# Rivestimenti di gruppi di Lie

Anna Borri, Sebastián Matías Camponovo

23 maggio 2023

## 1 Introduzione e Richiami

Ricordiamo la definizione di rivestimento all'interno della categoria delle varietà lisce.

**Definizione 1.1.** Un rivestimento liscio $p : \widetilde{M} \to M$ è un diffeomorfismo locale tra varietà lisce che è anche un rivestimento topologico.

Prima di iniziare a parlare della teoria dei rivestimenti ricordiamo un risultato che si rivelerà utile nello studio della corrispondenza fra algebre e gruppi di Lie.

**Teorema 1.2.** *Siano $G, H$ gruppi di Lie, con $G$ semplicemente connesso. Sia $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un omomorfismo di algebre di Lie. Allora, esiste un unico omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : G \to H$ tale per cui $d\phi = \psi$.*

*Dimostrazione.* In "Introduzione ai gruppi di Lie, 3 (Burelli, Cigna, Tagliente)" □

**Corollario 1.3.** Siano $G, H$ gruppi di Lie semplicemente connessi con algebra di Lie isomorfa, allora i gruppi sono diffeomorfi.

*Dimostrazione.* Per ipotesi esistono omomorfismi di algebre di Lie $r : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ e $s : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ uno inverso dell'altro. Allora esistono omomorfismi di gruppi di Lie: $\phi : G \to H$ e $\psi : H \to G$ tali per cui $d\phi = r$ e $d\psi = s$. Allora $d(\phi \circ \psi) = r \circ s = id$ e analogo per la composizione inversa. Quindi per unicità del teorema sopra enunciato i due gruppi sono isomorfi. □

In attesa di un *rappresentante* semplicemente connesso per un'algebra di Lie qualsiasi, riportiamo un risultato che *spinge* lo studio verso i rivestimenti di gruppi di Lie.

**Lemma 1.4.** Siano $G, H$ gruppi di Lie connessi, sia $\phi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora $d\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un isomorfismo di algebre di Lie se e solo se $\phi$ è un rivestimento.

*Dimostrazione.* Se $\phi$ è un rivestimento allora è un diffeomorfismo locale e quindi $d\phi$ è un isomorfismo di algebre.
Supponiamo adesso che $d\phi$ sia un isomorfismo. Per il teorema di invertibilità locale allora esiste un intorno di $1_G$ in cui $\phi$ è un diffeomorfismo. Ora $H$ è connesso ma $\phi(G)$ contiene un intorno di $1_H$ e quindi la mappa è surgettiva. Ma in realtà il fatto che $d\phi$ sia un

isomorfismo implica $d\phi$ diffeomorfismo locale in ogni punto. Sia ora $D = \ker\phi$. Dato che $\phi$ è diffeomorfismo locale ovunque allora $D$ è un sottogruppo normale discreto di $G$. Consideriamo ora la mappa liscia $f : G \times G \to G, f(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2$. Sia $U$ un intorno aperto di $1_G$ tale per cui $U \cap D = \{1_G\}$. $f^{-1}(U)$ è aperto nel prodotto quindi contiene un $W \times W'$ con $W, W'$ aperti in $G$ e l'identità nell'intersezione. Poniamo $V = W \cap W'$. Ora $V$ è un intorno aperto dell'identità di $G$ tale per cui $V^{-1}V \cap D = \{1_G\}$. Mostriamo che $\phi(V)$ è un intorno trivializzante per $1_H$. Per l'iniettività siano $g_1, g_2 \in V$ tali per cui $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ allora, $g_1^{-1} g_2 \in V^{-1}V \cap D$ ma allora $g_1 = g_2$. Ricordiamo che $d\phi$ è un isomorfismo, di conseguenza $\phi$ ristretto a $V$ è un diffeomorfismo sull'immagine. Ora vogliamo vedere che $\phi^{-1}\phi(V) = \bigcup_{d \in D} Vd$. Mostriamo il contenimento non ovvio: sia $g \in \phi^{-1}\phi(V)$. Allora $\phi(g) = \phi(v)$ per qualche $v \in V$. Allora $v^{-1}g \in D$ e $g = vv^{-1}g \in Vv^{-1}g$ come volevamo. Vediamo che l'intersezione dei candidati fogli del rivestimento è vuota: sia $g_1 \in Vd_1 \cap Vd_2$ con $d_1, d_2 \in D$. Allora $g = v_1 d_1 = v_2 d_2 \implies v_2^{-1} v_1 = d_2 d_1^{-1} \in V^{-1}V \cap D = \{1_G\}$. Ma allora $v_1 = v_2$ e quindi $d_1 = d_2$. Agendo per traslazione si ottiene la tesi. □

**Osservazione 1.5.** Quanto detto motiva lo studio dei rivestimenti di gruppi Lie per rispondere alla domanda su quanto l'algebra possa in un certo senso **non** determinare il gruppo stesso.

## 1.1 Rivestimenti di Gruppi Topologici

Alcuni dei fatti che servono per arrivare alla corrispondenza cercata valgono nel contesto più generale di gruppi topologici (trattati nel dettaglio in [PG87], ci limitiamo ad osservare lo stretto necessario per il nostro obiettivo).

**Definizione 1.6.** Sia $X \to Y$ un rivestimento. Una **deck transformation** è un automorfismo di $X$ che preservi la fibra.

**Proposizione 1.7.** *Sia $p : X \to Y$ rivestimento universale, fissiamo $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tale per cui $p(x_0) = y_0$ allora valgono le seguenti:*

*(1) $\pi_1(Y, y_0)$ è in corrispondenza con la fibra su $y_0$. La corrispondenza associa ogni elemento nella fibra ad una classe differente nel gruppo fondamentale.*

*(2) Il gruppo $H$ delle deck transformation agisce transitivamente sulla fibra di $y_0$.*

*(3) La corrispondenza che associa un elemento di $H$ al corrispettivo elemento della fibra di $y_0$ è un isomorfismo tra $H$ e $\pi_1(Y, y_0)$.*

*Dimostrazione.* Presente in [Mas67] □

**Osservazione 1.8.** Ogni gruppo può essere considerato come un gruppo topologico se dotato della topologia discreta.

**Proposizione 1.9.** *Sia $G$ un gruppo topologico separabile, allora:*

*(1) ogni sottogruppo aperto $H$ è chiuso e il quoziente $G/H$ ha la topologia discreta,*

*(2) la componente connessa dell'identità $G_0$ è aperta se $G$ è localmente connesso,*

*(3) ogni sottogruppo discreto $H$ di $G$ è chiuso*

*(4) se $G$ è anche connesso ogni sottogruppo normale discreto è contenuto nel centro $Z(G)$.*

*Dimostrazione.* (1) Sia $H$ sottogruppo aperto. Ora $xH$ è aperto in $G$ per ogni $x \in G$. Ma allora, dato che $H = G \setminus \bigcup_{x \notin H} xH$, segue che $H$ è anche chiuso. Infine, dato che la proiezione al quoziente è aperta, ogni $xH$ è aperto in $G/H$, quindi quest'ultimo è dotato della topologia discreta.

(2) Si tratta di un fatto generale, in ogni spazio topologico localmente connesso le componenti connesse sono aperte.

(3) Per *discretezza* scegliamo un $V$ intorno di $1 \in G$ tale per cui $H \cap V = \{1\}$. Per continuità del prodotto possiamo prendere $U$ intorno di 1 tale che $UU \subset V$. Se $H$ non è chiuso, sia $x$ un punto di nella chiusura di $H$ che non appartiene a $H$. Allora l'intorno $U^{-1}x$ di $x$ contiene almeno un $h \in H$ con $h \neq x$, quindi possiamo scrivere $u^{-1}x = h$ con $u \in U$. Allora $u = xh^{-1}$ è un punto limite di $H$ che non sta in $H$, quindi possiamo trovare un $h' \neq 1$ in $H$ tale per cui $h' \in Uu$ ma $Uu \subset UU \subset V$, da cui $h' \in H \cap V = \{1\}$, assurdo. Ma allora $H$ contiene tutti i suoi punti limite ed è quindi chiuso.

(4) Sia $G$ connesso e $H$ sottogruppo normale discreto. Se $h \in H$ allora $ghg^{-1} \in H$ per normalità, ma allora $ghg^{-1}$ è nella stessa componente di $H$ di $1h1^{-1} = h$ per connessione di $G$. Ma $H$ è discreto quindi $ghg^{-1} = h$ da cui $h$ è centrale.

□

**Proposizione 1.10.** *Sia $G$ gruppo topologico separabile connesso, localmente connesso per archi. Sia $H$ un sottogruppo chiuso localmente connesso per archi, allora:*

*(1) Il quoziente $G/H$ è connesso e localmente connesso per archi,*

*(2) sia $H_0 \subset H$ la componente connessa dell'identità, la mappa naturale: $G/H_0 \to G/H$ è un rivestimento,*

*(3) se $G/H$ è semplicemente connesso allora $H$ è connesso,*

*(4) se $H$ è discreto, la mappa quoziente $G \to G/H$ è un rivestimento,*

*(5) se $H$ è connesso e $G$ semplicemente connesso e $G/H$ è localmente semplicemente connesso allora $G/H$ è semplicemente connesso.*

*Dimostrazione.* Presente in [Kna96] □

**Proposizione 1.11.** *Sia $G$ un gruppo topologico separabile, connesso, localmente connesso per archi, semplicemente connesso. Sia $H < G$ discreto, allora $p : G \to G/H$ è un rivestimento. Deck(p) è esattamente il gruppo di traslazioni a destra su $G$ per elementi di $H$. Quindi $\pi_1(G/H) \simeq H$ in maniera canonica.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con $f_h(g) = gh$ per ogni $g \in G$ e $h \in H$. Ora $pf_h(g) = ghH = gH = p(g)$, quindi $pf_h = p$ cioè $f_h$ è effettivamente una deck trasformation. Ora $p^{-1}(1 \cdot H) = H$, il gruppo di traslazioni $f_H$ agisce transitivamente sulla pre-immagine ma allora per le proprietà (2), (3) di 1.7 abbiamo la tesi. □

**Corollario 1.12.** Nelle ipotesi precedenti supponiamo in aggiunta che $H$ sia normale in $G$ allora:

- H è contenuto nel centro di G,
- $\pi_1(G/H) \simeq H$ è abeliano,
- la giunzione fra lacci in $\pi_1(G/H)$ coincide con la moltiplicazione in $H$.

*Dimostrazione.*
- Applicazione della proposizione 1.9 (4).
- è una semplice applicazione della proposizione precedente unita alla prima affermazione del corollario, $H < Z(G) \implies H$ abeliano,
- $h_1, h_2, h_1h_2 \in H$ corrispondono, tramite l'isomorfismo del punto precedente rispettivamente a: [p(cammino in $G$ da 1 a $h_1$)], [p(cammino in $G$ da 1 a $h_2$)] e [p(cammino in $G$ da 1 a $h_1h_2$)], ma ora un elemento nell'ultima classe è proprio la giunzione dei due cammini descritti.

□

**Proposizione 1.13.** *Sia $G$ gruppo topologico separabile connesso per archi, localmente connesso, localmente semplicemente connesso. Sia $p : \widetilde{G} \to G$ il rivestimento universale di $G$, fissiamo $1_{\widetilde{G}} \in \widetilde{G}$ tale che $1_{\widetilde{G}} \in p^{-1}(1_G)$. Allora, esiste un'unica struttura moltiplicativa su $\widetilde{G}$ che lo rende gruppo topologico separabile per cui $p$ è un omomorfismo di gruppi.*

*Dimostrazione.* Sia $m : G \times G \to G$ l'ordinaria moltiplicazione, sia $\phi : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$ la composizione fra $m$ e la mappa diagonale della proiezione, allora:

$$\{1\} = \phi^*(\pi_1(\widetilde{G} \times \widetilde{G}, 1_{\widetilde{G}} \times 1_{\widetilde{G}})) \subset p^*(\pi_1(\widetilde{G}, 1_{\widetilde{G}})),$$

ma allora il criterio di sollevamento induce unica mappa continua: $\widetilde{\phi} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tale per cui $\phi = p\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\phi}(1_{\widetilde{G}}, 1_{\widetilde{G}}) = 1_G$. Verifichiamone l'associatività:

$$p\widetilde{\phi}(\widetilde{\phi}(x, y), z) = \phi(\widetilde{\phi}(x, y), z)) = \phi(x, y) \cdot (pz) =$$
$$(px \cdot py) \cdot (pz) = px \cdot (py \cdot pz) = p\widetilde{\phi}(x, \widetilde{\phi}(y, z))$$

inoltre: $\widetilde{\phi}(\widetilde{\phi}(\widetilde{1}, \widetilde{1}), \widetilde{1}) = \widetilde{1} = \widetilde{\phi}(\widetilde{1}, \widetilde{\phi}(\widetilde{1}, \widetilde{1}))$.
$\widetilde{1}$ è l'identità del prodotto, infatti $\widetilde{\phi}(1, \cdot)$ e $\widetilde{\phi}(\cdot, \widetilde{1})$ "rivestono" l'identità e mandano $\widetilde{1}$ in $\widetilde{1}$. Per l'esistenza dell'inverso semplicemente solleviamo la composizione $(\cdot)^{-1} \circ p : \widetilde{G} \to G$ ad una mappa da $\widetilde{G}$ in $\widetilde{G}$ che mandi $\widetilde{1}$ in $\widetilde{1}$. Manca da verificare che la mappa di rivestimento $p$ sia omomorfismo di gruppi ma questo segue da:

$$p\widetilde{\phi}(x, y) = \phi(x, y) = (px) \cdot (py).$$

□

# 2 Gruppi di Lie

Nel primo paragrafo abbiamo visto alcune proprietà dei rivestimenti di gruppi topologici e in particolare come sollevare la struttura di gruppo al rivestimento universale. In questa seconda sezione, trattiamo più nello specifico il caso dei gruppi di Lie: vedremo che è possibile sollevare anche la struttura liscia; questo fornirà un modo per classificare i gruppi di Lie connessi aventi la stessa algebra di Lie.

**Osservazione 2.1.** I gruppi di Lie che studieremo saranno connessi (essendo varietà saranno anche localmente connessi per archi e localmente semplicemente connessi). Di conseguenza, la teoria sviluppata fino ad adesso su gruppi topologici si applica ai gruppi di Lie.

Nel primo capitolo abbiamo già osservato come il rivestimento universale $\widetilde{G}$ di un gruppo topologico $G$ ammetta un'unica struttura di gruppo topologico che renda la proiezione un omomorfismo. Adesso, vogliamo estendere il risultato e mostrare che se $G$ è gruppo di Lie, allora $\widetilde{G}$ ammette anche un'unica struttura liscia, che renda $p$ un rivestimento liscio (e in particolare un diffeomorfismo locale). L'unicità della struttura liscia di un rivestimento continuo di una varietà liscia si verifica facilmente, prendendo come carte su $\widetilde{G}$ quelle date dagli aperti che banalizzano il rivestimento. Il problema che si incontra è, però, verificare che questa struttura liscia su $\widetilde{G}$ (l'unica compatibile con $p : \widetilde{G} \to G$) sia anche compatibile con la struttura di gruppo trovata in precedenza (anch'essa unica).
Per dimostrarlo, è necessario il seguente lemma.

**Lemma 2.2.** Siano $X$, $Y$, $Z$ varietà lisce, sia $f : X \to Y$ immersione (liscia) e $g : Z \to X$ continua. Allora $g$ è liscia se e solo se $f \circ g$ è liscia.

*Dimostrazione.* La verifica è locale. Scegliamo parametrizzazioni $\varphi : \mathbb{R}^m \to U$ e $\psi : \mathbb{R}^n \to V$ con $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ aperti e con $m \leq n$, in cui $f$ sia l'immersione $\iota : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ottenuta ponendo le ultime $n - m$ coordinate uguali a 0. Allora, si ottiene il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"] & U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|_U"] & X \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[ul, "\pi"] & V \arrow[r, hook, "j"] & Y
\end{tikzcd}$$

Dove $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è la proiezione ottenuta ponendo le ultime coordinate uguali a 0. Sia $U' = g^{-1}(U) \subseteq Z$ e mostriamo che $g|_{U'}$ è liscia. Per ipotesi $f \circ g$ è liscia, quindi $(f \circ g)|_{U'} = f|_U \circ g|_{U'}$ è liscia. Ma $f|_U = \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}$, quindi sostituendo si ottiene che $\psi \circ \iota \circ \varphi^{-1} \circ g|_{U'}$ è liscia, ovvero (dato che $\psi$ è un diffeomorfismo) che $\iota \circ \varphi^{-1} \circ g|_{U'}$ è liscia. Infine, componendo con $\pi$ si ottiene che $\pi \circ \iota \circ \varphi^{-1} \circ g|_{U'} = \varphi^{-1} \circ g|_{U'}$ è liscia, cioè (dato che $\varphi$ è un diffeomorfismo) che $g|_{U'}$ è liscia. $\square$

**Teorema 2.3.** *Il rivestimento universale $\widetilde{G}$ di un gruppo di Lie $G$ ha un'unica struttura di gruppo di Lie, che rende $p : \widetilde{G} \to G$ un rivestimento liscio e un omomorfismo di gruppi.*

*Dimostrazione.* Nel capitolo 1 abbiamo mostrato che $\widetilde{G}$ ha un'unica struttura di gruppo topologico che renda $p$ un omomorfismo. Inoltre, dato un rivestimento $\widetilde{M} \to M$ di una varietà liscia $M$, c'è un'unica struttura liscia su $\widetilde{M}$ che lo renda un rivestimento liscio. Per concludere, bisogna mostrare che le due strutture messe su $\widetilde{G}$ (quella di gruppo e quella liscia) siano compatibili. Mostriamo che il prodotto $m_{\widetilde{G}} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ è liscio.
Dato che $p : \widetilde{G} \to G$ è un omomorfismo di gruppi, il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[r, "m_{\widetilde{G}}"] \arrow[d, "p \times p"] & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\
G \times G \arrow[r, "m_G"] & G
\end{tikzcd}$$

Le mappe $p$ e $m_G$ sono lisce, quindi $m_G \circ (p \times p) = p \circ m_{\widetilde{G}}$ è liscia. Inoltre, $p$ è un diffeomorfismo locale, quindi in particolare è una immersione. Allora usando il lemma precedente si ottiene che $m_{\widetilde{G}}$ è liscia.
La dimostrazione che l'inverso $i_{\widetilde{G}} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ è liscia è del tutto analoga, dove dal fatto che $p$ è un omomorfismo di gruppi si ottiene che $i_G \circ p = p \circ i_{\widetilde{G}}$. $\square$

Nel lemma 1.4 abbiamo notato che un rivestimento liscio di gruppi di Lie induce un isomorfismo di algebre di Lie. Inoltre, nella lezione 3 è stata dimostrata la seguente proposizione, come corollario del teorema 1.2.

**Proposizione 2.4.** *Due gruppi di Lie semplicemente connessi con stessa algebra di Lie sono isomorfi.*

Quindi, il rivestimento universale $\widetilde{G}$ di $G$ è caratterizzato dall'essere l'unico gruppo di Lie semplicemente connesso con algebra isomorfa a $\mathfrak{g}$.

**Esempio 2.5.** È noto che il gruppo fondamentale di $\mathrm{SO}(n)$ è $\pi_1(\mathrm{SO}(n), Id) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per quanto dimostrato in precedenza, deve quindi esistere un gruppo di Lie semplicemente connesso $G$ con algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$ che riveste $\mathrm{SO}(n)$ con un rivestimento di grado 2 $p : G \to \mathrm{SO}(n)$. Tale gruppo è noto come $\mathrm{Spin}(n)$ e verrà studiato più nel dettaglio nelle seguenti lezioni.

Ricordiamo il primo teorema di isomorfismo per gruppi di Lie, che può essere enunciato come segue.

**Teorema 2.6.** *Sia $\varphi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi di Lie, allora:*

- *il kernel $K$ di $\varphi$ è un sottogruppo di Lie normale e chiuso di $G$;*
- *è ben definito il gruppo di Lie quoziente $G/K$;*
- *l'immagine $\varphi(G)$ ha un'unica struttura liscia come sottogruppo di $H$;*
- *la mappa indotta al quoziente $\widetilde{\varphi}$: $G/K \to \mathrm{Im}(\varphi)$ è un diffeomorfismo.*

Usando il teorema di isomorfismo, si ottiene quindi che ogni gruppo di Lie connesso può essere realizzato come quoziente del suo rivestimento universale.

**Teorema 2.7.** *Sia $G$ un gruppo di Lie connesso. Allora $G \simeq \widetilde{G}/H$ dove $\widetilde{G}$ indica il rivestimento universale di $G$ e $H$ è un sottogruppo discreto contenuto nel centro $Z(\widetilde{G})$.*

*Dimostrazione.* Dato che $p : \widetilde{G} \to G$ è una sommersione (è un diffeomorfismo locale), otteniamo che induce un isomorfismo $G \simeq \widetilde{G}/H$, dove $H$ è un sottogruppo chiuso e normale di $\widetilde{G}$. D'altra parte, dato che $p$ è un diffeomorfismo locale, $H$ deve necessariamente essere un sottogruppo discreto. Infine, nella prima sezione abbiamo mostrato che i sottogruppi discreti normali di un gruppo di Lie connesso sono contenuti nel centro. □

Questo teorema permette di trovare una corrispondenza biunivoca tra i gruppi di Lie connessi con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e i sottogruppi centrali discreti di $\widetilde{G}$. Per rendere completa questa corrispondenza, notiamo anche che ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ può essere realizzata come algebra di Lie di un gruppo di Lie $G$, e quindi in particolare come algebra di Lie di un unico gruppo di Lie semplicemente connesso $\widetilde{G}$.

**Teorema 2.8** (Terzo teorema di Lie)**.** *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie reale di dimensione finita. Allora esiste un gruppo di Lie $G$ con algebra di Lie $\mathfrak{g}$.*

La dimostrazione più semplice del terzo teorema di Lie usa il teorema di Ado.

**Teorema 2.9** (Teorema di Ado)**.** *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Allora $\mathfrak{g}$ può essere realizzata come algebra di matrici. Ovvero, esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.*

*Dimostrazione.* Presente in [Kna96] $\square$

Usando il teorema di Ado, accenniamo una dimostrazione del teorema di Lie.

*Dimostrazione.* Per il teorema di Ado, possiamo supporre che $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Ricordiamo che per le algebre di matrici la mappa esponenziale coincide con l'esponenziale di matrici. Sia dunque $G < GL(n, \mathbb{R})$ il sottogruppo generato da $e^{\mathfrak{g}}$. Allora, si verifica facilmente che $G$ è un gruppo di Lie e che la sua algebra di Lie è $\mathfrak{g}$. $\square$

Dunque, fissata un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, possiamo trovare un gruppo di Lie $G$ che la abbia come algebra di Lie, e quindi un gruppo di Lie semplicemente connesso $\widetilde{G}$ che abbia la stessa algebra di Lie (prendendo il rivestimento universale).

**Osservazione 2.10.** Nelle lezioni precedenti, è già stato notato che la costruzione che associa ad un gruppo di Lie la sua algebra di Lie è funtoriale. In questa lezione, stiamo restringendo lo studio al caso dei gruppi di Lie connessi, quindi abbiamo un funtore dalla categoria dei gruppi di Lie connessi **CLGrp** nella categoria delle algebre di Lie finito dimensionali **LAlg**.

$$\begin{aligned} Lie : \mathbf{CLGrp} &\to \mathbf{LAlg} \\ G &\mapsto Lie(G) \\ (f : G \to H) &\mapsto (\mathrm{d}f : Lie(G) \to Lie(H)) \end{aligned}$$

Con la costruzione vista sopra, abbiamo ottenuto un modo naturale per associare a ogni algebra di Lie un gruppo di Lie: sceglieremo l'unico gruppo di Lie semplicemente connesso avente quella algebra di Lie. Poiché per gruppi semplicemente connessi i morfismi di algebre si sollevano in modo unico a morfismi di gruppi, effettivamente anche questa costruzione è funtoriale. Otteniamo quindi anche un funtore che va nella direzione opposta.

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbf{LAlg} &\to \mathbf{CLGrp} \\ \mathfrak{g} &\mapsto \widetilde{G} =: \Gamma(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Il teorema 1.2 garantisce una bigezione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CLGrp}}(\Gamma(\mathfrak{g}), H) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{LAlg}}(\mathfrak{g}, Lie(H)).$$

Quindi il funtore $\Gamma$ che abbiamo costruito è il funtore aggiunto sinistro del funtore *Lie*. Notiamo che l'unità dell'aggiunzione $\epsilon : \mathfrak{g} \mapsto Lie(\Gamma(\mathfrak{g}))$ è un isomorfismo per ogni $\mathfrak{g}$, che corrisponde al fatto che il funtore $\Gamma$ è pienamente fedele. Viceversa, la counità $\eta : \Gamma(Lie(H)) \to H$ è il rivestimento universale $\widetilde{H} \to H$; la sua surgettività corrisponde al fatto che il funtore *Lie* è fedele.

Sia dunque $\widetilde{G}$ l'unico gruppo di Lie semplicemente connesso, avente $\mathfrak{g}$ come algebra di Lie. Allora, tutti i gruppi di Lie connessi con algebra $\mathfrak{g}$ avranno $\widetilde{G}$ come rivestimento universale. Questo dimostra la seguente proposizione.

**Proposizione 2.11.** *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e sia $\widetilde{G}$ il gruppo di Lie semplicemente connesso avente $\mathfrak{g}$ come algebra di Lie. Allora tutti i gruppi di Lie connessi con algebra di $\mathfrak{g}$ sono ottenuti quozientando $G$ per un sottogruppo discreto del suo centro $Z(G)$.*

Come applicazione, troviamo una dimostrazione alternativa (a quella vista nella terza lezione) della caratterizzazione dei gruppi di Lie abeliani. Nella terza lezione, avevamo visto la seguente proposizione.

**Proposizione 2.12.** *Sia $G$ un gruppo di Lie connesso e $N$ un sottogruppo normale connesso, con algebre di Lie rispettivamente $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}$. Allora l'algebra di Lie di $[G, N]$ è $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$.*

**Corollario 2.13.** Un gruppo di Lie connesso $G$ è abeliano se e solo se la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è abeliana.

Otteniamo quindi la classificazione dei gruppi di Lie connessi abeliani.

**Proposizione 2.14** (Classificazione dei gruppi di Lie connessi abeliani)**.** *Sia $G$ gruppo di Lie connesso abeliano di dimensione $n$. Allora $G \simeq (\mathbb{S}^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ per qualche $k$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $G$. Allora, $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie abeliana di dimensione $n$, cioè $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$. Ma allora $\mathbb{R}^n$ è l'unico gruppo di Lie semplicemente connesso avente algebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$. Pertanto, $G$ è un quoziente di $\mathbb{R}^n$ per un sottogruppo discreto $H$. I sottogruppi discreti di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente i reticoli, quindi esistono $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti tali che $H = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{Z}}$. Completando $v_1, \ldots v_k$ a base di $\mathbb{R}^n$ è immediato notare che $\mathbb{R}^n / H \simeq (\mathbb{S}^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. $\square$

La proposizione 2.11 risponde alla domanda di classificare i gruppi di Lie connessi con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Infatti, abbiamo trovato la seguente corrispondenza biunivoca.

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{matrix} \text{gruppi di Lie connessi} \\ \text{con algebra di Lie } \mathfrak{g} \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{sottogruppi discreti di } Z(\widetilde{G}) \text{, dove } \widetilde{G} \text{ è} \\ \text{l'unico gruppo di Lie semplicemente} \\ \text{connesso con algebra } \mathfrak{g} \end{matrix} \right\} =: \mathcal{B}.$$

Nel caso in cui $Z(\widetilde{G})$ stesso sia un gruppo discreto, l'insieme $\mathcal{B}$ ha una struttura di reticolo, che può essere trasportata ad $\mathcal{A}$ tramite la bigezione indicata. Ricordiamo la definizione di reticolo.

**Definizione 2.15.** Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato (poset) e sia $B \subseteq A$ un sottoinsieme. Diciamo che un elemento $m \in A$ è il *meet* di $B$ se è il massimo dei minoranti di $B$. Ovvero è un minorante di $B$ tale che se $w \in A$ è un altro minorante ($w \leq b$ per ogni $b \in B$), allora $w \leq m$. Se esiste, indichiamo il meet di $B$ come $\wedge B$. Simmetricamente, definiamo il *join* di $B$ come il minimo dei maggioranti. Se esiste, lo indichiamo come $\vee B$. Un *reticolo* è un insieme parzialmente ordinato, in cui ogni coppia di elementi $\{a, b\}$ ammette join $a \vee b$ e un meet $a \wedge b$.

L'esempio che ci interessa è quello dei sottogruppi di un gruppo $G$. L'insieme $\{H < G\}$ è naturalmente un poset rispetto all'inclusione ed è anche un reticolo: il meet di due sottogruppi è la loro intersezione, mentre il join di due sottogruppi è il sottogruppo che generano. Nel caso in cui si restringa lo studio ai sottogruppi normali $\{H \triangleleft G\}$ (ad esempio se $G$ è abeliano), si ottiene che il reticolo è *modulare*, proprietà che si dimostra essere molto utile per studiarne la combinatoria.

Nel caso che studiamo, se $Z(\widetilde{G})$ è un gruppo discreto, l'insieme $\mathcal{B}$ è solamente l'insieme di tutti i suoi sottogruppi, che quindi è un reticolo modulare. Notiamo che la struttura di reticolo ereditata da $\mathcal{A}$ risulta più naturale se invertiamo la relazione d'ordine. Infatti, se $H_1 \leq H_2$ in $\mathcal{B}$ (cioè $H_1$ è un sottogruppo di $H_2$), allora i gruppi corrispondenti in $\mathcal{A}$ sono $G_1 = \widetilde{G}/H_1$ e $G_2 = \widetilde{G}/H_2$. Quindi, $G_2 = G_1/H_2G_1$ è quoziente di $G_1$ per un sottogruppo discreto centrale, cioè $G_1 \to G_2$ è un rivestimento. Quindi, invertendo la relazione d'ordine, otterremo che $G_1 \geq G_2$ se e solo se $G_1 \to G_2$ è un rivestimento e $\mathcal{A}$ diventa un reticolo tramite questa relazione d'ordine.

Gli elementi minimale e massimale di $\mathcal{B}$, sono rispettivamente il gruppo banale $\{1\}$ e $Z(\widetilde{G})$. Guardando la relazione in $\mathcal{A}$ (che come abbiamo detto risulta più naturale se invertita), questi corrispondono al gruppo semplicemente connesso $\widetilde{G}$ (che è rivestimento di ogni altro elemento di $\mathcal{A}$) e al gruppo $\widetilde{G}/Z(\widetilde{G})$ (che non è rivestimento di alcun altro gruppo, ma ammette tutti gli altri gruppi come rivestimenti).

In molte applicazioni rilevanti, si ottiene che realizzando $\widetilde{G}$ come gruppo di matrici, gli elementi di $Z(\widetilde{G})$ sono le matrici multiple dell'identità, la cui azione su $\widetilde{G}$ corrisponde alla moltiplicazione per uno scalare. In tal caso è quindi possibile interpretare il gruppo minimale $\widetilde{G}/Z(\widetilde{G})$ come il proiettivizzato di $\widetilde{G}$.

**Esempio 2.16.** Un esempio rilevante di algebra $\mathfrak{g}$ per cui $Z(\widetilde{G})$ risulta discreto è quando $\mathfrak{g}$ è semisemplice. Infatti, nella lezione 3 è stato osservato che se se $G$ è un gruppo di Lie connesso con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, allora l'algebra di Lie del suo centro $Z$ coincide con il centro di $\mathfrak{g}$. Nei casi in cui $\mathfrak{g}$ abbia centro banale (ad esempio se è semisemplice), questo ci dice che $Z$ è un sottogruppo di Lie con algebra di Lie nulla, quindi è discreto.

## Riferimenti bibliografici

[Kna96] Anthony W Knapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer, 1996.

[Mas67] William S Massey. *Algebraic topology: an introduction*, volume 56. Springer, 1967.

[PG87] L.S. Pontryagin and R.V. Gamkrelidze. *Topological Groups.* Classics of Soviet Mathematics. Taylor & Francis, 1987.