

3-VAR : LEZIONE 1

[KOSINSKI: "Differential manifolds"]
[MILNOR: "Knot Theory"]
[MARTELLI]

MODIFICARE e COSTRUIRE VARIETÀ

1) PUNTURA: • $M \rightsquigarrow M' = M \setminus \{pt\}$ (non dipende dal pt)
connessa $pt \in \text{Int}(M)$ perché \exists diffeom. $\Phi: M \rightarrow M$
 $p \mapsto q$

$$\Phi|_{M \setminus \{p\}}: M \setminus \{p\} \cong M \setminus \{q\}$$

Def Un disco è una sottovarietà $D \subseteq \text{Int}(M)$ diffeomorfa a $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

TEOREMA (DEL DISCO): M connessa, $\dim M = n$. $f, g: D^n \hookrightarrow \text{Int}(M)$ embedding. Sono sempre isotopi, dopo aver eventualmente specchiato f (sostituendo f con $f \circ \sigma$, dove σ è riflessione del disco).

COROLLARIO: Dati due dischi $D, D' \subseteq M$ \exists sempre isotopia ambiente che sposta D in D' .

(isotopia: $f, g: N \rightarrow M$ embedding. Una isotopia è $F: N \times [0, 1] \rightarrow M$ t.c. $F_0 = f$, $F_1 = g$ e F_t embedding $\forall t$)

isotopia ambiente: $\varphi, \psi: M \xrightarrow{\cong} M$. $\exists F: M \times [0, 1] \rightarrow M$ isotopia che è diffeom. in ogni t (F_t diffeom $\forall t$)

TEOREMA: Se N cpt, ogni isotopia $f \sim g: N \hookrightarrow M$ è ambiente
 (nel senso che $\exists F$ isot. amb. t.c. $(f \sim g)_t = F_t \circ f$)

COROLLARIO: Dati dischi $D, D' \subseteq \text{Int}(M)$ $\exists \varphi: M \rightarrow M$ diffeom t.c. $\varphi(D) = D'$
 ($\varphi = F_1$)

• M connessa $D \subseteq \text{Int}(M)$ $M \rightsquigarrow M'' = M \setminus \text{Int}(D)$ $\hookrightarrow M''$ ha 1 nuova comp. di bordo
 $M''' = M \setminus D$

Esercizio: $M' \cong M'''$

2) RIMOZIONE DI SOTTOVARIETÀ: • $M^m \supseteq N^m$ chiusa $\rightsquigarrow M' = M \setminus N$ è varietà
chiusa
 • $\bar{U}N \subseteq M$ \rightsquigarrow intorno tubolare \rightarrow chiuso

($UN \subseteq M$ è un fibrato vettoriale su N con fibra \mathbb{R}^{m-m} . Fisso metrica Riemanniana su UN e prendo $\bar{U}N = \{(p, v) \in UN \mid \|v\| \leq 1\}$ intorno tubolare chiuso)

$\bar{U}N$ è un fibrato in dischi su N

TEOREMA: $\bar{U}N$ è unico a meno di isotopie e isomorfismi

COROLLARIO: Se N cpt allora $\bar{U}N$ è cpt, quindi l'isotopia di sopra è isotopia ambiente.

• $UN \subseteq M$ $\rightsquigarrow M'' = M \setminus \text{Int}(UN)$
 da ora in poi è chiuso $M''' = M \setminus UN$

Esercizio: $M' \cong M''$ M'' ha una nuova componente di bordo $\partial V N$
 diffe

Se modifico N con isotopia ambiente di M , il risultato non cambia. N è fibro $g_m = m-1$

3) INCOLLAMENTO DI VARIETÀ LUNGO IL BORDO

M varietà Σ_1, Σ_2 due componenti di bordo diffeomorfe $\varphi: \Sigma_1 \cong \Sigma_2$

Metodo naïf: $M' = M / \sim$ dove $\forall p \in \Sigma_1 \quad p \sim \varphi(p)$

Esercizio: M' è varietà topologica

Metodo alternativo: Prendiamo un collare (intorno tubolare "a metà", siamo sul bordo)

No $\left[\begin{array}{l} \text{Il collare chiuso è un } [0,1] \text{ fibro} \\ \text{Esistono collari unici come prima} \end{array} \right] \text{ NO}$

Def Un collare chiuso di M var. con bordo è un embedding $F: \partial M \times [0,1] \hookrightarrow M$
 t.c. $F(x,0) = x$

TEOREMA: Esiste unico a meno di isotopia (ambiente se M cpt)

Definisci, dati $F: \Sigma_1 \times [0,1] \hookrightarrow M$, $G: \Sigma_2 \times [0,1] \hookrightarrow M$
 $M'' = M \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) / \sim$ dove

$$\forall p \in \Sigma_1, F(p,t) \sim G(\varphi(p), 1-t) \quad \forall t \in (0,1)$$

M'' è $T_2 \Rightarrow \bar{M}$ varietà liscia

Esercizio: M' e M'' sono omeomorfi

$\Sigma_1 \cong \Sigma_2$ cpt

PROPOSIZIONE: M'' non dipende (a meno di diffeo) dai collari scelti. Inoltre non cambia se modifico φ con isotopia.

Dim: - Il collare è unico a meno di isotopia ambiente:

se $F: \Sigma_1 \times [0,1] \hookrightarrow M$, $F': \Sigma_1 \times [0,1] \hookrightarrow M$ collari $\exists \psi: M \rightarrow M$ (isotopia a id)

t.c. $F = \psi \circ F'$ e ψ fornisce il diffeomorfismo tra le due varietà ottenute

- Isotopia Φ_t tra φ e φ' . Siano N, N' le due varietà ottenute

Scrivo $\Psi: N \rightarrow N'$ diffeo

$x \mapsto x$ se x è fuori dal collare incollato

$F(p,t) \mapsto F(\Phi_t(p), t)$ o roba del genere.....

3-VAR. LEZIONE 2

PROPOSIZIONE: Ci sono due diffeomorfismi $S^1 \rightarrow S^1$ a meno di isotopia (dipendono dall'orientazione).

DIM: In generale, se M è orientata, $\text{Diffeo}(M) = \{\varphi: M \rightarrow M \text{ diffeo}\}$

si decompone sempre in $\text{Diffeo}^+(M) \sqcup \text{Diffeo}^-(M)$

preserva orientazione

inverte orientazione

Esercizio: $f, g \in \text{Diffeo}(M)$ sono isotopi \Rightarrow sono coerenti (stanno entrambi in Diffeo^+ o entrambi in Diffeo^-)

Non è detto che $\text{Diffeo}^-(M)$ sia non vuoto (\mathbb{CP}^2 non è specchiabile, cioè $\text{Diffeo}^-(\mathbb{CP}^2) = \emptyset$)

$$\sigma: S^1 \rightarrow S^1 \quad \sigma \in \text{Diffeo}^-(S^1)$$

$$z \mapsto \bar{z}$$

$$\Rightarrow \text{Diffeo}^-(S^1) \neq \emptyset$$

Dimostriamo che φ, ψ coerenti \Rightarrow sono isotopi

Le mappe $\varphi, \psi: S^1 \rightarrow S^1$ si sollevano a $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tra i rivestimenti universali

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \wr & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow[\varphi, \psi]{} & S^1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Vale che } \tilde{\varphi}(x+2\pi) &= \tilde{\varphi}(x) + 2\pi \\ \tilde{\psi}(x+2\pi) &= \tilde{\psi}(x) + 2\pi \end{aligned} \quad \forall x$$

$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ sono strettamente monotone ($\tilde{\varphi}', \tilde{\psi}' \neq 0$ sempre, quindi >0 o <0 sempre)

Queste proprietà si mantengono per comb. lin.

$$\tilde{\Phi}_t(x) = t\tilde{\varphi}(x) + (1-t)\tilde{\psi}(x) \quad \text{che induce una omotopia}$$

$$\Phi_t: S^1 \rightarrow S^1 \quad \text{che ha grado 1, quindi è}$$

difeo $\forall t$, quindi è isotopia.

Fatto: Se M è orientata, ^{compatta, senza bordo} e connessa $H^m(M) \cong \mathbb{R}$.

Se $\varphi: M \rightarrow M$ è diffeo, $\varphi^*: H^m(M) \rightarrow H^m(M)$

$$\alpha \mapsto \pm \alpha \quad \text{a seconda che } \varphi \text{ inverte o preserva l'orientazione}$$

Quindi 2 mappe non coerenti

non sono neanche omotope, perché inducono mappe diverse in coomologia.

Abbiamo quindi visto che $\text{Diffeo}(S^1)/\text{isotopia} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Essendo S^m specchiabile si ha che $\text{Diffeo}(S^m)/\text{isotopia} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

È vero anche per S^m che $\text{Diffeo}(S^m) \underset{\text{isotopia}}{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

In generale NO.

Per S^2, S^3 , e qualcos'altro è vero. Da un certo punto in poi diventa falso. Ad esempio, per $m=7$.

SFERE ESOTICHE

Pres: D_1, D_2 copie di D^m $\varphi: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ diffeo.

$$M = D_1 \cup_{\varphi} D_2 \quad (\text{in realtà andrebbe costruita con i collar per farla } C^{\infty})$$

Se $m \geq 7$ a volte non è diffeomorfa a S^m

PROPOSIZIONE: $M \underset{\text{omoeo}}{\cong} S^m$

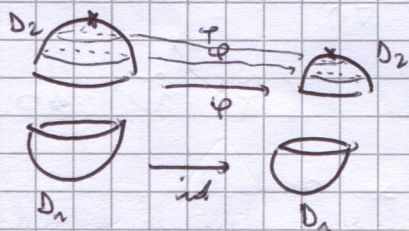
DIM:

Esercizio: $S^m \underset{\text{diffeo}}{\cong} D_1 \cup_{\text{id}} D_2$

Costruisco omeomorfismo $F: D_1 \cup_{\text{id}} D_2 \rightarrow D_1 \cup_{\varphi} D_2$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in D_1 \\ \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) \cdot |x| & \text{se } x \in D_2, x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \in D_2 \end{cases}$$

(Se mi interessa lavorare con omeomorfismi posso usare l'incollamento naïf, se voglio i diffeomorfismi devo usare i collar)



Questa funzione non viene liscia in $0 \in D_2$ e non si può lisciarla senza perdere la bigettività.

TEOREMA: Due varietà lisce M, N di dimensione 1, 2 o 3 sono diffeomorfe se e solo se sono omeomorfe.

• Ogni varietà topologica di dimensione 1, 2, 3 ha (unica) struttura liscia, oss.

La cosa delle sfere esotiche dice che esistono $\varphi: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ diffeos che non si estendono a diffeos $\Phi: D^m \rightarrow D^m$.

4) Doppio

M varietà compatta con bordo. (M_1, M_2 due copie di M)

$$DM = M_1 \cup_{\text{id}} M_2$$

COROLLARIO: Ogni varietà con bordo è contenuta in una senza bordo.

Esempio: • Doppio (D^m) $\cong S^m$

• Doppio ($S^{m-1} \times [0,1]$) $\cong S^{m-1} \times S^1$

• Doppio (Möbius) $\cong \text{Klein}$

5) SOMMA CONNESSA

M_1^m, M_2^m varietà ^{connesse}, $f_i: D^m \hookrightarrow \text{int}(M_i^m)$

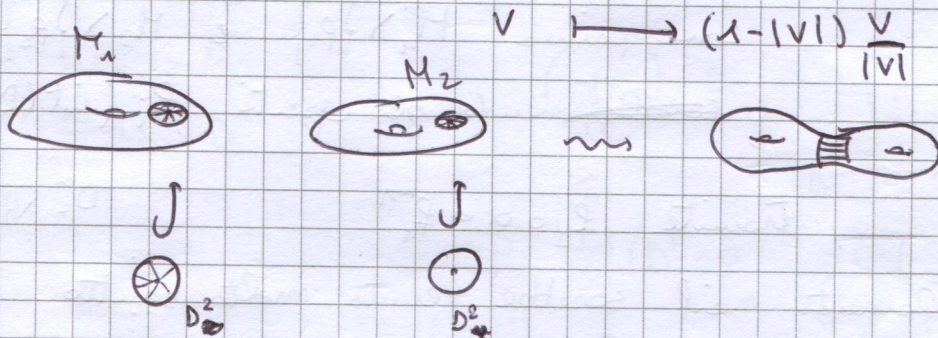
Se sono orientate le varietà prendo f_1 invertita, f_2 preserva orientazione

In questo modo sono uniche a meno di isotopia

$M_1^m \# M_2^m = (M_1^m \setminus \{f_1(0)\}) \cup (M_2^m \setminus \{f_2(0)\})$ incollate tramite

$$f_2 \circ \alpha \circ f_1^{-1}: f_1(\text{int}(D^m \setminus \{0\})) \longrightarrow f_2(\text{int}(D^m \setminus \{0\}))$$

$$\alpha: \text{int}(D^m \setminus \{0\}) \xrightarrow{\text{int}} (D^m \setminus \{0\})$$



PROPOSIZIONE: $M_1 \# M_2$ non dipende da nulla ed è pure orientata (perché $f_2 \circ \alpha \circ f_1^{-1}$ preserva l'orientazione).

Esercizio: Si può vedere la somma connessa tramite 2 passi:

- Rimuovendo $f_i(\text{int}(D^m))$
- Incollando i bordi nuovi tramite $f_2 \circ f_1^{-1}$

OSS. se φ invertita, l'incollamento è orientato

PROPOSIZIONE: • $M_1 \# M_2 \cong M_2 \# M_1$
• $M_1 \# (M_2 \# M_3) \cong (M_1 \# M_2) \# M_3$
• $M \# S^m \cong M$

Le varietà C^∞ a meno di diffeomorfismi sono un insieme e formano un monoidale (a dimensione fissa). Gli invertibili sono le sfere esotiche.

Esercizio: $\forall m \geq 3 \quad \pi_1(M \# N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$

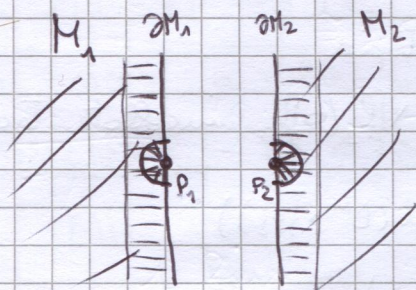
(si fa con Van Kampen)

6) SOMMA CONNESSA AL BORDO

$$R_+^m = \{x_m \geq 0\} \quad D_+^m = R_+^m \cap D^m, \quad \alpha: \text{int}(D_+^m \setminus \{0\}) \rightarrow \text{int}(D_+^m \setminus \{0\})$$

Con abuso di nome $D^{m-1} = D_+^m \cap \{x_m = 0\}$

$$v \mapsto (1-|v|) \frac{v}{|v|}$$

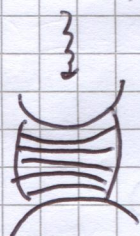


$$\forall i=1,2 \quad p_i \in \partial M_i \quad f_i: D^{m-1} \hookrightarrow \partial M_i$$

$$0 \mapsto p_i$$

Si estende f_i a embedding

$$f_i: D_+^m \hookrightarrow M_i \quad \leftarrow \text{in realtà in un collarino}$$



Costruire nuove varietà $M_1 \#_2 M_2$ prendendo

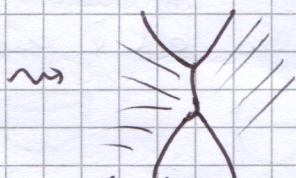
come prima $M_1 \setminus \{p_1\}$ e $M_2 \setminus \{p_2\}$

e sovrapponendo gli aperti $f_i(\text{int}(D_+^m \setminus \{0\}))$

$$\text{tramite } f_2 \circ \alpha \circ f_1^{-1}$$

$$D_+^m \setminus \{0\} \cup (S^{m-1} \cap D_+^m)$$

Facendo l'incollamento naïf sarebbe venuto molto brutto



Se M_1, M_2 sono orientate prendo f_1 che inverte, f_2 che preserva e $M_1 \#_2 M_2$ viene orientato.

PROPOSIZIONE: $M_1 \#_2 M_2$ dipende solo da quali componenti connessi di bordi contengono p_1 e p_2 .

Esercizio: $M \#_2 D^m \cong M$

• Se M e N hanno bordi connessi $\partial(M \#_2 N) = \partial M \# \partial N$

3-VAR - LEZIONE 3

7) INCOLLAMENTO LUNGO SOTTO VARIETÀ

$$\begin{array}{ccc} \text{int}(M_1^m) & & \text{int}(M_2^m) \\ \cup & & \cup \\ N_1^k & \xrightarrow[\varphi]{\cong} & N_2^k \\ \text{cpt} & \text{diffeo} & \text{cpt} \end{array}$$

$0 \leq k \leq m-1$

Suppongo anche che \exists isomorfismo

$$\varphi: \nu N_1 \xrightarrow{\cong} \nu N_2 \quad \text{intorni tubolari chiusi}$$

Costruisco M' prendendo $M_1 \setminus N_1$, $M_2 \setminus N_2$ e incollandoli lungo il diffeomorfismo $(\varphi \circ \alpha): \text{int}(\nu N_1) \setminus N_1 \rightarrow \text{int}(\nu N_2) \setminus N_2$ dove

su ogni fibra $\alpha(v) = (1 - \|v\|) \frac{v}{\|v\|}$. M' è varietà liscia

$$\alpha: \nu N_1 \rightarrow \nu N_1$$

SFERA

$$0 < k < m$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &= \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \\ D^m &\cong_{\text{diffeo}} D^k \times D^{m-k} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ D^m \\ S^{m-1} \end{array} \cong \begin{array}{c} \square \\ D^k \end{array} \times D^{m-k}$$

$$S^{m-1} \rightarrow (D^k \times S^{m-k-1}) \cup (S^{k-1} \times D^{m-k})$$

si intersecano in $S^{k-1} \times S^{m-k-1}$

$$\begin{array}{ccc} \text{---} \circ \text{---} & \rightarrow & \text{---} \circ \text{---} \\ S^2 & & (S^0 \times D^2) \cup (D^1 \times S^1) \end{array}$$

• Versione liscia:

$$\mathbb{R}^m = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{m-k}\}$$

$$S^{m-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1\}$$

$$A = \{(x, y) \in S^{m-1} \mid \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}\} \quad B = \{(x, y) \in S^{m-1} \mid \|y\|^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

oss. A, B sono domini regolari di S^m (sottovarietà della stessa dim, con bordo)

perché per $S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ e $S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ il valore $\frac{1}{2}$ è regolare

$$(x, y) \mapsto \|x\|^2 \quad (x, y) \mapsto \|y\|^2$$

$$A \cap B \cong_{\text{diffeo}} S^{k-1} \times S^{m-k-1}$$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{2} (x, y)$$

$$A \cong_{\text{diffeo}} D^k \times S^{m-k-1}$$

$$(x, y) \mapsto (\sqrt{2} x, \frac{y}{\|y\|})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x, (2 - \|x\|^2)^{1/2} y) \longleftarrow (x, y)$$

$$B \cong_{\text{diffeo}} S^{k-1} \times D^{m-k}$$

COROLLARIO:

$$S^3 \cong_{\text{diffeo}} (S^1 \times D^2) \cup (D^2 \times S^1)$$

$$S^3 \cong_{\text{diffeo}} (S^0 \times D^3) \cup (D^1 \times S^2)$$

OSS - I domini A e B sono intoni tubolari di $S^{K-1} = \{(x, 0) \in S^{m-1}\} \subseteq B$
 $S^{m-K-1} = \{(0, y) \in S^{m-1}\} \subseteq A$

CHIRURGIA LUNGO SFERE

$$M^m \quad \text{int}(M) \supseteq S \stackrel{\cong}{\cong} S^{K-1} \quad 0 \leq K \leq m$$

$K=1$ sfera

Supponiamo che ∂S sia bordo

$$\text{Quindi } \partial S \cong S^{K-1} \times D^{m-K+1} \\ \cong \partial S^{K-1} \text{ sfera dentro } S^m$$

Sceglia $\varphi: \partial S \xrightarrow{\cong} \partial S^{K-1}$ e facciamo chirurgia.

L'incollamento può essere spezzato in due tempi

1) Rimuovi $\text{int}(\partial N_i) \quad i=1,2$

2) Incolla le nuove componenti di bordo tramite $\varphi: \partial \nu N_1 \rightarrow \partial \nu N_2$

Per la chirurgia di sfere la stessa cosa:

1) Rimuovi $\text{int}(S^{K-1} \times D^{m-K+1}) \subseteq \text{int}(M)$ creando un nuovo bordo
 $S^{K-1} \times S^{m-K}$ $S^{K-1} \times D^{m-K+1}$

Contemporaneamente rimuovi $\text{int}(B) \subseteq S^m$ e rimanga con
 $A = D^K \times S^{m-K} \subseteq S^m$

2) Incolla quello che resta di M con A lungo $S^{K-1} \times S^{m-K}$

Brevemente: Sostituisci $S^{K-1} \times D^{m-K+1} \subseteq \text{int}(M)$ con $D^K \times S^{m-K}$

OSS. Se $K=1$ sostituire $S^0 \times D^m$ con $D^1 \times S^{m-1}$ è una somma connessa

Per $K \geq 2$ sono operazioni nuove

8) INCOLLAMENTO LUNGO SOTTOVARIETÀ AL BORDO

$$M_1^m, M_2^m \quad N_i^K \subseteq \partial M_i \quad 0 \leq K \leq m-1$$

N_i^K sfera bordo

Suppongo esista isomorfismo $\varphi: \partial \nu N_1 \xrightarrow{\text{in } \partial M_1} \partial \nu N_2 \xrightarrow{\text{in } \partial M_2}$

fibra D^{m-K-1}

Fatto: Esiste estensione di φ a $\bar{\varphi}: \bar{\partial} \nu N_1 \rightarrow \bar{\partial} \nu N_2$ dove $\bar{\partial} \nu N$ è un D_+^{m-K} -fibrato
 che estende il D^{m-K-1} -fibrato $\partial \nu N$

Come prima, incolliamo $M_1 \setminus N_1$ con $M_2 \setminus N_2$ tramite

$$(\varphi \circ \alpha): \text{int}(\bar{D}N_1) \setminus N_1 \rightarrow \text{int}(\bar{D}N_2) \setminus N_2 \quad \text{con sempre lo stesso } \alpha$$

~~Esercizio~~
Topologicamente, otteniamo $M_1 \cup_{\varphi} M_2$

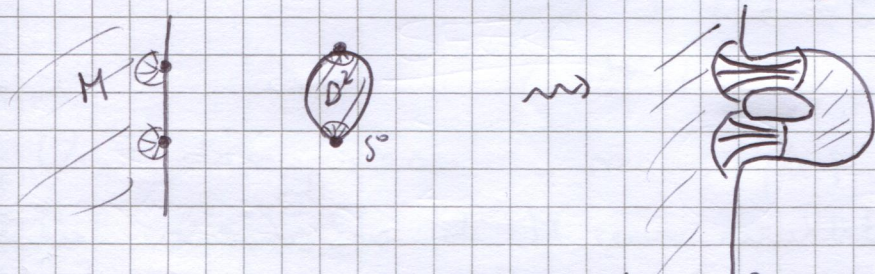
K-MANICI

M^m varietà (può avere bordo)

$S \subseteq \partial M$ $(k-1)$ -sfera con intorno νS bundle.

Incolla M e D^m lungo la sfera di bordo $S \subseteq \partial M$ e $S^{k-1} \subseteq S^{m-1}$

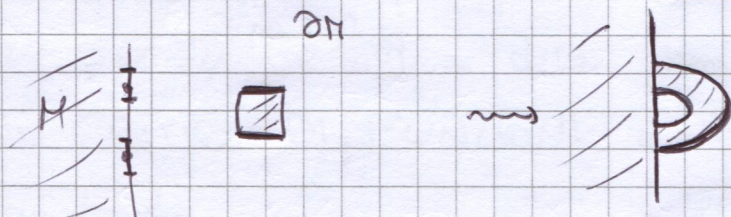
Il risultato dipende da quale $\varphi: \nu S \rightarrow \nu S^{k-1} = S^{k-1} \times D^{m-k} = B$ si sceglie (dalla sua classe di isotopia)



K-MANICI COMBINATORI

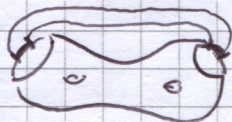
$$D^m \underset{\text{quasi}}{\cong} D^k \times D^{m-k} \quad \text{si costruisce } M' = M \cup_{\varphi} (D^k \times D^{m-k})$$

$$\text{dove } \varphi: \underset{\partial M}{\nu S} \xrightarrow{\cong} S^{k-1} \times D^{m-k}$$



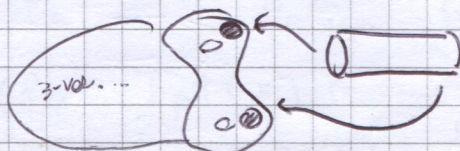
Esempi:

1-manici: ($k=1$)



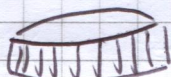
($m=2$)

(idea $D^k \times D^{m-k}$
grossa piccola
incolla lungo
i lati corti)



($m=3$)

2-manici: ($k=2$)



$S^1 \times D^2$

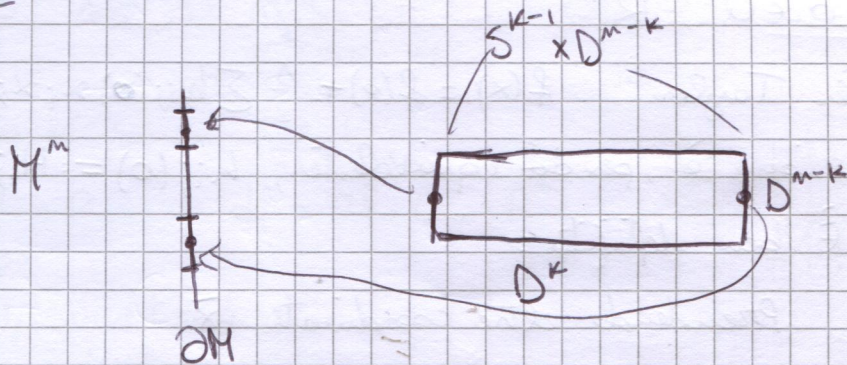
Def X sp. top. una k -cella è $\varphi: \partial D^k \rightarrow X$ qualsiasi continua
 L'attaccamento della cella è $X' = X \cup_{\varphi} D^k$

Def Nell'operazione di incollamento di manici, $S^{k-1} \times 0$ si dice
 sfera di incollamento, $0 \times S^{m-k-1}$ si dice costola.

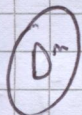
Oss. Il bordo cambia sempre per chirurgia lungo $S \subseteq \partial M$

3-VAR. LEZIONE 4

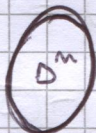
K-manico:



0-manico e m-manico



non si attacca a nulla



Tutto il bordo si attacca. Si attacca solo se una componente di bordo di M è $\cong S^{m-1}$

In pratica un m-manico tocca un buco (di bordo)

Def Una decomposizione in manici di M compatta (può avere bordo) è la realizzazione di M come risultato di un numero finito di attaccamenti di manici

$$M_0 \xrightarrow{\neq} M_1 \xrightarrow{\sim} M_2 \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} M_n \xrightarrow[\text{diffe}]{\cong} M$$

OSS. Ci deve essere sempre qualche 0-manico all'inizio.

Se $\partial M \neq \emptyset$, l'ultimo deve essere un m-manico.

PUNTI CRITICI DI FUNZIONI e HESSIANO

M senza bordo

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ liscia. $df_p \in T_p^* M$ fibrato tangente in p di M

Sia p punto critico per f , cioè $df_p = 0$.

Su p è definita una forma bilineare simmetrica

$\text{Hess}(f)_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definito come:

$\forall v, w \in T_p M$ prendo X, Y campi che estendono v e w vicino a p

$$\text{Hess}(f)_p(v, w) = X(Y(f))(p)$$

Esercizio: Con p punto critico è ben definita, bilineare e simmetrica.

Oppure, in coordinate:

$$p=0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$$

Per Taylor $f(x) = f(0) + \frac{1}{2} \sum h_{ij}(0) x_i x_j + o(\|x\|^2)$ con h_{ij} ^{simmetrica} liscia vicino a 0.
 L'hessiano è, per def equivalente, $h_{ij}(0) =: H_{ij}$

È ben definito:

Prendendo altre coordinate \bar{x}

$$x = J\bar{x} + o(\|\bar{x}\|^2)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{2} {}^t x H x + o(\|x\|^2) = \\ &= f(0) + \frac{1}{2} {}^t (J\bar{x} + o(\|\bar{x}\|)) H (J\bar{x} + o(\|\bar{x}\|)) + o(\|\bar{x}\|^2) = \\ &= f(0) + \frac{1}{2} {}^t \bar{x} \underbrace{J H J}_{\text{e' hessiano cambia per congruenza}} \bar{x} + o(\|\bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

Def $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ liscia. p punto critico è non degenero se $\text{Hess}(f)_p$ è non degenero.

Def L'indice di p punto critico non degenero è $K = i_-$ (indice di negatività di $\text{Hess}(f)_p$)

(LEMMA DI MORSE)

PROPOSIZIONE: Se p è punto critico non degenero di indice $m-K$ allora esiste una curva intorno a p su cui f diventa:

$$p=0$$

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_K^2 - x_{K+1}^2 - \dots - x_m^2$$

DIM: Per induzione su r . Passo base: Taylor $f(x) = f(0) + \sum h_{ij}(x) x_i x_j$

Supponiamo di avere $f(x) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} h_{ij}(x) x_i x_j$

A meno di cambiamento lineari possiamo supporre $h_{rr}(0) \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{h_{rr}(x)}$ è ben def. vicino 0

$$y_i = x_i \quad \forall i \neq r$$

$$y_r = \sqrt{h_{rr}(x)} \left(x_r + \sum_{j > r} \frac{h_{jr}(x)}{h_{rr}(x)} x_j \right)$$

$$\Rightarrow f(y) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_r^2 + \sum_{i,j > r} h_{ij}(y) y_i y_j$$

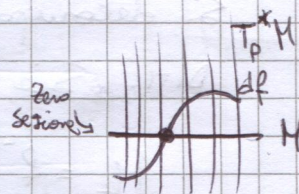
Def Una funzione di Morse su M (senza bordo) è una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ i cui punti critici sono tutti non degeneri

PROPOSIZIONE: p punto critico per f è non degenero se e solo se df è trasverso alla zero-sezione in p

COROLLARIO: f di Morse $\Leftrightarrow df \cap S_0$
 \uparrow \leftarrow zero-sectione
 trasversale

OSS - I punti critici non degeneri sono isolati.

\rightarrow DIM: In certe $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $df = \nabla f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$
 \uparrow
 \mathbb{R}^m



$\cap \Leftrightarrow \text{Hess}(f)_p$ invertibile

PROPOSIZIONE: M varietà $\subseteq \mathbb{R}^N$ (teorema di Whitney: ogni varietà anche non compatta, ..., si imbedde in \mathbb{R}^N (\cong chiuso $\subseteq \mathbb{R}^N$))

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ liscia. Per quasi tutti i $a \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$f_a: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = f(x) + \langle a, x \rangle$
 è di Morse.

DIM: ~~$M \times (\mathbb{R}^N)^*$~~ $\xleftarrow{\text{dual}} (p, a) \rightarrow$ è un fibrato
 \downarrow
 $M \xrightarrow{df} T^*M$ $(p, a|_{T_p M})$

$E \xrightarrow{g} M \times (\mathbb{R}^N)^* \xleftarrow{L} M$
 \downarrow
 $M \xrightarrow{df} T^*M$ dL_a

$L_a \cap g \Rightarrow dL_a \cap df$ cioè $df - L_a \cap S_0$

ALTRA DIM: (MILNOR)

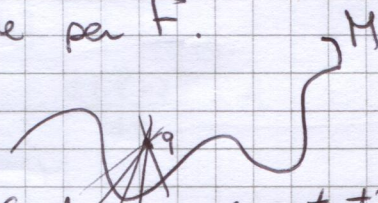
Pseudo fibrato normale $UM \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$
 $\{ (p, v) \mid p \in M, v \in T_p M^\perp \}$

$F: UM \rightarrow \mathbb{R}^N$
 $(p, v) \mapsto p + v$

Def $q \in \mathbb{R}^N$ è punto focale se è valore singolare per F .

Pseudo $f(x) = \|x - q\|^2$

TEOREMA: Se q non è focale (per il lemma di Sard ce ne sono tanti)
 allora f è di Morse.



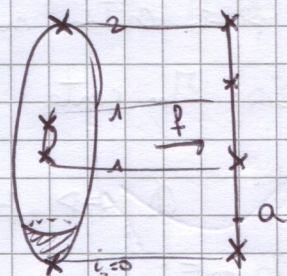
TEOREMA: Ogni M compatta senza bordo (sarebbe vero anche con bordo)

si decompone in manici.

Dati: Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ di Morse

$$M_t = f^{-1}((-\infty, t])$$

Se t è regolare, M_t è dominio regolare

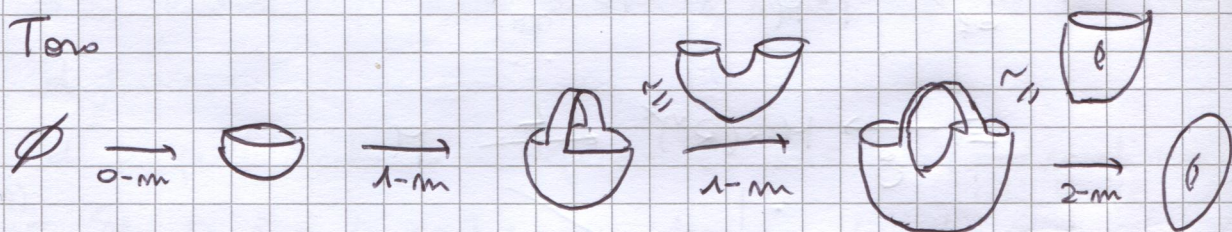


LEMMA 1: Se $[a, b]$ non contiene val. critici allora

$$M_a \cong_{\text{diffeo}} M_b$$

LEMMA 2: Se $[a, b]$ contiene nel suo interno un valore critico $c \in (a, b)$ allora $M_b = M_a \cup$ manici. Punto critico di indice k vuol dire che ci mette un k -manico.

Esempio: Toro



3-VAR. LEZIONE 5

TEOREMA: M varietà senza bordo. $\exists f: M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di Morse tale che punti critici distinti abbiano immagini distinte.

dim: Sappiamo che $\exists f: M \rightarrow \mathbb{R}$ di Morse e la perturbiamo. Sia $p \in M$ punto critico per f . Preso $\varepsilon > 0$ si può prendere $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a supp. compatto, $g(0) = \varepsilon$, $g(t) \leq \varepsilon \forall t$, $|g'(t)| \leq \varepsilon$, $g(t) = \varepsilon$ su intorno di 0.

In una certa intorno a p $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ma $f_2 = f + g$ ($p=0$)

TEOREMA: M cpt senza bordo. Allora si decompone in manici.

dim: $\forall a \in \mathbb{R}$ definisco $M_a = f^{-1}(-\infty; a]$ con f di Morse della tesi del tes. sopra.
 a, b valori regolari

1) Se $[a, b]$ \nsubseteq valori critici allora $M_a \cong M_b$

2) Se $[a, b]$ contiene uno e un solo ~~valore~~ critico $c \in (a, b)$ di indice k allora $M_b \cong M_a \cup k\text{-manico}$.

[1] Mettiamo metrica Riemanniana su M .

Prendo $\forall p \in M$ $\langle \nabla f(p), w \rangle = df_p(w) \quad \forall w \in T_p M$
 ∇f :

Considerando una curva $\gamma: I \rightarrow M$ qualsiasi.

Facciamo $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$

Voglio un campo vettoriale tale che questo sopra faccia 1 (con γ curva integrale)

Pongo ~~il campo vettoriale~~ $X(p) = \nabla f \cdot g(p)$

dove $g = \begin{cases} \frac{1}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle} & \text{su } f^{-1}[a, b] \\ 0 & \text{fuori da intorni di } f^{-1}[a, b] \end{cases}$

Così se γ è curva integrale per X $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = 1$

Quindi se Φ flusso di X , $\Phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$

$\Phi_{b-a}(p) = \Phi(p, b-a)$

$\Phi_{b-a}: M \rightarrow M$ diffeo

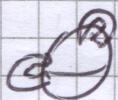
$\Phi_{b-a}(M_a) = M_b$

[2] Idea: wlog $c=0$, $a=-\varepsilon$, $b=\varepsilon$

Tesi: $M_\varepsilon \cong M_{-\varepsilon} \cup k\text{-manico}$

Questo è vero perché:

per assurdo



0-manif



0-manif

non ci sono 1-manif attaccati ai 2 0-manif il tutto resta connesso, e non si può connettere con i manif di dim. più alta perché si incedono lungo S^{k-1} con $k > 1$ che è connesso

RIBALTARE DECOMPOSIZIONE IN MANIF (M senza bordo)

Se cambiamo la funz. di Morse f in $-f$, questa resta funz. di Morse, i punti critici di indice k diventano di indice $n-k$
 Quindi k -manif in $(n-k)$ -manif

Dato una decomposizione in manif si può definire una f di Morse (fidati), prendere $-f$ e passare alla decomposizione duale.

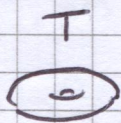
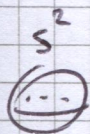
$D^k \times D^{n-k}$ in base a cosa attaccato delle 2 componenti (D^k o D^{n-k})
 è un k -manif o un $(n-k)$ -bordo

COROLLARIO: Se M è cpt senza bordo, ha decomposizione in manif con uno 0-manif e un n -manif

DM: 0-manif visto.

Prendo dec. duale in semplici 0-manif (che sarebbero gli n -manif iniziali)

CLASSIFICAZIONE SUPERFICI



$$S_g := \underbrace{T \# \dots \# T}_g$$

TEOREMA: S superficie cpt connessa senza bordo $\iff S \cong S_g$ per diffe

qualche g ($g = \frac{b_1}{2}$ ^{orientabile} ~~Rot.~~ cioè $H^1(S) \cong \mathbb{R}^{2g}$)

DM: Prendo dec. in manif di S con 1 0-manif, x 1-manif e 1 2-manif.

• Se $x=0$ Attacco 2 D^2 lungo S^1 . Poiché ogni diffe di S^1 è isotopo a id o a $z \mapsto \bar{z}$, si ha

$S \cong D^2 \cup_f D^2 \cong D^2 \cup_{id} D^2$ o $S \cong D^2 \cup_{\bar{f}} D^2$. In entrambi i casi si ottiene S^2 .

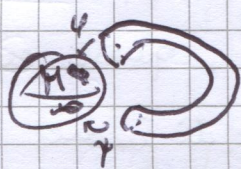
• Se $n \geq 0$: [...]

PROPOSIZIONE: M varietà. $M' = M \cup 1\text{-manico}$.

Se M' orientabile, M connessa, ∂M connesso.

Allora M' dipende solo da M .

DITT: L'orientazione di M' ne induce una su M e su H



Quindi φ e ψ devono invertire l'orientazione

$\varphi, \psi: D^{n-1} \hookrightarrow \partial M$ e meno di isotopia sono unici (ho fissato le orientazioni e ∂M è connesso)

[...] C'è unico modo di attaccare un 1-manico a disco

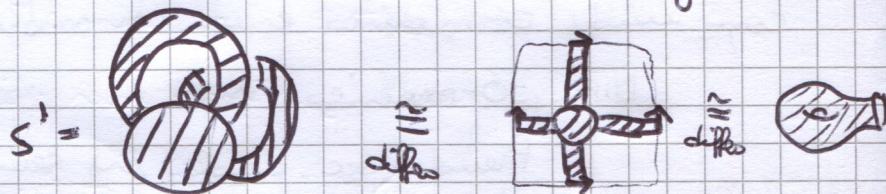


A questo punto non è più vero che attaccare un altro è indipendente.

Dico che \exists sempre 1-manici intrecciati.

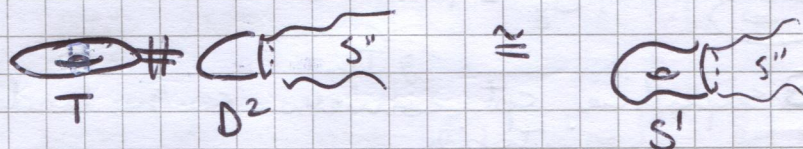
Questo perché S è senza bordo e ha solo 1 2-manico.

Quindi dopo aver attaccato tutti gli 1-manici devo avere solo 1 componente di bordo. Quindi tutti gli 1-manici sono intrecciati



Sostituiamo adesso S' con D^2 , (hanno stesso bordo)

Come è cambiata la superficie?



Quindi $S \cong T \# S''$

Ho sostituito 1 0-manico e 2 1-manici con 1 0-manico.

Dopo finiti passi finisco gli 1-manici, e quindi trovo

$$S \cong T \# \dots \# T \# S^2 \Rightarrow S \cong S_g$$

(poss. togliere)

Usando Mayer-Vietoris:

$$H^0(S_g) = H^1(S_g) = \mathbb{R}$$

$$H^2(S_g) = \mathbb{R}^{2g}$$

3-VAR. LEZIONE 6

Def $S_{g,b} := S_g$ con b buchi
(rimuovi b dischi aperti da S_g) $g \geq 0$
 $b \geq 0$

TEOREMA: S superficie compatta connessa orientabile $\Leftrightarrow S \cong S_{g,b}$ per qualche g, b

Dim: S ha $b \geq 0$ componenti di bordo

\exists 1-varietà compatta connessa senza bordo: S^1

Quindi le componenti di bordo di S sono $\cong S^1$

Attacco un 2-manico a ciascun buco ottenendo superficie S' che non dipende dalle mappe di attaccamento (in dir. bassa)

S' non ha bordo $\Leftrightarrow S' \cong S_g$

Togliendo di nuovo i 2-manici ottengo $S \cong S_{g,b}$

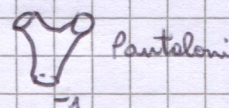
Def $S_g^{No} := \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_g$ ($\mathbb{R}P^m$ orientabile $\Leftrightarrow m$ dispari)

Esercizio (Mayer-Vietoris):

$$\begin{aligned} X > 0 & \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\ = 0 & \quad \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \end{aligned}$$

$$X(S_{g,b}) = 2 - 2g - b$$

$X < 0$ tutti gli altri:



Esempio: $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \text{Klein}$

Esercizio (Mayer-Vietoris):

$$X(S_g^{No}) = 2 - g$$

$$H_0(S_g) = \mathbb{R}$$

$$H_0(S_{g,b}) = \mathbb{R}$$

$$H_0(S_g^{No}) = \mathbb{R}$$

$$H_1(S_g) = \mathbb{R}^{2g}$$

$$H_1(S_{g,b}) = \mathbb{R}^{2g+b-1}$$

$$H_1(S_g^{No}) = \mathbb{R}^{g-1}$$

$$H_2(S_g) = \mathbb{R}$$

$$H_2(S_{g,b}) = 0$$

$$H_2(S_g^{No}) = 0$$

TEOREMA: S superficie connessa non orientabile cpt. senza bordo $\Leftrightarrow S \cong S_g^{No}$ per qualche g

Dim: Come per S_g :

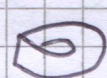
- 1 0-manico
- g 1-manici
- 1 2-manico

Sicuramente $g \geq 1$.

Sostituisco

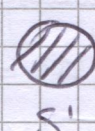


S



Möbius

Sostituisco



S'

$$S = S' \# \mathbb{R}P^2$$

Se S' è non orientabile per induzione $S' \cong S_{g-1}^{No} \Rightarrow$ Tesi

Se S' è orientabile $\Rightarrow S' \cong S_g$

Esercizio: $S_g \# \mathbb{R}P^2 \cong S_{g+1}^{no}$

Basta dimostrare che $T \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$
 $\cong K \# \mathbb{R}P^2$

Def $S_{g,b}^{no} := S_g^{no}$ con b buchi

Proposizione: A meno di diffeomorfismo, le superfici compatte connesse sono $S_{g,b}$ e $S_{g,b}^{no}$

DIM: Come sopra

3- VARIETÀ

TEOREMA: M varietà compatta $\Rightarrow \pi_1(M)$ ha presentazione (finita)

DIM: Prendo dec. in manici di M con uno 0-manico.
Attaccando gli 1-manici ottengo una cosa omeotopicamente
equivalente ad un bouquet.

Aggiungendo i 2-manici introduco relazioni.

1-manici: $\sim a_i$ (lettere)

2-manici: $\sim a_i a_j a_k$ (parole)

$$\pi_1(M) = \langle \underbrace{a_1, \dots, a_k}_{1\text{-manici}} \mid \underbrace{R_1, \dots, R_n}_{2\text{-manici}} \rangle$$

Per Van Kampen attaccando i K -manici con $K \geq 3$
non si modifica il $\pi_1(M)$

COROLLARIO: $\pi_1(M)^{ab}$ è finitamente generato

DIM: È quoziente di fin. gen.

COROLLARIO: $H_1(M; \mathbb{Z}) = \pi_1(M)^{ab} = \mathbb{Z}^k \oplus G$
↑ parte di torsione (gruppo finito)

TEOREMA / Def: $H^1(M; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k$

Se M è cpt, connessa, orientabile, senza bordo.

$$H_0(M) = H^0(M) = \mathbb{Z}$$

$$H_1(M) = \pi_1(M)^{ab}$$

$$H_2(M) = H^1(M)$$

$$H_3(M) = H^3(M) = \mathbb{Z}$$

$$(H^2(M) = H_1(M) \text{ per } \mathbb{R}P^1)$$

COROLLARIO: La (co-)omologia in \mathbb{Z} di M è determinata dal $\pi_1(M)$.

Def Una sfera di omologia è una 3-varietà M con. cpt. orient. senza ∂ tale che $H_*(M) = H_*(S^3)$

Ciò è equivalente a dire che $\pi_1(M)^{ab} = \{0\}$ (G è perfetto se $G^{ab} = \{0\}$)

CONGETTURA (POINCARÉ):

$$\pi_1(M) = \{0\} \Rightarrow M \cong S^3$$

[Perelman, 2005]

PROPOSIZIONE:

Se M 3-var. cpt (più avere bordo), allora $\chi(M) = \frac{\chi(\partial M)}{2}$ ← deve essere pari

COROLLARIO: Non esiste M 3-var. cpt. tale che $\partial M \cong \mathbb{RP}^2$

Esiste M 3-var. cpt. tale che $\partial M \cong K$
a Klein

COROLLARIO: $\partial M = \emptyset \Rightarrow \chi(M) = 0$

→ DIM: M^{2m+1} $\Rightarrow \chi(M) = 0$ perché $\chi(M) = \sum_{i=0}^{2m+1} (-1)^i b_i$
 senza bordo orientabile
 ma per DP $b_i = b_{2m+1-i}$

[...]

PROPOSIZIONE: $\tilde{M} \xrightarrow{d} M$ rivestimento di grado d fra varietà cpt.

Allora $\chi(\tilde{M}) = d \chi(M)$

DIM: $\chi(M)$ somma alternata numero di celle. Prendo CW su M , lo sollevo su \tilde{M} e per ogni k -cella ne ottengo d su \tilde{M} .

[...] Se M non è orientabile allora \exists rivestimento di grado 2 \tilde{M} orientabile
induce un rivestimento sui bordi (non conest.)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{2} & \partial M \\ \downarrow 2 & & \\ M & \text{non orient.} & \end{array}$$

Per \tilde{M} vale \Rightarrow per M vale.

Basta solo dimostrare per M orientabile con bordo.

Considero $DM = M \cup_{\partial M} M$ [...]

Esercizio: $\chi(M \cup_{\partial M} N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\partial M)$ ($\partial M \cong \partial N$)

Si fa con Mayer-Vietoris oppure con decomposizione in celle e inclusione-esclusione.

[...] Rundi $\chi(DH) = 2\chi(H) - \chi(\partial H)$

men ha
bonds

→ $\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix}$

⇓

$$\chi(H) = \frac{\chi(\partial H)}{2}$$

3-VAR. LEZIONE 7

TEOREMA (JORDAN USCIO).

Ogni 1-sottovarietà C compatta connessa (cioè CSC: curve simple chiuse lisce) in \mathbb{R}^2 ($\cong S^1$) è il bordo di un disco.

DIM: $C \subseteq \mathbb{R}^2$ orientabile (ha codim 1 in \mathbb{R}^2 orientabile)

Quindi ha intorno tubolare (banda). Taglio lungo C e ottengo una superficie S .

Se S ha 1 comp. connessa, $\exists \alpha$ curve simpl. chiuse con $\alpha \cap C = \emptyset$

Altrimenti S ha 2 comp. connesse

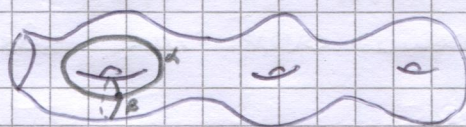
Nel 1° caso $[C] \in H_{\text{or}}^1(\mathbb{R}^2)$ non banale ($[C] \in H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z})$ non banale)
che è assurdo perché $H_{\text{or}}^1(\mathbb{R}^2) = 0$

C è contenuto in un disco $S = S' \sqcup S''$ $\partial S' \cong S^1$
 cpt non cpt \Downarrow
 $\text{no puncture} = 1$

Inoltre S' orientabile perché $S' \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow S' \cong S_{g,1}$

Dimostriamo che $g=0$ ($\Rightarrow S' \cong D^2$)

Se $g \geq 1$



una superficie di genere $g \geq 1$ non può stare in \mathbb{R}^2
(per motivi di omologia e trasversalità), \mathbb{R}^2 non può contenere
 $\alpha \cap \beta = \{\text{pt}\}$

TEOREMA (JORDAN CONTINUO):

Ogni $C \subseteq \mathbb{R}^2$ omeomorfo a S^1 è bordo di $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omeomorfo a D^2 .

In dimensione 3:

TEOREMA (ALEXANDER):

Ogni $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sfera (liscia) è bordo di un disco $D \subseteq \mathbb{R}^3$

OSS. $\exists S \subseteq \mathbb{R}^3$ omeomorfo a una sfera che non è bordo di un disco D^3 topologicamente (Sfera di Alexander)

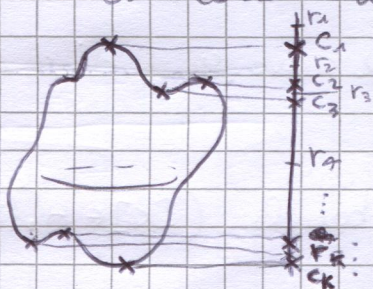
PROPOSIZIONE: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ connessa compatta senza bordo. Allora è orientabile e divide \mathbb{R}^3 in due componenti di cui una compatta.

↳ DITI: Vorrei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ di Morse
 $(x, y, z) \mapsto z$

Esercizio: $S \subseteq \mathbb{R}^3$, p punto critico per f (cioè $T_p S = \{z=0\}$) è non degenere \Leftrightarrow Gauss: $S \rightarrow S^2$ è regolare in p

LEMMA DI SARD: \exists valori regolari per Gauss vicini a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tali che è regolare anche l'opposto.

\Rightarrow Ruotando (arbitrariamente) per S ottengo f^z di Morse



Le controimmagini dei valori regolari è unione di S^1 .

Portando da un valore regolare r_1 faccio la chirurgia



In pratica taglio e tappo i buchi e porturo dal più interno al più esterno. Se prima avevo una sfera adesso ho ottenuto un'unione di sferette piccole.

COROLLARIO (JORDAN) C curva semplice chiusa $\subseteq S^2$ divide 2 dischi

Come sono fatte le nuove sferette?

- Le nuove sferette portano dischi
- Uso questo per dire che anche S porta un disco

Ciascuna sferetta ha 0 o 1 punti critici

\rightarrow 0 punti critici: Curva di Jordan



"tappata" parametrizzata tramite

isotopia lungo segmento \Rightarrow bordo un disco

\rightarrow 1 punto critico:

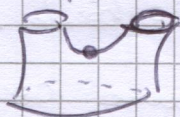


e

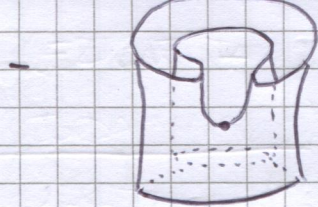


ok, portano disco boundary


Per i punti di sella si ha 2 casi:



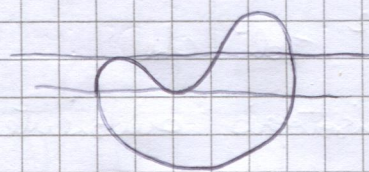
bordo un disco (somma connessa di dischi è disco)



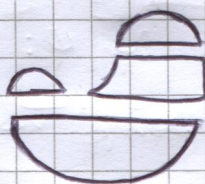
Anche questo bordo un disco

(si può vedere come somma connessa di
 mettendo l'uno dentro l'altro)

A questo punto l'idea è:



\rightsquigarrow

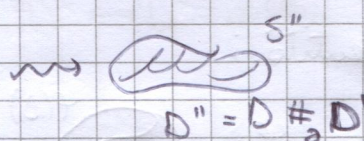
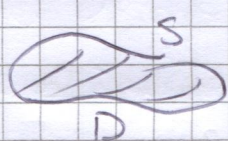


ora devo rincollare
 tornando indietro

$S = S_0 \rightsquigarrow S_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow S_m$
 una sfera due sfere $m+1$ sfere

Devo vedere che se S_i bordo dischi
 allora S_{i-1} bordo dischi

S_{i-1} è ottenuto da S_i per somma connessa di 2 componenti



Si conclude.

COROLLARIO: Se M^3 è 3-varietà $S \subseteq D^3 \subseteq M^3$ allora S bordo un disco.
 Sfera disco

Def M^3 è irriducibile se ogni $S \subseteq M$ sfera bordo un disco.

Oss. \mathbb{R}^3 è irriducibile

PROPOSIZIONE: S^3 è irriducibile (ogni $S \subseteq S^3$ sfera bordo 2 dischi)

DIM.: $S \subseteq S^3 \setminus \{pt\} \cong \mathbb{R}^3 \Rightarrow S = \partial D^3, D^3 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq S^3$

~~...~~, $S^3 \setminus S$ ha 2 comp. conn.

Concludo prendendo 2 punti, uno per parte e ripetendo
 il discorso sopra.

Problema di Schönflies: Una 3-sfera in \mathbb{R}^4 ($\cong S^4$) bordo sempre
 un disco? [problema aperto]

Collegato alla domanda: \exists 4-varietà lisce omotopicamente eq. a S^4
 ma non diffeomorfe a S^4 ? (exomorfismo)

Def $MCG(M)$ mapping class group.

M varietà qualsiasi orientabile

$MCG(M) = \text{Diffeo}^+(\overline{M})$
 orientation preserving
 isotopie
 lisce

è gruppo

PROPOSIZIONE: $MCG(S^1) = \{e\}$

TEOREMA (SMALE): $MCG(S^2) = \{e\}$

(ovvero c'è solo un modo di attaccare dischi tridimensionali)

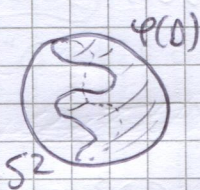
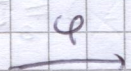
OSS. Per $n \geq 2$ $MCG(S^n) \neq \{e\}$

TEOREMA: Due diffeomorfismi $\psi, \varphi: D^2 \rightarrow D^2$ tali che

$\psi|_{S^1} = \varphi|_{S^1}$ sono isotopi tramite isotopia ambiente che fissa il bordo.

THM. B \Rightarrow THM. A:

$\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ che preserva l'orientazione. Voglio vedere che φ è isotopo all'identità:



$\varphi|_D: D \rightarrow S^2$ embedding⁺

D, D' dischi

Per il teorema del disco \exists isotopia ambiente $F_t: S^2 \rightarrow S^2$

tale che $F_0 = \text{id}$ e $F_1 \circ \varphi|_D = \text{id}|_D$

Dopo aver composto φ con F_1 ottengo φ' tale che $\varphi'|_D = \text{id}|_D$

$\varphi'|_{D'}: D' \rightarrow D'$ e $\text{id}|_{D'}: D' \rightarrow D'$ coincidono su $\partial D'$

quindi per il teorema B sono isotopi.

$MCG(S_g)$ $g \geq 0$ mapping class group.

insieme dei diffeomorfismi orientation-preserving di S_g in sé a meno di isotopia.

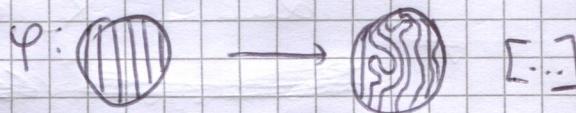
TEOREMA (SHALE '60)

$\varphi, \psi : D^2 \rightarrow D^2$ diffeomorfismi. Se $\varphi|_{\partial D^2} = \psi|_{\partial D^2}$ allora \exists isotopia ambiente $F_t : D^2 \rightarrow D^2$ t.c. $F_0 = \text{id}$ $F_1 \circ \varphi = \psi$ e che diffeo
 ~~$F_t(x) = x$~~ $F_t(x) = x \quad \forall x \in \partial D^2 \quad \forall t \in [0, 1]$

Dim:

Componendo con $\psi^{-1} : D^2 \rightarrow D^2$ diffeomorfismo ci si riconduce al caso in cui $\psi = \text{id}$

$$\Rightarrow \varphi|_{\partial D^2} = \text{id}|_{\partial D^2}$$



LEMMA: X campo vett. su \mathbb{R}^2 mai nullo.

Nessuna curva integrale resta intrappolata in nessun compatto.

(cioè $\forall K \subseteq \mathbb{R}^2$ cpt, $\forall \gamma(t)$ curva integra. massimale, $\exists t_0 : \gamma(t \geq t_0) \not\subseteq K$)

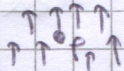
Dim: ω -limite di γ : $\omega(\gamma) = \bigcap_{t_0} \gamma(t \geq t_0)$

Se per assurdo γ intrappolata in K , per t_0 abbastanza grande $\gamma(t \geq t_0) \subseteq K$ cpt. $\Rightarrow \omega(\gamma) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists p \in \omega(\gamma)$

X mai nullo, quindi a meno di diffeomorfismo in un intorno di p

X è costante

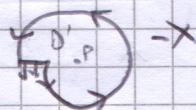


p è di accumulazione, quindi

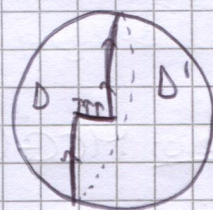
γ passa vicino almeno 2 volte

Jordan $\Rightarrow \exists D$ bordo di γ

Facciamo le stesse cose usando $-X$, ottenendo D'



Attacco i due dischi



Ho quindi campo continuo tangente su S^2 mai nullo. Assurdo.

[...] Prendi il campo vettoriale costante $X_0 = \frac{\partial}{\partial y}$
 $X_1 = \varphi_*(X_0)$ il campo trasportato in avanti.

Costruisci X_t campo mai nullo su D^2

$$X_0, X_1: D^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$\begin{matrix} \uparrow \text{semp.} \\ \text{com.} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \tilde{X}_0, \tilde{X}_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \exp \\ \tilde{X}_t \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{coppia universale} \end{matrix}$

Pongo $\tilde{X}_t := t\tilde{X}_1 + (1-t)\tilde{X}_0: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$

e quindi $X_t := \exp \circ \tilde{X}_t \quad (X_t: D^2 \rightarrow \mathbb{C}^*)$

Fin dall'inizio possiamo supporre che $\varphi \equiv \text{id}$ in un intorno del bordo.

Quindi X_t è costante sul bordo e entrante sotto, uscente sopra.

~~curva integrale per x~~ $\forall (x \in (-1, 1)) \quad \exists \gamma_x^t(0), T_x^t \rightarrow D^2$

curva integrale per x, cioè $\gamma_x^t(0) = (x, -\sqrt{1-x^2})$ e

$$\gamma_x^t(T_x^t) = (f_t(x), \sqrt{1-f_t(x)^2})$$

(tutto dipende in modo lineare)

γ_x^0 è quella verticale a velocità 1

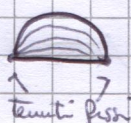
γ_x^1 è $\varphi \circ \gamma_x^0$. Rinormalizziamo per uniformare i tempi di percorrenza ($t=0, 1$ sono uguali ma in mezzo non so)

$$\tilde{\gamma}_x^t(u) = \gamma_x^t\left(u \cdot \frac{T_x^t}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \leadsto \quad \tilde{T}_x^t = 2\sqrt{1-x^2}$$

Definisco $\varphi_t: D^2 \rightarrow D^2$ tale che $\varphi_t(\gamma_x^0(u)) = \tilde{\gamma}_x^t(u)$

φ_t non fissa la parte sopra

dell' $S^1 = \partial D^2$. Per risolvere questo problema si fa tutto dicendo che $\varphi_t|_{\partial D^2}$ si può isotopare all'identità grazie ad un disegno del tipo



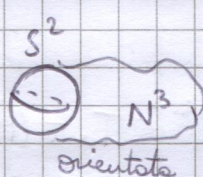
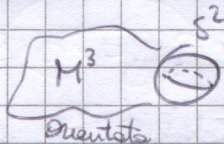
un punto in D^2
sta su una certa
curva integrale

A questo punto abbiamo concluso.

COROLLARIO: $MCG(S^2) = \{\text{id}\}$

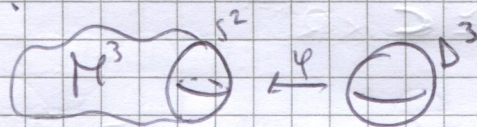
COROLLARIO: $\varphi, \psi: S^2 \rightarrow S^2$ diffe sono isotopi \Leftrightarrow omotopi \Leftrightarrow conservati

COROLLARIO:



$\exists! \varphi$ che inverte l'orientazione, quindi $\exists!$ modo di incollare M^3 e N^3 .

COROLLARIO:



Se attacco un D^3 a M^3 lungo sfera in ∂M^3 , il risultato non dipende da φ perché D^3 è specchiabile.

• Se M^m varietà orientata $X^k \subseteq M^m$ sottovarietà orientata senza bordo.

$$[X^*]: H_c^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[X] \in (H_c^k(M))^* = H^{m-k}(M)$$

$$\omega \mapsto \int \omega$$

TEOREMA:

$$[X \cap Y] = [X] \wedge [Y]$$

intersezione trasversa

COROLLARIO:

$$\text{Se } X \cap Y = \{pt\}$$

(vale anche se sono # dispari di punti)

$$\text{allora } [pt] = [X] \wedge [Y], \text{ cioè } [X], [Y] \neq 0$$

$$(H_c^0(M))^* = H^m(M)$$

COROLLARIO:

M^m varietà connessa orientabile $N^{m-1} \subseteq M$ sottovarietà chiusa senza bordo orientabile

Se $M \setminus N$ connesso, allora $[N] \in H^1(M)$ ($\Rightarrow b_1(M) > 0$)

COROLLARIO:

$N \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow N \subseteq S^m$, $m \geq 2$ ipersuperficie chiusa connessa orientabile non boudle

separa \mathbb{R}^m in 2 pezzi

In realtà vale il se e solo se:

PROPOSIZIONE:

M orientata connessa, $M \setminus N$ codim 1, orientata, connessa, chiusa

N separante $\Leftrightarrow [N] \in H^1(M)$ è boudle

D.M.: \Leftarrow Deriva dal corollario precedente.

$$\Rightarrow N = \partial W$$

$$[N]: H_c^{m-1}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \int_N \omega = \int_W d\omega = 0$$


Stokes

ω forma chiusa

3-VAR. LEZIONE 9.

PROPOSIZIONE: M^n orientabile $W^{n-1} \subseteq \text{Int}(M)$ orientabile $\Rightarrow \nu W \cong W \times \mathbb{R}$

PROPOSIZIONE: M^n orientabile, $C \subseteq \text{Int}(M)$ compatta connessa di dim 1
(cioè $\cong S^1$). Allora $\nu C \cong C \times \mathbb{R}^{n-1}$

OSS.  $\nu C \not\cong C \times \mathbb{R}$. Serve l'orientabilità

→ DIM: Induzione su n .

$n=2$. C ha codim 1. Si usa la prop precedente

$n \geq 3$ νC è un \mathbb{R}^{n-1} -fibrato su C . Sia

$s_0: C \rightarrow \nu C$ 0-sezione

Spostiamo s_0 ad una sezione $s_1 \pitchfork s_0$

$s_1 \pitchfork s_0 \Rightarrow s_1(C) \cap s_0(C) = \emptyset \Rightarrow s_1$ non si annulla mai
(perché $n \geq 3$)

Metto metrica Riemanniana su νC .

[$E \rightarrow M^n$ fibrato di rango k è bundle $\Leftrightarrow \exists k$ vett. indipendenti]

L = fibrato su C generato da s_1

$\forall p \in C$ $L^p \subseteq \nu^p(C)$, $L^p = \text{Span}(s_1(p))$
fibrato

$\nu C = L^\perp \oplus L$

Lo definiremo attraverso la metrica

νC è orientabile, L è orientato

$\Rightarrow L^\perp$ è orientato

Concludo per induzione.

Abbiamo dimostrato che:

PROPOSIZIONE: Un fibrato vettoriale su S^1 è bundle \Leftrightarrow è orientabile.

In dim 2,3 la somma connessa non dipende dal diffeomorfismo
(basta che inverta le orientazioni)
le sfere che vogliamo usare! Abbiamo visto adesso che anche
l'operazione inversa è semplice e non dipende da niente,
perché l'interno tubolare della sfera nella somma connessa è
bundle.

[M^3 orientate, compatte, anche con bordo]

Def M^3 è irriducibile se ogni sfera $S \subseteq M$ bounds una palla B^3

M^3 è prima se per qualsiasi decomposizione $M = M_1 \# M_2 \exists i: M_i \cong S^3$

PROPOSIZIONE: $M^3 \neq S^2 \times S^1$

Allora M primo $\Leftrightarrow M$ irriducibile

DIM: \Leftarrow (Valg anche per $S^2 \times S^1$)

Irriducibile. Se $M = M_1 \# M_2$

Il bordo di incollamento è sfera, quindi wlog $M_1 \setminus \text{int}(D)$

Ma allora M_1 è l'attaccamento di 2 palle, cioè S^3 (per Alexander)

\Rightarrow M primo. S sfera $\nwarrow M$ \nearrow separante \searrow non separante

Se è separante faccio l'op. inversa della somma connessa

$M = M_1 \# M_2 \xrightarrow{S^3} S$ bordo $M_1 \setminus \text{int}(D)$ che è palla per Alexander

Se è non separante $\exists \alpha \cap S = \{q\}$

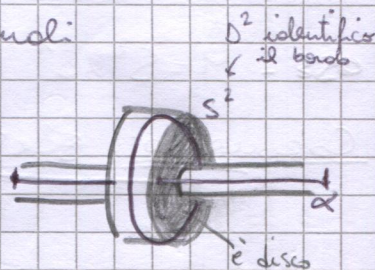
S e α hanno intorno tubolari bandi

$M' = \cup S \cup \cup \alpha$ sottovarietà di M .

$\partial M' = \text{Cyl} \cong S^2$

$\partial M'$ separa M' da $M \setminus M' = B^3$

$\Rightarrow M \cong S^2 \times S^1$



PROPOSIZIONE: $S^2 \times S^1$ è primo ma non irriducibile.

TEOREMA (Kneizer-Milnor)

Ogni M^3 cpt orientata (può avere bordo) si scrive in modo unico come somma di 3-Varietà prime $M = M_1 \# \dots \# M_m$.

Esempi: \mathbb{R}^3 , S^3 irriducibili. Cosa altro è irriducibile?

PROPOSIZIONE: Se $M^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ (o S^3) compatta con ∂M connesso Allora M è irriducibile.

DIM: $M \subseteq S^3$. Supponiamo $S \subseteq \text{Int}(M) \subseteq S^3 \Rightarrow S = \partial B = \partial B'$ sfera palla dentro S^3

∂M connesso

$\Rightarrow \partial M \subseteq B$ (wlog) $\Rightarrow B' \subseteq M$

Esempi: a) H_g corpo con manici di genere g : 1 0-manica (handle body) g 1-manica orientabili

$H_g = (D^2 \times S^1) \#_0 \dots \#_0 (D^2 \times S^1)$

b) K nodo $\subseteq S^3$. $M = S^3 \setminus \text{Int}(L(K))$

PROPOSIZIONE: $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ rivestimento di 3-varietà.

Se \tilde{M} irriducibile allora M irriducibile.

Dim: $S \subseteq M$ sfera

$\pi^{-1}(S) \subseteq \tilde{M}$ è unione di sfere (disgiunte) (S è sempl. connesso, si solleva su \tilde{M} tutti i sollevamenti danno $\pi^{-1}(S)$)

In \tilde{M}^* ogni sfera bnda un disco.

Trovo $S' \subseteq \tilde{M}$ tale che $S' = \partial B'$ palla che non contiene altre sfere di $\pi^{-1}(S)$

$\pi|_{B'}: B' \rightarrow \pi(B')$ è rivestimento (Esercizio)

$\pi|_{B'}: S' \rightarrow S$ ha grado 1 \Rightarrow è rivestimento di grado 1 \Rightarrow è diffeo

COROLLARIO: se $\tilde{M} = \mathbb{R}^3, S^3$ allora M è irriducibile.

OSS - $M = S^2 \times S^1$, $\tilde{M} = S^2 \times \mathbb{R}$ non è irriducibile

COROLLARIO: $S^1 \times S^1 \times S^1$ è irriducibile

TRIANGOLAZIONI

Def Un complesso simpliciale finito è un insieme finito V di elementi detti vertici e un insieme $F \subseteq \mathcal{P}(V)$ di sottoinsiemi detti facce tali che:

- $\forall v \in V \quad \{v\} \in F$
- $\forall \sigma \in F, \sigma' \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma' \in F$

$$X = (V, F)$$

X ha una realizzazione topologica $|X|$.

Def X è puro se le facce massimali hanno tutte la stessa dimensione (dim $\sigma = |\sigma| - 1$)

Def M^n varietà cpt (può avere bordo). Una triangolazione per M è un omeomorfismo fra M e $|X|$ ^{con X puro} tale che ogni faccia sia diffeomorfa (in M) ad un K -simplex in \mathbb{R}^n

TEOREMA: Ogni n -varietà compatta ha almeno una triangolazione.

3 - VAR. LEZIONE 10

TEOREMA: Ogni M^n varietà compatta ha una triangolazione
(eventualmente con bordo)

Def Sia M^3 varietà cpt. (eventualmente con bordo) e sia T una sua triangolazione

Una superficie $S \subseteq M$ è propria se $\partial S = \partial M \cap S$

(propriamente embedded). Si può sempre supporre $S \pitchfork \partial M$ (trasversalità)

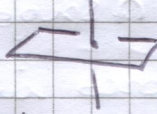
Def M^3 var. cpt. (eventualmente con bordo) e sia T una sua triangolazione

Una superficie $S \subseteq M$ propria è normale rispetto a T se

$\rightarrow S \pitchfork T$, cioè trasversa a tutte le facce.

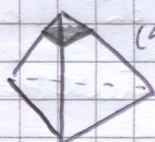
Quindi:

- $S \cap \text{vertici} = \emptyset$

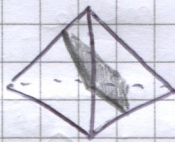
- $S \cap \text{spigoli} =$ 

- $S \cap \text{facce} = \text{curve}$

$\rightarrow S$ interseca ciascun tetraedro in triangoli o in quadrati



(4 diversi)



(3 diversi)

cioè ogni comp. connessa di $S \cap \Delta$ è un disco

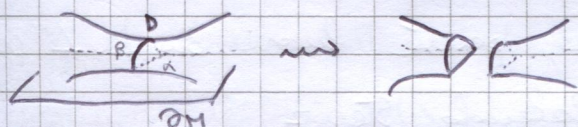
D tale che $\partial D \subseteq \partial \Delta$ interseca 3 o 4 spigoli distinti.

Def Mosse elementari: Data superficie $S \subseteq M$ propria

$S \rightsquigarrow S'$ del tipo:

• c) $\exists D \subseteq M$ t.c. $\partial D = \alpha \cup \beta$

$D \cap \partial M = \alpha$ $D \cap S = \beta$

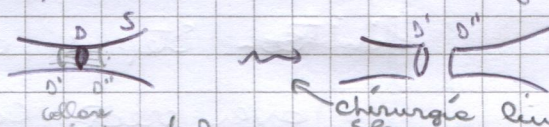


(È praticamente la stessa cosa di b),
ma vale nei casi sul bordo)

• a) Rimozione comp. connessa di S
contenuta in una palla

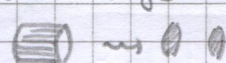
• b) $\exists D \subseteq \text{int}(M^3)$ t.c. $D \cap S = \partial D$

posso fare la chirurgia



allora
isotopoando D
ottengo altri 2 dischi
 D' e D''

chirurgia lungo
sfere



TEOREMA: Ogni $S \subseteq M$ propria, fissata triangolazione T , diventa una
superficie normale rispetto a T dopo isotopia e mosse elementari

DIM: $S \pitchfork T$ OK (si può fare per isotopia).

Resta da semplificare le intersezioni $S \cap \Delta$

$\forall \Delta \in T$ tetraedro.

$\partial\Delta \cong S^1$ quasi differ. ^{tranne sui vertici}

$\partial\Delta = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ curve semplici chiuse

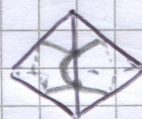
Le curve bordano dischi (sono praticamente S^1 in S^2)

Partendo dalla γ_i più "interna" tra tutte (che possono essere annidate) faccio le mosse (b) ^(c) per tutte.

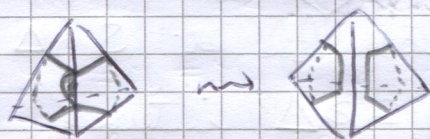
Alla fine ottengo un pezzo interno contenuto in Δ , che butto via grazie ad (a)

Se $\gamma_i \subseteq$ faccia, o la sposto per isotopia mettendola dentro Δ (e poi uso (a)), oppure la faccia è bordo di M e quindi posso già usare (a) grazie a Δ .

Se γ_i \cap spigolo in 2 punti esiste arco interno a Δ contenuto



in S . Eventualmente facendo altre volte (b) internando e Δ sono nelle ipotesi di (b) o (c) e posso far cadere il numero di intersezioni con gli spigoli



L'induzione per bene è fatta così:

Contemporaneamente su tutti Δ faccio

lo Step 1. Poi, scelgo un Δ , faccio Step 2

e poi rifaccio Step 1 ovunque. Proseguo così

facendo Step 2 un tetraedro alla volta e ottenendo

con Step 1 ovunque perché fuori da un Δ posso aver creato casini facendo Step 2.

Il numero di intersezioni con gli spigoli cala sempre.

Esercizio: M^3 cpt. connessa ^{spazio}, $S \subseteq \text{int } M$ cpt. orientabile senza ∂ non separante $\Rightarrow S$ ha al più b_1 ^{1° n° Betti} comp. con.

Esercizio: M^3 cpt. con., $S \subseteq \text{int } M$ cpt. senza ∂ con ogni comp. con. non orientabile $\Rightarrow S$ è non separante

Esercizio: M^n orientabile $N^{n-1} \subseteq M^n$ conn. cpt. senza ∂

$\& N$ è non banded allora $N \setminus N$ è connesso

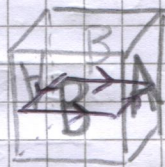
[N orientabile $\Leftrightarrow N$ banded]

PROPOSIZIONE: M^n var. $\exists!$ fibrato in rette orientabile su M

Esercizio: K Klein. $\Rightarrow \exists!$ M^3 orientabile che è fibrato in rette su K . ($M^3 = K \tilde{\times} \mathbb{R}$)

LEMMA: M^3 cpt. orientabile. Triangolazione.

$S \subseteq M$ superficie normale (p.t.).



• orient. dietro per trasl.
• dx. sx. ribaltando

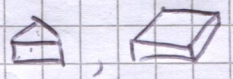
Se S ha più di $10t + b_1$ componenti, dove $t = \#$ Tetraedri $b_1 = 1^o$ m. Betti in una qualche condizione allora S contiene almeno 2 componenti parallele.

Def 2 componenti S_0, S_1 di S sono parallele se sono il bordo di una sottovarietà $N \subseteq M$, $N \cong S_0 \times [0, 1]$, il cui interno non interseca S .

\rightarrow DIM: $S \cap \Delta$



pezzi del tipo



Δ , non è strada data dai quadretti

Al più $10t$ poligoni in M toccano non-prismi

\Rightarrow al più $10t$ comp. con. di S toccano componenti

di $M \setminus S$ che non sono fibrati in rette (potrebbero anche esserlo, ma non si vede facile...)

Ci sono $> 10t + b_1$ comp. con.

$\Rightarrow > b_1$ che toccano solo fibrati in rette

\Rightarrow c'è un fibrato banded in $M \setminus S$.

Def M^3 cpt. orientabile che non contiene sfere non-separanti

$S \subseteq M$ è un sistema di sfere se S è unione di sfere e nessuna

componente di $M \setminus S$ è una palla bucata ($= B^3 \setminus \text{punti}$)

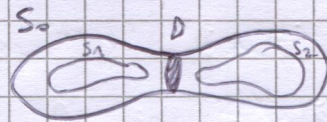
COROLLARIO Fissato M , $\exists K > 0$ t.c. ogni sistema di sfere in M ha $< K$ componenti connessi.

[probabilmente off-by-one] DIM: Pseudo T triangolazione, $K = 10t + b_1$. Se S è normale ok

Se $S \rightsquigarrow S'$ mossa elementare, voglio dire che S' è ancora sist. di sfere.

Non posso ever applicato (a) perché (per Alexander) avrei una parte di $M \setminus S$ era palla bucata.

Se ho applicato (b)



$$S_0 \rightsquigarrow S_1 \cup S_2$$

Esercizio: Sostituendo S_0 con S_1 e S_2 ottengo sempre un sistema di sfere.

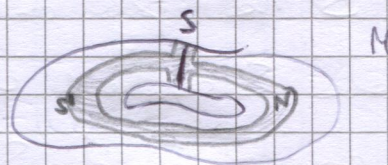
TEOREMA (KNEJER-MILNOR): M^3 cpt orientabile. $\exists!$ decomposizione
 $M^3 = M_1 \# \dots \# M_k$ con M_i 3-ver. prima V_i .

DIM: Se $M \ni S$ non separante

allora $S \subseteq N \subseteq M$ con $N = (S^2 \times S^1) \setminus B^3$

$$\Rightarrow M = (S^2 \times S^1) \# M'$$

$$b_1(M) = 1 + b_1(M')$$



Dopo un numero finito di passaggi ho

$$M = (S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1) \# M'$$

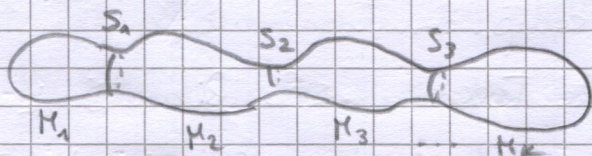
con M' che non contiene sfere non-separanti

Se M' prima ok. Altrimenti:

$$M' = M_1 \# M_2 \text{ e continuo lavorando sui fattori.}$$

Perché si ferma il procedimento?

La scrittura in $\#$ mi dà un sistema di sfere



$$M = M_1 \# \dots \# M_k$$

S_1, S_2, \dots è sist. di sfere

Per il lemma di prima la decomposizione è finita.