

3-VAR. LEZIONE 11

Oss. $\forall m \in \mathbb{Z}^2 \exists!$ c.s.c. e meno di isotopia (per Jordan bnda un disco, e i dischi sono tutti isotopi)

CURVE SEMPLICI CHIUSE NEL TORO

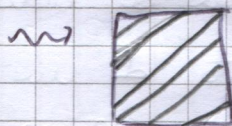
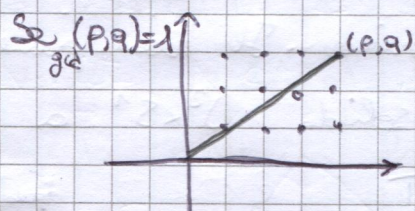
$$T = S^1 \times S^1$$

$$\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = H_1(T; \mathbb{Z})$$

PROPOSIZIONE: Una classe $(0,0) \neq (p,q) \in \pi_1(T)$ è rappresentata da una c.s.c. $\Leftrightarrow \gcd(p,q)=1$. Inoltre la curva è unica e meno di isotopia.

La classe $(0,0)$ è rappresentata da c.s.c. ed è sempre isotopa al bordo di un disco.

DIM: Esistenza. Guardo nel rivestimento universale

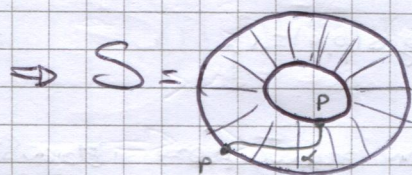


Rappresenta (p,q) perché gira p volte in una direzione e q nell'altra.

Se $\gcd(p,q)=m > 1$ Supponiamo $\exists \gamma$ tale che $[\gamma] = (p,q)$

Taglio T lungo γ e ottengo S con ∂S due componenti

$$\chi(S) = \chi(T) = 0 \Rightarrow S = \bigcirc$$



$\exists \alpha$ csc tale che $\alpha \pitchfork \gamma = \{p\}$

No perché γ non bnda un disco (sarebbe bnda)

$$(p,q) = m(p',q') \quad \text{rappresentata da } \beta$$

$$[\alpha], [\gamma] \in H_{\text{DR}}^1(T; \mathbb{R})$$

$$i(\alpha, \gamma) = \pm 1 \quad \text{dovrebbe stare in } \mathbb{Z}$$

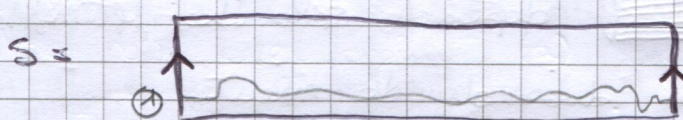
$$\text{Ma } [\gamma] = m[\beta], \text{ quindi } i(\alpha, \beta) = \pm \frac{1}{m} \in \mathbb{Z} \text{ Assurdo}$$

Se $(p,q) = (0,0)$, come sopra, tagliando lungo γ non posso avere

$S = \bigcirc$ altrimenti $\exists \alpha : i([\alpha], [\gamma]) \neq 0 \Rightarrow [\gamma] \neq 0$
quindi bnda un disco.

Unità: $[\gamma] = [\gamma'] = (p,q)$

Taglio il toro lungo γ e ottengo come sopra un anello.



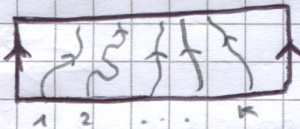
Metto $\gamma' \pitchfork \gamma$.

Se $\gamma' \cap \gamma = \emptyset$: taglio S lungo γ' : dato che non possono esserci dischi, ragionando come sopra con la caratteristica ottengo 2 anelli.



Le tolgo perché sono buoni, per Jordan diventano dischi...

Quindi resta



$$\Rightarrow i([\gamma], [\gamma']) = \pm K > 0$$

Assumo perché è una forma antisimmetrica, $[\gamma] = [\gamma']$ e quindi $i([\gamma], [\gamma']) = 0$

RIEMPIMENTO DI DEHN (DEHN FILLING)

Def M^3 con T componente di bordo torica. Il riempimento di Dehn è l'attaccamento di un toro solido $D^2 \times S^1$ a M^3 tramite $\varphi: S^1 \times S^1 = \partial(D^2 \times S^1) \rightarrow T$

Il risultato dipende da φ . φ non è unico a meno di isotopia.

Oss. Abbiamo visto

$$\left\{ \text{csc in } T = S^1 \times S^1 \right\} / \text{isotopia} \longleftrightarrow \{(p, q) \mid \gcd(p, q) = 1\}$$

(p, q) e $(-p, q)$ sono la stessa curva con orientazione opposte.

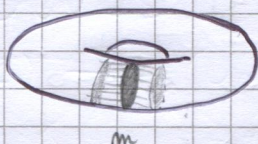
Se non mi interessa l'orientazione ho corrisp. biunivoca

$$\left\{ \text{c.s.c. non orientate in } T = S^1 \times S^1 \right\} / \text{isotopia} \longleftrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \quad \leftarrow \frac{1}{0} \text{ è ammesso}$$


\downarrow
 $\frac{p}{q}$

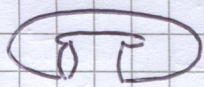
Proposizione: Il risultato N di un riempimento di Dehn dipende solo dalla classe di isotopia delle c.s.c. non orientate $\varphi(m)$ dove m è un meridiano di $D^2 \times S^1$ (cioè $m = \partial D^2 \times \{pt\}$).

Dim



Vediamo l'incollamento come l'attaccamento di un 2-manico e un 3-manico

Il 2-manico  dipende solo da $\varphi(m)$, il 3-manico

 non dipende da niente.

Oss. La corrispondenza biunivoca trovata per il toro dipende fortemente dall'identificazione $(T = S^1 \times S^1)$, cioè dalla base scelta per $\pi_1(T)$.

Questo perché:

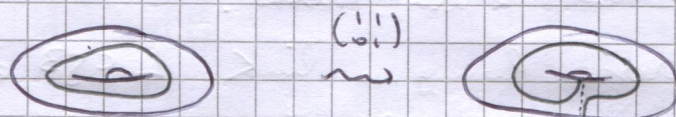
Proposizione: $MCG(T) \cong GL(2, \mathbb{Z})$

Dim: $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ agisce linearmente su \mathbb{R}^2 $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto Ax$

e passa ad un diffeomorfismo di $T = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

(esercizio)

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si dice twist di Dehn



SPAZI LENTICOLARI

Def $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$. Lo spazio lenticolare $L(p, q)$ è la 3-varietà ottenuta facendo riempimento di Dehn di $M = D^2 \times S^1$ con $T = S^1 \times S^1$ usando la curva $p m + q l$ (o forse $p l + q m$)

meridiani $m = \partial D^2 \times \{q\}$

longitudine $l = \{p\} \times S^1$

come base di $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($m = (1, 0)$, $l = (0, 1)$)

Oss. $L(p, q)$ è compatto senza bordo.

Esercizio: $\pi_1(N, p) \cong \pi_1(M, p) / N(\varphi(m))$

dove $N(S) = \bigcap \{ H \triangleleft G, \}$
 $S \subseteq G$
 gruppo

Corollario: $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$

Oss. $D^2 \times S^1$ ha automorfismi. ($D^2 \subseteq \mathbb{C}$) Ad esempio

$$(z, e^{i\theta}) \mapsto (ze^{i\theta}, e^{i\theta})$$

$$\text{Oppure } (z, e^{i\theta}) \mapsto (\pm z, e^{\pm i\theta})$$

← è in pratica l'estensione di un twist di Dehn (forse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Corollario: Se $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod{p}$ allora $L(p, q) \cong_{\text{diffeo}} L(p, q')$

TEOREMA: $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod{p}$ se e solo se $L(p, q) \cong_{\text{diffeo}} L(p, q')$

Esempio: $L(5, 1)$ e $L(5, 2)$ hanno stesso gruppo di omotopia ma non sono diffeomorfi

TEOREMA: $L(p, q)$ e $L(p, q')$ sono omotopicamente equivalenti se e solo se $\pm q q'$ è un quadrato in $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$

OSS Differ = omeo \Rightarrow anatomico. equiv. \Rightarrow stesso π_1

\Leftarrow

\Leftarrow

$L(7,1)$ e $L(7,2)$

$L(5,1)$ e $L(5,2)$

OSS. Gli spaz. antichori sono praticamente ~~gli~~ le uniche 3-varietà "storte", quasi tutte le altre si distinguono già al livello del π_1 .

CHIRURGIA LUNGO UN LINK IN S^3 (DEHN SURGERY)

~~Def~~ $L \subseteq S^3$ è un link se è una 1-sottovarietà cpt senza bordo
se L è connesso è un nodo.

~~Def~~ Una chirurgia lungo un link $L \subseteq S^3$ è l'operazione che consiste in:
1) $M = S^3 \setminus \nu L$, $\partial M = T_1 \cup \dots \cup T_k$, M cpt.
2) N = riempimento di Dehn di M

TEOREMA (LICKORISH-WALLACE):

Ogni 3-varietà cpt orientabile senza bordo è ottenuta ~~da~~ una chirurgia lungo un link.

Come "codificare" il passo 2 della chirurgia?

C'è un modo canonico di identificare νL (wlog L nodo) con un toro: m è determinato (prendo una fibra e ottengo un disco...), l non è a priori determinato in modo "unico".

PROPOSIZIONE: $L \subseteq S^3$. $H_1(S^3 \setminus L; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^K$ con K il numero di comp. di L ed è generata dai meridiani.

Dim: $\nu L \cong N_1 \cup \dots \cup N_k$ tori solidi $T_i = \partial N_i$

Usa Mayer-Vietoris con $U = \nu L$ $V = S^3 \setminus \nu' L$

$V \cong S^3 \setminus L$ $U \cong L$

$U \cup V \cong T_1 \cup \dots \cup T_k$

$U \cup V = S^3$ $\langle m_i, l_i \rangle \rightarrow \langle l_i \rangle$

$H_2(S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(U \cup V; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(U; \mathbb{Z}) \oplus H_1(V; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^3; \mathbb{Z})$

COROLLARIO: $K \subseteq S^3$ nodo. $T = \partial \nu K$, $i: T \hookrightarrow S^3 \setminus K$. $i_*: H_1(T; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^3 \setminus K; \mathbb{Z})$
La longitudine canonica è il generatore di $\text{Ker } i_*$.

3-VAR. LEZIONE 12

oss. $M^3 \supseteq \gamma$ c.s.c. orientata. $\gamma = \partial S$ con S cpt. orientata $\subseteq M$

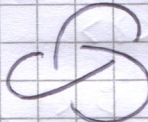
$$\Rightarrow [\gamma] = [0] \in H_1(M)$$

Fatto: la longitudine (quella canonica, ^{non orientabile}) è sempre bordo di una superficie orientata $S \subseteq S^3 \setminus K$.

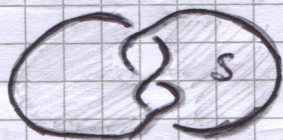
Allargando S con un collar (la longitudine è isotopa a K) ottengo S' superficie orientata con $\partial S' = K$.

Def Dato $K \subseteq S^3$ nodo, una sup. orientata $S \subseteq S^3$ cpt. tale che $\partial S = K$ è detta superficie di Seifert.

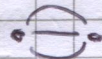
TEOREMA: \exists sempre una sup. di Seifert e induce la longitudine canonica.

Esempio: Nodo Trilogio: 

Lo disegno



Una volta detto che è orientabile, sai che ha 1 componente di bordo e ha $\chi = -1$, perché si ritrae sul grafico



Come si orientano m e l ?

orientazione di $S^3 \rightsquigarrow$ orientazione di $\nu K \rightsquigarrow$ orientazione di $T = \partial \nu K$

Allo fine quindi si possono avere solo $\langle m, l \rangle$ e $\langle -m, -l \rangle$, che non influisce sul " P/q " con m prima di l

(Già $pm + ql$ e $-pm - ql$ vuol dire invertire l'orientazione delle curve)

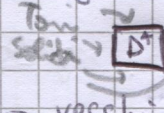
TEOREMA: Ogni 3-Varietà è il risultato di una chirurgia intera (P/q interi) su un qualche $L \subseteq S^3$ link.

COROLLARIO: Ogni 3-Varietà cpt. con. orientabile senza bordo è bordo di una 4-Varietà cpt. semplicemente connessa.

Dim: H^3 ottenuto con chirurgia intera su $L \subseteq S^3$

Vedo $S^3 = \partial D^4$, con D^4 che in pratica è o-monica

Su un modo ottico 2 monico $D^2 \times D^2$ il cui bordo è toro solido.

Attaccando 2-manici tolgo un bordo del tipo $\partial D^2 \times D^2$
 e ci metto $D^2 \times \partial D^2$.  Il nuovo meridiano che interseca
 interseca in un punto il meridiano vecchio, quindi è una longitudine, cioè
 l'effetto al bordo è una chirurgia intesa $\gamma = pm + l$

$$M = \partial W^4 \quad W^4 = D^4 \cup \{2\text{-manici}\} \text{ è sempl. connessa}$$

Oss. \mathbb{CP}^2 non è bordo di una 5-varietà. (ha χ dispari.)

Proposizione: $K \subseteq S^3$ nodo. Una P/q -chirurgia produce M cpt. senza
 bordo tale che $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

($P/q = \infty = 1/0$ non produce cambiamenti (vieni S^3)).

Dim: $H_1(S^3 \setminus \nu K) \cong \mathbb{Z}$ generato da m . $\gamma = pm + ql$

$$\pi_1(M) = \pi_1(S^3 \setminus \nu K) / \langle \gamma \rangle$$

Quindi $H_1(M) = H_1(S^3 \setminus \nu K) / \langle \gamma \rangle = \mathbb{Z} / \langle pm + ql \rangle = \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$

Corollario: Se $P=1$ otteniamo $H_1(M) = 0$

Def Una n -sfera di omologia (intera) è una M t.c. $H_*(M) = H_*(S^n)$

Corollario: M^3 cpt. con. orientabile senza bordo $\Leftrightarrow H_1(M; \mathbb{Z}) = \{e\}$

Dim: Infatti $H_2(M; \mathbb{Z}) = H^1(M; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$

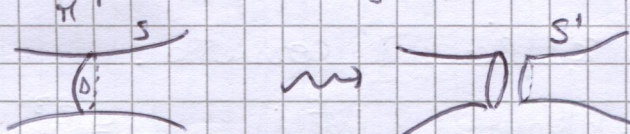
Sia M^3 irriducibile cpt orientabile connessa

Def $S \subseteq M$ superficie propria (propriamente embedded, cioè $\partial S = \partial M \cap S$) cpt.
 connessa orientabile. Un disco di compressione per S è un
 disco $D^2 \subseteq \text{Int}(M)$ tale che:

1) $D \cap S = \partial D = \gamma$

2) γ non è bordo di un disco $D' \subseteq S$

Def Una compressione lungo D è l'operazione $S \rightsquigarrow S'$



S' ha 1 o 2 componenti
 connesse S'_i $i=1,2$.

Proposizione: $\chi(S'_i) > \chi(S) \quad \forall i$

Dim: Se ottengo 2 comp. connesse, nessuna delle 2 può essere
 una sfera (per l'ipotesi 2) della def.).

$$\Rightarrow \chi(S'_i) \leq 1$$

Vale che $\chi(S') = \chi(S) + 2$ sempre

$$\chi(S') = \chi(S'_1) + \chi(S'_2)$$

Si chiude somehow... ($\chi(S'_i) + 1 \geq \chi(S') = \chi(S) + 2$)

Se resta connessa è ovvio perché $\chi(S') = \chi(S'_1) = \chi(S) + 2$.

Def $S \subseteq M$ è compressibile se $\exists D$ disco di compressione per S .

Def $S \subseteq M$, $\chi(S) \leq 0$ è incompressibile se non è compressibile.

TEOREMA: $\chi(S) \leq 0$. Allora S incompressibile $\Leftrightarrow i_*: S \hookrightarrow M$ induce

$i_*: \pi_1(S) \hookrightarrow \pi_1(M)$ iniettiva.

Dim: \Rightarrow Se esiste disco D di compressione dico che i_* non è iniettiva.

Prendo $\gamma = \partial D$, $[\gamma] \in \pi_1(S)$.

Dimostriamo che:

PROPOSIZIONE: $\gamma \subseteq S$ c.s.c. è banale in $\pi_1(S)$ $\Leftrightarrow \gamma = \partial D'$ $D' \subseteq S$ disco.

(Lo abbiamo già dimostrato per il toro).

Quindi $[\gamma] \neq [0]$ dato che non sono dischi.

Ma $\gamma = \partial D$ con $D \subseteq M \Rightarrow [\gamma] = [0] \in \pi_1(M)$.

Quindi i_* non è iniettiva.

\Rightarrow Difficile.

COROLLARIO: Se $\pi_1(M)$ è finito (o in generale non contiene gruppi fondamentali di superfici) allora M non contiene superfici incompressibili.

COROLLARIO: Ogni superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ (o S^3) ($S \cong S_g$) ha sempre un disco di compressione.

(Si può dimostrare anche senza teorema sopra, imitando la dimostrazione di Alexander, mettendo S in posizione di Morse e tagliando)

PROPOSIZIONE: M^3 irriducibile. Sia $T \subseteq \text{int}(M)$ un toro. Vale una di queste:

1) T è incompressibile

2) T è bordo di un toro solido $N \subseteq M$, $T = \partial N$, $N \cong D^2 \times S^1$

3) $T \subseteq D^3 \subseteq M$.

COROLLARIO: Ogni $T \subseteq S^3$ bords un toro solido.

→ DIM: Se è incompressibile ok. Altrimenti



Comprimmo e otterremo $S^2 \subseteq M$

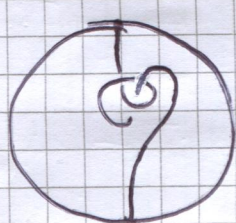
M è irriducibile $\Rightarrow S^2 = \partial D^3$
 $D^3 \subseteq M$.

Se $D^3 \cap T = \emptyset$ allora $T = \partial N$ con N toro solido

(sempre per i soliti motivi sugli attaccamenti di dischi e manifold)

Altrimenti si ha $D^3 \supseteq T$.

Esempio: 3) non implica 2).



D^3

tunnel scavato.

\mathbb{Z} bords è un toro ma non
ci sono tori solidi.

→ DIM: 1) non può accadere perché $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \neq \pi_1(S^3) = 0$

2) \Leftrightarrow 3) perché ogni $S^2 \subseteq S^3$ bords dischi da
entrambe le parti.

3-VAR. LEZIONE 13

PROPOSIZIONE: M irriducibile cpt (può avere bordo). $\exists K > 0$ t.c.

$\forall S \subseteq \text{int}(M)$ cpt. senza bordo, $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ con S_i irriducibili
allora $\exists i, j : S_i$ e S_j parallele

DIM: T triangolazione per M .

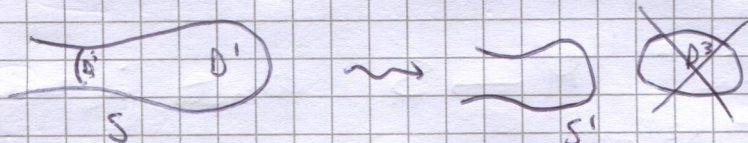
$S \rightsquigarrow S'$ normale rispetto a T
isotopia

- (1) Rimozione di comp. $\leq D^3$
 \rightarrow Non ce ne sono
(2) \circledast
(3) Non si applica qui

(2) $\circledast \exists D' \subseteq S$ con $\partial D = \partial D'$. D, D' cobordano un D^3 , quindi

la nuova S' (tralasciando il D^3) è isotopa a S

(?)



A questo punto si usa il teorema vecchio sulle componenti connesse ($\text{rot} + b_1$).

VARIETÀ DI SEIFERT

oss. $L(p, q) \cong_{\text{diff}} L(p, q') \iff q' \equiv \pm q' \pmod{p}$

• $p=0$: $L(0, 1) = D(D^3 \times S^1) = S^2 \times S^1$
 \uparrow
doppio

• $p=1$: $L(1, 0) = S^3$

• $p=2$: $L(2, 1) = \mathbb{RP}^3$

• $p=3$: $L(3, 1)$

Fibrati in cerchi su superfici

Fatto: M^n varietà $\Rightarrow \exists!$ \mathbb{R} -fibrato orientabile su M .

Se M è orientabile, è $M \times \mathbb{R}$. Se M è non orientabile non è $M \times \mathbb{R}$ e lo chiamo $M \tilde{\times} \mathbb{R}$.

In generale lo indico $M \tilde{\times} \mathbb{R}$.

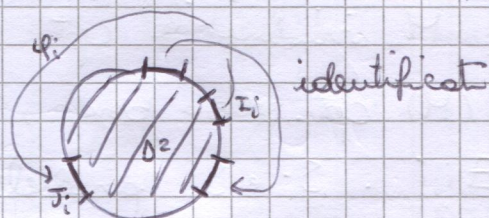
Def $M \tilde{\times} S^1 = D(M \tilde{\times} I)$ con $I = [-1, 1]$ è fibrato in cerchi.

Se M è orientabile, viene $M \times S^1$.

PROPOSIZIONE: Se S superficie cpt con bordo non vuoto, allora $\exists!$ fibrato in cerchi su S a meno di isomorfismo (quindi è $S \times S^1$)
orientabile

Dir: WLOG S connesso.

Veob S come



Esercizio: Posso ottenere così ogni $S_{g,b}$ e $S_{g,b}^{no}$.

In pratica sto reinterpretando gli 1-manici e dico che una m -varietà con bordo si decompone in manici non usando m -manici. [...]

TEOREMA: Qualsiasi fibrato con base contractile è bundle.

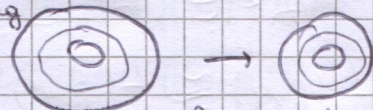
[...] Sia $M \rightarrow S$ fibrato in cerchi

$$M|_{J_i} = D^2 \times S^1$$

$\varphi_i: I_i \rightarrow J_i$ omeo.

$\Rightarrow M$ dipende solo dalle mappe $\Phi_i: I_i \times S^1 \rightarrow J_i \times S^1$

fiber-preserving



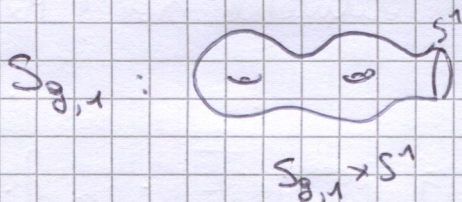
mappe circonferenziali in circonferenze

$\forall i$, dico che Φ_i, Φ'_i sono isotopi
sempre.

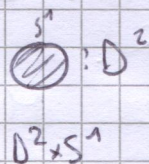
Già sappiamo che due diffe. f.g.

su S^1 orientati sono sempre isotopi. Allo stesso modo si dimostra per le Φ_i, Φ'_i (si passa al niv. univ., si fa comb. lin...).

Vogliamo adesso costruire fibrati in cerchi non bundi su S_g orientabili.



$S_{g,1} \times S^1$



$D^2 \times S^1$

Il bundle in entrambi è un $S^1 \times S^1$. Li incolliamo tramite

$\varphi: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ che mantenga le fibre $\xrightarrow{\varphi}$

Sia $A \in GL(2, \mathbb{Z})$. $A \in MCG(S^1 \times S^1)$

A manda la c.s.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le fibre sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi A preserva le fibre sb se

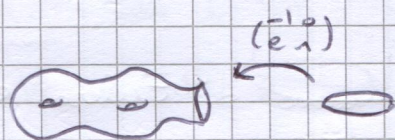
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ma } \det A = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi grazie al MCG si riesce a scegliere tutti φ per incollare i tori.

Se $S_{g,1}$ e D^2 hanno loro orientazione, in realtà $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix}$

Quindi



Otteniamo una fibrazione M su S_g orientabile che dipende da $e \in \mathbb{Z}$

Se $e=0$ otteniamo $M = S_g \times S^1$

Esercizio: $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} \times \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$

Quindi i diversi domini fibrati non isomorfi (e M non sono diffeomorfe)

$e :=$ numero di Eulero

OSS. Con $-e$ al posto di e si ottiene lo stesso M con orientazione opposta.

TEOREMA: Questi sono tutti e soli i fibrati ^(in cerchi) su S_g orientabili.

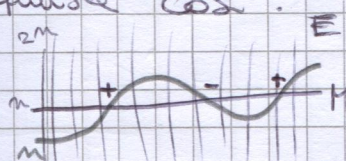
Costruzione analoga per fibrati di rango 2 su superfici:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \hookrightarrow W^4 & \text{fibrato vett. di rk 2} & S^1 \hookrightarrow M \rightarrow \textcircled{e} \\ \downarrow & \rightsquigarrow & \downarrow \\ S_g & & S_g \end{array}$$

Quindi a ogni fibrato vettoriale di rango 2 possiamo associare un numero di Eulero.

Def $E \rightarrow M^n$ fibrato vettoriale di rango n . Il numero di Eulero si

definisce così:



Vedo M^n come 0-sezione di E . Prendo una sezione trasversa s a M , che lo interseca in un numero (finito) di punti. Grazie alle orientazioni ogni punto ha un segno.

$$e := \sum_{p \in M \cap s} \text{sgn}(p)$$

LEMMA: e è ben definito (non dipende dalle sezioni)

Esercizio: Se $E = TM$ allora $e = \chi(M)$ (e meno di segni...)

• Se esiste sezione mai nulla (ad esempio se E bundle) $\Rightarrow e=0$.

OSS.

Fibrato vettoriale di rango n

TM

\rightsquigarrow
pseudo solo
 $|V|=1$
Riemann.

Fibrato in g^{n-1}

UM

"unitario"

OSS. $TS_g \rightarrow US_g$ è 3-varietà che fibra S_g con $e = 2 - 2g = \chi(S_g)$

Esempio: US^2 ha $e=2$.

Esempio: Il fibrato su S^2 con numero di Euler e è $L(e,1)$

Quindi $US^2 \underset{\text{diffe}}{\cong} L(2,1) \underset{\text{diffe}}{\cong} \mathbb{RP}^3$

Esempio: Fibrato di Hopf;

$$S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \cong S^2$$

$$(w,z) \mapsto [w,z]$$

$$(S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \quad S^3 = \{(w,z) \mid |w|^2 + |z|^2 = 1\})$$

Le fibre sono S^1 . Il suo numero di Euler è $e=1$.

$\forall e \in \mathbb{Z} \exists$ fibroto $M^3 \rightarrow S_g$ con numero di Eulero e ($\forall g \geq 0$)

TEOREMA: P omogeneo ^{complessi} di grado d in $m+1$ variabili

$$V \subseteq \mathbb{CP}^m \quad V = \{x \mid P(x) = 0\}$$

compatta, connessa, orientabile

1) Se i coefficienti sono generici, V è sottovarietà liscia di \mathbb{CP}^m e la strutt. liscia dipende solo da m e da d . $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m - 2$

2) $m=2 \Rightarrow V$ ha dim 2, $V = S_g$ con $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

$$\begin{array}{lll} d=1 & g=0 & \mathbb{CP}^1 \\ d=2 & g=0 & \\ d=3 & g=1 & \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

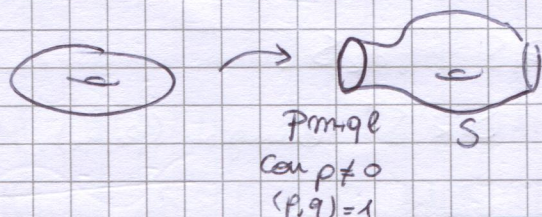
VARIETÀ DI SEIFERT

IDEA: Ammettere "fibre singolari"

Def Una varietà di Seifert è una qualsiasi 3-varietà ottenuta da $S^1 \times S^1$ con S superficie: $\partial S \neq \emptyset$ tramite riempimento di Dehn lungo c.s.c. diverse dalle fibre, cioè incollando $D^2 \times S^1$ ad alcune componenti di bordo di $S^1 \times S^1$ mandando $\partial D^2 \times \{p\}$ su una c.s.c. che non sia isotopa a una fibra.

OSS. La motivazione sta nell'esercizio 3.4: tramite quel riempimento non viene irriducibile.

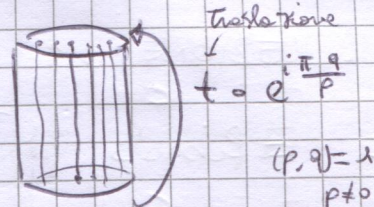
Nel caso S orientata, su ogni componente di bordo $(\partial S \times S^1)$ scelgo base $m = \partial S \times \{q\}$ $l = \{p\} \times S^1$ di $H_1(\partial S \times S^1)$



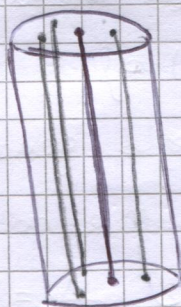
Def Alternativa: Una fibrazione di Seifert su M^3 cpt (può avere bordo fatto di tori) è una partizione di M^3 in circonferenze (sottovarietà compatte sifite a S^1) tale che ogni circonferenza abbia intorno tubolare

così:

$D^2 \times S^1$ con fibroto prodotto



Esempio: se $p=3, q=1$



Gira 3 volte la fibra

La fibra centrale è "straeva": è l'unica che non gira 3 volte (Le due singole)

Def Una circonferenza è singolare se $p > 1$

oss. Sono isolate, quindi in numero finito

oss. $M \rightarrow B = \{ \text{insieme delle fibre} \}$
con topologia quoziente

TEOREMA: M^3 cpt (può avere bordo fatto di tori) orientabile connesso.

M di Seifert $\Leftrightarrow M$ ammette fibrazione di Seifert.

DIM: $\Rightarrow M$ ha fibrazione di Seifert.

Rimuovo interi tubolari fibroati ^{apert} disgiunti delle fibre singolari e rimango in N che non ha fibre singolari (se non ci sono fibre singolari ma taglio una e così). Quindi N è fibrazione normale

$\Rightarrow N = S(\hat{x})S^1$, da cui M è riempimento di

Dehn di N (resterebbe da dimostrare che gli incollamenti hanno $p \neq 0$...)

\Rightarrow Non lo facciamo.

NOTAZIONI: S con comp. di bordo $\partial_1 S, \dots, \partial_k S$.

Riempimento di Dehn di $S(\hat{x})S^1$ lungo $(p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h)$

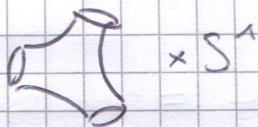
$M = (\hat{S}, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$

$0 \leq h \leq k$
 $p_i \neq 0$

dove $\hat{S} = S$ con le prime h componenti di bordo tappate con dischi.

La fibrazione sarà $M \rightarrow \hat{S}$

Esempio: $S = S_{0,b}$



Tappo tutti i buchi

$$M = (S^2, (p_1, q_1), \dots, (p_b, q_b))$$

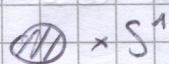
$\hat{S}_{0,b}$

La fibrazione di Seifert è
 $M \rightarrow S^2$

(Esempio:)

Esercizio: Se $b \leq 2$, M è lenticolare.

• $b=1$:



$\times S^1$ Attacco a toro solido \Rightarrow lenticolare

• $b=2$:



$\times S^1$ Attacco 2 tori solidi (uno dentro e uno fuori) \Rightarrow lenticolare

$$S^1 \times S^1 \times I = T \times [-1, 1]$$

Attaccando un toro solido da una parte e uno dall'altra è come attaccare i 2 tori solidi tra loro

Esercizio: Il fibrato su S_g con numero di Eulero e può essere scritto $M = (S_g, (1, e))$

3-VARIETÀ CHE FIBRANO SU S^1

Studiamo le M^3 cpt senza bordo che ammettono fibrazione $M \rightarrow S^1$ con fibra S_g per qualche $g \geq 0$.

Si costruiscono tutte così: si fissa $\varphi: S_g \rightarrow S_g$ diffeomorfismo e

costruiamo $M = S_g \times [-1, 1] / \sim$ dove $(x, -1) \sim (\varphi(x), 1)$

M dipende solo dalla classe di isotopia $[\varphi] \in \text{MCG}(S_g)$

Lo spazio delle fibre è ovviamente S^1 .

Def I semifibrati sono fibrazioni su $[-1, 1]$ costruite così:

Se S non orientabile $\xrightarrow{\text{connesso}} S \times [-1, 1]$

S^1 non orientabile $\xrightarrow{\text{connesso}} S^1 \times [-1, 1]$

$\tilde{\varphi}: \partial(S \times [-1, 1]) \rightarrow \partial(S^1 \times [-1, 1])$ diffeomorfismo

Attacco $S \times [-1, 1] \sqcup S^1 \times [-1, 1]$

dove attacco i bordi tramite $\tilde{\varphi}$.

DECOMPOSIZIONE LUNGO TORI

M^3 cpt orientabile connesso irriducibile senza bordo o con bordo fatto di tori

Def Una decomposizione di M lungo tori è una collezione $T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k \subseteq \text{int}(M)$

tori disgiunti incompressibili che decompongono M in pezzi del tipo:

a) di Seifert

b) pezzi semplici := non contengono tori incompressibili tranne quelli paralleli al bordo

• Eppure $M = (\text{semi-})$ fibrato con fibre torica (o Klein)
[poche varietà che si gestiscono benissimo]

M non si decompone
se è di questo tipo

TEOREMA: Esiste unica decomposizione in tori minimi
(a meno di isotopia).

Tale decomposizione si chiama decomposizione JSJ o geometrica

OSS. La decomposizione JSJ è vuota $\iff M$ è di Seifert, è semplice
o se M è (semi) fibrato.

→ DIM: Esistenza di una decomposizione.

Pseudotorni $T_1, L, \dots, L, T_k \subseteq \text{int}(M)$ incompressibili e a 2a
non paralleli massimali rispetto a tale proprietà.

Questa è decomposizione in tori che taglia M in pezzi
tutti semplici

Unicità: Idea.

I pezzi di Seifert tengono conto della non unicità
di decomposizione in pezzi semplici.

TEOREMA [Thurston '80, Perelman '00]

Dato M^3 cpt senza bordo o fatto di tori, connesso irriducibili.

I blocchi ottenuti tagliando M lungo i tori della JSJ sono tutti geometrici.

Def N^3 cpt connesso $\partial N = \emptyset$ o di tori. N è geometrica se $\text{int}(N)$ ammette una
metrica riemanniana completa di volume finito localmente omogenea,

cioè $\forall p, q \in \text{int}(N) \quad \exists U(p) \cong U(q)$ isometrici intorno di p e q .

In particolare, N è localmente isometrica a uno dei seguenti 8 modelli:

$H^3, \mathbb{R}^3, S^3, H^2 \times \mathbb{R}, S^2 \times \mathbb{R}, Nil, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}), Sol$.

3-VAR. LEZIONE 15

Vogliamo adesso assegnare metriche riemanniane loc. omogenee complete di volume finito con bordo vuoto o fatto di tori.

S^m spazio ellittico / sphere

R^m spazio piatto / Euclideo

Considera $R^{m,1} := R^{m+1}, \langle, \rangle$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i - x_{m+1} y_{m+1} \quad (m, 1)$$

$$I^m = \{x \in R^{m,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_{m+1} > 0\}$$

PROPOSIZIONE 1

$$\forall x \in I^m, T_x I^m = x^\perp$$

\uparrow
 tempo spazio

Quindi $\langle, \rangle|_{T_x I^m} \text{ è } (m, 0)$

PROPOSIZIONE 2

$$Isom(I^m) = O^+(m, 1) = \{A \in GL(m+1, R) \mid \begin{matrix} A^t J A = J \\ A_{m+1, m+1} > 0 \end{matrix}\}$$

$J = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$Isom(S^m) = O(m+1)$$

$$Isom(R^m) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(m)\}$$

Tutti e 3 i gruppi agiscono transitivamente sui frame

SOTTOSPAZIO

Def Un k -sottospazio di I^m è un sottoinsieme del tipo $W \cap I^m$ dove W è sottospazio vettoriale ~~non vuoto~~ di dim $k+1$, perché $W \cap I^m \neq \emptyset$.

Def Un k -sottospazio di S^m è sottoinsieme del tipo $W \cap S^m$ dove W è sottosp. vett. di dim $k+1$

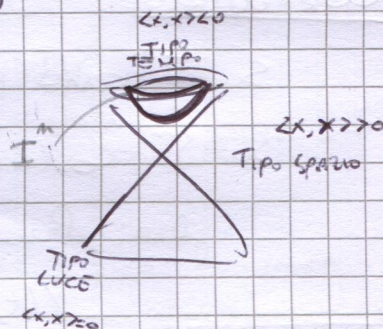
Def Un k -sottosp. ~~di~~ di R^m è un sottosp. affine di dim $k+1$

PROPOSIZIONE Se $W^{k+1} \subseteq R^{m,1}$ sottosp. vett. TFAE:

1) $W \cap I^m \neq \emptyset$

2) $\langle, \rangle|_W$ è $(k, 1)$

3) $\exists W \ni v$ tale che $\langle v, v \rangle < 0$



PROPOSIZIONE: le geodetiche in I^m, S^m, R^m sono precisamente le ^{intersezione con piano passante per l'origine} rette percorse a velocità costante.

Se $p \in I^m, S^m, R^m$ e $v \in T_p$ e $\|v\|=1$, allora la geodetica γ uscente da p con velocità v è:

(I^m) a) $\gamma(t) = p \cosh t + v \sinh t$

(S^m) b) $\gamma(t) = p \cos t + v \sin t$

(R^m) c) $\gamma(t) = p + tv$

COROLLARIO:

Su I^m $\cosh(d(p,q)) = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in I^m$

Su S^m $\cos(d(p,q)) = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in S^m$

Dim: Prende l'unica retta per p, q (p, q indep $\Rightarrow \exists$ piano $= R^{m-1}$ per quei punti)

$$\gamma(t_0) = \cosh t_0 \cdot p + \sinh t_0 \cdot v = q$$

$$t_0 = d(p, q)$$

$$\langle p, q \rangle = \langle p, \cosh t_0 \cdot p + \sinh t_0 \cdot v \rangle = \cosh t_0 \cdot \langle p, p \rangle = \cosh t_0$$

Def $S \subseteq I^m$ sottospazio. Una riflessione lungo S è una p tale che

$$p: R^{m,1} \rightarrow R^{m,1} \quad \text{dove } S = W^{\perp} \cap I^m.$$

" " " "

$W \oplus W^{\perp} \quad W \oplus W^{\perp}$

$$(u, v) \mapsto (u, -v)$$

Esercizio: $\forall S \subseteq I^m$ sottospazio, $p \in I^m \setminus S \quad \exists!$ la retta passante per p tale che $\perp S$ (cioè il vett. tang. alla retta nell'intersezione con S è ortogonale al tangente a S).

MODELLI CONFORMI DI H^m

Def Disco di Poincaré: $D^m = \{x \in R^m \mid |x| < 1\} \subseteq R^{m,1}$

$\varphi: I^m \rightarrow D^m$ diffeom. come in figura (proiez. stereografica da $(0, 0, \dots, 0, 1)$)

Con il tensore metrico trasportato da φ , cioè

$$g_{\varphi(m)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)) = \langle v, w \rangle.$$

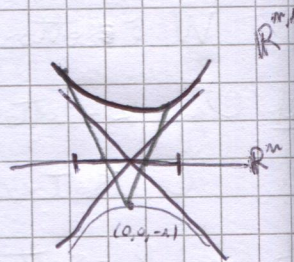
PROPOSIZIONE: il tensore metrico che otteniamo in D^m è $\forall x \in D^m$

$$g_x = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g^E$$

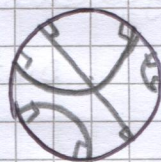
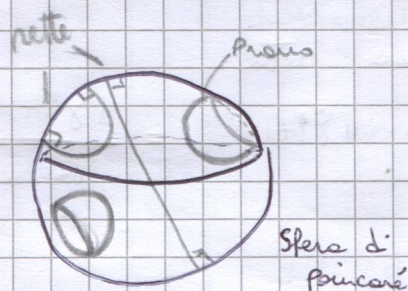
\leftarrow euclideo

(è una metrica conforme)

cioè differisce da g^E solo moltiplicativamente per una costante

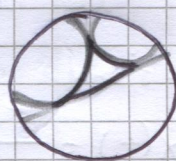


Proposizione: I sottospazi di D^m sono esattamente K -sfere e K -piani ortogonali al bordo di D^m intersecati con D^m



2-disco di Poincaré

Esercizio: $\forall \alpha, \beta, \gamma$ t.c. $\alpha + \beta + \gamma < \pi \Rightarrow$ triangolo in H^2 con angoli interni α, β, γ (a meno di isometrie).



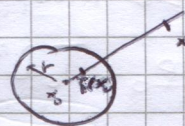
Altro modello conforme di H^m :

Def: Il semispazio $H^m = \{x \in \mathbb{R}^m, x_m > 0\}$ con tensore metrico dato nel modo seguente: [...]

Def $x_0 \in \mathbb{R}^m, r > 0$. L'inversione lungo la sfera (x_0, r) è la mappa

$$i: \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\}$$

$$x \mapsto x_0 + r^2 \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2}$$



$$r^2 = \|x - x_0\| \cdot \|i(x) - x_0\|$$

Volendo si estende a S^m mandando

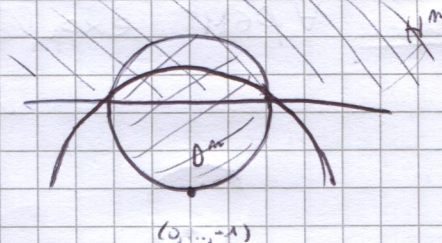
$$x_0 \mapsto \infty$$

$$\infty \mapsto x_0$$

e passante

[...]

facendo l'inversione lungo la sfera di centro $(0, 0, \dots, 0, -1)$ da $\partial D^m \cap \{x_m = 0\}$.



Proposizione: i è diffeomorfismo $S^m \rightarrow S^m$.

i è anti-conforme, cioè

$$di_x = \lambda_x A_x \quad \text{con } A_x \in O(m) \setminus SO(m), \lambda_x > 0$$

i manda $\{K\text{-sottospazi e } K\text{-sfere}\}$ in sé

Proposizione: Il tensore metrico ottenuto da H^m è

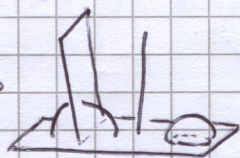
$$g_x = \frac{1}{x_m^2} g^E$$

(x_m è l' m -esima coordinata di x).

Anche H^m è conforme.

Corollario: I sottospazi del modello H^m sono sempre sottospazi euclidei o sfere euclidee ortogonali al bordo.

DIM: Le inversioni mandano piani e sfere in piani e sfere. L'ortogonalità al bordo viene mantenuta perché è mappa conforme.



Proposizione: La curva $\gamma(t) = (x_1, \dots, x_m, e^t) \in H^m$ è una geodetica di norma unitaria.

DIM: Sicuramente è una retta.

Devo per vedere $\|\gamma'(t)\|_{Hyp} = \frac{\|\gamma'(t)\|_{Euc}}{\gamma(t)_m} = 1$.

$$\gamma'(t) = (0, \dots, 0, e^t)$$

$$\gamma(t)_m = e^t$$

Proposizione: Sia $x \in S^{m-1}$. La geodetica di D^m passante da $0 \in D^m$ in direzione x , di norma 1, è

$$\gamma(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} x = \left(\tanh \frac{t}{2} \right) x$$

DIM: Traslate $0(m)$, ruotolo mandando x in $(0, \dots, 0, 1)$ e poi applico la mappa di inversione e la guardo in H^m .

Corollario: La mappa esponenziale

$$\exp_0: T_0 D^m \rightarrow D^m$$

$$x \mapsto \left(\tanh \frac{\|x\|}{2} \right) \frac{x}{\|x\|}$$

↙ a meno di un fattore A dovuto al $\left(\frac{2}{1 - \|x\|} \right)^2$ del tensore metrico

è un diffeomorfismo.

TEOREMA (CARTAN - HADAMARD): Se $(M, g.)$ ^{completo} ha curvatura sezionali $K \leq 0$ allora $\forall p \in M$ $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ è un rivestimento liscio.

3-VAR. LEZIONE 16

$\exp_p: T_p \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m$ è diffeomorfismo $\forall p \in \mathbb{H}^m$

$\text{Isom}(\mathbb{H}^m, \mathbb{S}^m, \mathbb{R}^m)$ agiscono transitivamente sui punti

PROPOSIZIONE: Le seguenti sono isometrie di \mathbb{H}^m .

- 1) $x \mapsto x + b$, $b = (b_1, \dots, b_{m-1}, 0)$
- 2) $x \mapsto \lambda x$, $\lambda > 0$
- 3) Inversioni lungo sfere e piani \perp a \mathcal{H}^m
euclidei
(ipersfere e iperpiani)

DIM: [1] ovvio (il tensore metrico resta lo stesso)

$$\begin{aligned} [2] \quad \varphi(x) = \lambda x. \quad \|d\varphi_x(v)\|_{\varphi(x)}^{\mathbb{H}} &= \|\lambda v\|_{\varphi(x)}^{\mathbb{H}} = \frac{\|\lambda v\|^E}{\varphi(x)_m} = \frac{\lambda \|v\|^E}{\lambda x_m} = \\ &= \frac{\|v\|^E}{x_m} = \|v\|_x^{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

[3] A meno di comporre con traslazioni ^{outre} e dilatazioni

possiamo supporre inversione lungo $\mathbb{S}(0, 1)$, cioè

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2} \quad \text{Si chiede come nel 2, con il centro } \text{centro } \text{raggio}$$

Per la riflessione ^{euclidea} lungo piano è ovvio (~~mantenere fissi~~
(manda in sé $\{x_m = 1\}$))

Esempio In \mathbb{I}^m , la seguente è isometria (gli omni sono isometrici)



oss. Le isometrie 3) sono riflessioni di \mathbb{H}^m , poiché l'unica isom. di $\mathbb{H}^m, \mathbb{S}^m, \mathbb{R}^m$ che ha come punti fissi un iperpiano S è la riflessione lungo S , e coincidono ^{qui tangenti} (le isometrie sono determinate al primo ordine)

PROPOSIZIONE: Le riflessioni lungo iperpiani generano $\text{Isom}(\mathbb{H}^m, \mathbb{S}^m, \mathbb{R}^m)$.

DIM: Dimostriamo per \mathbb{H}^m , per gli altri è uguale.

$G = \langle \text{riflessioni} \rangle \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$ agisce transitivamente sui punti.

Esercizio: Dati $p, q \in \mathbb{H}^m$ $S = \{x \in \mathbb{H}^m \mid d(x, p) = d(x, q)\}$ è un iperpiano ortogonale alla retta passante per p e q .

Quindi $\text{rif}_S(p) = q$

Inoltre le riflessioni generano $\text{Stab}_p < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$: infatti

Sul tangente in $p \rightarrow \mathbb{H}^m$
 $O(m)$
 ha forma bilineare del p.s.
 Un elemento di Stab_p induce
 un cambio del p.s., cioè un
 elemento di $O(m)$.
 In questo caso ogni matrice ortogonale
 è indotta da un elemento in Stab_p

Esercizio: $O(m)$ è generato da riflessioni

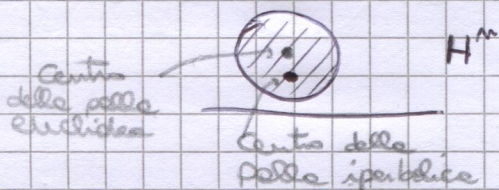
Inoltre le riflessioni di $O(m)$ sono differenziali di riflessioni di \mathbb{H}^m .

Questo perché

Esercizio: Ogni sottospazio $S \subseteq T_p \mathbb{H}^m$ è tangente ad un unico
 sottospazio $S' \subseteq \mathbb{H}^m$

COROLLARIO: $\text{Isom}(D^m)$ e $\text{Isom}(H^m)$ sono generate da inversioni
 lungo piani e sfere \perp a ∂D^m e ∂H^m

COROLLARIO: In D^m, H^m le palle iperboliche sono palle euclidee
 (con centro differente)

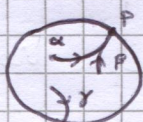


PUNTI ALL'INFINITO

Def $\partial \mathbb{H}^m = \{ \text{semirette geodetiche} \} / \sim$ dove una semiretta geodetica è $\alpha: [0, \infty)$
 geodetica con $|\alpha'(t)| = 1$
 e $\alpha \sim \beta$ se $\exists c > 0$ t.c. $d(\alpha(t), \beta(t)) < c$

PROPOSIZIONE: Se $\mathbb{H}^m = D^m$, c'è identificazione naturale $\partial \mathbb{H}^m = \partial D^m$
 Se $\mathbb{H}^m = H^m$, c'è identificazione naturale $\partial \mathbb{H}^m = \partial H^m \cup \{\infty\}$

Dici:



Traslate isometrie ruotando il disco mandando p in $(0, \dots, 1)$
 Da lì faccio l'inversione per andare in H^m
 e ottenere

$$\alpha \uparrow \uparrow \beta \quad H^m$$

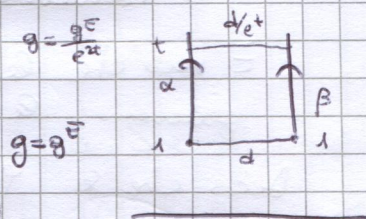
Riparametrizzare una geodetica di origine a semiretta ~~di origine~~
 equivalenti (e distanza unif. limitata). Definendo $\alpha_2(t) := \alpha(t+t_1)$

$$d(\alpha_2(t), \alpha(t)) = t_1 \quad \forall t.$$

WLOG allora α e β partono dallo stesso punto (ad altezza 1)

$$\alpha(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^t)$$

$$\beta(t) = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, e^t)$$



$$d(\alpha(0), \beta(0)) \leq d \quad (d = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - x'_{n-1})^2})$$

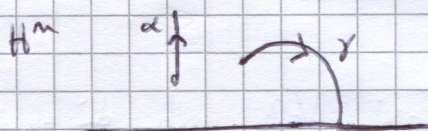
$$\text{Al tempo } t, \quad d(\alpha(t), \beta(t)) \leq \frac{d}{e^t} \quad \text{perché } g = \frac{g^E}{e^{2t}}$$

$$\text{Quindi } d(\alpha(t), \beta(t)) \rightarrow 0. \Rightarrow \alpha \sim \beta$$

Facciamo vedere invece che $\alpha \not\sim \gamma$.

Come sopra, si porta α in verticale su H^m .

γ non va in verticale (altrimenti tornando indietro andrebbe dove α)



Si dimostra (si vede ad occhio dai...)
 che la distanza diverge. Bah...

Def $\overline{H}^m := H^m \cup \partial H^m$ compatificazione di H^m . C'è una topologia naturale che la rende omeomorfa a \overline{D}^m .

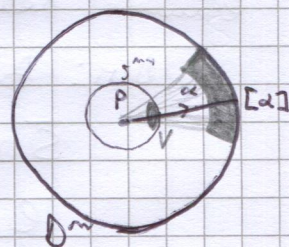
Un modo per definirla è esattamente usare quella di \overline{D}^m , anche se poi va dimostrato qualcosa (H^m è classe di isometria di spazi...)

Altrimenti, meglio: fango una base di aperti di \overline{H}^m :

• gli aperti di H^m

• $U(\alpha, V, r)$ con α semiretta, $r > 0$, $\forall \epsilon \in V \subseteq S^{n-1} \subseteq T_p H^m$
 (con r vel. inf.)
 in ∂ $\alpha(0) = p$
 aperto

$$\{ [B] \text{ semiretta con } \begin{matrix} B(0) = p \\ B'(0) \in V \end{matrix} \} \cup \{ \beta([r, \infty)) \mid \begin{matrix} \beta \text{ semiretta con } \beta(0) = p \\ \beta'(0) \in V \end{matrix} \}$$



Dato $S \subseteq H^m$ sottospazio, sia \overline{S} la chiusura in \overline{H}^m .

$$\overline{S} = S \cup \partial S$$

(Un k -sottospazio di H^m, S^m, \mathbb{R}^m è un H^k, S^k, \mathbb{R}^k , e la sua chiusura in \overline{H}^m è un \overline{H}^k)

PROPOSIZIONE: Ogni isometria φ di \mathbb{H}^m si estende a omeomorfismo $\varphi: \overline{\mathbb{H}^m} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^m}$

Inoltre è determinata da $\varphi|_{\partial\mathbb{H}^m}: \partial\mathbb{H}^m \rightarrow \partial\mathbb{H}^m$
 "traccia di φ "
 "border"

DIM: Definisco $\varphi([x]) = [\varphi \circ x]$ $\stackrel{!}{=}$ ben definito perché φ è isometria.

È vero che le riflessioni si estendono a omeomorfismi, queste generano le isometrie, quindi è vero sempre.

Dico che se $\varphi|_{\partial\mathbb{H}^m} = \text{id}_{\partial\mathbb{H}^m} \Rightarrow \varphi = \text{id}_{\mathbb{H}^m}$ (da questo si chiude)

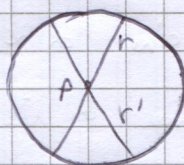
$\{\text{rette di } \mathbb{H}^m\} \leftrightarrow \{\text{coppie di punti distinti in } \partial\mathbb{H}^m\}$

Non vale in \mathbb{R}^m

$$\Rightarrow \varphi(r) = r \quad \varphi(r') = r'$$

$$r \cap r' = \{p\}$$

$$\Rightarrow \varphi(r \cap r') = p$$



Facendo variare su tutto ottengo che $\varphi = \text{id}$.

SOTTOSPAZI

PROPOSIZIONE: $S, S' \subseteq \mathbb{H}^m$ sottospazi di dim. qualsiasi. Vale una di queste 3:

1) $S \cap S' \neq \emptyset$. Se S' si dicono incidenti

2) $S \cap S' = \emptyset$, e $\overline{S} \cap \overline{S'} = \{p\}$ con $p \in \partial\mathbb{H}^m$. Se S' si dicono asintoticamente paralleli

3) $\overline{S} \cap \overline{S'} = \emptyset$. Se S' si dicono ultraparalleli

Ricordando che

$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$, si ha inoltre: 1) $d(S, S') = 0$ ed è realizzata

2) $d(S, S') = 0$ ma non è realizzata

3) $d(S, S') = d > 0$ è realizzata da

due punti unici $x \in S, x' \in S'$. Inoltre la retta passante per x, x' è l'unica retta ortogonale a S, S' .

DIM: Dimostriamo che se $S \cap S' = \emptyset, \overline{S} \cap \overline{S'} \neq \emptyset$, allora

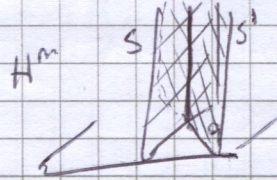
$\overline{S} \cap \overline{S'} = \{p\}$. Se per assurdo $\exists p, q \in \overline{S} \cap \overline{S'}, p \neq q$, sia

l la retta con estremi p e q .

Dico che allora $l \subseteq S, l \subseteq S' \Rightarrow l \subseteq S \cap S'$. Assurdo ($S \cap S' = \emptyset$)

Lavoro nel modello

\mathbb{H}^m . $p = \infty, q \in \partial\mathbb{H}^m$



Sempre in \mathbb{H}^m , che in 2) la distanza è 0 e non è realizzata, si fa come nella prop. su \mathbb{R}^m

[...]

[...] $\overset{\text{m}^3}{d}(S, S') = d$. Siano $\underset{S}{x_i}, \underset{S'}{x'_i}$ succ. t.c. $d(x_i, x'_i) \rightarrow d$

\overline{H}^m è cpt, quindi a meno di sottosucc. $x_i \rightarrow \underset{\overline{H}^m}{x}, x'_i \rightarrow \underset{\overline{H}^m}{x'}$
 $x, x' \notin \partial \overline{H}^m$ (perché?)

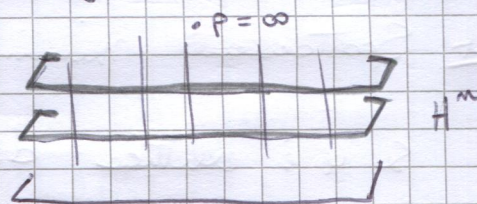
Quindi la distanza è realizzata.

Sia l la retta per x, x' . È ortogonale a S e S' perché altrimenti troverei qualcosa di più corto (infinitesimamente vale sempre Pitagora ...).

OROSFERE

Def $p \in \partial H^m$. Una orosfera centrata in p è ipersuperficie convessa $O \subseteq H^m$ chiusa \perp a tutte le geodetiche uscenti da p .

• In H^m
 $O_{\text{orosfera}} = \{x_m = k\}_{k \in \mathbb{R}^+}$

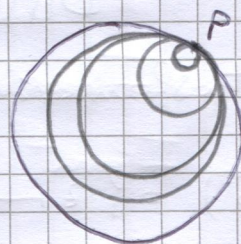


OSS. $O_k = \{x_m = k\}$ è isometrico a \mathbb{R}^n euclideo.

$$O_k \stackrel{\text{isom}}{\cong} (\mathbb{R}^n, \frac{1}{k^2} g^E) \stackrel{\text{isom}}{\cong} (\mathbb{R}^n, g^E)$$

• In D^m , $p \in \partial D^m$

Orosfera $p = \{ \text{sfera tangenti a } p \}$



PROPOSIZIONE: Sia $\varphi \in \text{Isom}(H^m)$.

1) Se $H^m = D^m$, φ ellittica e $\varphi(o) = o$, allora

$$\varphi(x) = Ax, \text{ con } A \in O(m)$$

2) Se $H^m = H^m$, φ parabolica e $\varphi(\infty) = \infty$, allora

$$\varphi(x, t) = (\underbrace{Ax + b}_{\substack{\text{isom. di } \mathbb{R}^{m-1} \\ \text{senza punti} \\ \text{fissi}}}, t), \quad A \in O(m-1)$$

$$H^m = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^m \mid t \geq 0 \right\}$$

3) Se $H^m = H^m$, φ iperbolica e $\varphi(o) = o$, $\varphi(\infty) = \infty$, allora

$$\varphi(x, t) = \lambda(Ax, t), \quad \lambda > 0, \lambda \neq 1, A \in O(m-1)$$

DIM: [1] e [3] Sono isometrie e esauriscono tutte le possibilità di primo ordine, quindi sono le uniche.

[2] φ manda orosfere centrate in ∞ in orosfere (centrate in ∞). Dico che φ fissa.

Se per assurdo $\varphi(O_1) = O_2$

con O_2 sotto a O_1
 cioè $t_2 < t_1$

Definisco $\psi(x, t_1) = (x, t_2)$
 isom.

$\psi \circ \varphi$ è una contrazione $\Rightarrow \exists$ punto fisso (x_0, t_1)

$\varphi(x_0, t_1) = (x_0, t_2)$. Sia l retta che contiene $\infty, (x_0, t_1), (x_0, t_2)$

$\Rightarrow \varphi(l) = l \Rightarrow \exists$ un altro punto fisso. Assurdo

Quindi φ fissa ciascuna orosfera. $\varphi|_{O_t} : (x, t) \mapsto (Ax + b, t)$

e A, b non dipendono da t (Stesso giochino, considera la retta verticale per $p \in O_t$. Viene mandata nella retta verticale per $\varphi(p)$ e guarda intersezione con $O_{t'}$).

Def Spostamento minimo di $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è $d = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} (x, \varphi(x))$

Se φ è ellittico $d=0$ è realizzato

Se φ è parabolico $d=0$ non è realizzato

Se φ è iperbolico $d>0$ è realizzato su tutti e soli i punti dell'asse

DIMENSIONE 2 e 3

Def Una trasformazione di Möbius è una mappa

$$\begin{array}{ccc} & \text{strutt. compl.} & \\ S^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^2 = \mathbb{CP}^1 \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Biel}(S^2) &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\} = GL(2, \mathbb{C}) / \{ \pm I \}_{\lambda \in \mathbb{C}^*} =: PGL(2, \mathbb{C}) \\ &= PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{ \pm I \} \end{aligned}$$

Esercizio: $PSL(2, \mathbb{C})$ agisce in modo libero e transitivo sulle triplette di punti distinti in S .

Def $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ sono dette antitrasformazioni di Möbius.

Def $\text{Conf}(S) = \{ \text{trasf. e antitrasf.} \} \supset PSL(2, \mathbb{C})$
 \uparrow
 mappa conforme

Def $H^2 \subseteq \mathbb{C}$ $H^2 = \{ z \mid \text{Im } z > 0 \}$. $\text{Conf}(H^2)$ è il sottogruppo di $\text{Conf}(S)$ che preserva H^2 .

PROPOSIZIONE: $\text{Conf}(H^2) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid \begin{array}{l} ad-bc=1 \\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \cup \left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \mid \begin{array}{l} ad-bc=-1 \\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

$$\text{Dim: Se } \varphi: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \varphi(H^2) = H^2 \Rightarrow \varphi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$\Rightarrow a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dopo magheggi vari...

Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\varphi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e il sopra va nel

sopra se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ nel primo caso e $= -1$ nel secondo ...

Esercizio: $\text{Conf}(H^2)$ agisce transitivamente sulle terne di punti in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Proposizione: $\text{Conf}(S)$ è generata da inversioni lungo cerchi (e rette)

DIM: Le inversioni stanno in $\text{Conf}(S)$,

$$z \mapsto z+b \quad z \mapsto az \quad a \in \mathbb{C}^*$$

Quindi a meno di coniugi mi basta che l'inversione lungo cerchio in 0 e raggio 1 stia in $\text{Conf}(S)$

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

Esercizio: Il gruppo generato dalle inversioni agisce transitivamente sulle triplette.

Proposizione: $\text{Conf}(H^2)$ è generato da inversioni lungo cerchi \perp al bordo di H^2 .

DIM: Simile a prima.

Proposizione: $\text{Isom}(H^2) = \text{Conf}(H^2)$

DIM: Sono generati dalle stesse cose

Corollario:

$$\text{Isom}^+(H^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) \right\}$$

Proposizione

$A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $A \neq \pm I$ isometria non banale di H^2 .

1) A è ellittica se $|\text{Tr} A| < 2$

2) A è parabolica se $|\text{Tr} A| = 2$

3) A è iperbolica se $|\text{Tr} A| > 2$

DIM: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ha punti fissi se

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad \Delta = (a+d)^2 - 4 = (\text{Tr} A)^2 - 4$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 1 \text{ soluzione in } H^2$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 1 \text{ soluzione in } \partial H^2$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ soluzioni in } \partial H^2$$

3-VAR. LEZIONE 18

Proposizione: $\text{Isom}(H^3) \cong \text{Conf}(S)$

$$S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\varphi \mapsto \varphi|_{\partial H^3 = S}$$

DIM: Entrambi i gruppi sono generati da inversioni lungo sfere.

(La restrizione al bordo di una inversione lungo sfere è ancora una inversione lungo sfere $\cap \partial H^3$)

Corollario: Definendo $\text{Conf}(\mathbb{R}^{m-1} \cup \{\infty\}) = \langle \text{inversioni lungo sfere} \rangle$

valg $\forall m$ che

$$\text{Isom}(H^m) \cong \text{Conf}(\mathbb{R}^{m-1} \cup \{\infty\})$$

Corollario: $\text{Isom}^+(H^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$

Esempio: $H^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times (0, \infty)\}$

$$\varphi(z, t) = (z + w, t) \quad w \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \varphi|_{\partial H^3}(z) = z + w \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(z, t) = (\lambda z, \lambda t) \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \varphi|_{\partial H^3}(z) = \lambda z \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(z, t) = (wz, |w|t) \quad w \in \mathbb{C}, |w| \neq 1 \rightsquigarrow \varphi|_{\partial H^3}(z) = wz \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sqrt{w} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix}$$

Proposizione: Sia $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong \text{Isom}^+(H^3)$, $A \neq \pm I$.

- $\text{tr} A \in (-2, 2) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A$ ellittica
- $\text{tr} A \in \{-2, 2\} \Rightarrow A$ parabolica
- $\text{tr} A \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \Rightarrow A$ iperbolica

DIM: Usando Jordan

$$A = M^{-1} B M, \quad M \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

$$B = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

A e B sono dello stesso tipo e hanno stesso traccia

$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è parabolica

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ è ellittica se $|\lambda| = 1$, iperbolica altrimenti

$$\text{tr} A = \text{tr} B = \lambda + \lambda^{-1} \in (-2, 2) \Leftrightarrow |\lambda| = 1 \quad \text{Ter.}$$

VARIETÀ IPERBOLICHE

<u>Def</u>	M^m riemanniana	è iperbolica se	$\forall p \in M \exists U(p) \cong V \subseteq \mathbb{H}^m$	①
"	"	" sferica / ellittica "	" " " " S^m	②
"	"	" euclidea / piatta "	" " " " \mathbb{R}^m	③

Def (equivalenti)

① $\Leftrightarrow K \equiv -1$ ← curvature sezioni

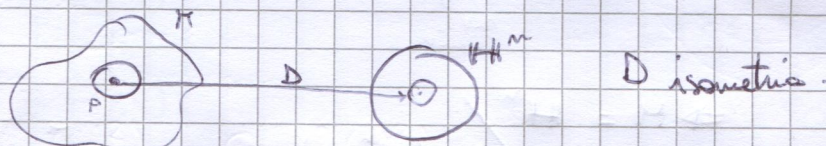
② $\Leftrightarrow K \equiv 1$

③ $\Leftrightarrow K \equiv 0$

Oss. M può non essere completa e può non avere volume finito.

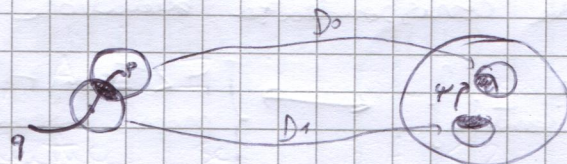
TEOREMA M iperbolica simpl. conn. completa $\Leftrightarrow M$ isometrica a \mathbb{H}^m .

DIM: \Rightarrow



La estendo a $D: M \rightarrow \mathbb{H}^m$ detta mappa sviluppante.

Prendo un arco da p in q . È cpt. Lo ricopro con finite pallottole. Due pallottole vicine si intersecano WLOG in un connesso (sempre prendo la comp. con. che contiene il pezzo di arco).



$\psi = D_0 \circ D_1^{-1}$ è isometria tra aperti di \mathbb{H}^m che quindi si estende a isometria $\psi: \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m$.

Pongo allora $D = \psi \circ D_1$

Continuo fino a definire $D(q)$.

L'indipendenza dall'arco si dimostra grazie alla semplice connes.

L'indipendenza dalle pallottole si fa...

D è isometria locale.

M completo $\Rightarrow D: M \rightarrow \mathbb{H}^m$ rivestimento \Rightarrow omeomorfismo ison. loc. perché?

Queste ultime cose perché

TEOREMA: $f: M \rightarrow N$ Riemanniana isometria locale, M completa $\Rightarrow f$ rivestimento isometrico

PROPOSIZIONE: M iperbolica completa $\Leftrightarrow M = \mathbb{H}^m / \Gamma$ con $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$ che agisce libero e propr. discontinuo

TEOREMA: $f: M \rightarrow N$ isom. locale e rivestimento

Allora M completa $\Leftrightarrow N$ completa.

\hookrightarrow DIM: $\textcircled{1} \quad \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m / \Gamma$ rivestimento
 \hookrightarrow è Hausdorff \Rightarrow è varietà

$M = \mathbb{H}^m / \Gamma$ eredita la struttura riemanniana da \mathbb{H}^m
 quindi è iperbolica (il riv. è loc. isom.)
 $\Rightarrow M$ è anche completa.

$\textcircled{2} \quad M$ completa $\Rightarrow \tilde{M}$ iperbolica e completa $\Rightarrow \tilde{M} \subseteq \mathbb{H}^m$
 \uparrow
 riv. univ.

$$\Rightarrow M = \mathbb{H}^m / \underbrace{\text{Aut}(\mathbb{H}^m \rightarrow M)}_{\Gamma}$$

Γ agisce in modo libero e propr. discontinuo
 e deve essere gruppo di isometrie per costruzione
 (sopra ho messo struttura iperbolica che c'era sotto)

OSS. $M \cong \pi_1(M)$

COROLLARIO: Esiste naturale corrispondenza biunivoca

$\left\{ \begin{array}{l} m\text{-varietà iperboliche} \\ \text{complete a meno di isometrie} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m) \text{ che agiscono libero e} \\ \text{propr. discontinuo a meno di coniugio} \end{array} \right\}$

DIM: $\tilde{M} \rightarrow M \xleftarrow{\sim} M$

ho scelto $\nearrow \mathbb{H}^m$
 una identif. \mathbb{H}^m

Se ho $\mathbb{H}^m \xrightarrow{g}$ $\xleftarrow{\sim} g \Gamma g^{-1}$

PROPOSIZIONE: $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$ agisce in modo propr. discontinuo $\Leftrightarrow \Gamma$ è sgr. discreto di $\text{Isom}(\mathbb{H}^m)$. (vale anche per $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \dots$)

Γ discreto $\Leftrightarrow \Gamma$ sottoinsieme discreto $\Leftrightarrow e \in \Gamma$ è isolato.

OSS. $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$ agisce in modo libero se e solo se Γ non contiene elementi ellittici.

Quindi $\left\{ \begin{array}{l} m\text{-varietà iperboliche complete} \\ \text{a meno di isometrie} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m) \text{ discreti e senza} \\ \text{elementi ellittici a meno di coniugio} \end{array} \right\}$

OSS. $M = \mathbb{H}^m / \Gamma$ orientabile $\Leftrightarrow \Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^m)$

TEOREMA: M piatta completa $\Leftrightarrow M = \mathbb{R}^m / \Gamma$, $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^m)$ discreto e agisce libero.

TEOREMA: M sferica completa $\Leftrightarrow M = S^m / \Gamma$, $\Gamma < \text{Isom}(S^m)$ discreto e agisce libero.

Esempio: $\Gamma < \mathbb{R}^m < \text{Isom}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow M = \mathbb{R}^m / \Gamma$ varietà piatta
translationi
 $\Rightarrow M \cong \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_k \times \mathbb{R}^{m-k}$

Esempio: $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Prendi $p, q : (p, q) = 1$, $p \geq 1$. $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$
 $f: S^3 \rightarrow S^3$ è isometria.
 $(z, w) \mapsto (\omega z, w^q)$
 $\Gamma = \langle f \rangle = \{1, f, \dots, f^{p-1}\}$ agisce libero su S^3 .
 $S^3 / \Gamma \cong L(p, q)$.
 $(\Gamma < \text{SO}(4) = \text{Isom}^+(S^3))$

Esempio: $\mathbb{R}P^m = S^m / \Gamma$ $\Gamma = \{\pm \text{id}\}$

In generale $\text{SO}(2m+1)$ non ha Γ che vanno bene, ~~perché~~
perché ogni elemento ha punti fissi...

Quindi non si trovano varietà sferiche orientabili complete di dim. pari.

Esempio: $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) < \text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$
 \uparrow
è discreto

Non agisce in modo libero, perché ci sono $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ con $\text{tr} A \in (-2, 2)$
cioè $A : \text{tr} A \in \{+1, 0, -1\}$ [...]

TEOREMA (LEMMA DI SELBERG):

$\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$ è discreto $\Rightarrow \exists \Gamma' \triangleleft \Gamma$ di indice finito che non ha ellittici.

[...] Preso $m \geq 1$, considero $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e quindi
 $\text{SL}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ da cui anche $\text{PSL}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi} \text{PSL}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$
 $\Rightarrow \text{Ker } \pi = \Gamma_{(m)} \triangleleft \text{PSL}(\mathbb{Z})$ di indice finito
 \uparrow
è gruppo finito

PROPOSIZIONE: Se $m \geq 4$, $\Gamma(m)$ non contiene ellittici.

DIM: $\Gamma(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m} \right\} \Rightarrow \text{tr} A \in \Gamma(m) \Rightarrow \text{tr} A \equiv 2 \pmod{m} \Rightarrow \text{tr} A \neq 0, \pm 1$

Quindi $S_m := \mathbb{H}^2 / \Gamma(m)$ è superficie iperbolica.

Analogamente:

$$\underbrace{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})}_{\Gamma} < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$$

Con il lemma di prima. Trovo un sgr. senza ellittici ...

POLIEDRI

Def Un poliedro P in $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^m)$ è l'intersezione di un insieme di semispazi $H_i \subseteq \mathbb{H}^m$ tali che:

1) Gli iperpiani ∂H_i sono localmente finiti

2) $\text{int} P \neq \emptyset$

Def In \mathbb{H}^m un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{H}^m$ è convesso se $\forall p, q \in S$ $\overline{pq} \subseteq S$

Esercizio: P poliedro $\Rightarrow P$ convesso in \mathbb{H}^m , \overline{P} convesso in \mathbb{H}^m
($\overline{P} = \bigcap H_i$)

Def Una faccia di un poliedro P è $F = P \cap \partial H_i$ tale che

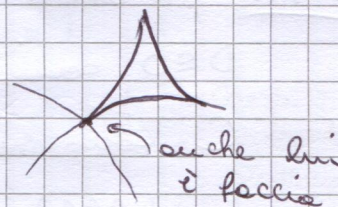
1) $H_i \supseteq P$

2) $P \cap \partial H_i \neq \emptyset$

Il supporto di F è $\text{supp} F = \bigcap_i \partial H_i$ dove gli H_i

sono tali che: 1) $H_i \supseteq P$

2) $F = P \cap \partial H_i (\neq \emptyset)$



Esercizio: F è poliedro in $\text{supp} F$.

Esercizio: L'intersezione di facce è vuoto oppure faccia.

Def Se $S \subseteq \mathbb{H}^m$, l'involuppo convesso di S è $\text{Conv}(S) = \bigcap$ convessi che contengono S .

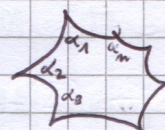
Esercizio: $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{H}^m$. $\text{Conv}(p_1, \dots, p_k)$ è poliedro. Si chiama poliedro finito.

Esercizio: $P \subseteq \mathbb{H}^m$ cpt $\Rightarrow P$ è finito, $P = \text{Conv}(\text{Vertici di } P)$

PROPOSIZIONE: Se P è poligono compatto in \mathbb{H}^2 ,

$$\text{Area}(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

(somma angoli interni eucl. - somma ang. interni iperbolici)



DIM: Usando Gauss-Bonnet

S superficie riemanniana con bordo C^1 e tratti

$$\int_S K = 2\pi \chi(S) \pm \int_S K_g \mp \sum (\pi - \alpha_i)$$

il segno
non lo ricordo

Nel nostro caso il bordo è dritto ($\int_{\partial S} K_g = 0$), $\chi(S) = 1$ (è un disco)

La curvatura è costantemente -1 (è isometrica la forma ad essere costante)

$$\int_S K = \int_S -1 = -\text{Area}(S) \Rightarrow \text{Area}(S) = -2\pi + \sum (\pi - \alpha_i) = -2\pi + n\pi - \sum \alpha_i$$

OSS. Vale anche se dei vertici sono all'infinito (l'angolo è zero).

Esempio: Area(triangolo ideale) $= \pi$



I triangoli ideali sono tutti isometrici,

perché $PSL(2, \mathbb{R})$ agisce transitivamente sulle terne di punti ordinate

LEMMA: $p \in \partial \mathbb{H}^m$. O sfera centrata in p .

$D \subseteq O$ dominio (cioè convesso, cioè qualcosa di cui ha senso l'area)

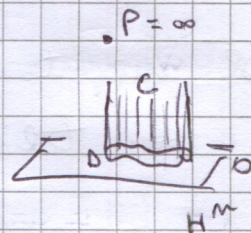
C cono su D . $C = \{px \mid x \in D\}$. Allora

$$\text{Vol}(C) = \frac{\text{Vol}_0(D)}{m-1}$$

$$(\text{Vol}(X) = \int_X \sqrt{g_{i,j}})$$

DIM:

$$\text{Vol}(C) = \int_D dx \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^m} dt = \int_D dx \frac{1}{t^{m-1}} \frac{1}{t_0^{m-1}} = \frac{1}{m-1} \int_D \frac{1}{t_0^{m-1}} dx$$



COROLLARIO: P finite $\Rightarrow \text{Vol}(P) < +\infty$

DIM: Spezzo il poliedro per togliere i punti all'infinito



Viene fuori una parte compatta ($\Rightarrow \text{Vol} < \infty$) e dei coni

su cose che stanno in un cpt, quindi cpt

nell'insieme ($\Rightarrow \text{Vol} < \infty$).

TASSELAZIONI

Def

Una tassellazione di $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^m, S^m)$ è un insieme di poliedri P_i che ricoprono $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^m, S^m)$ che sono localmente finiti e si intersecano nel \mathbb{P}^m vuoto o in facce comuni.

Def

Un poliedro di Coxeter è un poliedro $P \subseteq \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^m, S^m)$ con tutti

gli angoli diedrali $\frac{\pi}{K}$ (K può variare da vertice a vertice).

($K \in \mathbb{N}$)

TEOREMA: Riflettendo P lungo le $(n-1)$ -facce si ottiene una tassellazione.

Esercizio: $\forall \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad \exists$ triangolo con angoli α, β, γ .

\Rightarrow iperbolico se $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, è sferico se $\alpha + \beta + \gamma > \pi$,

è piatto se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Esempio: Triangoli di Coxeter, $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}$, con $a, b, c \geq 2$ (interi)

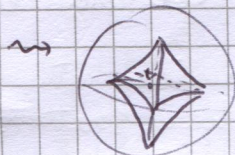
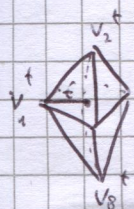
Devo controllare $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} (\geq \frac{1}{2})$ (sono quasi tutti iperbolici)

SOLIDI PLATONICI

P solido platonico $\subseteq T_p \mathbb{H}^m \subseteq \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{H}^m$ (centrato nel tangente). Chiamiamo t le distanze dei vertici dal centro. (con segno -).

Poi siamo $w_1^t, \dots, w_k^t = \exp(v_1^t, \dots, v_k^t)$ con v_i^t vertice nel tangente

\mathcal{P} solido platonico in \mathbb{H}^m è $P_t = \text{Conv}(w_1^t, \dots, w_k^t)$



$\alpha(t)$ l'angolo diedrale è monotono

crescente
~~decrente~~
strettamente

P_t $t \in [-\infty, 0)$ è iperbolico, P_0 è euclideo, P_t $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ è sferico

($P_{\frac{\pi}{2}}$ è semisfera). Variando tutti con continuità, quindi posso guardare

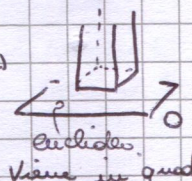
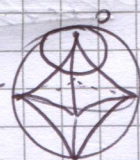
P_t per $t \in [-\infty, \frac{\pi}{2}]$.

$$\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$\alpha(-\infty) = \frac{\pi}{2}$$

per l'ottaedro, perché considero l'ossfera

($\frac{\pi}{3}$ per il tetraedro)



(l'angolo diedrale lo calcolo con una qualsiasi "superficie" \perp nel punto di intersezione)

In generale $\alpha(-\infty) = \pi \frac{(n-2)}{n}$ con $n=3, 4, 5$
valore del vertice

Esistono:

• Tetraedro sferico retto ideale

• dodecaedro retto in \mathbb{H}^3 ideale

• Cubo euclideo retto ideale

• ottaedro retto in \mathbb{H}^3 ideale

Def $S \subseteq \mathbb{H}^m$ discreto. La tassellazione di Voronoi di S è $\forall p \in S$

$$D(p) = \{x \in \mathbb{H}^m \mid d(x, p) \leq d(x, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{H}^m\}$$

PROPOSIZIONE: $\{D(p)\}_{p \in S}$ è tassellazione.

Def $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^m)$ discreto. $P \subseteq \mathbb{H}^m$ poliedro è dominio fondamentale se

$\{g(P)\}_{g \in \Gamma}$ è tassellazione.

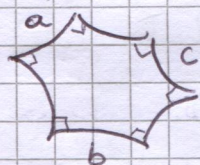
PROPOSIZIONE: $\forall \Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreta esiste sempre un dominio fondam. 3-VA

DIM: "DOMINIO DI DIRICHLET"

Sia $p \in \mathbb{H}^n$ che non sia fissata da nessun elemento di Γ non banale (si dimostra che esiste sempre...)

$S = \Gamma(p) = \{g(p) \mid g \in \Gamma\}$. Prendiamo la tassellazione di Voronoi di S .
 Γ discreto $\Rightarrow S$ discreto.

PROPOSIZIONE: $\forall a, b, c > 0$ esiste un unico esagono retto in \mathbb{H}^2



con lati di lunghezza a, b, c .

o z o z
non consecutivi

DIM: Prendiamo una retta e un segmento di lunghezza x .

Dagli estremi escano 2 rette ortogonali. Considero lunghezze a, b .

Ripaccio ancora

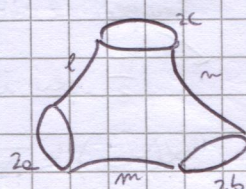
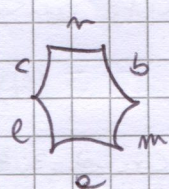
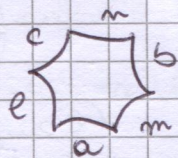


Esiste unica retta t e entrambi la ultima scritta. Il lato

che esce avrà lunghezza $f(x)$. Si dimostra che $f(x)$ è crescente e assume valori da 0 a ∞ . $\Rightarrow \exists x: f(x) = c$.

~~Scelto~~ Scelto a, b, c

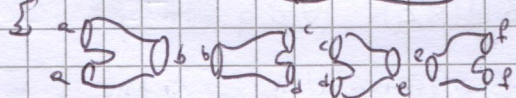
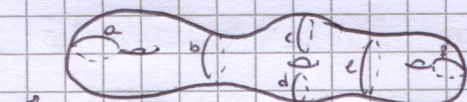
~~lo raddoppio e incollo lungo b, a, c~~



superficie iperbolica con bordo geodetico

PROPOSIZIONE: $\forall a, b, c > 0 \exists$ pantalone iperbolico con bordo geodetico di lunghezza a, b, c .

• S_g si decompone in pantaloni: $2g-2$ pantaloni e $3g-3$ curve
 $(g \geq 2)$



si mette struttura iperbolica

$\Rightarrow \forall g \geq 2$ S_g ha struttura iperbolica $S_g = \mathbb{H}^2 / \Gamma_g$.

altri

Ho $3g-3$ gradi di libertà per le lunghezze degli archi e $3g-3$ gradi di libertà per il come si incollano tra sé:

$$\mathbb{R}^{3g-3} \times (0, +\infty)^{3g-3}$$

RAGGIO DI INIETTIVITÀ

Def (M, g) Riemanniana. $\forall x \in M$ $\text{inj}_x(M) = \sup \{r > 0 \mid \exp_x|_{B(0,r)}$ è definito e embedding $\}$
 si dice raggio di iniettività di M in x .

Esempio: $M = \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n \Rightarrow \text{inj}_x(M) = +\infty \quad \forall x \in M$.

$$M = S^n \Rightarrow \text{inj}_x(M) = \pi$$

Def $\text{inj}(M) = \inf_{x \in M} \text{inj}_x(M)$

Proposizione: M compatta $\Rightarrow \text{inj}(M) > 0$

DIM: Parla chiaro: "intorno totalmente normale" $U \ni x$

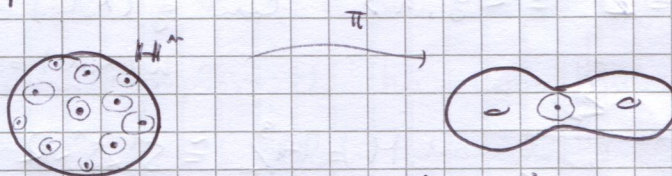
$\forall x \in M \exists \varepsilon > 0$ t.c. $\text{inj}_x(M) > \varepsilon \quad \forall x \in U$. M cpt \Rightarrow bastano finiti U .

Def Se $S \subseteq \mathbb{H}^n$ discreto, $d(S) = \inf_{\substack{x \neq y \\ x, y \in S}} d(x, y)$

Proposizione: Se $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ varietà iperbolica. Allora $\forall x \in M$ $\text{inj}_x(M) = \frac{1}{2} d(\pi^{-1}(x))$

dove $\pi: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n / \Gamma$

DIM:



Embedding \Rightarrow dischi disgiunti di sopra \Rightarrow raggio $<$ metà distanza tra punti.

Corollario: $\text{inj}(M) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq e}} d(g)$ spostamento minimo di g

DIM:

$$\begin{aligned} \text{inj}(M) &= \inf_{x \in M} \text{inj}_x(M) = \frac{1}{2} \inf_{x \in M} d(\pi^{-1}(x)) = \frac{1}{2} \inf_{x \in M} \inf_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} \inf_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq e}} d(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = \\ &= \frac{1}{2} \inf_{\tilde{x} \in \mathbb{H}^n} \inf_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq e}} d(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq e}} d(g) \end{aligned}$$

Corollario: $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ compatta $\Rightarrow \Gamma$ non contiene paraboli (cioè Γ contiene solo id e iperbolici)

DIM: M compatta $\Rightarrow \text{inj}(M) > 0$
 g iperbolico $\Rightarrow d(g) = 0$

CUSPIDI

Fissa $p \in \partial \mathbb{H}^n$. Prende $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discreto e senza ellittici fatto di soli paraboli con punto fisso p (+ l'identità).

Def Un quoziente \mathbb{H}^n / Γ con Γ come sopra si chiama cuspidale.

Esempio: $P = \infty$ in H^n .

Ogni parabola è del tipo $f(x,t) = (Ax+b, t)$ con $A \in O(n-1)$
 $b \in \mathbb{R}^{n-1}$
 (senza punti fissi)

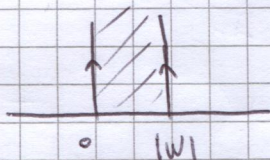
Quindi in pratica per una cuspid

$$\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1}) < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$$

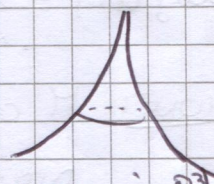
Esempio: $n=2$: $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}) < \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$

$$\Rightarrow \Gamma = \langle g \rangle \text{ con } g: z \mapsto z+w \text{ con } w \in \mathbb{R}$$

($z \in \mathbb{C}$, \mathbb{H}^2 lo vediamo in \mathbb{C})



$$M = \mathbb{H}^2 / \Gamma \cong S^1 \times \mathbb{R}$$



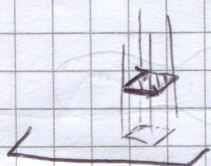
In realtà viene la Rotazione della trottica:
 (circa... ci sono problemi, non si può realmente immergere in \mathbb{R}^3)

Ha Area $= +\infty$, quindi spesso si tronca chiamandola ancora impropria.
 cuspid, e viene che Area = length (oracolo di bordo)

$n=3$: $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

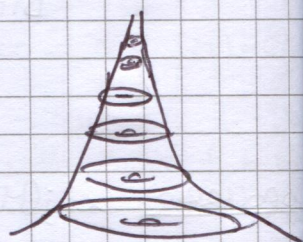
Se preserva le orientazioni \Rightarrow sono traslazioni. ~~Attenzione~~

$$\Gamma \cong \mathbb{Z}^2 \cong \langle g, h \rangle \text{ con } g(x,t) = (x+u, t) \\ h(x,t) = (x+v, t)$$



$$M = \mathbb{H}^3 / \Gamma \cong S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$$

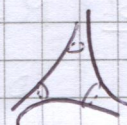
È una cosa tipo



In generale le cuspidi sono tutte isometriche a $(M \times \mathbb{R}, g)$ con
 M varietà piatta completa con $g_{(x,t)} = e^{-2t} (g_x^M \oplus 1)$

Esempio: T triangolo ideale. Area(T) $= \pi$.

T è varietà con bordo (i vertici non esistono in \mathbb{H}^2). Se facciamo
 il doppio di T si ottiene una sfera con 3 punture



Non è compatta, è varietà iperbolica ed è completa.

Inoltre ha Area $= 2\pi$

TEOREMA: $\forall n \geq 2$ esistono varietà iperboliche complete di volume finito ma non
 compatte.

$$\text{Ovvero: } \Gamma = O^+(n, 1) \cap GL(n+1, \mathbb{Z})$$

Si prende $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ che non contiene ellittici.

$M = \mathbb{H}^n / \Gamma'$ è una varietà del tipo cuspato.

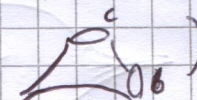
TEOREMA: DECOMPOSIZIONE THICK-THIN:

$\forall M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ di volume $< \infty$ $\exists \varepsilon > 0$ t.c., posti

$$M^{\text{thick}} = \{p \in M \mid \text{inj}_p(M) \geq \varepsilon\} \quad M^{\text{thin}} = \{p \in M \mid \text{inj}_p(M) < \varepsilon\}, \quad M^{\text{thick}} \text{ è compatta}$$

con bordo e M^{thin} è unione di cuspidi troncate

TEOREMA: $\forall a, b, c > 0$ esiste poligono con bordo geodetico.

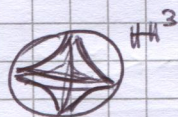
($a=0$ ad esempio dà )

(l'avevamo fatto per $a, b, c > 0$ e nell'esempio prima con $a=b=c=0$)

PROPOSIZIONE: Se $\chi(S_{g,b}) < 0$ int $S_{g,b}$ ammette struttura iperbolica completa di area $= 2\pi \chi(S_{g,b})$.

3-VARIETÀ IPERBOLICHE

Tetraedro ideale



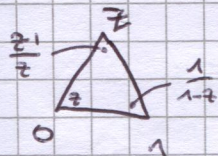
Dato che $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ agisce trans. su terni ordinati di punti su $\partial \mathbb{H}^3 \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mett

$$p=0 \quad q=1 \quad r=\infty \quad s=z \quad \text{con } \text{Im } z > 0$$



\rightsquigarrow $\Delta_{0,1,z}$ ben definito a meno di similitudine

Per classificare i triangoli a meno di similitudine aggiungiamo per ogni angolo interno un numero complesso che ha come argomento l'angolo stesso, e come modulo il rapporto tra i 2 lati adiacenti ($\frac{\text{lat}_2^2}{\text{lat}_1^2}$, con $\frac{z-1}{z}$)



Osserviamo che $\frac{z}{z-1}, \frac{1}{1-z}, \frac{z-1}{z} \in H^2 = \{\text{Im } z > 0\}$

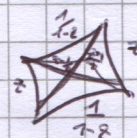
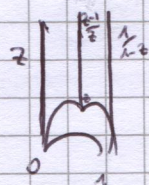
PROPOSIZIONE: Le isometrie del tetraedro ideale agiscono transitivamente sui vertici.

DIM: Scelti 2 lati, essendo ultraparalleli $\exists!$ retta ortogonale a entrambi. La rotazione di 180° intorno a questa retta manda le rette in sé ma scambia e 2 a 2 i vertici (quindi è isometria del tetraedro)

Quindi etichettando ogni spigolo del tetraedro con gli $\frac{z}{z-1}, \frac{1}{1-z}, \frac{z-1}{z}$, si ha

che queste cose sono $= 0, 2 \text{ a } 2$

(ovvero li ho definiti anche sui 3 lati "di base")



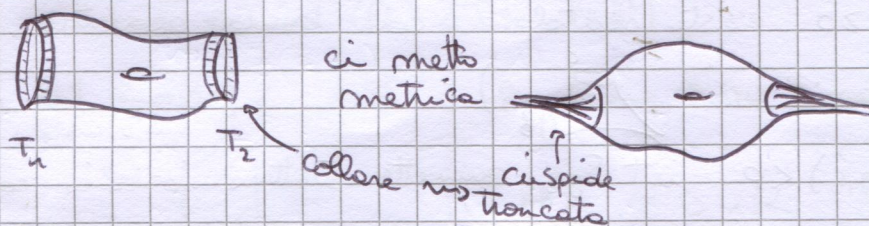
Quindi un tetraedro ideale è parametrizzato da un numero complesso $z \in H^2$.

Esempio: Il tetraedro ideale regolare è quello con $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\left(z = \frac{1}{1-z} = \frac{z-1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$$

~~Sia~~ Sia M^3 cpt con $\partial M = T_1 \cup \dots \cup T_K$ tori con $K \geq 1$.

Vogliamo adesso costruire metrica iperbolica completa di volume $< \infty$ su $\text{int}(M)$



Esempio: Complemento di un link in S^3 .

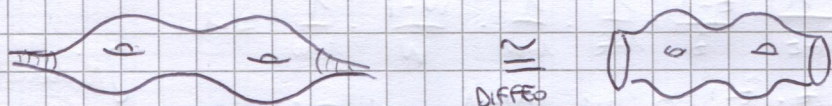
(Quasi tutti i complementi di nodi hanno metrica iperbolica completa di vol. finito)

l'oss. chiave è che $V(K) + K \approx S^1 \times S^1 \times [0, \infty)$

cuspidi troncato...

3-VAR. LEZIONE 2.1

COME COSTRUIRE 3-VARIETÀ CON CUSPIDI IPERBOLICHE (COMPLETE, A VOL. FINITO NON COMPLETE)



In generale $M^n \cong \text{Int}(W^n)$ con ∂W che ammette metriche piatte.

(nel caso $n=3$, il bordo può essere fatto di tori o Klein)

TRIANGOLAZIONE IDEALE PER W

Def W^3 cpt. orientabile $\partial W = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_k$ tori. Una triangolazione

per W è un oggetto combinatorio fatto da:

$\Delta_1, \dots, \Delta_h$ tetraedri $\subseteq \mathbb{R}^3$ e isomorfismi simpliciali fra coppie di facce.

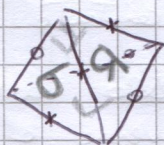
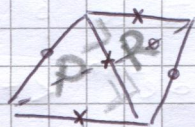
La triangolazione è ideale se esiste un omeomorfismo fra $\text{Int}(W)$

e $X \setminus \{\text{vertici}\}$, dove X è la realizzazione della triangolazione.

FATO: Ogni 3-varietà compatta con bordo ha una triangolazione ideale.

Def Una triangolazione ideale geometrica è la realizzazione di una metrica iperbolica su M tramite incollamento di tetraedri ideali in \mathbb{H}^3 .

Esempio:

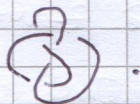


~ 2 spigoli, 1 vertice

Togliendo il vertice cosa viene?

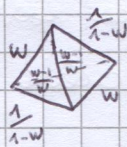
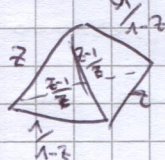
Si ha che un intorno del vertice è $\cong T_2$.

Quindi questa è la triangolazione ideale di una 3-varietà con una componente di bordo torica. In questo caso $X \setminus \{\text{vertici}\} \cong S^3 \setminus K$ con $K = \text{modo figura 8}$.



Come faccio una triangolazione geometrica?

Nella triangolazione sopra inserisco gli invarianti diedrali



e provo a risolvere le

Equazioni di Thurston:

(le facce sono tutte isometriche, quindi se viene fuori una varietà allora automaticamente la metrica si ricollano bene)

a) Compatibilità \rightarrow Metrica iperbolica su M

b) Completezza $\rightarrow M$ è completa

a) \forall spigolo della triangolazione $\prod z_i = 1$ dove gli z_i sono i complessi associati agli spigoli identificati. (detti "moduli")

Nel nostro esempio:
$$\begin{cases} \frac{1}{1-z} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-w} \cdot \frac{w-1}{w} \cdot \frac{1}{1-w} = 1 \\ z \cdot \frac{z-1}{z} \cdot z \cdot w \cdot \frac{w-1}{w} \cdot w = 1 \end{cases}$$

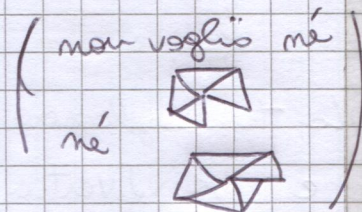
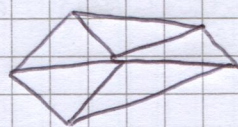
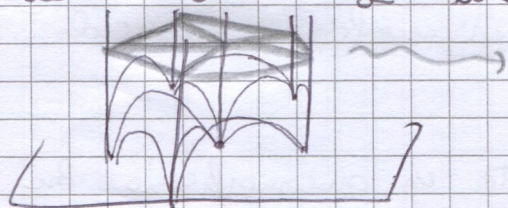
Indipendenti

$$\Rightarrow z(z-1)w(w-1) = 1$$

La risolvo in H^2 : $z=w=e^{i\frac{\pi}{3}}$ risolve, quindi \exists almeno una soluz.

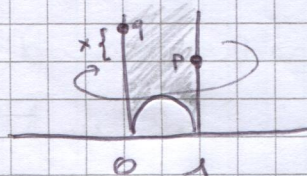
Idea delle equazioni di compatibilità:

vogliamo che la somma degli angoli dei triangoli che si incollano facciano 2π e che si incollino anche gli spigoli:



È completo? Molto probabilmente no.

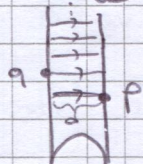
Esempio: (in dim 2)



Incolla le 2 rette (lo posso fare in tanti modi, basta scegliere dove mandare un punto p).
Usa il parametro x .

Se $x \neq 0$, l'incollamento non è completo. Infatti:

Prendo: la curva sulla sfera centrata in ∞ passante per p :



La lunghezza della curva è $\sum_{n=0}^{\infty} d e^{-n\pi} < +\infty$
ma non converge a niente.

Quindi:

b) Vogliamo evitare che un'ipersfera si tocchi su un'altra ...
(Guarda sulla note ...)

Nell'esempio, l'unica soluzione è $z=w=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

COROLLARIO: $M = S^3 \setminus K$ ammette metrica iperbolica completa e $Vol(M) = 2 Vol(S^3)$ (vedi fig. 8) ≈ 2

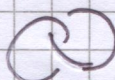
Non funziona per O e C perché in questi casi $S^3 \setminus K$ ha una struttura di Seifert (e quindi non può avere metrica iperbolica, essendo:)

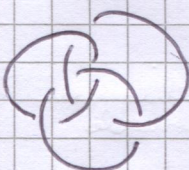
M Seifert $\Rightarrow \pi_1(M)$ contiene un gruppo ciclico normale non banale ($M \neq S^3$)

$\Gamma < Isom(H^n)$, $Vol(H^n/\Gamma) < +\infty \Rightarrow \Gamma$ non contiene elementi di ordine finito (non banali); se H^n/Γ cpt non contiene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non contiene ciclici (\mathbb{Z}) normali

Quasi tutti gli altri modi fanno funzionare il cordario (ovvero il complementare ammette metrica iperbolica completa di vol. finito).

Esempi di Link iperbolici:

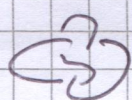
 NO ($\cong T \times [0,1]$ di Seifert)

 SÌ (modo di Bonnet)

TEOREMA (Hyperbolic Dehn filling)

Se W^3 cpt, $\partial W = T$ un toro, $M = \text{Int}(W)$ iperbolica completa e $\text{Vol}(M) < +\infty$. Allora anche quasi tutti i Dehn filling di W ammettono metrica iperbolica, dove per "quasi tutti" si intende $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eccetto un numero finito.

Esempio:



$S^3 \setminus K \xrightarrow{p/q} N$ con $H_1(N) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

(Al computer) si vede che se $p \neq \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ allora N è iperbolica.

TEOREMA (DI RIGIDITÀ DI MOSTOW):

Se M^n con $n \geq 3$ cpt senza bordo allora ha al più un'unica metrica iperbolica a meno di isometrie omotope all'identità.

Quindi $\text{Vol}(M)$ è sempre invariante.

TEOREMA (DI GEOMETRIZZAZIONE):

Dopo aver tagliato canonicamente lungo sfere e tori, i pezzi ottenuti ammettono una metrica completa di volume finito loc. isometrici a

$H^3, \mathbb{R}^3, S^3, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, S^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}, \text{Sol}, \widetilde{\text{SL}}_2$.

gruppi di Lie

Il G gruppo di Lie è varietà liscia con struttura di gruppo tale che

$G \times G \rightarrow G$ e $G \rightarrow G$ sono lisce.

$(a, b) \mapsto ab$

$g \mapsto g'$

come una metrica, o una forma di volume, ...

Fatta una "scelta orbitaria su $T_e G$ ", usando che $L_g: h \mapsto gh$ è diffeo

si estende a ogni tangente tramite $d(L_g)_e: T_e G \rightarrow T_g G$

Def $\widetilde{SL}_2 := \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$, cioè il rivestimento universale di $SL(2, \mathbb{R})$
(la struttura di gruppo di Lie si solleva).

Nil sta per "nilpotenti"

Sol sta per "solubili"

$$\{\text{abeliani}\} \subseteq \{\text{nilpotenti}\} \subseteq \{\text{risolvibili}\} \subseteq \{G \mid \exists H < G \text{ ciclico non normale}\}$$

Def $\text{Nil} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

oss. $\text{Nil} \cong_{\text{diff}} \mathbb{R}^3$