UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Gruppi ordinabili a sinistra di 3-varietà

Relatori:

Prof. Paolo Lisca

Candidato:

Sebastián Matías Camponovo

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

Introduzione

L'argomento principale della tesi è lo studio dell'ordinabilità a sinistra di gruppi fondamentali di 3-varietà M.
La nozione puramente algebrica di ordinamento a sinistra (LO) di un gruppo G rivela avere legami con argomenti topologici, ad esempio l'ordinabilità a sinistra di gruppi fondamentali di 3-varietà può essere messa in relazione all'esistenza di determinate foliazioni sulla varietà stessa.

Dopo aver introdotto le prime proprietà di gruppi ordinabili a sinistra, condizione che in particolare si rivela essere più forte dell'essere liberi da torsione, vengono forniti criteri per valutare l'ordinabilità a sinistra di un gruppo qualsiasi e presentato un risultato di *realizzazione dinamica* in $\mathrm{Omeo}_+(\mathbb{R})$ per gruppi G ordinabili a sinistra di cardinalità numerabile.

Nel caso di 3-varietà il teorema di decomposizione in varietà prime di Kneser-Milnor, unito a un teorema di Vinogradov, permetterà di limitare il nostro studio a 3-varietà prime. Ulteriori osservazioni permetteranno di restringere il nostro interesse a 3-varietà P^2-irriducibili, per le quali un teorema di Boyer-Rolfsen-Wiest dimostra che l'esistenza di un ordine invariante a sinistra su un gruppo G è equivalente all'esistenza di un omomorfismo surgettivo da ogni sottogruppo finitamente generato di G in un gruppo L LO.

Infine, dopo una breve presentazione delle varietà di Seifert, forniremo risultati sull'ordinabilità dei gruppi fondamentali di questa particolare famiglia di 3-varietà e studieremo il legame fra l'ordinabilità a sinistra del gruppo fondamentale di una 3-varietà M e l'esistenza di una foliazione tesa $\mathbb{R}-$rivestita sullo spazio delle foglie di M.

Indice

Chapter 1

Gruppi Ordinabili

In questo capitolo forniremo la definizione di gruppo ordinabile a sinistra e i primi risultati relativi alla teoria dei gruppi ordinabili (eventualmente solo a sinistra). Metteremo in luce alcune delle prime proprietà che derivano dall'ordine -fornendo quindi un primo "motivo di interesse pratico" per la questione- ed alcune caratterizzazioni per trattare gruppi che vengono presentati a priori senza un ordine.

Definizione 1.1. Un ordine stretto su un insieme X è una relazione binaria $<$ transitiva e tale che $x < y$ e $y < x$ non possano valere entrambi. L'ordine stretto è detto totale se per ogni $x, y \in X$ vale esattamente una fra $x < y, y < x, x = y$.

Definizione 1.2. Un gruppo G è detto ordinabile a sinistra (LO) se $G \neq \{1\}$ e ammette un ordine (stretto) totale $<$ che è invariante per moltiplicazione a sinistra, cioè $g < h$ implica $fg < fh$ per ogni $f, g, h \in G$. Un gruppo G è detto bi-ordinabile, o semplicemente ordinabile, se ammette un ordine che è contemporaneamente invariante per moltiplicazione a sinistra e a destra.

Osservazione. In letteratura vengono spesso considerati ordini invarianti per moltiplicazione a destra. La definizione di gruppo ordinabile a destra è perfettamente equivalente a quella di gruppo ordinabile a sinistra e per ogni risultato per gruppi LO corrisponde un analogo per gruppi ordinabili a destra [11].

I gruppi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ con l'operazione di addizione e l'usuale ordinamento " $<$ " sono esempi di gruppi ordinabili a sinistra (ancora di più sono bi-ordinabili). Al contrario $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ possiede elementi con ordine finito (-1) e quindi non può essere ordinabile a sinistra. Infatti, come vedremo nella prossima sezione, essere ordinabili a sinistra è una condizione più forte dell'essere liberi da torsione.

In generale sottogruppi non banali e prodotti finiti di gruppi LO sono a loro volta LO tramite la restrizione dell'ordine ai sottogruppi, nel primo caso,

e le proiezioni sui fattori unite ad un argomento analogo al noto ordinamento lessicografico nel secondo caso.
Vediamo adesso un esempio leggermente più complesso di gruppo ordinabile a sinistra:

Teorema 1.3. *Il gruppo $Omeo_+(\mathbb{R})$ degli omeomorfismi della retta reale che preservano l'ordine è LO.*

Dimostrazione. Consideriamo $D = \{x_1, x_2, ...\}$ un insieme denso in $\mathbb{R}$. Dati $f, g \in Omeo_+(\mathbb{R})$ scegliamo $m = m(f, g)$ il primo indice i per il quale $f(x_i) \neq g(x_i)$ e definiamo $f \prec g$ se e solo se $f(x_m) < g(x_m)$ con l'usuale ordinamento dei numeri reali. Questo procedimento induce un ordinamento stretto totale sul gruppo, motiviamo l'affermazione. Siano $f, g, h \in G$ tali che $f \prec g$ e $g \prec h$ vogliamo vedere che $f \prec h$. Distinguiamo due casi, se $m(f, g), m(g, h)$ coincidono allora $f(x_i) = g(x_i) = h(x_i)$ per ogni $i < m$ e per ipotesi abbiamo $f(x_m) < g(x_m) < h(x_m)$ che è quello che volevamo. Se $m(f, g) = m, m(g, h) = n$ non coincidono abbiamo quindi $f(x_m) < g(x_m)$ e $g(x_n) < h(x_n)$. Se $m > n$ allora $f(x_n) = g(x_n)$ dato che $f(x_j) = g(x_j)$ per ogni $j < m$ e otteniamo $f \prec h$. Nel caso in cui $n > m$ abbiamo similmente $h(x_m) = g(x_m) > f(x_m)$.
Per l'invarianza a sinistra è sufficiente osservare che gli omeomorfismi che preservano l'ordine sono funzioni strettamente crescenti, quindi se $f(x_m) < g(x_m)$ si ottiene $h(f(x_m)) < h(g(x_m))$ che ci dice proprio $hf \prec hg$. □

1.1 Proprietà di un gruppo ordinabile

Teorema 1.4. *Un gruppo G ordinabile a sinistra è libero da torsione.*

Dimostrazione. Sia $g \in G$ diverso dall'identità. Vogliamo vedere che per ogni $p \in \mathbb{N}$ $g^p \neq 1$. Senza perdita di generalità consideriamo $1 < g$ e supponiamo per assurdo che l'ordine di g sia p. Dalla definizione di ordinabilità a sinistra abbiamo $g < g^2$, iterando la moltiplicazione a sinistra costruiamo una catena: $1 < g < g^2 < ... < g^{p-1} < g^p = 1$, una contraddizione. □

Lemma 1.5. In un gruppo ordinabile, una potenza diversa da zero di un elemento γ è centrale se e solo se γ è centrale.

Dimostrazione. Supponiamo che esista un $n > 0$ tale che g^n sia centrale in G. Supponiamo che esista $h \in G$ che non commuti con g e che valga $ghg^{-1} < h$. Operando per coniugazione arriviamo all'assurdo $h = g^n hg^{-n} < h$. Il caso "simmetrico" $ghg^{-1} > h$ conduce ad un assurdo analogo. □

Il seguente teorema è una prima classificazione completa nel caso di gruppo ordinabile a sinistra G di cardinalità numerabile. Il criterio è anche un punto di partenza fondamentale nel legame fra ordinabilità di un gruppo, e quindi questioni puramente algebriche, e proprietà di realizzazione dinamiche.

Teorema 1.6. *Se G è un gruppo numerabile, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) G è ordinabile a sinistra.

(2) G è isomorfo a un sottogruppo di Omeo$_+(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che Omeo$_+(\mathbb{R})$ è ordinabile a sinistra e l'essere LO è una proprietà che passa ai sottogruppi considerando semplicemente la restrizione dell'ordine. Se G è isomorfo ad un sottogruppo di Omeo$_+(\mathbb{R})$ è quindi LO.
Al contrario supponiamo che $(G,<)$ sia LO e presentiamo un embedding esplicito $t : G \to \mathbb{R}$.
L'azione indotta su $\mathbb{R}$ dalla costruzione è nota come *realizzazione dinamica* dell'ordinamento a sinistra, ed è descritta come segue.
Fissiamo una enumerazione $\{g_0, g_1, g_2, ...\}$ di G con $g_0 = 1$, e costruiamo un embedding che preservi l'ordine $t : G \to \mathbb{R}$ in maniera induttiva. Iniziamo ponendo $t(g_0) = 0$. Se $t(g_0), ..., t(g_i)$ sono stati già definiti e se g_{i+1} è più grande o più piccolo di tutti gli elementi già considerati poniamo:

$$t(g_{i+1}) = \begin{cases} \max\{t(g_0), ..., t(g_i)\} + 1 & \text{se } g_{i+1} > \max\{g_0, ..., g_i\}, \\ \min\{t(g_0), ..., t(g_i)\} - 1 & \text{se } g_{i+1} < \min\{g_0, ..., g_i\}. \end{cases}$$

Se invece esistono indici $j, k \in \{0, ..., i\}$ tali che $g_j < g_{i+1} < g_k$ e non esiste nessun $n \in \{0, ..., i\}$ tale che $g_j < g_n < g_k$, allora poniamo

$$t(g_{i+1}) = \frac{t(g_j) + t(g_k)}{2}$$

Il gruppo G agisce preservando l'ordine sull'insieme $t(G)$ secondo la regola $g(t(h)) = t(gh)$.

La regola si estende in maniera naturale, ad un'azione che preserva l'ordine, alla chiusura $\overline{t(G)}$. Il complementare di $\overline{t(G)}$ è unione di intervalli aperti, con l'azione di ogni $g \in G$ definita sui suoi estremi. Per ogni $g \in G$ possiamo estendere l'azione a omeomorfismi che preservano l'orientazione $\rho(g)$ estendendo l'azione di g su $t(G)$ in maniera affine al complementare $\mathbb{R} \backslash \overline{t(G)}$.
La costruzione definisce una rappresentazione fedele $\rho : G \to$Omeo$_+(\mathbb{R})$ [11], ed è quindi l'embedding che cercavamo. □

Osservazione. La costruzione che abbiamo appena descritto necessita di una enumerazione del gruppo G e non è quindi unica.

Quanto questa costruzione sia unica, ed in generale la cardinalità di ordini possibili su un gruppo, vengono trattati più nel dettaglio da Navas in

[9].

Ricordiamo adesso la seguente definizione per gruppi G analoga ad una delle classiche proprietà dei numeri reali:

Definizione 1.7. Un gruppo G ordinabile a sinistra è detto archimedeo se per ogni $a, b \in G$ tale che $1 < a < b$ esiste un intero positivo n tale che $b < a^n$.

Il seguente risultato dimostra che essere archimedeo è una proprietà in generale "poco interessante" dato che il teorema che segue *forza* il nostro gruppo ad essere abeliano:

Teorema 1.8. *(Conrad 1959, Hölder 1902) Se un gruppo G LO è archimededeo allora l'ordinamento è bi-invariante. In più G è isomorfo (sia da un punto di vista algebrico che di ordine) ad un sottogruppo additivo dei numeri reali. In particolare G è abeliano.*

1.2 Condizioni e test di ordinabilità

Dato un gruppo G qualsiasi è quindi di interesse domandarsi dell'eventuale esistenza di ordini invarianti a sinistra sul gruppo stesso. Forniamo adesso alcuni primi risultati che permettono di valutare l'ordinabilità a sinistra di un gruppo qualsiasi:

Definizione 1.9. Chiamiamo cono positivo di G un sottoinsieme non vuoto $P \subset G$ tale che valgano le tre condizioni seguenti:
1)$P \cdot P = P$ (proprietà di semigruppo)
2)$g \in P \implies g^{-1} \notin P$
3)$1 \notin P$

In generale abbiamo che la condizione di ordinabilità di un gruppo è equivalente alla decomposizione in unione disgiunta di quest'ultimo in 3 semigruppi. Abbiamo infatti che G è LO se e solo se $G = P \cup P_{-} \cup \{1\}$. Dove con la notazione P_{-} facciamo riferimento al semigruppo complementare al cono positivo, meno l'identità 1.

Proposizione 1.10. *Un gruppo G è LO se e solo se esiste un cono positivo $P \subset G$.*

Dimostrazione. L'esistenza di un cono positivo permette di definire un ordine come $g < h$ se e solo se $g^{-1}h \in P$. Se il gruppo è ordinato considero $P = \{g \in G | 1 < g\}$, l'insieme P definisce proprio un cono positivo di G. □

La nozione di cono positivo ci permette di recuperare, e dimostrare, un altro risultato di estensione dell'ordinabilità a sinistra:

Teorema 1.11. *Se esiste una successione corta esatta*

$$1 \to K \to G \to H \to 1$$

con H,K entrambi ordinabili a sinistra allora anche G è ordinabile a sinistra.

Dimostrazione. Siano rispettivamente $\mathcal{P}_k$, $\mathcal{P}_h$ i coni positivi relativi a K, H. Detta $f : G \to H$ la proiezione della successione da G ad H, consideriamo allora l'insieme $\mathcal{P} = \mathcal{P}_K \cup f^{-1}(\mathcal{P}_H)$, questo è un cono positivo su G e quindi equivalente ad un ordinamento sinistro sul gruppo. □

Le precedenti proposizioni permettono di esibire un primo esempio di gruppo LO ma non bi-ordinabile. Consideriamo la bottiglia di Klein, una presentazione del suo gruppo fondamentale è la seguente:

$$G = \langle m, l \ ; \ lml^{-1} = m^{-1} \rangle$$

ed è immediato verificare che G sia un gruppo ordinabile a sinistra: sia K il sottogruppo generato da m; K è normale in G, segue dalla presentazione del gruppo fondamentale, ed è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Ancora di più anche $H = G/K$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$, abbiamo allora la successione corta esatta: $1 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z} \to 1$ e possiamo concludere che G è ordinabile a sinistra come applicazione diretta del teorema 1.11, essendo G un'estensione di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$.
Ad ogni modo la stessa bottiglia di Klein non è bi-ordinabile, se così fosse considerando $m > 1$ avremmo $1 < lml^{-1} = m^{-1} < 1$, assurdo. Si ottiene un assurdo analogo nel caso in cui $m < 1$.

In generale il quoziente di un gruppo ordinabile a sinistra non è necessariamente ordinabile a sinistra (basta considerare il controesempio costituito da $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ quando n è diverso da 0) ma vale il seguente risultato:

Teorema 1.12. *Supponiamo esista una successione corta esatta*

$$1 \to K \to G \to H \to 1$$

con gruppi non banali e G ordinabile a sinistra. Allora H è ordinabile a sinistra se e solo se, rispetto ad un ordine fissato su G, per ogni $a, b \in K$ se vale $a < c < b$ allora $c \in K$ e diremo che K è un sottogruppo convesso.

Dimostrazione. Supponiamo che H sia ordinabile. Allora possiamo costruire un ordine a sinistra su G che renda K convesso nel seguente modo. Consideriamo ordini a sinistra su H, G e denotiamo con $\mathcal{P}_H, \mathcal{P}_G$ i rispettivi coni positivi associati all'ordine. Detta $\pi : G \to H$ la proiezione della successione esatta, definiamo un nuovo cono positivo $\mathcal{P}$ su G ponendo $x \in \mathcal{P}$ se e solo se $\pi(x) \in \mathcal{P}_H$ oppure $\pi(x) = 1$ e $x \in \mathcal{P}_G$. Rispetto all'ordine definito da $\mathcal{P}$ su G, K è un sottogruppo convesso. Siano infatti $x < z < y$ per qualche

$x, y \in K$, allora $\pi(x^{-1}z) = \pi(z)$ e $\pi(z^{-1}y) = \pi(z)^{-1}$ sono entrambi elementi di $\mathcal{P}_H \cup \{1\}$. Quindi $\pi(z) = 1$ e di conseguenza $z \in K$.
Al contrario supponiamo di avere un ordine a sinistra su G tale che K sia un sottogruppo convesso. Mostriamo che $H \simeq G/K$ è LO. Denotiamo con $\mathcal{P}$ il cono positivo associato all'ordine. Dimostriamo che $\mathcal{Q} = (G \backslash K) \cap \mathcal{P}$ è unione di classi laterali di K che da un cono positivo su H. Come prima cosa vediamo che $\mathcal{Q}$ è unione di classi laterali. Sia $a \in \mathcal{Q}$ (vale quindi $a \notin K$ e $a > 1$) e $k \in K$. Se per assurdo $ak \neq \mathcal{Q}$, allora deve valere $ak \in K$ oppure $ak < 1$. La prima possibilità è esclusa in quanto $a \notin K$, mentre la seconda perché $ak < 1 = aa^{-1}$ implica $k < a^{-1} < 1$ e di conseguenza (per un argomento di convessità) che $a^{-1} \in K$, contraddicendo nuovamente $a \notin K$.
Vediamo adesso che $\mathcal{Q}$ è un cono positivo su G/K:

- $\mathcal{Q} \subset G/K$ è un sottosemigruppo. Dati $aK, bK \in \mathcal{Q}$ abbiamo che $(aK)\cdot(bK) = (ab)K \subset \mathcal{P}$ e di conseguenza $(aK)\cdot(bK) \in \mathcal{Q}$ se $(ab)K \neq K$. Il caso $(ab)K = K$, però, conduce a $aK = b^{-1}K$ che implica che b sia negativo. Un assurdo.

- $H = G/K$ si decompone come unione disgiunta in $G/K = \mathcal{Q} \cup \{1\} \cup \mathcal{Q}^{-1}$ dato che K (la classe laterale dell'identità) è disgiunta da $\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^{-1}$, e ogni classe laterale C diversa da quella dell'identità contiene solamente elementi positivi.

- $\mathcal{Q}$ è non vuoto in quanto K è un sottogruppo proprio di G dato che G/K è non banale.

Abbiamo quindi dimostrato che H ammette cono positivo e di conseguenza un ordine a sinistra. □

Osservazione: L'assioma della scelta -che per noi sarà sempre valido- è equivalente al teorema del buon ordinamento: ogni insieme può essere ben ordinato.

Riportiamo adesso un risultato dovuto a Conrad che si rivelerà utile nello studio di gruppi "familiari".

Definizione 1.13. Diremo che un gruppo G agisce fedelmente su un insieme X se l'elemento $1 \in G$ è l'unico elemento che agisce come l'identità su X.

Teorema 1.14. *(Conrad, 1959) Un gruppo G è ordinabile a sinistra se e solo se agisce in maniera fedele su un insieme X linearmente ordinato con bigezioni che preservano l'ordine.*

Dimostrazione. Dato un gruppo ordinato a sinistra questo agisce fedelmente su se stesso tramite moltiplicazione a sinistra. Per vedere l'altra implicazione supponiamo che G agisca su X in maniera tale che per ogni $g \in G$,

$x < y \iff g(x) < g(y)$. Allora dato un buon ordinamento su X -che posso sempre trovare per l'assioma della scelta- confronto $g \neq h \in G$ considerando l'elemento minimo x_0 per cui $g(x) \neq h(x)$. Adesso definiamo $g \prec h$ (alternativamente $h \prec g$) analogamente a $g(x_0) < h(x_0)$ ($h(x_0) < g(x_0)$), questo definisce un ordine invariante per moltiplicazione a sinistra con un argomento identico al teorema 1.3 dato che le bigezioni preservano l'ordine come nel caso di $\text{Omeo}_+(\mathbb{R})$. □

Il teorema di Condrad ci permette di ritrovare più astrattamente il risultato per cui $\text{Omeo}_+(\mathbb{R})$ è ordinabile a sinistra, infatti il gruppo agisce fedelmente su $\mathbb{R}$ per definizione.

Dato $X \subset G$ denotiamo con $S(X)$ il semigruppo generato da X, cioè tutti gli elementi di G che sono prodotto di elementi in X. Se $X = \{x_1, ..., x_n\}$ è finito scriviamo $S(X) = S(x_1, ..., x_n)$. Riportiamo adesso un altro risultato di Conrad che caratterizza l'ordinabilità di un gruppo rispetto ai semigruppi generati dagli elementi del gruppo stesso.

Teorema 1.15. *(Criterio di ordinabilità a sinistra di Conrad) Un gruppo G è ordinabile a sinistra se e solo se per ogni sottoinsieme di elementi $\{x_1, ..., x_n\}$ di G che non contiene 1, esistono indici $e_i = \pm 1$ tali che $1 \notin S(x_1^{e_1}, ..., x_n^{e_n})$.*

La necessita è ovvia, se il gruppo G è LO allora posso sempre trovare $e_i \in \{-1, 1\}$ tale che $g_i^{e^i} > 1$, e questo soddisfa quanto richiesto. La sufficienza è dimostrata in [3] tramite l'ausilio di argomenti topologici sullo spazio degli ordini. Prima di utilizzare il criterio nella dimostrazione del teorema di Burns-Hale sfruttiamone la caratterizzazione per mostrare un esempio non banale di gruppo non ordinabile a sinistra. La dimostrazione, e costruzione, che il seguente sia effettivamente il gruppo fondamentale di una sfera di omologia razionale è presente in [1].

Proposizione 1.16. *Il gruppo fondamentale presentato come*

$$\pi_1(Y) =< a, b, \overline{a}, \overline{b} \mid a^2 = b^2, \overline{a}^2 = \overline{b}^2, a^2 = \overline{a}\overline{b}, ab = \overline{a}^{-2} >$$

è il gruppo fondamentale di una sfera di omologia razionale ed è non ordinabile.

Dimostrazione. Esaurendo i casi per mano si vede come il semigruppo generato da $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \overline{a}^{\pm 1}, \overline{b}^{\pm 1}$ contenga l'identità per ognuna delle 16 possibili scelte di indici. Il gruppo non è quindi ordinabile a sinistra per il criterio di Conrad. □

Teorema 1.17 (Burns-Hale)**.** *Un gruppo G è ordinabile a sinistra se e solo se ogni sottogruppo non banale finitamente generato ha un quoziente non banale che è ordinabile a sinistra.*

Dimostrazione. Se il gruppo G è LO allora ogni sottogruppo non banale finitamente generato di G ammette omomorfismo surgettivo in un gruppo ordinabile a sinistra, cioè se stesso. Per l'implicazione opposta vogliamo far vedere che per ogni sottoinsieme finito $\{x_1, ..., x_n\}$ di $G\backslash\{1\}$, esistono indici e_i tali che $1 \notin S(x_1^{e^1}, ..., x_n^{e^n})$.
Ragioniamo per induzione su n. Il caso base $n = 1$ è sicuramente vero, $S(x_1)$ contiene l'identità se e solo se x_1 ha ordine finito, ma questo è impossibile dato che il sottogruppo ciclico $\langle x_1 \rangle$ ammette omomorfismo surgettivo non banale in un gruppo ordinabile a sinistra.
Sia quindi la proposizione vera per ogni sottoinsieme di $G\backslash\{1\}$ con meno di n elementi, consideriamo $\{x_1, ..., x_n\} \subset G\backslash\{1\}$. Per ipotesi esiste un omomorfismo non banale

$$\varphi : \langle x_1, ..., x_n \rangle \to L$$

con $(L, \prec)$ gruppo ordinato a sinistra. Non tutti gli x_i sono nel kernel dato che per ipotesi l'omomorfismo è non banale, a meno di riordinare gli elementi, possiamo allora supporre che esista $r < n$ tale che:

$$\varphi(x_i) \begin{cases} \neq 1 & \text{se } i = 1, ..., r \\ = 1 & \text{se } r < i \leqslant n \end{cases}$$

Scegliamo ora indici $e_1, ..., e_r$ tali che $1 \prec h(x_i^{e_i})$ in L per ogni $i = 1, ..., r$. Per ogni $i > r$, l'ipotesi induttiva permette di trovare indici $e_i = \pm 1$ tali che $1 \notin S(x_{r+1}^{e_{r+1}}, ..., x_n^{e_n})$. Mostriamo per assurdo che $1 \notin S(x_1^{e_1}, ..., x_n^{e_n})$. Supponiamo che 1 sia prodotto di qualche $x_i^{e_i}$. Se tutti gli i sono maggiori di r questo è impossibile per ipotesi induttiva. Se d'altro canto vi fosse qualche indice i minore di r, avremmo che φ manda il prodotto in un elemento strettamente più grande dell'identità in L, un assurdo. □

In generale i gruppi liberi F sono ordinabili a sinistra (in realtà biordinabili). Una costruzione di un possibile ordinamento, dovuta a Magnus, è ottenuta immergendo il gruppo nell'anello delle serie formali costruito sulle variabili che non commutano X_i, una per ogni generatore di F. La costruzione è trattata nel dettaglio in [3]. Mentre fino ad adesso abbiamo visto solamente risultati prettamente algebrici riportiamo un teorema dovuto a Farrell che collega l'ordinabilità di gruppi alla teoria dei rivestimenti:

Teorema 1.18. *(Farrell [6]) Sia X uno spazio topologico paracompatto, localmente compatto con gruppo fondamentale numerabile. Supponiamo che vi sia rivestimento universale $p : \tilde{X} \to X$. Allora $\pi_1(X)$ è ordinabile a sinistra se e solo se esiste un embedding $h : \tilde{X} \to X \times \mathbb{R}$ tale che $pr_X h = p$.*

Nello studio dell'ordinabilità dei gruppi fondamentali delle 3-varietà si incontra fin da subito la necessità di lavorare con il prodotto libero di gruppi come naturale risultato del teorema di Van Kampen e del teorema di decomposizione in 3-varietà prime. Il risultato che segue è stato dimostrato per gruppi bi-ordinabili da A.A. Vinogradov [14], tramite l'utilizzo di gruppi di unità positive di anelli ordinati, e reso specifico al caso di gruppi ordinabili a sinistra da D.S. Passman in [10].

Teorema 1.19. *(Vinogradov) Condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto libero di gruppi $G = G_1 * G_2 * ... * G_n$ sia ordinabile a sinistra, rispettivamente bi-ordinabile, è che il singolo G_j soddisfi la proprietà richiesta.*

La seguente definizione è dovuta ad Higman ed è particolarmente utile in questioni legate all'ordinabilità:

Definizione 1.20. Un gruppo G è detto localmente indicabile (LI) se ogni sottogruppo non banale finitamente generato ammette $\mathbb{Z}$ come quoziente.

Teorema 1.21. *Se G è bi-ordinabile allora G è localmente indicabile. Se G è localmente indicabile allora è ordinabile a sinistra. In generale nessuna delle due implicazioni è reversibile.*

Una dimostrazione della prima proposizione è presente in [2] mentre per la seconda affermazione è sufficiente utilizzare il teorema di Burns-Hale ricordando che $\mathbb{Z}$ è ordinabile. Quando abbiamo trattato il caso della bottiglia di Klein nel dimostrare la sua ordinabilità a sinistra abbiamo implicitamente dimostrato che il suo gruppo fondamentale è localmente indicabile. In realtà è questo il caso generale di una superficie vale infatti:

Teorema 1.22. *[11] Sia Σ una superficie, allora $\pi_1(\Sigma)$ è bi-ordinabile con due eccezioni: la bottiglia di Klein, che è solamente LI, ed il piano proiettivo P^2 che non è neanche LO in quanto non libero da torsione.*

1.3 Group ring e divisori di zero

Quelle che seguono sono discussioni sulle motivazioni algebriche di interesse nella teoria dei gruppi ordinabili. Una trattazione più completa è presente in [3].
Se R è un anello e G un gruppo definiamo il group ring RG come l'R-modulo libero sinistro generato dagli elementi di G, con la naturale moltiplicazione analoga a quella di polinomi. Il tipico elemento di RG è una combinazione lineare finita del tipo:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i g_i$$

con $r_i \in R$ e $g_i \in G$. Il prodotto è definito -a meno di cancellazioni- come:

$$(\sum_{i=1}^{m} r_i g_i)(\sum_{j=1}^{n} s_j h_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_i s_j (g_i h_j). \; (*)$$

Ricordiamo rapidamente che un elemento $\alpha \neq 0$ di un anello è un divisore di zero se esiste un altro $\beta \neq 0$ nell'anello tale che $\alpha\beta = 0$. Un problema centrale nella teoria dei group ring (strumento che si *presenta naturalmente* in teoria delle rappresentazioni, topologia algebrica, teoria di Galois, etc.) è la cosidetta congettura di Kaplansky, che in generale rimane aperta anche nel caso $R = \mathbb{Z}$.

Congettura: Sia R un anello senza divisori di zero e G un gruppo libero da torsione, allora RG non ha divisori di zero.

La congettura precedente è per noi di particolare interesse in quanto nel caso di gruppi ordinabili a sinistra è possibile ottenere una risposta diretta:

Teorema 1.23. *Sia R un anello senza divisori di zero e G un gruppo ordinabile a sinistra, allora RG non ha divisori di zero o unità non banali.*

Dimostrazione. Considero un prodotto di elementi di RG con la notazione di $(*)$, supponiamo che tutti gli r_i, s_j siano non zero, e che i g_i, h_j siano scritti in maniera strettamente crescente rispetto all'ordine invariante a sinistra su G. Almeno uno degli elementi $g_i h_j$ nel RHS del prodotto $(*)$ è minimale rispetto all'ordinamento a sinistra. Se $j > 1$ allora, per invarianza a sinistra, abbiamo che $g_i h_1 < g_i h_j$ e $g_i h_j$ non è minimale. Deve quindi essere $j = 1$. D'altro canto, dato che siamo in un gruppo e i g_i sono tutti distinti, abbiamo $g_i h_1 \neq g_k h_1$ per ogni $k \neq i$. Abbiamo quindi dimostrato che esiste esattamente un termine minimo nel RHS di $(*)$ rispetto all'ordinamento. Un ragionamento analogo porta all'unicità del massimo. Questi due termini allora sopravvivono a ogni cancellazione e quindi RHS non può essere zero (perché $r_i s_1 \neq 0$). Ma allora RG non ha divisori di zero. Se uno fra n, m è maggiore di uno, allora ci sono almeno due termini nel RHS che non si cancellano, e il loro prodotto non può quindi essere 1. Ma allora le unità di RG sono banali. $\square$

Chapter 2

Ordinabilità di 3-varietà

2.1 Introduzione alla "fattorizzazione" di varietà

Da adesso in poi lavoreremo con *3-varietà*, con questo termine faremo riferimento a 3-varietà M connesse e compatte, eventualmente non-orientabili e con bordo. Assumeremo sempre una struttura liscia sulle nostre 3-varietà M. Chiameremo *gruppi di 3-varietà* i gruppi fondamentali di questa famiglia di varietà. Per quanto riguarda la notazione S^n indicherà la n-sfera mentre con P^2 faremo riferimento al piano proiettivo.
Ricordiamo brevemente alcuni fatti legati alla teoria delle 3-varietà che introduranno il teorema di scomposizione in varietà prime dovuto a Kneser (esistenza) e Milnor (unicità):

Definizione 2.1. Diremo che la somma connessa $N_1 \# N_2$ di due n-varietà orientabili N_1, N_2, dati D_1, D_2 dischi in N_1, N_2, e le rispettive inclusioni

$$i_1 : D_1 \to N_1, i_2 : D_2 \to N_2$$

è definita come il quoziente di

$$(N_1 - i_1(0)) \bigsqcup (N_2 - i_2(0))$$

dove identifichiamo $i_1(tu)$ con $i_2((1-t)u)$ per ogni $u \in S^{n-1}$ e $t \in (0, 1)$.

Osservazione: Con il linguaggio della nozione di "incollamento" stiamo considerando due n-varietà ed incollandole per due dischi tramite un diffeomorfismo che inverta l'orientazione.

Definizione 2.2. Una 3-varietà M è prima se non può essere espressa come somma connessa $M = N_1 \# N_2$ dove nessuno dei due fattori è S^3.

Definizione 2.3. Una 3-varietà M è irriducibile se ogni sfera contenuta nella parte interna è bordo di una palla.

Introdotta questa notazione possiamo quindi enunciare il seguente risultato noto come teorema di Kneser-Milnor:

Teorema 2.4. *Una 3-varietà connessa e compatta $M \neq S^3$ ammette unica scrittura come somma connessa di 3-varietà prime*

$$M \simeq M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n.$$

Come corollario del teorema 1.19 e del teorema di Van Kampen sarà allora sufficiente studiare l'ordinabilità di 3-varietà prime in quanto abbiamo analoga scomposizione di gruppi fondamentali:

$$\pi_1(M) \simeq \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * ... * \pi_1(M_n)$$

In generale il gruppo fondamentale di una 3-varietà prima e riducibile è $\mathbb{Z}$ che sappiamo essere ordinabile, i casi realizzabili sono infatti solamente due: $S^2 \times S^1$ ed il fibrato non orientabile di sfere su S^1[7]. A priori rimarebbe quindi solamente il caso di 3-varietà prime irriducibili ma possiamo raffinare ancora di più le nostre ipotesi utilizzando la seguente:

Definizione 2.5. Una sottovarietà F di M con codimensione 1 è detta 2-sided in M se esiste un embedding

$$h : F \times [-1, 1] \to M$$

tale che $h(x, 0) = x$ per ogni $x \in F$ e $h(F \times [-1, 1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [-1, 1])$

Osservazione: Equivalentemente possiamo utilizzare la seguente definizione per 3-varietà liscie. Una superficie S che ammette embedding in M è detta 2-sided se separa localmente M. Equivalentemente se esiste un campo vettoriale lungo S costantemente normale a S.

Definizione 2.6. Una 3-varietà è P^2-irriducibile se e solo se è irriducibile e non contiene nessun 2-sided P^2.

2.2 Teorema di Boyer-Rolfsen-Wiest

Visti i risultati di 2.1 per indagare l'ordinabilità a sinistra dei gruppi di 3-varietà è sufficiente limitarsi a 3-varietà irriducibili. Cerchiamo di specializzare ancora di più, il seguente risultato di Epstein permette di restringere la classe di interesse:

Teorema 2.7. *[5] Sia M una 3-varietà, eventualmente con bordo e sia G un sottogruppo finito di $\pi_1(M)$ allora:*
(i)$G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e vi è un 2-sided piano proiettivo $P \subset M$ con G coniugato a $i_*\pi_1(P)$ oppure
(ii) $M = M_1 \# R$ con R 3-varietà chiusa e orientabile, $\pi_1(R)$ finito e G è coniugato a un sottogruppo di $\pi_1(R)$.

Da cui possiamo rapidamente ottenere il seguente:

Teorema 2.8. *Sia M una 3-varietà prima con gruppo fondamentale infinito. Allora ogni elemento di ordine finito di $\pi_1(M)$ ha ordine 2. Se M non contiene nessun 2-sided P^2 allora il gruppo fondamentale è libero da torsione.*

In conclusione grazie ai precedenti teoremi ci siamo quindi ristretti allo studio dell'ordinabilità dei gruppi fondamentali di 3-varietà P^2 irriducibili. Se infatti la nostra varietà M dovesse contenere un piano proiettivo P^2 2-sided avremmo come conseguenza del teorema 2.7 l'esistenza di un sottogruppo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} < \pi_1(M)$, un'ostruzione all'ordinabilità a sinistra del gruppo fondamentale in quanto un gruppo LO deve essere libero da torsione per teorema 1.4.
Ricordiamo adesso la seguente definizione:

Definizione 2.9. Sia M una varietà con bordo. Y, il doppio di M, è definito considerando due copie identiche M_1, M_2 di M e definendo la mappa $\varphi : \partial M_1 \to \partial M_2$ come l'applicazione che manda ogni punto di ∂M_1 nel corrispettivo in ∂M_2.
Y viene infine ottenuto come l'incollamento $M_1 \cup M_2$ lungo φ $(M_1 \cup_\varphi M_2)$.

Osservazione La varietà ottenuta con la costruzione del doppio si dimostra essere equivalente alla seguente: data M una varietà con bordo, il suo doppio è definito attaccando due copie di M lungo il bordo comune: $M \times \{0,1\}/\sim$ dove la relazione è $(x,0) \sim (x,1)$ per ogni $x \in \partial M$.

Dimostriamo adesso un ultimo lemma, legato al primo numero di Betti di una 3-varietà, che ci servirà per dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione.

Lemma 2.10. Se M è una 3-varietà chiusa e non orientabile, o con bordo non vuoto che non contiene nessuna componente S^2 o P^2, allora il suo primo numero di Betti $b_1 > 0$.

Dimostrazione. Vogliamo vedere che $b_1(M)$ è almeno 1. In generale le 3-varietà chiuse hanno caratteristica di Eulero zero. Sia ora W il doppio di M deve valere $0 = \chi(W) = 2\chi(M) - \chi(\partial M)$, ma allora $2\chi(M) = \chi(\partial M)$. Dalle nostre ipotesi sappiamo che $H_3(M) = 0$ (in un caso è non orientabile, nell'altro ha bordo non vuoto) mentre ogni componente del bordo di M ha caratteristica di Eulero non positiva ma allora

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\chi(\partial M) = \chi(M) = \sum(-1)^j b_j(M) = 1 - b_1(M) + b_2(M)$$

e quindi abbiamo $b_1(M) \geqslant 1 + b_2(M) \geqslant 1$. □

I seguenti teoremi vengono utilizzati nella dimostrazione del teorema di Boyer-Rolfsen-Wiest. Loro dimostrazioni possono essere trovate in [12] e [7].

Teorema 2.11. *(Scott) Sia M una 3-varietà non compatta con $\pi_1(M)$ finitamente generato. Allora esiste una sottovarietà compatta, connessa di codimensione 0 $C \subset M$ tale che l'inclusione $i : C \to M$ induce un isomorfismo di gruppi fondamentali.*

Teorema 2.12. *Sia M una 3-varietà compatta, connessa e sia $p : \tilde{M} \to M$ un rivestimento. Se M è P^2-irriducibile allora lo è anche $\tilde{M}$.*

Teorema 2.13. *(Boyer, Rolfsen, Wiest [2]) Sia M una 3-varietà compatta, connessa, P^2 irriducibile con gruppo fondamentale non banale. Condizione necessaria e sufficiente perché il gruppo fondamentale sia LO è che esista un omomorfismo surgettivo dal gruppo fondamentale su un gruppo non banale LO.*

Dimostrazione. Una direzione -la necessità- è ovvia, se $\pi_1(M)$ è ordinabile a sinistra allora il quoziente per il sottogruppo banale è ordinabile a sinistra. Per la sufficienza consideriamo un omomorfismo surgettivo $h : \pi_1(M) \to L$, con L non banale è LO. Per il teorema di Burns-Hale è sufficiente dimostrare che ogni sottogruppo non banale finitamente generato H di $\pi_1(M)$ ammette omomorfismo surgettivo in un gruppo non banale LO. Consideriamo un sottogruppo H come sopra e distinguiamo due casi. Se H ha indice finito in $\pi_1(M)$, allora $h(H)$ è un sottogruppo con indice finito di L e quindi non banale. In questo caso consideriamo semplicemente la restrizione di h ad H, ed abbiamo l'omomorfismo surgettivo richiesto.
Supponiamo adesso che H abbia indice infinito e consideriamo il rivestimento corrispondente $p : \tilde{M} \to M$ di M -cioè tale che $p_{\#}(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{*})) = H$. Sebbene $\tilde{M}$ sia noncompatto, per il teorema 2.11, esiste una sottovarietà compatta $C \subset \tilde{M}$ con gruppo fondamentale isomorfo, tramite l'inclusione, a $\pi_1(\tilde{M})$. Osserviamo subito che ∂C è non vuoto o altrimenti avrei $C = \tilde{M}$ un assurdo dato che uno è compatto e uno no. Sia adesso $S \subset \partial C$ una 2-sfera. Ora dato che M è irriducibile, lo è anche $\tilde{M}$ e quindi S è bordo di qualche 3-palla B in $\tilde{M}$. Vogliamo vedere che $B \cap C = S$, se così non fosse, data la connessione di C, avremmo $C \subset B \subset \tilde{M}$ contraddicendo che l'inclusione di C in $\tilde{M}$ induca un isomorfismo di gruppi non banali. Come conseguenza possiamo attaccare B a C senza cambiare il fatto che $i_* : \pi_1(C) \to \pi_1(\tilde{M})$ sia un isomorfismo. Possiamo allora supporre che ∂C non contenga nessuna 2-sfera come componente. Adesso vogliamo vedere che nessuna componente del ∂C è un piano proiettivo. Se esistesse una tale componente, questa avrebbe un laccio α che inverte l'orientazione di $\tilde{M}$, e quindi non banale in $\pi_1(\tilde{M})$. Ma questo è anche un elemento del piano proiettivo e questo implicherebbe che $\pi_1(\tilde{M})$, e quindi anche $\pi_1(M)$ abbiano un elemento di ordine 2, assurdo. Abbiamo allora che ∂C è non vuoto ma non contiene né

sfere né piani proiettivi. Per il lemma precedente allora $H_1(C)$ è infinito, e quindi ammette mappa surgettiva ψ verso $\mathbb{Z}$. Adesso possiamo considerare la mappa di Hurewicz $h : \pi_1(C) \to H_1(C) \simeq \mathbb{Z}^{b_1} \oplus$Torsione e la composizione $\pi \circ \psi \circ h : \pi_1(C) \to \mathbb{Z}$ (dove π è la proiezione su un fattore $\mathbb{Z}$) è l'omomorfismo surgettivo in un gruppo LO che cercavamo. □

Teorema 2.14. *Sia M una 3-varietà compatta, connessa, prima, eventualmente con bordo:*
1) Se M è orientabile con $b_1 > 0$, allora $\pi_1(M)$ è ordinabile a sinistra.
2) Se M è non orientabile allora $\pi_1(M)$ è ordinabile a sinistra se e solo se non contiene elementi di ordine 2.

Dimostrazione. Se M è riducibile, allora il suo gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}$. Se invece è irriducibile segue dal teorema di Boyer-Rolfsen-Wiest. □

In realtà quello che abbiamo dimostrato con i teoremi 2.13, 2.14 e il lemma 2.14 è che le uniche 3-varietà M prime, compatte che possono avere gruppo fondamentale LO ma non LI sono quelle con primo gruppo di omologia finito.
Introduciamo la seguente definizione standard di nodo:

Definizione 2.15. Un nodo K è un embedding di un cerchio topologico S^1 in S^3.

Se $K \subset Y$ è un nodo in una 3-varietà, denotiamo con $\pi_1(K)$ (che chiameremo gruppo del nodo di K) il gruppo fondamentale del complementare $M = Y \backslash \mathring{N}(K)$. Possiamo quindi dimostrare:

Teorema 2.16. *(Howie,Short). Per ogni nodo $K \subset S^3$, il gruppo del nodo $\pi_1(K)$ è un gruppo ordinabile a sinistra.*

Dimostrazione. Il primo gruppo di omologia del complemento del nodo $K \subset S^3$ è un gruppo ciclico infinito generato da un meridiano di K. Abbiamo allora una mappa surgettiva da $\pi_1(K)$ in un gruppo ordinabile a sinistra dato dalla mappa di Hurewicz

$$\pi_1(K) = \pi_1(S^3 \backslash \mathring{N}(K)) \to H_1(S^3 \backslash \mathring{N}(K), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Il teorema di Boyer-Rolfsen-Wiest permette di concludere che $\pi_1(K)$ è ordinabile a sinistra. □

Introduciamo adesso le seguente definizioni:

Definizione 2.17. Una superficie Σ contenuta in una 3-varietà è detta incompressibile se l'omomorfismo indotto $i_* : \pi_1(\Sigma, x_0) \to \pi_1(M, x_0)$ è iniettivo per qualsiasi $x_0 \in \Sigma$.

Definizione 2.18. Diremo che una 3-varietà è Haken se compatta, P^2 irriducibile e contiene -tramite embedding- una superficie 2-sided propria incompressibile.

Abbiamo visto che 3-varietà compatte, connesse, orientabili irriducibili con primo numero di Betti positivo sono LO. Si tratta di varietà che sono Haken come dimostrato in [15]. D'altro canto non è vero che ogni Haken è ordinabile a sinistra come dimostra il seguente esempio dovuto a Boileau, Short e Wiest.

Esempio: Sia X l'esterno di un nodo a trifoglio $K \subset S^3$ e siano μ, ϕ rispettivamente il meridiano a ∂X e la linea corrispondente a una fibra della struttura di Seifert su X. Fissato un punto $* \in \partial X$ e rappresentanti orientati di curve C_1, C_2 per μ e ϕ con base in $*$. Il gruppo $\pi_1(X; *)$ ammette presentazione data da $\langle x, y | x^2 = y^3 \rangle$ dove xy^{-1} rappresentano la classe di C_1 mentre x^2 quella di C_2. Dato che C_1 e C_2 si intersecano una volta algebricamente, esiste un omeomorfismo $f : \partial X \to \partial X$ che li scambia. La varietà $M = X \cup_f X$ è Haken, perché il toro separatore è incompressibile. Tramite il teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo la seguente presentazione per il gruppo fondamentale di M:

$$\pi_1(M; *) = \langle x_1, y_1, x_2, y_2 | x_1^2 = y_1^3, x_2^2 = y_2^3, x_1^2 = x_2 y_2^{-1}, x_2^2 = x_1 y_1^{-1} \rangle$$

Dimostriamo che $\pi_1(M)$ non è LO. Supponiamo al contrario che esista un ordine invariante a sinistra $<$ sul gruppo fondamentale. Senza perdita di generalità supponiamo $x_1 > 1$. La relazione $y_1^3 = x_1^2$ implica che $y_1 > 1$. Ma allora $x_1 > y_1^{-1}$, o equivalentemente, $x_1^2 > x_1 y_1^{-1}$. Se $x_2 > 1$, analogamente $x_2^2 > x_2 y_2^{-1}$. Ma allora $x_1^2 > x_1 y_1^{-1} = x_2^2 > x_2 y_2^{-1} = x_1^2$, una contraddizione. Sia quindi $x_2 < 1$. Allora $y_1^2 > x_1^{-1}$ implica $x_1^2 = y_1^3 > y_1 x_1^{-1}$, mentre $x_2 < 1$ implica $x_2^2 = y_2^3 < y_2 < y_2 x_2^{-1}$. Dato che x_2^2 commuta con $y_2 x_2^{-1}$, deduciamo che $x_2^{-2} > x_2 y_2^{-1} = x_1^2$. Ma allora, $x_1^2 > y_1 x_1^{-1} = x_2^{-2} > x_1^2$, altra contraddizione. Non esiste quindi un ordine invariante per moltiplicazione a sinistra su $\pi_1(M)$.

2.3 Applicazione a mappe tra 3-varietà

Adesso che abbiamo iniziato a "muoverci" nell'ambiente delle 3-varietà mostriamo altri risultati che possiamo ottenere tramite la nozione di ordinabilità. In generale date due 3-varietà chiuse, orientate e connesse M, N una domanda ricorrente nella teoria è l'esistenza di una mappa $f : M \to N$ di grado uno, o più in generale di grado non zero. Possiamo dimostrare i seguenti risultati collegati alla domanda e vedere come l'ordinabilità sia "un'ostruzione" all'esistenza di mappe di grado diverso da zero:

Teorema 2.19. *Siano M, N, 3-varietà chiuse e orientabili con M prima. Supponiamo che $\pi_1(N)$ sia non banale e orientabile a sinistra ma $\pi_1(M)$ non sia LO. Allora ogni mappa $M \to N$ ha necessariamente grado zero.*

Dimostrazione. Essendo prima e orientabile M è irriducibile o $S^2 \times S^1$ ma la seconda possibilità è esclusa in quanto $\mathbb{Z}$ è ordinabile. Supponiamo che esista una mappa $f : M \to N$ di grado non zero. In accordo con il lemma che segue avremmo una mappa indotta $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ non banale. Ma allora per il teorema di Boyer-Rolfsen-Wiest $\pi_1(M)$ dovrebbe essere ordinabile a sinistra, una contraddizione. $\square$

Lemma 2.20. Se $f : M \to N$ è una mappa di grado non zero, allora $f_*(\pi_1(M))$ ha indice finito in $\pi_1(N)$.

Dimostrazione. Sia $p : \tilde{N} \to N$ il rivestimento corrispondente a $f_*(\pi_1(M))$, allora esiste un sollevamento $\tilde{f} : M \to \tilde{N}$. $\tilde{N}$ deve essere compatto altrimenti $H_3(\tilde{N}) = 0$, e dato che f fattorizza per $\tilde{N}$ il suo grado dovrebbe essere zero. Ma allora il rivestimento ha grado finito e lo è anche l'indice del sottogruppo. $\square$

Chapter 3

Foliazioni e Varietà di Seifert

Le foliazioni sono fra gli strumenti geometrici e topologici che mostrano un legame più forte con la nozione puramente algebrica di gruppo ordinabile. In generale il loro legame è dovuto all'azione indotta dal gruppo fondamentale della varietà ambiente sullo spazio delle foglie della foliazione indotta sul rivestimento universale. Riportiamo adesso le prime definizioni della teoria delle foliazioni e cerchiamo di studiarne i primi legami con l'ordinabilità a sinistra dei gruppi fondamentali di 3-varietà.

3.1 Foliazioni

Informalmente una foliazione di una $n-$varietà M è una decomposizione di M in varietà di dimensione inferiore. Per il nostro scopo possiamo restringerci al caso particolare di foliazioni di codimensione uno:

Definizione 3.1. (Foliazione) Sia M una n-varietà connessa, differenziabile. Una foliazione di classe C^k su M è una collezione $\mathfrak{F}$ di ipersuperfici connesse immerse in maniera liscia, i cui elementi chiamiamo foglie, tale che:
i) M è unione disgiunta delle foglie,
ii) esiste un atlante C^k di M, $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ che contiene solamente carte lisce e rispetto cui $\mathfrak{F}$ soddisfa la seguente condizione locale: per ogni foglia Σ e ogni carta (U_i, ϕ_i) esiste $K \subset \mathbb{R}$ tale che $\phi_i(U_i \cap \Sigma) = \mathbb{R}^{n-1} \times K$.

Associata ad una foliazione $\mathfrak{F}$ abbiamo sempre il fibrato tangente a $\mathfrak{F}$, denotato con $T\mathfrak{F} \subset TM$ e definito come l'insieme dei vettori tangenti alle foglie di $\mathfrak{F}$. Una foliazione di codimensione uno su una 3-varietà è detta orientabile se il suo tangente $T\mathfrak{F}$ è orientabile. Trasversalmente orientabile se $TM \simeq T\mathfrak{F} \oplus \mathbb{R}$. In generale le due nozioni sono equivalenti se e solo se la varietà ambiente è orientabile [2]. Data una foliazione $\mathfrak{F}$ di una varietà M, è possibile considerare un nuovo spazio quoziente definito dalla relazione di equivalenza che identifica due punti di M se questi appartengono alla stessa foglia di $\mathfrak{F}$. In pratica stiamo collassando ogni foglia ad un singolo punto, lo spazio quoziente ottenuto -dotato della topologia quoziente- viene detto *spazio delle foglie* della foliazione $\mathfrak{F}$. Il nostro interesse per questo nuovo spazio è legato alla possibilità di sollevare foliazioni al rivestimento universale nel seguente modo:

Foliazioni e rivestimenti[1]: Siano $\tilde{M}, M$ due varietà lisce e connesse. Sia $p : \tilde{M} \to M$ un rivestimento. Data $\mathfrak{F}$ foliazione su M possiamo operare un pull-back ad una foliazione $\tilde{\mathfrak{F}}$ su $\tilde{M}$ semplicemente ponendo come foglie le componenti connesse di $p^{-1}(\Sigma)$, con $\Sigma \subset M$ foglia della foliazione $\mathfrak{F}$. Un atlante foliato di $\tilde{\mathfrak{F}}$ si ottiene precomponendo con p le carte di un atlante foliato di $\mathfrak{F}$.
Come conseguenza l'immagine di ogni foglia di $\tilde{\mathfrak{F}}$ dopo una deck transformation di $\tilde{M}$ sarà ancora una foglia. Questo significa che il gruppo delle deck transformation, che nel caso del rivestimento universale $\tilde{M}$ è in corrispondenza biunivoca con $\pi_1(M)$, agisce sullo spazio delle foglie $(\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{F}})$.

Prima di passare ai risultati fondamentali per questo capitolo riassumiamo brevemente cosa sappiamo delle relazioni fra le geometrie 3-dimensionali e l'ordinabilità di gruppi fondamentali di 3-varietà.

3.2 Geometrie 3-dimensionali

In generale vi sono otto possibili geometrie 3-dimensionali e non sembra esserci un legame intrinseco fra queste strutture e questioni legate all'ordinabilità di gruppi fondamentali, tanto che vale il seguente:

Teorema 3.2. *[2] Per ognuna delle otto geometrie 3-dimensionali esistono 3-varietà connesse, chiuse, orientabili con la struttura geometrica scelta e gruppo fondamentale ordinabile a sinistra. Per ognuna di queste esistono anche 3-varietà connesse, chiuse, orientabili con struttura geometrica data e gruppo fondamentale non ordinabile a sinistra.*

Considerando 3-varietà iperboliche è complesso arrivare a risultati di caratterizzazione e ad oggi esistono solamente risultati parziali. Per le 3-varietà *Sol*[13] vale il seguente risultato:

Teorema 3.3. *[2] Sia M una varietà compatta, connessa, Sol. Allora $\pi_1(M)$ è LO se e solo se $\partial M \neq \emptyset$, oppure M è non orientabile o M è orientabile e un fibrato in tori su un cerchio.*

Le varietà di Seifert, invece, costituiscono le sei rimanenti geometrie 3-dimensionali e le loro relazioni con l'ordinabilità si sono dimostrate un terreno più fertile che nei due casi precedenti, nella sezione che segue studieremo in particolare l'ordinabilità a sinistra dei gruppi fondamentale di varietà di Seifert orientabili.

3.3 Varietà di Seifert

Uno spazio fibrato di Seifert (o varietà di Seifert) è una 3-varietà che può essere espressa come unione disgiunta di cerchi, chiamati fibre, in una maniera particolare.
Le definizioni -e la trattazione- che seguono sono dovute a Scott [13] e generalizzano il lavoro originale di Seifert (1933). Iniziamo definendo il *toro fibrato solido banale* come $S^1 \times D^2$, in generale le fibre sono i cerchi $S^1 \times \{y\}$, per ogni $y \in D^2$. Un *toro fibrato solido* è un toro solido con una foliazione di cerchi che è finitamente rivestito da un toro fibrato solido banale. Un oggetto del genere può essere costruito partendo da un toro fibrato solido banale tagliandolo lungo $\{x\} \times D^2$, per qualche $x \in S^1$, ruotando uno dei dischi per q/p (con q, p interi coprimi) di una rotazione completa e incollandolo. Questo toro fibrato solido sarà rivestito con grado p da un toro solido fibrato banale.
Una *bottiglia di Klein fibrata solida* è una bottiglia di Klein solida che è finitamente rivestita da tori solidi fibrati banali. Un oggetto del genere può essere costruito partendo da tori fibrati solidi banali e tagliando lungo $\{x\} \times D^2$, per qualche $x \in S^1$, incollando poi i due dischi insieme tramite una riflessione. Dato che tutte le riflessioni di un disco sono coniugate vediamo che esiste un'unica bottiglia di Klein fibrata solida (a meno di omeomorfismo) che è doppiamente rivestita da un toro fibrato solido banale.
Con queste descrizioni possiamo procedere alla seguente:

Definizione 3.4. Una varietà di Seifert è una 3-varietà M con una decomposizione in cerchi disgiunti, chiamati fibre C, tale che ogni cerchio abbia un intorno in M che è unione di fibre ed è isomorfo a un toro fibrato solido o alla bottiglia di Klein fibrata solida.

Osservazione: Con questa definizione ogni varietà di Seifert è foliata da cerchi.

Epstein [4] ha dimostrato anche la validità della proposizione contraria nel caso di varietà compatte: ogni foliazione per cerchi di una 3-varietà compatta è una fibrazione di Seifert:

Proposizione 3.5. *Una 3-varietà compatta è una varietà di Seifert se e solo se foliata da cerchi.*

Forniamo adesso una maniera di costruire varietà di Seifert orientabili, seguendo il lavoro di Hatcher [7]. Sia Σ una superficie compatta, connessa, orientabile con m componenti di bordo. Scegliamo dischi disgiunti $D_1, ..., D_n \subset \text{int}(\Sigma)$ e poniamo

$$\Sigma' = \Sigma \backslash (\text{int}(D_1) \cup ... \cup \text{int}(D_n)).$$

Sia M' la varietà $S^1 \times \Sigma'$. Per ogni $\partial D_i \subset \Sigma'$ esiste un corrispondente toro $T_i = S^1 \times \partial D_i \subset \partial M'$. Per ogni toro T_i fissiamo curve che determinino una base di $\pi_1(T_i)$: la nostra base sarà $[h_i^*] = [\{1\} \times \partial D_i]$ insieme a $[h]$, la classe di un cerchio (sono tutti omologhi) $S^1 \times \{pt\}$ nel prodotto $S^1 \times \Sigma'$. Scelte questa basi, abbiamo una corrispondenza fra le curve primitive $\gamma : S^1 \hookrightarrow T_i$ con $[\gamma] \neq [h]$ e le frazioni $\frac{\beta_i}{\alpha_i} \in \mathbb{Q}$, ottenuta rappresentando la classe di ogni curva rispetto alle nostre basi:

$$[\gamma] = \alpha_i[h_i^*] + \beta_i[h].$$

Per costruire la nostra varietà di Seifert M sopra la superficie Σ scegliamo n frazioni ridotte $\frac{\beta_i}{\alpha_i} \in \mathbb{Q}$ per ogni $i = 1, ..., n$. Assumiamo $\alpha_i \geqslant 1$. Poi per ogni toro $T_i \subset \partial M'$, attacchiamo $D^2 \times S^1$ incollando $\partial D^2 \times \{y\}$ alla curva $\alpha_i[h_i^*] + \beta_i[h]$ su T_i. Posti g il genere della superficie Σ (con la convezione per cui $g < 0$ se e solo se la superficie è non orientabile) e m il numero di componenti di $\partial\Sigma$ denotiamo la varietà ottenuta seguendo la nostra costruzione con la notazione:

$$M(+g, m; \beta_1/\alpha_1, ..., \beta_n/\alpha_n)$$

dove il segno + che precede il genere g indica l'orientabilità della superficie Σ (usiamo " $-$" se la superficie di base Σ è non orientabile, in questo caso la costruzione è leggermente diversa e viene trattata nel dettaglio in [7]).
Si può dimostrare che ogni varietà di Seifert orientabile può essere ottenuta seguendo la costruzione descritta in precedenza, vale infatti:.

Proposizione 3.6. *[7] Ogni varietà di Seifert orientabile è diffeomorfa, tramite una mappa che preserva le fibre, ad una varietà M della forma $M(\pm g, m; \beta_1/\alpha_1, ..., \beta_n/\alpha_n)$. Due modelli differenti sono diffeomorfi tramite una mappa che preserva l'orientazione se e solo se per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ $\beta_i/\alpha_i \simeq \beta_i'/\alpha_i'$ mod 1 (a meno di permutare gli indici).*

Iniziamo quindi ad indagare l'ordinabilità a sinistra del gruppo fondamentale di una varietà di Seifert M chiusa e orientabile, i nostri risultati seguiranno il seguente schema.

- Se $b_1(M) > 0, \ g \neq -1, 0$ allora $\pi_1(M)$ è LO per applicazione del teorema 2.13.

- Se $b_1 = 0, g = -1$ vedremo nella proposizione 3.9 che il gruppo non è mai LO.

- $b_1 = 0, g = 0$ allora l'ordinabilità è legata all'esistenza di particolari foliazioni come verrà enunciato nella prossima sezione.

Utilizzando il teorema di Seifert-Van Kampen si ottiene la seguente presentazione per i gruppi fondamentali delle varietà di Seifert appena costruite:

Proposizione 3.7. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ di una varietà di Seifert M chiusa, ottenuta a partire da una superficie chiusa orientabile Σ (quindi con $g \geqslant 0$), ammette presentazione:*

$$\pi_1(M) = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g, \gamma_1, ..., \gamma_n, h \mid$$
$$h \text{ centrale}, \gamma_j^{a_j} = h^{-b_j}, [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]\gamma_1 \cdots \gamma_n = 1\rangle.$$

Se invece $g < 0$ e Σ è chiusa, il gruppo fondamentale è

$$\pi_1(M) = \langle a_1, ..., a_{|g|}, \gamma_1, ..., \gamma_n, h|$$
$$a_j h a_j^{-1} = h^{-1}, \gamma_j^{\alpha_j} = h^{-\beta_j}, \gamma_j h \gamma_j^{-1} = h, a_1^2 \cdots a_{|g|}^2 \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1\rangle.$$

Dalla proposizione 3.7 si deduce che se $g \neq 0, -1$, il gruppo fondamentale ha abelianizzato infinito. Lo stesso vale se la superficie Σ ha bordo non vuoto, in quanto in tal caso il bordo di M consisterebbe in unione di tori[3]. Dunque se $g \neq 0, -1$ oppure $\partial\Sigma \neq \varnothing$, allora $|H_1(M)| = \infty$ e abbiamo:

Teorema 3.8. *Sia M una varietà di Seifert orientabile con $|H_1(M)| = \infty$, allora $\pi_1(M)$ è orientabile a sinistra.*

Dimostrazione. Se la varietà M è irriducibile l'enunciato segue da un'applicazione diretta del teorema 2.13. Altrimenti esiste solamente una varietà chiusa, orientabile e riducibile, $S^1 \times S^2$, il cui gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$ è chiaramente ordinabile a sinistra. □

Per M varietà di Seifert orientabile, rimane quindi da trattare solamente il caso in cui $|H_1(M)| < \infty$. In questa eventualità Σ è necessariamente una fra S^2, P^2 [3] ed il gruppo in questione diventa

$$\pi_1(M) = \langle \gamma_1, ..., \gamma_n, h \mid h \text{ centrale}, \gamma_j^{\alpha_j} = h^{-\beta_j}, \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1\rangle$$

nel caso in cui $\Sigma = S^2$, mentre nel caso in cui costruiamo su P^2 abbiamo:

$$\pi_1(M) = \langle \gamma_1, ..., \gamma_n, y, h \mid$$
$$y h y^{-1} = h^{-1}, \gamma_j^{\alpha_j} = h^{-\beta_j}, \gamma_j h \gamma_j^{-1} = h, y^2 \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1\rangle.$$

Proposizione 3.9. *Se Σ è P^2, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è non ordinabile a sinistra.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ sia ordinabile a sinistra. Assumiamo senza perdità di generalità $h > 1$.

- Ogni relazione del tipo $\gamma_j^{\alpha_j} = h^{-\beta_j}$ forza $h^{-\beta_i} \leqslant \gamma_i^{-1} \leqslant h^{\beta_i}$ se $\beta_i > 0$, infatti $h > 1$ implica $1 > h^{-1}$. Quindi per ogni potenza k negativa $1 > h^k$, ma allora $h^{-\beta_i} = \gamma_i^{\alpha_i} \leqslant 1 \leqslant \gamma_i^{-1} \leqslant \gamma_i^{-\alpha_i} = h^{\beta_i}$. Se $\beta_i < 0$, allora $\gamma_i > 1$ e vale $h^{b_i} \leqslant \gamma_i^{-1} \leqslant h^{-\beta_i}$.

- Dato che γ_i e h commutano per ogni i (via proposizione 3.7), moltiplicare tra loro tutte le relazioni ottenute nel punto precedente porta alla disuguaglianza $h^{-l} \leqslant (\gamma_n^{-1} \cdots \gamma_1^{-1}) \leqslant h^l$ dove $l = \sum_{i=1}^n |\beta_i|$. Dimostriamo la bontà di tale relazione nel caso in cui si moltiplichino fra di loro due disuguaglianze (il caso generale segue per induzione). Supponiamo di avere $h^{-i} < \gamma_i^{-1} < h^i$ e $h^{-j} < \gamma_j^{-1} < h^j(*)$, allora moltiplicando a sinistra per h^i la relazione $(*)$ otteniamo $h^{-j}h^{-i} = h^{-i-j} = h^{-i}h^{-j} <_{(*)} h^{-i}\gamma_j^{-1} < \gamma_j^{-1}h^{-i} < \gamma_j^{-1}\gamma_1^{-1}$.

- Da quanto visto fino ad ora, scegliendo $k > l$, si ottiene che $h^{-k} < y^2 < h^k$ (ultima relazione di 3.7) e similarmente $h^{-k} < y^{-2} < h^k$. Vediamo adesso che queste due ultime condizioni nel caso in cui $k > 0$ e $h > 1$ forzano $yhy^{-1} > 1$.
  Verifichiamolo in due casi; nel primo supponiamo $y^2 > 1 > y^{-2}$ allora, per quanto visto precedentemente, vale la seguente relazione
  $$h^{-k} < y^{-2} < 1$$
  moltiplicando a sinistra per yhy e utilizzando $yh^k = h^{-k}y$ (è una riscrittura equivalente alla prima relazione di 3.7) ottengo
  $$yh^{k+1}y < yhy^{-1} < yhy$$
  adesso è sufficiente vedere che $1 < yh^{k+1}y$ ma questo segue dalla seguente catena $1 < y < y^2 < h^k < h^{k+1}$.
  Nel caso in cui $y^2 < 1 < y^{-2}$ consideriamo la catena iniziale
  $$h^{-k} < y^2 < 1 < y^{-2} < h^k$$
  e moltiplichiamo a sinistra per yhy^{-3} ottenendo:
  $$yhy^{-3}h^{-k} < yhy^{-1} < yhy^{-3}$$
  operando come nel caso precedente (via $yh^k = h^{-k}y$)
  $$yh^{k+1}y^{-3} < yhy^{-1}$$
  $$h^{-k-1}y^{-2} < yhy^{-1}$$
  $$y^{-2}h^{k+1} < yhy^{-1}$$
  con l'ultima disuguaglianza che conclude in quanto sia y^{-2} che h^{k+1} sono maggiori di 1 per ipotesi.

Abbiamo quindi dimostrato che $1 < yhy^{-1} = h^{-1}$, una contraddizione dato che $h > 1$ per ipotesi, quindi $\pi_1(M)$ non è mai ordinabile a sinistra se $\Sigma = P^2$. $\square$

Rimane quindi escluso dalla trattazione il caso in cui $\Sigma = S^2$ ma il primo numero di Betti di M è uguale a zero, in questo caso vedremo nella sezione 3.4 che è possibile caratterizzare l'orientabilità a sinistra del gruppo fondamentale in termini puramente topologici.

Prima di introdurre i risultati che completano la trattazione delle varietà di Seifert orientabili ricordimao che una foliazione su una varietà di Seifert è detta *orizzontale* se le fibre regolari sono trasverse alle foglie, cioè se $[h]$ è la classe di una curva che taglia trasversalmente lungo le lamine in M.

Definizione 3.10. Una foliazione orizzontale su una varietà di Seifert M è una foliazione di M tramite superfici (eventualmente non compatte) ovunque trasverse alle fibre di Seifert.

Una foliazione è *co-orientabile* se le foglie della foliazione ammettono una scelta coerente di vettori normali. Una foliazione orizzontale di una varietà di Seifert è orientabile se e solo se la superficie di base è orientabile: questo fatto segue dall'osservazione per cui, tolte le fibre eccezionali, il tangente alla foliazione è il pull-back del fibrato tangente della superficie, per una dimostrazione si veda [2].

3.4 Foliazioni $\mathbb{R}$-rivestite

È noto in letteratura che ogni 3-varietà ammette foliazioni di co-dimensione uno [1], non possono quindi esservi legami fra l'esistenza di una tale foliazione e caratteristiche topologiche. Per rendere la nozione di foliazione di interesse, all'interno del nostro studio dell'ordinabilità, sono quindi necessarie richieste aggiuntive. Diremo che una foliazioni è *tesa* se ogni foglia della foliazione interseca una curva semplice chiusa transversa alle foglie della foliazione.

Definizione 3.11. Una foliazione $\mathfrak{F}$ su M è detta *tesa* se per ogni foglia Σ di $\mathfrak{F}$ esiste curva semplice chiusa $\gamma \subset M$ transversa al tangente $T\mathfrak{F}$ (i.e. tale che $\gamma(t)' \notin T_{\gamma(t)}\mathfrak{F}$) che interseca Σ.

Osservazione: Ogni foliazione orizzontale su una varietà di Seifert è tesa.

Definiamo adesso una condizione diversa: una foliazione di codimensione uno è detta $\mathbb{R}-$rivestita se lo spazio delle foglie $(\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{F}})$ del pull-back al rivestimento universale di M è omeomorfo a $\mathbb{R}$.
Abbiamo visto che un gruppo G numerabile è ordinabile a sinistra se e solo se agisce su $\mathbb{R}$ per omeomorfismi che preservano l'ordine. Nel caso del gruppo fondamentale di 3-varietà M che siano anche P^2 irriducibili, il teorema 2.13 permette di rilassare l'ipotesi all'esistenza di un omomorfismo non banale $\pi_1(M) \to$Omeo$_+(\mathbb{R})$. Diremo che l'azione di un gruppo G su $\mathbb{R}$ è *un'azione*

non banale se l'azione non ammette punti fissi globali. Il seguente risultato mostra come dato un omomorfismo non banale da un gruppo in $\mathrm{Omeo}_+(\mathbb{R})$ sia sempre possibile supporre che l'omorfismo induca un'azione non banale su $\mathbb{R}$.

Lemma 3.12. Se esiste un omomorfismo $G \to Omeo_+(\mathbb{R})$ con immagine non banale, allora esiste un altro omomorfismo di $G_+(\mathbb{R})$ che induce un'azione su $\mathbb{R}$ senza punti fissi globali.

Dimostrazione. Fissiamo un omomorfismo $\phi : G \to \mathrm{Omeo}_+(\mathbb{R})$ con immagine diversa dalla sola identità. Osserviamo che l'insieme $F = \{x \mid \phi(\gamma)(x) = x \text{ per ogni } \gamma \in G\}$ è un sottoinsieme chiuso e proprio di $\mathbb{R}$. Ogni componente C dell'insieme non vuoto $\mathbb{R}\backslash F$ è omeomorfa a $\mathbb{R}$ ed invariante per l'azione. La restrizione dell'azione a C è l'azione che cercavamo senza punti fissi globali. □

Possiamo quindi supporre, quando necessario, che dato un omomorfismo da un gruppo G in $\mathrm{Omeo}_+(\mathbb{R})$ con immagine non banale, l'azione associata su $\mathbb{R}$ sia non banale.

L'esistenza di una foliazione $\mathbb{R}-$rivestita offre immediatamente criteri di ordinabilità:

Lemma 3.13. [2] Sia M una 3-varietà compatta, connessa e sia $\mathfrak{F}$ una foliazione in M trasversalmente orientata, $\mathbb{R}$-rivestita di M. Denotiamo con $\tilde{\mathfrak{F}}$ il sollevamento al rivestimento universale $\tilde{M}$ di $\mathfrak{F}$ e sia $\phi : \pi_1(M) \to \mathrm{Omeo}(\mathbb{R})$ l'omomorfismo indotto dall'azione di $\pi_1(M)$ su $\tilde{\mathfrak{F}}$. Allora l'immagine di ϕ ricade in $\mathrm{Omeo}_+(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Il campo trasverso a $\tilde{\mathfrak{F}}$ è il pull-back di quello di $\mathfrak{F}$ ed è quindi orientabile. Il gruppo delle deck transformations preserva entrambe le orientazioni. Il lemma è quindi valido. □

Definizione 3.14. Dato G gruppo che agisce su uno spazio topologico X. Allora $F \subset X$ è detto dominio fondamentale se F è chiuso, S è unione delle classi di coniugio di F :

$$S = \bigcup_{g \in G} gF$$

e le intersezioni di classi di coniugio hanno due a due parte interna vuota. [8]

Proposizione 3.15. *Sia M una 3-varietà compatta, connessa, P^2 irriducibile che ammette una foliazione $\mathfrak{F}$ che sia trasversalmente orientata è $\mathbb{R}$ rivestita. Allora il gruppo fondamentale di M è ordinabile a sinistra.*

Dimostrazione. Come prima cosa osserviamo che esiste un sottoinsieme compatto C, del leaf space $\mathbb{R}$ di $\tilde{\mathfrak{F}}$ che incontra ogni orbita dell'azione di $\pi_1(M)$

su $\mathbb{R}$. (Consideriamo C come l'immagine in $\mathbb{R}$ di un qualsiasi dominio fondamentale del rivestimento universale $\tilde{M} \to M$). Ma allora l'omomorfismo $\pi_1(M) \to \mathrm{Omeo}(\mathbb{R})$ associato all'azione ha immagine non banale. La sua immagine è contenuta nel sottogruppo di omeomorfismi che preservano l'orientazione per il lemma precedente ma allora per il teorema 2.13 possiamo concludere che $\pi_1(M)$ è LO. $\square$

I lemmi che seguono sono specifici della relazione fra foliazioni $\mathbb{R}-$rivestite e la nozione di varietà di Seifert. Loro dimostrazioni sono presentate in [2].

Lemma 3.16. Sia M una varietà di Seifert compatta, connessa e orientabile e $\mathfrak{F}$ una foliazione orizzontale su M. Allora $\mathfrak{F}$ è trasversalmente orientabile se e solo se la superficie sottostante M è orientabile.

Lemma 3.17. Sia M una varietà di Seifert, chiusa, connessa, P^2-irriducibile con gruppo fondamentale infinito. Sia $\mathfrak{F}$ una foliazione orizzontale su M e $\tilde{\mathfrak{F}}$ il sollevamento di $\mathfrak{F}$ su $\tilde{M}$, il rivestimento universale di M. Allora esiste un omeomorfismo $\tilde{M} \to \mathbb{R}^3$ che manda $\tilde{\mathfrak{F}}$ nell'insieme dei piani paralleli al piano $x - y$. In particolare $\mathfrak{F}$ è $\mathbb{R}-$rivestita.

Come corollario di questi ultimi due lemmi e della proposizione 3.15 otteniamo il seguente risultato che esaurisce le possibilità per varietà di Seifert orientabili:

Proposizione 3.18. *Sia M una varietà di Seifert chiusa, connessa, irriducibile e orientata. Supponiamo che la superficie sottostante M sia orientabile, allora M ammette foliazioni orizzontali. Se $\pi_1(M)$ è infinito, è ordinabile a sinistra.*

Bibliografia

[1] A. Alfieri. *L-Spaces, Taut Foliations and Left-Orderability*. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/79619074.pdf.

[2] S. Boyer D. Rolfsen e B. Wiest. "Orderable three manifolds groups". In: *Annales de l'Institut Fourier* 55 (2005), pp. 243–288. URL: http://eudml.org/doc/116188.

[3] A. Clay e D. Rolfsen. *Ordered Groups and Topology*. American Mathematical Society, 2016. ISBN: 978-1-4704-3106-8.

[4] D.B.A. Epstein. "Periodic flows on 3-manifolds". In: *Ann. of Math.* 95 (1972), pp. 66–82.

[5] D.B.A. Epstein. "Projective Planes in 3-Manifolds". In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-11.1 (Jan. 1961), pp. 469–484. ISSN: 0024-6115. DOI: 10.1112/plms/s3-11.1.469. eprint: https://academic.oup.com/plms/article-pdf/s3-11/1/469/4693043/s3-11-1-469.pdf. URL: https://doi.org/10.1112/plms/s3-11.1.469.

[6] F. T. Farrell. "Right-orderable deck transformation groups". In: *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 6.3 (1976), pp. 441–448. DOI: 10.1216/RMJ-1976-6-3-441. URL: https://doi.org/10.1216/RMJ-1976-6-3-441.

[7] A. Hatcher. *Notes on basic 3-manifold topology*. 2007. URL: http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf.

[8] M. Kapovich. *A note on properly discontinuous actions*. 2020. URL: https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/prop-disc.pdf.

[9] A. Navas. *On the dynamics of (left) orderable groups*. 2010. arXiv: 0710.2466 [math.GR].

[10] D.S. Passman. "The algebraic structure of group rings". In: *Pure and Applied Mathematics WileyInterscience,* (1977).

[11] D. Rolfsen. *Low Dimensional Topology and Ordering Groups*. 2014. arXiv: 1403.4870 [math.AT].

[12] P. Scott. "Compact submanifolds of 3-manifolds". In: *J. London Math. Soc* 7 (1973), pp. 246–250.

[13] P. Scott. "The Geometries Of 3-Manifolds". In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 15 (1983), pp. 401–487. DOI: https://doi.org/10.1112/blms/15.5.401.

[14] A.A. Vinogradov. "On the free product of ordered groups". In: *Mat. Sb. (N.S.)* 25(67).1 (1949), pp. 163–168.

[15] N. M. Dunfield e W. P. Thurston. "The virtual Haken conjecture: Experiments and examples". In: *Geometry & Topology* 7 (2003), pp. 399–441.