Teoremi di unicità di Cartan e gruppi di automorfismi

Sebastián Matías Camponovo

Obiettivi

Siamo interessati principalmente a tre argomenti collegati fra di loro:

- Teoremi di Cartan

Obiettivi

Siamo interessati principalmente a tre argomenti collegati fra di loro:

- Teoremi di Cartan
- Automorfismi della palla unitaria in $\mathbb{C}^n$

Obiettivi

Siamo interessati principalmente a tre argomenti collegati fra di loro:

- Teoremi di Cartan
- Automorfismi della palla unitaria in $\mathbb{C}^n$
- La non-generalizzazione del teorema di unicità di uniformizzazione di Riemann in $\mathbb{C}^n$

Notazioni

In generale utilizzeremo le seguenti notazioni:

- Per ogni $z \in \mathbb{C}^n$ indicheremo la sua norma come $|z| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i}$
- $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n \| z| < 1\}$
- F^k indica la k-esima iterata di F. $F^1 = F$, $F^k = F^{k-1} \circ F$

Teorema di Cartan 1

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato. $F : \Omega \to \Omega$, olomorfa tale che esista $p \in \Omega$ per cui valgono le seguenti:

- $F(p) = p$
- $F'(p) = I$

Allora $F(z) = z \; \forall z \in \Omega$

Dimostrazione Cartan 1

Dimostrazione

WLOG $p = 0$. $\exists\, 0 < r_1 < r_2 < \infty$, tali che valga $r_1 B^n \subset \Omega \subset r_2 B^n$. Per $|z| < r_1, F$ ammette espansione omogenea:

$$F(z) = z + \sum_{s=2}^{\infty} F_s(z)$$

dove ogni $F_s(z)$ è mappa da $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con componenti polinomi omogenei di grado s. Consideriamo F^k e e mostriamo induttivamente che per ogni $m \geq 2$ vale $F_s = 0$ per ogni $2 \leq s < m$. Il passo base con $m = 2$ è vero a vuoto. Supponiamo allora che valga l'ipotesi induttiva per un m qualsiasi: ciò significa che F^k, in $r_1 B^n$ ammette espansione omogenea del tipo

$$F^k(z) = z + kF_m(z) + \ldots$$

(si dimostra per induzione su k).

Dimostrazione

Dimostrazione

L'omogeneità delle mappe F_s implica

$$kF_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^k(e^{i\theta} z) e^{-im\theta} d\theta.$$

Dato che F^k mappa Ω in sé, abbiamo $|F^k(e^{i\theta} z)| < r_2$ per ogni $z \in r_1 B^n$ e per ogni θ. Ma allora $|kF_m(z)| < r_2$ per ogni k fissato e $z \in r_1 B^n$. Questo implica $F_m = 0$, da cui la tesi induttiva. Per concludere osserviamo che Ω è connesso e vale $F(z) = z$ per ogni $z \in r_1 B^n$.

Teorema di Cartan 2

Definizione

Un dominio Ω è detto circolare se $z \in \Omega$ implica $e^{i\theta} z$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Teorema

Siano Ω_1, Ω_2 domini circolari di $\mathbb{C}^n$ con $0 \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Sia Ω_1 limitato e sia $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ un biolomorfismo con $F(0) = 0$, allora F è un'applicazione lineare.

Dimostrazione Cartan 2

Dimostrazione

Poniamo $G = F^{-1}$, $A = F'(0)$. Dato che $G(F(z)) = z$, $G'(0)A = I$, deve essere $G'(0) = A^{-1}$. Fissiamo un reale θ, e definiamo su Ω_1 la funzione

$$H(z) = G(e^{-i\theta}F(e^{i\theta}z))$$

Dato che entrambi Ω_1, Ω_2 sono insieme circolari H è ben definita, olomorfa da Ω_1 in se stesso che soddisfa $H(0) = 0, H'(0) = I$. Segue dal primo teorema di Cartan $H(z) = z$. Applicandovi F e moltiplicando per $e^{i\theta}$, otteniamo:

$$F(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}F(z)$$

per ogni $z \in \Omega_1, \theta \in \mathbb{R}$. Il termine lineare nell'espansione omogena di F è quindi l'unico termine differente da 0.

Osservazione

Osservazione

Se $\Omega_1 = \Omega_2 = B^n$ e abbiamo $F : B^n \to B^n$ automorfismo che fissa l'origine come conseguenza dei teoremi di Cartan si ottiene immediatamente $Aut_{Fix0}(B^n) \simeq U(n)$

Il gruppo $\mathrm{Aut}(B^n)$

Facciamo vedere che la proprietà di transitività di $\mathrm{Aut}(B^n)$ può essere generalizzata anche a $n > 1$. Fissato $a \in B^n \setminus \{0\}$ consideriamo:

$$P_a(z) = \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a \,;\, Q_a = I - P_a$$

e definiamo l'applicazione:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - \sqrt{1 - |a|^2} Q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}$$

che è olomorfa su $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n | \langle z, a\rangle \neq 1\}$.
Al fine di alleggerire la notazione poniamo $s_a = \sqrt{1 - |a|^2}$.

Proprietà di φ_a

Proposizione

L'applicazione φ_a gode delle seguenti proprietà:

1. $\varphi_a(0) = a \wedge \varphi_a(a) = 0$
2. $\varphi_a'(0) = -s_a^2 P_a - s_a Q_a \wedge \varphi_a'(a) = -P_a/s_a^2 - Q_/ s$
3. $\forall z, w \in \overline{B^n}: \quad 1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = \frac{(1-\langle a;a\rangle)(1-\langle z;w\rangle)}{(1-\langle z;a\rangle)(1-\langle a;w\rangle)}$
4. $\forall z \in \overline{B^n} : 1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,a\rangle|^2}$
5. φ_a è un involuzione $(\varphi_a^2 = Id)$
6. $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(B^n)$ ed è un omeomorfismo da $\overline{B^n}$

Osservazione

Osservazione

Le proprietà di φ_a permettono di osservare come $Aut(B^n)$ agisca transitivamente su B^n anche per $n > 1$. Per avere un automorfismo che dati $a, b \in B^n$ porti a in b è infatti sufficiente considerare $\varphi_b \circ \varphi_a$.

Automorfismi di B^n

Teorema

Se $\psi \in Aut(B^n)$ e $a = \psi^{-1}(0)$, allora esiste unica trasformazione unitaria tale che

$$\psi = U\varphi_a$$

Dimostrazione

$\psi \circ \varphi_a$ è un automorfismo di B^n che fissa l'origine, per Cartan 2 è lineare. Le trasformazioni unitarie sono le uniche applicazioni lineari di $\mathbb{C}^n$ che preservano B^n, esiste quindi U unitaria tale che $\psi \circ \varphi_a = U$. Dato che φ_a è un involuzione è sufficiente pre-comporre a destra per ottenere la tesi.

Teorema della mappa di Riemann

Teorema

Sia $0 \in \Omega$ un dominio circolare di $\mathbb{C}^n$, e sia $F : B^n \to \Omega$ biolomorfismo. Allora esiste una trasformazione lineare G di B^n tale che $G(B^n) = \Omega$.

Teorema di Poincaré

Se $n > 1$, non esistono biolomorfismi da B^n nel polidisco Δ^n

Grazie per l'attenzione!