = \frac{g(z_j)}{h'(z_j)}$.
Calcoliamo il valore di:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^4}\ dx.$$

Siano $\gamma_{1,r}$ una parametrizzazione del segmento $[-r, r]$ e $\gamma_{2,r}$ una parametrizzazione della semicirconferenza di raggio r centro l'origine e ascisse positive. Notiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^4}\ dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} \frac{1}{4+z^4}\ dz.$$

Consideriamo $f(z) = \frac{1}{4+z^4}$, allora:

$$\int_{\gamma_{1.r}} f(z)\ dz + \int_{\gamma_{2.r}} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_i Res(f, z_i)$$

dove la sommatoria varia sugli indici delle singolarità contenute all'interno della semicirconferenza di raggio r. Passando al limite per $r \to \infty$, l'integrale di $f(z)$ su $\gamma_{2.r}$ tende a 0, infatti f è $o(\frac{1}{r^4})$ su tale cammino e la lunghezza della curva è πr, l'integrale ha quindi un ordine di infinitesimo pari a $o\left(\frac{1}{r^3}\right)$.
Possiamo concludere che

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1.r}} f(z)\ dz + \int_{\gamma_{2.r}} f(z)\ dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_i Res(f, z_i)$$

al variare di i tra le singolarità con parte immaginaria positiva.

5.4.1 Analiticità della trasformata

Lezione 32 (12 dicembre 2018)**.**

Proposizione 5.32. *Sia $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ una funzione a supporto a compatto, allora la trasformata $\hat{f}$ è analitica.*

Dimostrazione. Estendiamo la trasformata al piano complesso :

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixz}\ dx$$

e mostriamo che è ben definita e olomorfa in un intorno dell'asse reale, infatti, se così fosse, la restrizione a $\mathbb{R}$, cioé $\hat{f}$, sarebbe analitica.

Per ipotesi il supporto di f è contenuto in un intervallo compatto $[-m, m]$, allora

$$g(z) = \int_{-m}^{m} f(x)e^{-ixz}\ dx$$

e per ogni valore fissato $z \in \mathbb{C}$ la funzione e^{-ixz}, essendo continua, è limitata su $[-m, m]$ per cui $f(x)e^{-ixz}$ è in L^1 e quindi $g(z)$ è ben definita su $\mathbb{C}$. Se mostrassimo che g è continua e la forma associata $g(z)\ dz$ è chiusa potremmo concludere grazie al teorema di Morera.

La continuità è garantita dal teorema di convergenza dominata: sia $z_n \to z$ allora la successione $\{f(x)e^{-ixz_n}\}_{\mathbb{N}}$ è dominata da $|f(x)| \sup\limits_{|x|\leq m,\ n} \{e^{-ixz_n}\}$.

Poiché su uno spazio semplicemente connesso la chiusura e l'esattezza sono equivalenti, mostriamo che la forma $g(z)dz$ è esatta su $\mathbb{C}$. Sia γ un cammino chiuso in $\mathbb{C}$, allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g(z)\ dz &= \int_a^b g(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\ dt \\
&= \int_a^b \left[\int_{-m}^{m} f(x)e^{-ix\gamma(t)}dx\right] \dot{\gamma}(t)\ dt \\
(Fubini) &= \int_{-m}^{m} \left[\int_a^b e^{-ix\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)\ dt\right]\ f(x)\ dx \\
&= \int_{-m}^{m} f(x) \left[\int_\gamma e^{-ixz}dz\right]\ dx \\
&= \int_{-m}^{m} f(x) \cdot 0\ dx = 0.
\end{aligned}$$

È possibile invertire l'ordine di integrazione perché la funzione

$$\tilde{g}(t) = \int_{-m}^{m} |f(x)||e^{-ix\gamma(t)}|\ dx\ |\dot{\gamma}(t)|$$

è continua e quindi integrabile su $[a, b]$. □

5.5 L'equazione del calore sulla retta reale

Proviamo a risolvere l'equazione del calore su $[0,T]\times\mathbb{R}$ (al posto di $[0,T)\times[-\pi,\pi]$) sfruttando la trasformata di Fourier.

Proviamo a cercare una soluzione *formalmente* imponendo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \forall\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \\ u(0,x)=u_0(x) & \forall\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

e senza preoccuparci (per ora) delle condizioni al bordo.

Poniamo $\widehat{u}(t,y)=\left[\mathcal{F}u(t,x)\right](y)$ (stiamo facendo la trasformata di Fourier di u soltanto rispetto alla variabile x), allora la condizione $u_t=u_{xx}$ implica che $\widehat{u}_t=\widehat{u_{xx}}$ e quindi, formalmente, si ha che

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(t,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)e^{-ixy}\ dx = \frac{d}{dt}\widehat{u}(t,y) \\ \widehat{u_{xx}}(t,y) &= (iy)^2\ \widehat{u}(t,y) = -y^2\ \widehat{u}(t,y) \end{aligned}.$$

Possiamo quindi semplificare il problema iniziale

$$\begin{cases} (\widehat{u})_t = -y^2\ \widehat{u} \\ \widehat{u}(0,\cdot)=\widehat{u_0}(\cdot) \end{cases},$$

per cui $\widehat{u}(t,y)$ deve risolvere il seguente problema di Cauchy per ogni $y\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -y^2\ z(t) \\ z(0)=\widehat{u_0}(y) \end{cases}$$

la cui soluzione è data da $\widehat{u}(t,y)=\widehat{u_0}(y)e^{-y^2t}$.

Osserviamo ora che $e^{-y^2t}=\mathcal{F}\left(\rho_{\sqrt{2t}}\right)$ dove

$$\rho(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \rho_{\sqrt{2t}}(x)=\sigma_{\sqrt{2t}}\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2t}}\rho\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

infatti, ricordando che $\left[\mathcal{F}(\sigma_\delta f)\right](y)=\left[\mathcal{F}f\right](\delta y)$, si ha che

$$\left[\mathcal{F}\rho_{\sqrt{2t}}\right](y)=\widehat{\rho}(\sqrt{2t}y)=e^{-\frac{2ty^2}{2}}=e^{-ty^2}.$$

Pertanto

$$\hat{u}(t,y)=\widehat{u_0}\cdot\widehat{\rho_{\sqrt{2t}}}=\left[\mathcal{F}(u_0*\rho_{\sqrt{2t}})\right](y)$$

e per iniettività della trasformata si ha che

$$u(t,x)=\left[u_0*\rho_{\sqrt{2t}}\right](x)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(z-x)\frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\ dz.$$

Proposizione 5.33. *Sia $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata, allora la funzione*

$$\begin{cases} u_0(x) & t = 0 \\ (u_0 * \rho_{\sqrt{2t}})(x) & t > 0 \end{cases}$$

soddisfa l'equazione $u_t = u_{xx}$ e la condizione iniziale $u(0,x) = u_0(x)$. Inoltre

- *$u(t,x)$ è continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$*
- *$u(t,x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Mostriamo la continuità in $t = 0$: fissato $x \in \mathbb{R}$ deve valere che

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = u(0,x) = u_0(x).$$

Ricordando che $\int_{\mathbb{R}} \rho_{\sqrt{2t}}(y)\ dy = 1$, allora si ha che

$$\begin{aligned} u(t,x) - u_0(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-y)\rho_{\sqrt{2t}}(y)\ dy - u_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\sqrt{2t}}(y)\ dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_0(x-y) - u_0(x)\right)\rho_{\sqrt{2t}}(y)\ dy \\ (y \mapsto \sqrt{2t}z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(u_0(x-\sqrt{2t}z) - u_0(x)\Big)\frac{1}{\sqrt{2t}}\rho(z)\sqrt{2t}\ dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(u_0(x-\sqrt{2t}z) - u_0(x)\Big)\rho(z)\ dz. \end{aligned}$$

Grazie alla continuità di $u_0(x)$ la funzione integrata tende a 0 per $(t,x) \to (0,x)$ e ho la dominazione garantita da

$$2\|u_0\|_\infty|\rho(z)| \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}).$$

□

Proposizione 5.34. *Sia $f(t,x) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e di classe $\mathcal{C}^1$ nella variabile t per ogni valore di x in $\mathbb{R}$. Se esiste una funzione $a(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tale che*

$$|f(t,x)|, |\partial_t f(t,x)| \le a(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

allora imponendo

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\ dx \qquad G(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} f_t(t,x)\ dx$$

si ha che F e G sono ben definite, continue e $G(t) = \frac{d}{dt}F(t)$.

5.6 Trasformata in più variabili

Lezione 33 (13 dicembre 2018).

Presa una $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ la sua trasformata di Fourier è data da:

$$\widehat{f}(y) \overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot y}\, dx \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d.$$

Dove con $x \cdot y$ indichiamo il prodotto scalare tra i due vettori x e y. Valgono le proprietà:

- $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$;
- se $f \in \mathcal{C}^1$, $f, \nabla f \in \mathrm{L}^1$ allora $\widehat{\nabla f} = iy\widehat{f}$;
- se $f(x), xf(x) \in \mathrm{L}^1$ allora $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1$ e $\nabla\widehat{f} = -i\widehat{xf(x)}$;
- simili formule per traslazioni, dilatazioni, trasformazioni affini...

Osservazione 5.35. Con la scrittura $\widehat{\nabla f}$ indichiamo la trasformata di Fourier svolta componente per componente:

$$\widehat{\nabla f} = \left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \cdots, \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_n}}\right).$$

Teorema 5.36. *Si definisce allo stesso modo l'antitrasformata: $\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{ix\cdot y}\, dy$. Se $f, \hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ allora:*

$$\check{\hat{f}} = (2\pi)^d f.$$

Lemma 5.37. *Se $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, allora: $\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\|f\|_2$. Quindi si può estendere per densità la trasformata di Fourier a tutto $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ed essa è un'isometria, a meno di un fattore $(2\pi)^{\frac{d}{2}}$.*

Inoltre, dal teorema precedente si ricava che se $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2$, allora $f_1 f_2 \in \mathrm{L}^1$ e:

$$\widehat{f_1 f_2} = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{f_1} * \widehat{f_2}.$$

Possiamo applicare la traformata di Fourier in più variabili alla risoluzione di equazioni alle derivate parziali.

Esercizio 5.38.

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) \Rightarrow \widehat{u_t}(t,y) = \widehat{\Delta u}(t,y),$$

cioè:

$$\widehat{u}_t = -|y|^2\widehat{u}.$$

Come al solito troveremo la soluzione in t a y "congelato":

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}e^{-|y|^2 t},$$

da cui, posto $e^{-|y|^2 t} = \widehat{g_t}$, si ha:

$$u(t, x) = u_0 * g_t(x).$$

Notiamo che $-|y|^2$ è una somma di quadrati, quindi $\widehat{g_t}$ è prodotto di gaussiane.

Capitolo 6

Funzioni armoniche

Definizione 6.1 (Funzione armonica)**.** Sia A un aperto di $\mathbb{R}^d$, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ si dice armonica se:

$$\Delta f(x) = 0 \quad \forall x \in A.$$

La definizione sembra dipendere dalla scelta di una base, ma è ben posta in quanto il laplaciano non dipende dalla base (che sia ortonormale):

$$\Delta f = div(\nabla f) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

infatti la traccia dell'Hessiano è invariante per similitudine.

6.1 Legami con le proprietà della media

D'ora in avanti quando parleremo di funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ sottointenderemo che A è un aperto di $\mathbb{R}^d$.

Definizione 6.2 (Proprietà della media, sfere)**.** Una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ si dice che ha la proprietà della media sulle sfere se per ogni $x_0 \in A$ e per ogni $r > 0$

$$f(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ d\sigma(x).$$

Definizione 6.3 (Proprietà della media, palle)**.** Una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ si dice che ha la proprietà della media sulle palle se per ogni $x_0 \in A$ e per ogni $r > 0$

$$f(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} f(x)\ dx.$$

Lemma 6.4. *Data una funzione continua $f : \overline{B(x_0, r)} \to \mathbb{R}$, allora vale che :*

$$\int_{B(x_0,r)} f(x)\ dx = \int_0^r \left[\int_{\partial B(x_0,\rho)} f(x)\ d\sigma(x) \right]\ d\rho$$

Osservazione 6.5. Non è veramente necessario che la funzione sia continua, ma il caso più generale presenta maggiori difficoltà.

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato solo in $\mathbb{R}^2$. Per $d > 2$ si puó fare con le coordinate sferiche, affrontando però un lungo conto a causa del loro scomodo Jacobiano. Passando in coordinate polari si ha che

$$\int_{B_(x_0,r)} f(x, y)\ dxdy = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))\rho\ d\theta\ d\rho$$

e per ogni raggio fissato ρ se considero la curva $\gamma_\rho(\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, allora essa parametrizza il bordo di $B(x_0, \rho)$ e quindi ho la tesi dato che

$$\int_0^{2\pi} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))\rho\ d\theta = \int_{\gamma_\rho} f(x)\ d\sigma(x).$$

□

Può essere utile ricordare che data un'ipersfera di raggio r in $\mathbb{R}^d$ la misura $d-$dimensionale del suo volume e la misura $(d-1)-$dimensionale della sua superficie sono date rispettivamente dalle relazioni

$$V_d(r) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} r^d \qquad S_d(r) = d\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} r^{(d-1)}.$$

D'ora in avanti per comodità scriveremo $V_d(r) = \omega_d r^d$ e $S_d(r) = d\omega_d r^{(d-1)}$.

Lemma 6.6. *La proprietà della media sulle sfere è equivalente alla proprietà della media sulle palle.*

Dimostrazione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua che soddisfi la proprietà della media sulle sfere, allora per il lemma precedente:

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,r)} f(x)\ dx &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0,\rho)} f(x)\ d\sigma(x) \right)\ d\rho \\
&= \int_0^r S_d(B(x_0, \rho))f(x_0)d\rho \\
&= f(x_0)d\ \omega_d \int_0^r \rho^{d-1}\ d\rho
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x_0)\omega_d \, r^d \\
&= f(x_0)V_d(B(x_0, r)).
\end{aligned}
$$

Per l'altra implicazione, invece, da:

$$\int_{B(x_0,r)} f(x) \, dx = \omega_d \, r^d f(x_0)$$

segue che:

$$
\begin{aligned}
d\omega_d r^{d-1} f(x_0) &= \frac{d}{dr} \int_{B(x_0,r)} f(x) \, dx \\
&= \frac{d}{dr} \int_0^r \int_{\partial B(x_0,\rho)} f(x) \, d\sigma(x) \, d\rho \\
&= \int_{\partial B(x_0,r)} f(x) \, d\sigma(x)
\end{aligned}
$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale. □

Proposizione 6.7. *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica con classe di regolarità $\mathcal{C}^2$, allora f ha la proprietà della media.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto x_0 dell'aperto e notiamo che, applicando un cambio di variabili, si ha che :

$$
\begin{aligned}
\fint_{\partial B(x_0,r)} f(x) \, d\sigma(x) &= \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} f(x) \, d\sigma(x) \\
(x \mapsto x_0 + ry) &= \frac{r^{d-1}}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{S^{d-1}} f(x_0 + ry) \, d\sigma(y) \\
&= \fint_{S^{d-1}} f(x_0 + ry) \, d\sigma(y)
\end{aligned}
$$

e derivando nella variabile r

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \fint_{\partial B(x_0,r)} f(x) \, d\sigma(x) &= \frac{d}{dr} \fint_{S^{d-1}} f(x_0 + ry) \, d\sigma(y) \\
(\nu \text{ normale esterna}) &= \frac{1}{d\omega_d} \int_{S^{d-1}} \nabla f(x_0 + ry)\nu(y) \, d\sigma(y) \\
(\text{Teorema della divergenza}) &= \frac{1}{d\omega_d} \int_{B(0,1)} div(\nabla f(x_0 + ry)) \, dy \\
&= \frac{1}{d\omega_d} \int_{B(0,1)} \Delta f(x_0 + ry) \, dy \\
&= \frac{1}{d\omega_d r^d} \int_{B(x_0,r)} \Delta f(x) \, dx.
\end{aligned}
$$

Per ipotesi f è armonica, quindi la funzione $g(r) = \fint_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ d\sigma(x)$ è costante, infatti la sua derivata è l'integrale del laplaciano di f che è identicamente nullo.

Per concludere è sufficiente osservare che per continuità di f:

$$\lim_{r\to 0} g(r) = \lim_{r\to 0} \fint_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ d\sigma(x) = f(x_0).$$

□

Teorema 6.8. *Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua e ha la proprietà della media, allora è $\mathcal{C}^\infty$ ed è armonica.*

Dimostrazione. Cominciamo supponendo $A = \mathbb{R}^d$ in quanto faremo uso della convoluzione, che non è stata definita per tutti gli aperti. A quanto pare la dimostrazione generale è molto più tediosa di quanto non sia istruttiva.

Per il primo punto consideriamo una funzione $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ che sia $\mathcal{C}^\infty$, radiale, a supporto compatto $\overline{B(0,1)}$ e tale che $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\ dx = 1$. Essendo ρ radiale, esiste una $\tilde{\rho} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\rho(x) = \tilde{\rho}(|x|)$.

È noto che $f * \rho(x) \in \mathcal{C}^\infty$, infatti $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ per la proprietà della media, invece $\rho^{(h)} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\forall h \in \mathbb{N}$ perché ρ è $\mathcal{C}^\infty$ e a supporto compatto e quindi vale la proposizione 2.63 sulla differenziabilità del prodotto di convoluzione. Ora si ha che:

$$\begin{aligned}
f * \rho(x) &= \int_{B(0,1)} f(x-y)\rho(y)\ dy = \int_0^1 \left(\int_{\partial B(0,r)} f(x-y)\rho(y)\ d\sigma(y) \right)\ dr \\
&= \int_0^1 \tilde{\rho}(|y|) \left(\int_{\partial B(x,r)} f(z)\ d\sigma(z) \right)\ dr \\
&= \int_0^1 \tilde{\rho}(r) \left(\int_{\partial B(x,r)} f(z)\ d\sigma(z) \right)\ dr \\
&= \int_0^1 \tilde{\rho}(r) \left(d\alpha_d r^{d-1} f(x) \right)\ dr = f(x) \int_0^1 \tilde{\rho}(r) d\alpha_d r^{d-1}\ dr \\
&= f(x) \int_{B(0,1)} \rho(y)\ dy = f(x).
\end{aligned}$$

Per cui $f \in \mathcal{C}^\infty$ e quindi manca solo da dimostrare che è armonica.

Nella dimostrazione della proposione precedente avevamo mostrato che per ogni funzione di classe $\mathcal{C}^2$

$$\fint_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ d\sigma(x) = \fint_{S^{d-1}} f(x_0 + ry)\ d\sigma(y)$$

e che derivando si ha che

$$\frac{d}{dr} \fint_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ d\sigma(x) = \frac{d}{dr} \fint_{S^{d-1}} f(x_0 + ry)\ d\sigma(y) = \fint_{B(x_0,r)} \Delta f(x) dx$$

grazie al Teorema della Divergenza. Ma dato che f ha la proprietà della media, la media integrale è costante al variare di r:

$$\fint_{\partial B(x_0,r)} f(x)\ d\sigma(x) \equiv f(x_0)$$

e quindi la sua derivata è nulla :

$$\fint_{B(x_0,r)} \Delta f(x)\ dx = 0 \quad \forall\, x_0, r > 0.$$

La tesi segue dal fatto che una funzione continua ad integrale nullo su ogni palla è identicamente nulla. □

Lemma 6.9. *Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e si consideri una funzione $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ continua e armonica. Se $x_0 \in A$ è un punto di massimo o minimo di f nella parte interna del dominio, allora f è costante sulla componente connessa che contiene x_0.*

Dimostrazione. Supponiamo che $x_0 \in A$ sia un punto di massimo con $f(x_0) = M$ e che $\tilde{A}$ sia la componente connessa che lo contiene. Se consideriamo l'insieme $B = \left\{x \in \tilde{A} \middle| f(x) = M\right\}$, allora è non vuoto per ipotesi ed è chiuso in quanto è la controimmagine di un punto tramite una funzione continua. Tuttavia l'insieme è anche aperto, infatti preso un punto $z \in B$ sappiamo che la media di f su una palla P centrata in z è pari ad M, ma questo è il valore massimo di f, quindi $f(x) \equiv M$ su ogni palla centrata in z. Per connessione di $\tilde{A}$, B non può che coincidere con l'intera componente connessa. □

Una semplice conseguenza del lemma è la garanzia di trovare sia dei punti di massimo che dei punti di minimo sul bordo dei domini compatti delle funzione armoniche:

Teorema 6.10. *Sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e armonica su un aperto limitato A di $\mathbb{R}^d$, allora esistono due punti $x_n, x_m \in \partial A$ tali che $f(x_m) = \max f(\overline{A})$ e $f(x_n) = \min f(\overline{A})$. Inoltre, se A è connesso ed esistono punti di massimo/minimo interni ad A, allora f è costante.*

Dimostrazione. Poiché $\overline{A}$ è un'insieme compatto e f è una funzione continua, per il teorema di Weierstrass esistono i punti di massimo e minimo per f. Per il lemma precedente ce ne sono almeno due sul bordo. □

Corollario 6.11. *Si considerino due funzioni armoniche $u, \tilde{u} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ tali che $u \geq \tilde{u}$ sul bordo ∂A, allora $u \geq \tilde{u}$ sull'intero dominio $\overline{A}$. Inoltre se A è connesso ed esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $u(x_0) = \tilde{u}(x_0)$, allora $u = \tilde{u}$.*

Dimostrazione. Si applichi il Teorema alla differenza $v = u - \tilde{u}$. Per ipotesi sappiamo che $v \geq 0$ su ∂A, inoltre v è continua e armonica su A. Quindi per il teorema abbiamo che $v \geq 0$ su A, infatti il minimo di v viene assunto su ∂A ed è perciò non negativo. Ma se $v \geq 0$ allora $u \geq \tilde{u}$.

Aggiungendo l'ipotesi che esista un $x_0 \in A$ tale che $v(x_0) = 0$, troviamo che v è costantemente nulla, ovvero $u = \tilde{u}$. □

6.2 Armonicità e olomorfia

Lezione 34 (17 dicembre 2018)**.**

Proposizione 6.12. *Se $f : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa, allora la parte reale $\mathfrak{Re}(f)$ e la parte immaginaria $\mathfrak{Im}(f)$ sono funzioni armoniche, quindi f è armonica.*

Dimostrazione. Se f è olomorfa valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathfrak{Im}(f)}{\partial x} = -\frac{\partial \mathfrak{Re}(f)}{\partial y} \end{cases}.$$

Derivando la prima equazione nella variabile x e la seconda nella variabile y otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathfrak{Re}(f)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{Im}(f)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{Im}(f)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{Re}(f)}{\partial y^2} \end{cases}.$$

da cui $\Delta \mathfrak{Re}(f) = \frac{\partial^2 \mathfrak{Im}(f)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Im}(f)}{\partial x \partial y} = 0$. Si dimostra allo stesso modo il caso di $\mathfrak{Im}(f)$. □

Teorema 6.13. *Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e una funzione armonica $u : A \to \mathbb{R}$, allora esiste una funzione olomorfa $f : A \to \mathbb{C}$ tale che $\mathfrak{Re}(f) = u$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che la derivata di una funzione olomorfa si può esprimere in funzione delle derivate parziali della sua parte reale, infatti se $u = \mathfrak{Re}(f)$, allora $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

Sia $g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$, si vuole mostrare che è olomorfa per poi sceglierne una primitiva, che sarà a sua volta olomorfa.

Infatti u è armonica:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Re}(g) - \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{Im}(g) = 0$$

e qindi la prima equazione di Cauchy-Riemann è verificata

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Re}(g) = \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{Im}(g).$$

Per quanto riguarda la seconda, invece, notiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{Re}(g) + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Im}(g) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

A è semplicemente connesso, dunque preso $z_0 \in A$ esiste una primitiva f di g tale che $f(z_0) = u(z_0)$, in quanto le primitive sono definite a meno di costanti. Quindi $\mathfrak{Re}(f)(z_0) = u(z_0)$ e $\nabla\mathfrak{Re}(f) = \nabla u$, infatti $f' = g$ per costruzione e poiché f è olomorfa si ha che

$$f' = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{Re}(f) - i\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{Re}(f) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = g.$$

Essendo A connesso si trova che $\mathfrak{Re}(f) = u$ (se A non fosse connesso, si ripeterebbe il discorso per ogni componente connessa). □

Osservazione 6.14. Nel caso esaminato, si trova che $v = \mathfrak{Im}(f)$ è armonica, e viene detta funzione armonica *coniugata* ad u. Questa ha una proprietà chiave:

$$\nabla u = \nabla\mathfrak{Re}(f) = -i\nabla\mathfrak{Im}(f) = -i\nabla v.$$

Ovvero il gradiente di v è quello di u ruotato di $\frac{\pi}{2}$.

Osservazione 6.15. L'ipotesi di semplice connessione di A è effettivamente necessaria. Infatti consideriamo $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $u(z) = log|z|$. Essa è armonica ma globalmente non è parte reale di alcuna funzione olomorfa. Localmente invece si può trovare una determinazione del logaritmo di cui u sia parte reale.

Corollario 6.16. *Dati $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $u : A \to \mathbb{R}$ armonica, allora u è analitica.*

Corollario 6.17 (Principio del prolungamento analitico)**.** *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$, siano $u, v : A \to \mathbb{R}$ armoniche. Se $u = v$ su $U \subseteq A$ aperto (in realtà basta meno), allora:*

$$u(z) = v(z) \quad \forall\, z \in A.$$

Dimostrazione. Se $u = \mathfrak{Re}(f)$ e $v = \mathfrak{Re}(g)$, allora per ogni $z \in U$ si ha $\mathfrak{Re}(f - g)(z) = 0$. Quindi esiste una costante c tale che $f - g = ic$ su U, ma allora $f - g = ic$ su tutto A. □

Esercizio 6.18. *Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$, cerchiamo allora una soluzione $u : \overline{A} \to \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^2(A)$ del problema:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & su\ A \\ u = u_0 & su\ \partial A. \end{cases}$$

Consideriamo il caso $A = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Per $z \in \partial A$, $z = e^{it}$:

$$u_0(z) = u_0(e^{it}) = g(t),$$

dove g è $2\pi-$periodica. Posso dunque scriverla in serie di Fourier:

$$u_0(z) = g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che si tratta di una funzione olomorfa che coincide con u_0 sul bordo del disco, e quindi su tutto il disco. Ma come visto le funzioni olomorfe sono armoniche, dunque abbiamo trovato una soluzione del sistema. Le potenze negative presentano una singolarità in zero, per sistemare il problema scriviamo:

$$u_0(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{0}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{1}^{+\infty} c_{-n} \overline{z}^n.$$

Ora abbiamo scritto u_0 come somma di una funzione olomorfa e di un'antiolomorfa, che come sappiamo sono armoniche. quindi:

$$u_0 = c_0 + \sum_{1}^{+\infty} \left(c_n z^n + c_{-n} \overline{z}^n\right).$$

Teorema 6.19. *Sia $u_0(e^{it}) = g(t)$ con g funzione su $\mathbb{R}$ 2π-periodica tale che $\sum |c_n(g)| < +\infty$ (per esempio, se u_0 fosse restrizione a S^1 di una funzione C^1). Allora:*

$$u(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n z^n + c_{-n} \overline{z}^n\right)$$

definisce una funzione continua su $\overline{A}$, armonica su A e che risolve il problema dell'esercizio precedente.

Dimostrazione. Per cominciare, u è continua su $\overline{A}$ perché la serie in questione converge totalmente:

$$\sum_{1}^{+\infty} \|c_n z^n + c_{-n} \overline{z}^n\|_\infty \leq \sum_{1}^{+\infty} \|c_n z^n\|_\infty + \|c_{-n} \overline{z}^n\|_\infty \leq \sum_{1}^{+\infty} |c_n| + |c_{-n}|.$$

Dove l'ultima serie converge per ipotesi.

La serie $f^+(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ ha raggio di convergenza almeno pari ad 1, quindi su A abbiamo $f^+(x)$ olomorfa, dunque armonica. Analogamente, $f^-(x) = \sum_1^{+\infty} c_{-n} z^n$ ha raggio di convergenza almeno 1, quindi definisce una funzione olomorfa su A e dunque armonica. Otteniamo così che $u(z) = c_0 + f^+(z) + f^-(\overline{z})$ è armonica e risolve il problema $\square$

Bibliografia

[1] G. De Marco. *Analisi due. Teoria ed esercizi.* Collana di matematica. Testi e manuali. Zanichelli, 1999.

[2] I.J. Iorio, R. Iorio, R.J. Iorio, V. de Magalhães Iorio, V. Iorio, V.I. de Magalhâes, J. Iorio, B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, et al. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[3] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introductory real analysis.* Dover Publications, 1975.

[4] T.W. Körner. *Fourier Analysis.* Cambridge University Press, 1989.

[5] W. Rudin. *Analisi reale e complessa.* Programma di matematica, fisica, elettronica. Bollati Boringhieri, 1974.