Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

25/09/2008

Si definisce SAT come l'insieme delle formule booleane soddisfacibili, ovvero di quelle formule booleane che risultano vere per almeno un'assegnazione di valori alle variabili. Non è noto se SAT $\in$ P (=PTIME), ovvero se esistano algoritmi per stabilire in tempo polinomiale (rispetto alla lunghezza dell'input) se una data formula booleana appartenga a SAT. È invece semplice verificare che SAT $\in$ NP (l'insieme dei problemi decisionali algoritmicamente risolubili in tempo polinomiale con una macchina non deterministica).

Uno dei problemi aperti più importanti della teoria della complessità computazionale (l'unico, tra i 7 problemi del Millennium Prize del Clay Institute, ad essere nato in campo informatico) è se P = NP.

A questo riguardo un risultato fondamentale è il seguente:

Teorema 1. *(Cook, 1971 [2]): SAT è NP-completo.*

dove per "completo" si intende rispetto a riduzioni polinomiali. Di conseguenza, se SAT $\in$ P, allora P = NP,

La congettura più accreditata è che P $\neq$ NP; di conseguenza la NP-completezza di un problema è considerata un'indicazione del fatto che probabilmente il problema è intrattabile in tempo polinomiale. A partire dal classico risultato di Cook molti altri problemi sono stati dimostrati NP-completi tramite una riduzione a SAT ([4]).

Valgono le inclusioni

$$\mathrm{P} \subset \mathrm{NP} \subset \mathrm{EXPTIME} \tag{$*$}$$

dove EXPTIME è l'insieme dei problemi decisionali algoritmicamente risolubili in tempo esponenziale. Segue dal teorema di gerarchia ([3]) che

$$\mathrm{P} \neq \mathrm{EXPTIME}\ ,$$

e quindi almeno una delle due inclusioni in (*) è stretta.

Se oltre ai connettivi booleani ammettiamo la possibilità di quantificare (universalmente ed esistenzialmente) su variabili proposizionali otteniamo l'insieme delle *formule booleane quantificate* e possiamo studiarne il sottoinsieme QSAT di quelle vere. Ad esempio la formula $\forall A(\neg A \to \exists B(A \to B))$ appartiene a