Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

26/09/2008

Macchina di Turing

Modello astratto di calcolatore.

Tesi di Church-Turing:

"Tutto ciò che è calcolabile è Turing-calcolabile."

È al tempo stesso una *congettura* ed un *assioma* alla base della teoria della calcolabilità.

Macchina di Turing

Modello astratto di calcolatore.

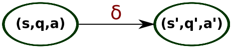
Tesi di Church-Turing:

"Tutto ciò che è calcolabile è Turing-calcolabile."

È al tempo stesso una *congettura* ed un *assioma* alla base della teoria della calcolabilità.

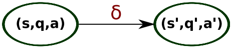
Macchine deterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione una configurazione successiva.

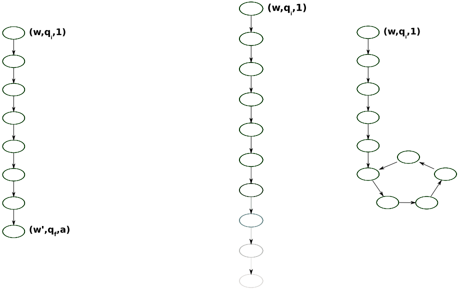


Macchine deterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione una configurazione successiva.

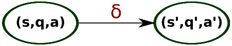


La computazione è lineare o contiene al più un ciclo.

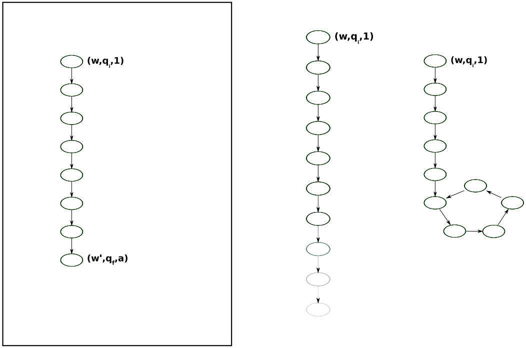


Macchine deterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione una configurazione successiva.



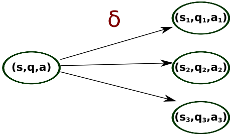
La computazione è lineare o contiene al più un ciclo.



La si considera *accettante* se arriva ad uno stato q_f (e quindi *termina*).

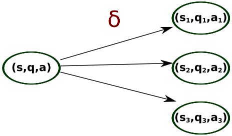
Macchine nondeterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione un insieme di configurazioni successive.

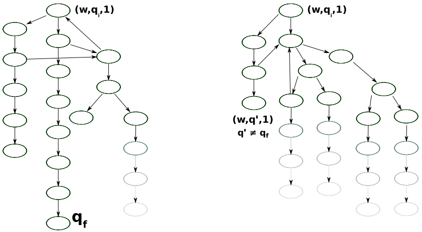


Macchine nondeterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione un insieme di configurazioni successive.

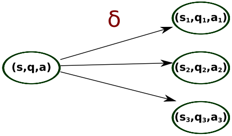


La struttura della computazione può variare.

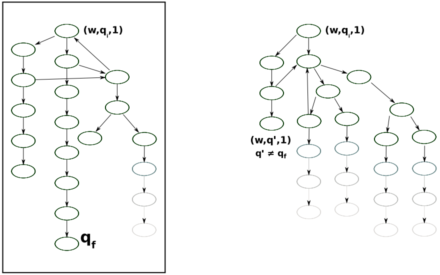


Macchine nondeterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione un insieme di configurazioni successive.



La struttura della computazione può variare.



La si considera *accettante* se *almeno uno* dei rami arriva ad uno stato q_f.

Nondeterminismo: problemi

1. SAT:
   Input: $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$ formula booleana

   Vale $\exists X_1 \; \exists X_2 \; \exists X_3 \ldots \varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$?

   $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

   Cook (1970):

   $$SAT \text{ è } NP\text{-completo}$$

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Nondeterminismo: problemi

1. SAT:
   Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

   Vale $\exists X_1 \; \exists X_2 \; \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

   $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

   Cook (1970):

   $$SAT \text{ è } NP\text{-completo}$$

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Nondeterminismo: problemi

1. SAT:
   Input: $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$ formula booleana

   Vale $\exists X_1 \; \exists X_2 \; \exists X_3 \ldots \varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$?

   Esempi:
   - $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee C) \in SAT$
   - $(A \wedge \neg A) \wedge (B \vee C) \notin SAT$
   - $p(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ ha radici in $\mathbb{Z}_2$?

   $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

   Cook (1970):

   $$SAT \text{ è } NP\text{-completo}$$

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Nondeterminismo: problemi

1. SAT:
   Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

   Vale $\exists X_1 \; \exists X_2 \; \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

   Esempi:
   - $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee C) \in SAT$
   - $(A \wedge \neg A) \wedge (B \vee C) \notin SAT$
   - $p(x_1, x_2, x_3 \dots)$ ha radici in $\mathbb{Z}_2$?

   $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

   Cook (1970):

   $$SAT \text{ è } NP\text{-completo}$$

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Nondeterminismo: problemi

1. SAT:
   Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

   Vale $\exists X_1\ \exists X_2\ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

   Esempi:
   - $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee C) \in SAT$
   - $(A \wedge \neg A) \wedge (B \vee C) \notin SAT$
   - $p(x_1, x_2, x_3 \dots)$ ha radici in $\mathbb{Z}_2$?

   $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

   Cook (1970):

   $$SAT \text{ è } NP\text{-completo}$$

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Nondeterminismo: problemi

1. SAT:
   Input: $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$ formula booleana

   Vale $\exists X_1 \; \exists X_2 \; \exists X_3 \ldots \varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$?

   Esempi:
   - $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee C) \in SAT$
   - $(A \wedge \neg A) \wedge (B \vee C) \notin SAT$
   - $p(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ ha radici in $\mathbb{Z}_2$?

   $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

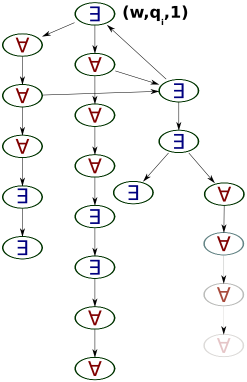
   Cook (1970):

   $$SAT \text{ è } NP\text{-completo}$$

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

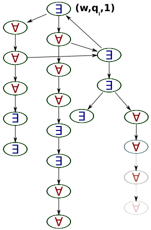
Macchine alternanti

Paradigma alternante (1981; Chandra, Kozen, Stockmeyer): generalizzazione del nondeterminismo, efficace nel modellizzare il parallelismo.
Ogni configurazione è *esistenziale* o *universale*.



Macchine alternanti

Ogni configurazione è *esistenziale* o *universale*.



Configurazione accettanti:

- esistenziali con almeno una configurazione figlia accettante
- universale con tutte le configurazioni figlie accettanti

$$M \text{ accetta } w \Leftrightarrow \text{la radice } (w, q_i, 1) \text{ è accettante}$$

Alternanza: problemi

QSAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1 \ \forall X_2 \ \exists X_3 \ldots \varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$?

Alternanza: problemi

QSAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1 \; \forall X_2 \; \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

Alternanza: problemi

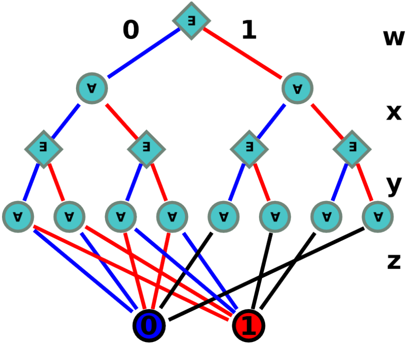
QSAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1\ \forall X_2\ \exists X_3 \ldots \varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$?

Esempio:

- in $\mathbb{Z}_2 :\ \exists w\ \forall x\ \exists y\ \forall z\ \ (x + z + wy + wz = 0)$



Classi di complessità polinomiali: panoramica

	paradigma →		
tempo →	P	NP	AP
spazio →	PSPACE	NPSPACE	APSPACE

EXP

- Savitch (1970): $PSPACE = NPSPACE$
- Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): $AP = PSPACE$
- Idem: $APSPACE = EXP$

$$\mathrm{P} \subset \mathrm{NP} \subset \mathrm{AP}, = \mathrm{PSPACE} \subset \mathrm{NPSPACE} \subset \mathrm{APSPACE} = \mathrm{EXP}$$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Classi di complessità polinomiali: panoramica

paradigma →

tempo →	P	NP	AP
spazio →	PSPACE	NPSPACE	APSPACE

EXP

- Savitch (1970): $PSPACE = NPSPACE$
- Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): $AP = PSPACE$
- Idem: $APSPACE = EXP$

P ⊂ NP ⊂ AP, = PSPACE = NPSPACE ⊂ APSPACE = EXP

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Classi di complessità polinomiali: panoramica

	paradigma →		
tempo →	P	NP	AP
spazio →	PSPACE	NPSPACE	APSPACE

EXP

- Savitch (1970): $PSPACE = NPSPACE$
- Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): $AP = PSPACE$
- Idem: $APSPACE = EXP$

$$\text{P} \subset \text{NP} \subset \text{AP} = \text{PSPACE} = \text{NPSPACE} \subset \text{APSPACE} = \text{EXP}$$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Classi di complessità polinomiali: panoramica

paradigma →

tempo →	P	NP	AP
spazio →	PSPACE	NPSPACE	APSPACE

EXP

- Savitch (1970): $PSPACE = NPSPACE$
- Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): $AP = PSPACE$
- Idem: $APSPACE = EXP$

$$\text{P} \subset \text{NP} \subset \text{AP} = \text{PSPACE} = \text{NPSPACE} \subset \text{APSPACE} = \text{EXP}$$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Classi di complessità polinomiali: panoramica

paradigma →

tempo →	P	NP	AP
spazio →	PSPACE	NPSPACE	APSPACE

EXP

- Savitch (1970): $PSPACE = NPSPACE$
- Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): $AP = PSPACE$
- Idem: $APSPACE = EXP$

$$\mathrm{P} \subset \mathrm{NP} \subset \mathrm{AP} = \mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE} \subset \mathrm{APSPACE} = \mathrm{EXP}$$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Il gioco QSAT

$\exists$rnesto ed $\forall$antonio scelgono una formula booleana $\varphi(X_1, X_2 \ldots X_n)$.
$\exists$rnesto sceglie X_1, $\forall$ntonio X_2 ...

È un gioco ad informazione perfetta

Per quali φ $\exists$rnesto ha una strategia vincente?
$\varphi \in QSAT$

Il gioco QSAT

$\exists$rnesto ed $\forall$antonio scelgono una formula booleana $\varphi(X_1, X_2 \dots X_n)$.
$\exists$rnesto sceglie X_1, $\forall$ntonio X_2 ...

È un gioco ad informazione perfetta

Per quali φ $\exists$rnesto ha una strategia vincente?
$\varphi \in QSAT$

Altri giochi

Ipotesi:

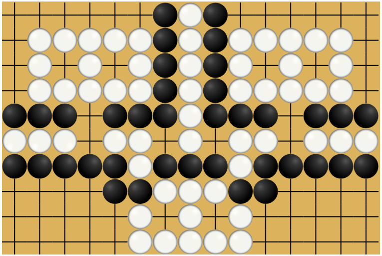
- informazione perfetta
- mosse finite
- possibilità finite
- tempo polinomiale per stabilire la vittoria
- turni stabiliti in partenza

$\Rightarrow$ individuare le posizioni vincenti è $\in APTIME$.

GO

GO $\in PSPACE - C$, perché emula $QSAT$

Un quantificatore esistenziale:



Fine

Grazie dell'attenzione