ELEMENTI DI ANALISI COMPLESS

LEZIONE 1: funzioni olomorfe.

NOTAZIONE: "dominio" = "aperto connesso".

SPOILER (TEOREMA DI HARTOGS): se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio, con $n \geq 2$, $K \subseteq \Omega$ compatto e $f: \Omega \setminus K \to \mathbb{C}$ olomorfa; allora f si estende olomorficamente a tutto Ω.

FUNZIONI OLOMORFE: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ è "olomorfa" se valgono le proprietà equivalenti:

1. $\forall a \in \Omega$ esiste $f'(a) \overset{def}{=} \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \in \mathbb{C}$ ["$\mathbb{C}$-differenziabilità"];
2. $\forall a \in \Omega\ \exists U \subseteq \Omega$ intorno di a, $\exists \{c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ t.c.:
$$\forall z \in U \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n \quad \text{["analiticità"]};$$
in tal caso, vale $c_n = f^{(n)}(a)/n!$;
3. f è continua, esistono $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ e soddisfano in Ω l'equazione di Cauchy-Riemann:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{["olomorficità"]}.$$

NOTA: si intende $x = \Re z$ e $y = \Im z$. Si usano anche:
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right).$$
I segni dipendono dal fatto che $dz = dx + i\, dy$ e $d\bar{z} = dx - i\, dy$.

Inoltre, $\left\{\frac{d}{dz}, \frac{d}{d\bar{z}}\right\}$ è base duale di $\{dz, d\bar{z}\}$.

OSSERV.: Cauchy-Riemann si riscrive così:
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

OSSERV.: se f è olomorfa, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

TEOREMA: abbiamo che:

1. se $\{c_n\}\subseteq\mathbb{C}$, esiste $R\in[0,+\infty]$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge assolutamente per $|z|<R$, e diverge per $|z|>R$ (per $|z|=R$, boh...); la convergenza è uniforme in ogni disco $\{|z|\le\rho\}$, con $\rho<R$; vale:
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n};$$
R si dice "raggio di convergenza";
2. il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ è pari al raggio di convergenza della serie "derivata" $\sum_{n=0}^{+\infty} n c_n z^{n-1}$;
3. se $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, allora $f'(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$;

[**NOTAZ.:** l'insieme delle $f:\Omega\to\mathbb{C}$ olomorfe si indica $\mathcal{O}(\Omega)$ o $\mathrm{Hol}(\Omega,\mathbb{C})$.]

4. se $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ e $a\in\Omega$, allora $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ converge nel più grande disco di centro a contenuto in Ω (cioè con raggio $d(a,\partial\Omega)$).

TEOREMA DI CAUCHY-GOURSAT-MORERA: se $f:\Omega\to\mathbb{C}$ continua, allora $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se $\forall\,\bar D\subseteq\Omega$ rettangolo (o anche disco) vale:

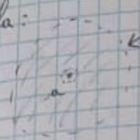
$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Più in generale, è equivalente a dire che $\int f(z)\,dz = 0$ su ogni $\gamma:[0,1]\to\Omega$ curva chiusa C^1 a tratti omotopa a un punto in Ω.

TEOREMA (FORMULA DI CAUCHY): se $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ e $\bar D\subseteq\Omega$ rettangolo (o disco), allora:

$$\forall a \in D \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - a}\, d\xi$$

DIM.: si fa:



TEOREMA DI PRIMA (UN PO' PIÙ GENERALE) SULLA CORONA CIRCOLARE.

COROLLARIO: vale, con le stesse notazioni:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi .$$

TEOREMA (DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY): se $f \in \mathcal{O}(D(a,r))$, dove $D(a,r) \overset{\text{def}}{=} \{|z-a| < r\}$, dato $0 < \rho < r$, ponendo:

$$M(\rho) = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|,$$

allora:

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{\rho^n} M(\rho).$$ [QUESTA VALE SOLO NEL CENTRO]

DIM.: immediata dal corollario sopra.

COROLLARIO (TEOREMA DI LIOUVILLE): se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ è limitata, allora è costante.

DIM.: immediata dalla DISUG. DI CAUCHY.

ES.: se $f \in \mathcal{O}(D(a,r))$ e $0 < \rho < \rho' < r$, allora:

$$\forall z \in D(a,\rho) \quad |f^{(n)}(z)| \le \frac{n!\, \rho'}{(\rho' - \rho)^{n+1}} \cdot M(\rho').$$

LEZIONE 2: principi, teoremi e topologie varie.

PRINCIPIO DI IDENTITÀ: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio (ossia: aperto connesso), e siano $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tali che $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ abbia almeno un pt. di accumulazione. Allora $f \equiv g$ su tutto Ω.

COROLLARIO: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, allora $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ è discreto.

PRINCIPIO DEL MASSIMO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora:

1. se $U \subset\subset \Omega$ (ossia U "relativamente CPT": $\overline{U} \subseteq \Omega$ e $\overline{U}$ CPT.), U aper=

to, allora $\sup_{z\in U}|f(z)| \leq \sup_{z\in\partial U}|f(z)|$, con uguaglianza se e solo se f è costante su Ω; si indica $\|f\|_U \overset{\text{def}}{=} \sup_{z\in U}|f(z)|$ ("norma ∞"), e $\|f\|_{\partial U} \overset{\text{def}}{=} \sup_{z\in\partial U}|f(z)|$; in particolare, se $|f|$ ha massimo locale in Ω, allora f è costante;

2. vale (1.) con "$\mathrm{Re}\, f$" o "$\mathrm{Im}\, f$" al posto di "$|f|$";
3. se $\Omega \subset\subseteq \mathbb{C}$ dominio limitato, poniamo $M \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in\partial\Omega} \limsup_{z\to x}|f(z)| \in [0,+\infty]$; allora $\forall z\in\Omega$ $|f(z)|\leq M$, dove vale l'uguaglianza (anche in un solo pt.) se e solo se f è costante;
4. vale (3.) con "$\mathrm{Re}\, f$" o "$\mathrm{Im}\, f$" al posto di "$|f|$".

ES.: $\Omega = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, $f(z) = e^z$; allora $\forall z\in\partial\Omega$ $|f(z)| = 1$, ma $|f|$ non è limitato.

TEOREMA DELL'APPLICAZIONE APERTA: se $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ non è costante, allora è aperta, e in particolare $\mathrm{Im}\, f$ è aperto in $\mathbb{C}$.

TOPOLOGIA DELLA CONVERGENZA PUNTUALE: se $\mathcal{F}\subseteq C^0(X,Y)$, $K\subseteq X$ e $U\subseteq Y$, definiamo:

$$\mathcal{F}(K,U) \overset{\text{def}}{=} \{f\in\mathcal{F} \mid f(K)\subseteq U\}.$$

La "top. della c.p." (o "top. prodotto") ha per prebase:

$$\{\mathcal{F}(\{x\},U) \mid x\in X,\ U\subseteq Y \text{ aperto}\}.$$

La base è data dalle intersez. finite di questi. Vedendo $C^0(X,Y)$ come sottospazio di $Y^X = \{(y_x)_{x\in X} \mid y_x\in Y\ \forall x\in X\}$, questa è proprio la top. derivata dalla top. prodotto; infatti, essendo un prodotto infinito, la top. p. di Y^X ha per base è:

$$U_{x_1}\times\dots\times U_{x_n}\times Y\times Y\times\dots,$$

con $x_1,\dots,x_n\in X$, $U_{x_i}\subseteq Y$ aperto; l'intersez. di questo con $C^0(X,Y)$ è proprio:

$$\mathcal{F}(\{x_1\},U_{x_1})\cap\dots\cap\mathcal{F}(\{x_n\},U_{x_n}).$$

Nel caso Y sia di Hausd., dire che $f_n\to f$ in questa top. è equivalente a dire che $\forall\mathcal{U}$ intorno di f vale $f_n\in\mathcal{U}$ def.; preso $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\{x_0\},U)$, vale:

$$f \in \mathcal{U} \iff f(x_0) \in \mathcal{U};$$

$$f_n \in \mathcal{U} \text{ def.} \iff f_n(x_0) \in \mathcal{U} \text{ def.}$$

Quindi:

$$f_n \to f \iff \forall x_0 \in X, \forall U \subseteq Y \text{ intorno di } f(x_0) \ f_n(x_0) \in U \text{ def.} \iff$$

$$\iff \forall x_0 \in X \ f_n(x_0) \to f(x_0).$$

TOPOLOGIA COMPATTA-APERTA: è la top. della convergenza uniforme sui compatti. Ha come prebase:

$$\{\mathcal{J}(K,U) \mid K \subseteq X \text{ CPT}, U \subseteq Y \text{ aperto}\}.$$

Se X è T_2, questa è più fine della top. della conv. punt.

Se Y è metrico, con distanza d, e $f_n \to f$ in top. CPT-ap., sia $U = B(f(x_0), r)$, con $x_0 \in K$; allora:

$$f \in \mathcal{J}(K,U) \iff f(K) \subseteq B(f(x_0), r) \iff \sup_{x \in K} d(f(x), f(x_0)) < r;$$

$$f_n \in \mathcal{J}(K,U) \text{ def.} \iff (\forall x \in K \ d(f_n(x), f(x_0)) < r) \text{ def.}$$

Quindi:

$$f_n \to f \iff \forall x \in K \ f_n(x) \to f(x) \text{ uniformemente in } K \text{ (cioè,}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall x \in K \ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0).$$

OSSERV.: se Y è T_2, allora lo è anche $C^0(X,Y)$ con top. CPT.-ap.

OSSERV.: se Y è metrico e X è a base numerabile e localm. CPT., allora $C^0(X,Y)$ (con top. CPT.-ap.) è metrico con distanza:

$$d(f,g) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sup_{x \in X_n} \tilde{d}(f(x), g(x))}{2^n},$$

dove $\tilde{d}(y_1, y_2) \overset{def}{=} \min\{d_Y(y_1, y_2), 1\}$ (con d_Y distanza di Y) e $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$, X_n aperti, $\overline{X_n}$ CPT., $X_n \Subset X_{n+1}$ (X_n "esaustione" di X, che esiste per le ipotesi).

DIM.: vogliamo che $f_n \to f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ d(f_n, f) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

($\Leftarrow$): ovvio.

($\Rightarrow$): sia n_1 t.c. $\sum_{n \geq n_1} 1/2^n < \varepsilon/2$, e $n_0 \geq n_1$ tali che:

$\forall n \geq n_0, \forall k \leq n, \sup_{x \in X_k} \tilde{d}(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$; allora $\forall n \geq n_0$ $d(f_n, f) < \varepsilon$.

Teorema di Ascoli-Arzelà: se X, Y di Hausd., a base num., loc. CPT. e metrici, allora $\mathcal{F} \subseteq C^0(X,Y)$ è relativ. CPT. se e solo se:

1. $\forall x \in X$ $\mathcal{F}(x) \overset{def}{=} \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ è relativ. CPT. in Y;
2. $\mathcal{F}$ è equicontinua sui compatti.

Teorema di Weierstrass: se $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f_n \to f$ unif. sui CPT., allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $f_n' \to f'$ unif. sui CPT.

Dim.: sia $a \in \Omega$, $0 < \rho < r < d(a, \partial\Omega)$ e $D = D(a,r)$; allora:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{con } \frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{1}{r - \rho} < +\infty;$$

ma $f_n \to f$ unif. su ∂D, dunque $f(z) = \lim_{n \to +\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to +\infty} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\lim_{n\to+\infty} f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, da cui $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. [...]

Osserv.: se $g : \partial D \to \mathbb{C}$ integrabile ($g \in L^1(\partial D)$), definendo:

$$f(z) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

si ha che f è olomorfa su D.

[...] f è continua su ∂D, dunque è integrabile, per cui $f \in \mathcal{O}(D)$, e quindi $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Segue:

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta;$$

ma $f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$, da cui, come prima, $f_n' \to f'$ unif. sui dischi $D \subset\subseteq \Omega$, e dunque unif. sui CPT., perché ogni CPT. è coperto da un numero finito di dischi $\subset\subseteq \Omega$.

Lezione 3: teoremi di Montel e di Vitali, serie di Laurent ed est. di Riemann

Teorema di Montel: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ tale che, $\forall K \subset\subseteq \Omega$, $\exists M_K > 0$ t.c. $\|f\|_K < M_K$ $\forall f \in \mathcal{F}$ ("uniforme limitatezza sui CPT."); allora $\mathcal{F}$ è relativ. CPT. in $\mathcal{O}(\Omega)$. È un rafforzamento di Ascoli-Arzelà.

DIM: Fissiamo $a \in \Omega$ e prendiamo $0 < r < d(a, \partial\Omega)$ (così $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$); poniamo $c_n(f) \overset{def}{=} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, così $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(z-a)^n$ $\forall z \in \overline{D(a,r)}$. Con le disug. di Cauchy, $|c_n(f)| \leq \frac{\|f\|_{\overline{D(a,r)}}}{r^n}$.

Presa $\{f_\nu\} \subseteq \mathcal{F}$, vogliamo vedere che si può estrarre una sottosucc. convergente. Per ipotesi, $\exists M > 0$ t.c. $\|f_\nu\|_{\overline{D(a,r)}} < M$ $\forall \nu$, quindi $\exists \{f_{\nu_j^{(0)}}\}$ sottosucc. tale che $\underset{c_0(f_{\nu_j^{(0)}})}{\overset{\|}{f_{\nu_j^{(0)}}(a)}} \longrightarrow c_0$ per qualche $c_0 \in \mathbb{C}$. Ma allora:

$\forall \nu, \forall n$ $|c_n(f_\nu)| \leq M/r^n$ $\Rightarrow$ $\forall n \geq 1$ $\exists \{\nu_j^{(n)}\} \subseteq \{\nu_j^{(n-1)}\}$ tale che

(DA CAUCHY + IPOTESI)

$c_n(f_{\nu_j^{(n)}}) \to c_n \in \mathbb{C}$ per qualche c_n. Usiamo il metodo diagonale di Cantor e poniamo: $\nu_j \overset{def}{=} \nu_j^{(j+1)}$. Allora $\{f_{\nu_j}\}$ è definit. una sottosucc. di $\{f_{\nu_j^{(n)}}\}$ per ogni n, quindi $c_n(f_{\nu_j}) \to c_n$ $\forall n$. Questo ci dice che c'è convergenza in a, ma noi la vogliamo in un intorno. Posto $D_a \overset{def}{=} D(a, \frac{1}{2}r)$, vediamo che $\{f_{\nu_j}\}$ converge unif. in D_a (e quindi, necessariamente, converge a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$). Ci serve che $\{f_{\nu_j}(z)\}$ sia di Cauchy unif. in z.

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall z \in D_a$ $|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| \leq \sum_{n \leq N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| |z-a|^n + \sum_{n > N} \frac{2M}{r^n} |z-a|^n$. Dato che $|z-a| < \frac{1}{2} r$, vale:

$\ldots \leq \sum_{n \leq N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \cdot r^n/2^n + 2M \sum_{n > N} 1/2^n \leq$

$\leq K_r \cdot \sum_{n \leq N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| + M/2^{N-1}$. Fissato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $N > 1$ tale che $M/2^{N-1} < \varepsilon/2$, prendere $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall h, k \geq n_0$ $|c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| < \frac{\varepsilon}{2NK_r}$ $\forall 0 \leq n \leq N$ e abbiamo:

$$\ldots < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Per vedere che il limite esiste anche ~~unif.~~ su ogni CPT., basta fare: BASE NUM. $\Rightarrow \exists \{a_\nu\} \subseteq \Omega$ t.c. $\Omega = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} D_{a_\nu}$. Con un procedimento diagonale, da $\{f_\nu\}$ si estrae una sottos. $\{f_{\nu_k}\}$ che converge unif. in ogni D_{a_ν} (prendo quella di D_{a_0}, ne estraggo una che va bene per D_{a_1}, ne estraggo una che va bene per D_{a_2}, ecc.)
Ogni CPT. in Ω è coperto da un numero finito di D_{a_ν}, quindi $\{f_{\nu_k}\}$ converge unif. nel CPT. e, per Weierstr., il limite è olomorfo in tutto Ω.

TEOREMA DI VITALI: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, e $\{f_\nu\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\forall K \subset\subset \Omega\ \exists M_K > 0$ t.c. $\|f_\nu\|_K < M_K\ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Sia $A \subseteq \Omega$ con almeno un pt. di accum. in Ω, e supponiamo che $\forall a \in A\ \{f_\nu(a)\}$ converga in $\mathbb{C}$. Allora $\{f_\nu\}$ converge unif. sui CPT. di Ω a una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

ES.: se X sp. metrico e $\{x_\nu\} \subseteq X$ con chiusura compatta in X e con un unico pt. di accum. $x_0 \in X$; allora $x_\nu \to x_0$.

DIM. [T. DI VITALI]: per assurdo, se $\exists K \subset\subset \Omega$, $\{n_k\}, \{m_k\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{z_k\} \in K$, $\delta > 0$ t.c. $|f_{n_k}(z_k) - f_{m_k}(z_k)| \geq \delta\ \forall k$, per Montel a meno di sottosucc. $f_{n_k} \to f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $f_{m_k} \to g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Inoltre, $z_k \to z_0 \in K$. Quindi, $|f(z_0) - g(z_0)| \geq \delta > 0$. Ma $f|_A \equiv g|_A$, per cui $f \equiv g$ per il principio di identità, assurdo.

BIOLOMORFISMI: $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ è "biol." se è olomorfa, invertibile e con inversa olomorfa. Si dice anche "applicaz. conforme" (che però è usato anche per altri tipi).

BIOLOMORFISMI LOCALI: $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è "b.l." se $\forall a \in \Omega\ \exists U \subseteq \Omega$ int. di a tale che $f|_U : U \to f(U)$ biol.

TEOREMA: valgono:

1. $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ biol. $\Leftrightarrow$ è olomorf. invertibile;
2. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è biol. loc. $\Leftrightarrow f'(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$.

SVILUPPO IN SERIE DI LAURENT: siano $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$ e sia $A(r_1, r_2) \overset{def}{=} \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2 \}$; sia $f \in \mathcal{O}(A(r_1, r_2))$; allora esiste un'unica "successione" $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ tale che:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad \forall z \in A(r_1, r_2).$$

Si dice "s. di L.". f converge alla serie unif. e assol. sui cpt. di $A(r_1, r_2)$.

In particolare, se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, $0 < r < d(a, \partial\Omega)$, allora:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in \overline{D(a,r)} \setminus \{a\},$$

e i coeff. della serie sono:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta.$$

DIM.: WLOG $a = 0$. $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$. Posto $z = |z| \cdot e^{i\theta}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \overset{\zeta = re^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{k+1} e^{i(k+1)\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} \, d\theta =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} c_k r^{k-n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \, d\theta = c_n.$$

Il coeff. c_{-1}, pari a:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} f(\zeta) \, d\zeta \overset{def}{=} \operatorname{res}_f(a),$$

si dice "residuo" di f in a.

TEOREMA DI ESTENSIONE DI RIEMANN: sia $f \in \mathcal{O}(D(a,r) \setminus \{a\})$ tale che $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$; allora f si estende olomorficamente a tutto $D(a,r)$ (e viceversa, ovviamente).

DIM.: $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ in $D(a,r) \setminus \{a\}$ $\Rightarrow$ $(z-a) f(z) = \sum c_n (z-a)^{n+1} \Rightarrow$ $\lim (z-a) f(z) = 0 \Rightarrow f$ è serie di potenze $\Rightarrow f$ converge
$\Rightarrow c_n = 0 \ \forall n+1 < 0$ e $c_{-1} =$

ORDINE: se $f \in \mathcal{O}(D(a,r) \setminus \{a\})$, $f \not\equiv 0$, e $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$,
si dice "ordine" di f in a:

$$\mathrm{ord}_f(a) \overset{def}{=} \inf \{ n \mid a_n \neq 0 \} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

a si dice:
- "singolarità essenziale" se $\mathrm{ord}_f(a) = -\infty$;
- "polo (di molteplicità $\mathrm{ord}_f(a)$)" se $\mathrm{ord}_f(a) \in \mathbb{Z}^-$;
- "pt. regolare" se $\mathrm{ord}_f(a) \in \mathbb{N}$;
- "zero (di molteplicità $\mathrm{ord}_f(a)$)" se $\mathrm{ord}_f(a) > 0$.

TEOREMA DI CASORATI - WEIERSTRASS: se a è singolarità essenziale, allora $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ è denso in $\mathbb{C}$.

ES.: $e^{1/z}$ ha singolarità essenz. in 0.

LEZIONE 4: funzioni meromorfe, sfera di Riemann, teorema dei residui.

FUNZIONI MEROMORFE: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $E \subseteq \Omega$ discreto, e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$, f è "mer." in Ω se $\forall a \in E$ $\exists U \subseteq \Omega$ intorno di a, $\exists g, h \in \mathcal{O}(U)$ t.c. $f|_{U \setminus \{a\}} \equiv \frac{g}{h}\Big|_{U \setminus \{a\}}$.

Sviluppando:

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n = (z-a)^{k_0} \cdot \underbrace{\sum_{n \geq k_0} a_n (z-a)^{n-k_0}}_{g_1(z)} \quad \text{con } a_{k_0} \neq 0; \qquad k_0 = \mathrm{ord}_g(a)$$

$$h(z) = (z-a)^{k_1} \cdot \underbrace{\sum_{n \geq k_1} b_n (z-a)^{n-k_1}}_{h_1(z)} \quad \text{con } b_{k_1} \neq 0; \qquad k_1 = \mathrm{ord}_h(a)$$

$$f(z) = (z-a)^{k_0 - k_1} \underbrace{\frac{g_1(z)}{h_1(z)}}_{\in \mathcal{O}(U)} \quad \forall z \in U \setminus \{a\} =$$

$$= (z-a)^{k_0 - k_1} \sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n.$$

COROLLARIO: se $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$, con E discreto in Ω, allora:
f merom. in $\Omega \iff$ nessun pt. di E è singolarità essenziale per $f \iff$
$\iff \forall a \in E$ o esiste $\lim_{z \to a} f(z)$ [pt. regolare], o $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.

NOTAZ.: $\mathcal{M}(\Omega) \overset{def}{=} \{f \mid f \text{ mer. in } \Omega\}$.

SFERA DI RIEMANN: indichiamo $\hat{\mathbb{C}} \overset{def}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $(= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, con topologia della compattificaz. di Alexandroff (aperti di $\mathbb{C}$ e complementari di $K \subseteq \mathbb{C}$ compatti uniti a $\{\infty\}$). $\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$ tramite proiez. stereogr.

Ogni $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ si estende a $f: \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ continua ponendo $f = \infty$ in ogni polo.

SPOILER: $f \in \mathcal{M}(\Omega) \iff f \in \mathcal{O}(\Omega, \hat{\mathbb{C}})$.

OSSERV.: definiamo:

$$\tau: \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad w \longmapsto 1/w \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \infty \longmapsto 0$$

che è continua, anzi è un omeom. (è la proiez. stereogr. dal polo SUD).

Se $f: \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ con $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = \infty$, diciamo che f è "olomorfa" in (un intorno U di) z_0 se e solo se $\tau \circ f$ è olomorfa in z_0, ossia se e solo se $1/f$ è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$, ossia se e solo se z_0 è polo di f e $\lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0$.

Viceversa, se $f: \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, f è "olom." se $f|_{\mathbb{C}}$ olom. e $f \circ \tau^{-1}$ è olomorfa in un intorno di 0 (nota: $(f \circ \tau^{-1})(z) = f(1/z)$).

Mettendo insieme le due cose, abbiamo $f \in (\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ (l'unico caso rimasto fuori è se $f(\infty) = \infty$, ma in tal caso f "olom." se $1/f(1/z)$ è olom. in 0).

COROLLARIO: $f \in \mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow f$ costante.

DIM.: $\hat{\mathbb{C}}$ CPT., f continua $\Rightarrow f(\hat{\mathbb{C}})$ limitato $\Rightarrow f|_{\mathbb{C}}$ costante per Liouville $\Rightarrow f$ costante.

OSSERV.: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ è un rivestimento (universale). In generale, se $a \in \mathbb{C}$, allora $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $z \mapsto a + e^z$ è riv. univ.

TEOREMA DEI RESIDUI: sia $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ curva chiusa, allora si può sollevare γ al rivestimento $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$: $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}: [0,1] \to \mathbb{C}$; viene:

$$\gamma(t) = a + e^{\tilde{\gamma}(t)} \text{ "}\Leftrightarrow\text{" } \tilde{\gamma}(t) = \log(\gamma(t) - a);$$

a meno di scegliere una determinazione

quindi $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ed è ben def.

L'"indice" di γ rispetto ad a è:

$$n(\gamma, a) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \left(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)\right) \in \mathbb{Z}.$$

Vale:

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Il "teo. dei residui" dice che, se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subseteq \Omega$ discreto, $\gamma : [0,1] \to \Omega \setminus E$ curva chiusa omotopa a un punto in Ω, allora:

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in E} \operatorname{res}_f(a) \cdot n(\gamma, a),$$

e la somma è finita (dato che γ ha interno compatto, per cui avvolge solo un numero finito di elementi di E).

PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $Z_f \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ e $P_f \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega \mid f(z) = \infty\}$, e γ curva chiusa in $\Omega \setminus (Z_f \cup P_f)$ omotopa a costante in Ω, allora:

$$\sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \cdot \operatorname{ord}_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f'/f \, dz.$$

In particolare, se γ è parametrizzazione del bordo di un disco chiuso $D \subseteq\subseteq \Omega$, con $\partial D \cap (Z_f \cup P_f) = \emptyset$, allora:

$$\sum_{a \in (Z_f \cup P_f) \cap D} \operatorname{ord}_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f'/f \, dz.$$

DIM.: $\operatorname{res}_{f'/f}(a) = \operatorname{ord}_f(a)$.

In maniera informale, vale:

$$f'/f = \frac{d}{dz} \log f \rightsquigarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dz} \log f \, dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\log(f(\gamma(1))) - \log(f(\gamma(0)))\right)$$

$$\log z = \log|z| + i \arg(z) \rightsquigarrow \frac{1}{2\pi i}\left(\log f(\gamma(1)) - \log f(\gamma(0))\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0))\right)$$

Quindi, per sapere quanti zeri ci sono in una certa zona, basta percorrerne il bordo e vedere quanti giri fa l'argomento:

$$\sum_{a\in (Z_f\cap P_f)\cap D} \mathrm{ord}_f(a) = "\tfrac{1}{2\pi}\left(\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0))\right)".$$

FATTO (ROUCHÉ SEMPLIFICATO): siano f,g olomorfe nell'intorno di un disco chiuso $\bar{D}\subseteq\mathbb{C}$, e supponiamo che $|f-g|<|g|$ su ∂D (il che implica che f e g non si annullano su ∂D); allora f e g hanno lo stesso numero di zeri in D (contati con molteplicità).

DIM.: sia $f_t = g + t(f-g)$, con $t\in[0,1]$; allora nessuna f_t può annullarsi in ∂D, dato che $|f-g|<|g| \Rightarrow 0<|g|-|f-g|\le |g|-t|f-g|\le$ $\le |g+t(f-g)|$; dunque possiamo applicare il principio dell'argomento:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_t'}{f_t}\,dz = \sum_{a\in D}\mathrm{ord}_{f_t}(a)\in\mathbb{N},$$

← TANTO È QUASI SEMPRE ZERO

ma $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_t'}{f_t}\,dz$ dipende da t con continuità, dunque è costante (essendo intero), e in particolare $\sum_{a\in D}\mathrm{ord}_{\underbrace{f}_{=f_1}}(a) =$ $=\sum_{a\in D}\mathrm{ord}_{\underbrace{g}_{=f_0}}(a)$.

NOTAZIONE: $\Delta \overset{def}{=} D(0,1) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

COROLLARIO: se $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ t.c. $f(\Delta)\subset\subset\Delta$; allora f ha un unico pt. fisso, ossia $\exists!\, z_0\in\Delta$ t.c. $f(z_0)=z_0$ [NOTA: è un caso particolare di Brouwer].

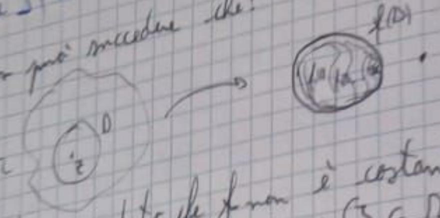
DIM.: se $r<1$ è tale che $f(\Delta)\in D(0,r)$, allora su $\partial D(0,r)$ vale: $|z-(z-f(z))| = |f(z)| < r = |z|$, per cui ponendo "$g$" $=id$ e "f" $= id - f$, per Rouché id e $f-id$ hanno lo stesso numero di zeri in $\overline{D(0,r)}$, ma id ne fa 1 (di ordine 1), quindi anche $id-f$.

LEZIONE 5: teoremi di Hurwitz, teorema di Schwarz, automorfismi

TEOREMA DI HURWITZ: sia $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, $\{f_n\}\subseteq\mathcal{O}(\Omega)$ con $f_n\to f\in\mathcal{O}(\Omega)$ unif. sui CPT.; se f non è costante, allora $\forall z\in\Omega\ \exists\, n_1=n_1(z)\in$

$\in \mathbb{N}$ e $\exists \{z_n\} \subseteq \Omega$ con $z_n \to z$, tali che $\forall n \geq n_1$ $f_n(z_n) = w$.

MORALE: non può succedere che:



DIM.: se $w \stackrel{def}{=} f(z)$, dato che f non è costante $f^{-1}(w)$ è discreto, quindi $\exists \delta > 0$ t.c. $0 < |\zeta - z| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \zeta \in \Omega \\ f(\zeta) \neq w \end{cases}$. Per ogni $k \geq 1$, sia γ_k la circonf. di centro z e raggio δ/k, e D_k cerchio (aperto) contenuto, allora $f(\gamma_k) \not\ni w$ $\forall k \geq 1$; posto $\delta_k \stackrel{def}{=} \min\{|f(\zeta) - w| \mid \zeta \in \gamma_k\}$, δ_k è strettamente positivo. Dato che f_n converge a f unif. sui CPT., $\exists n_k$ t.c. $\forall n \geq n_k$ $\max_{\zeta \in \gamma_k} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2}$.

Possiamo supporre $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Fissato $k \geq 1$, se $n \geq n_k$ e $\zeta \in \gamma_k$ allora $|(f_n(\zeta) - w) - (f(\zeta) - w)| = |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leq |f(\zeta) - w|$, quindi possiamo applicare Rouché: $\#$ZERI di $f_n - w$ in D_k $=$ $\#$ZERI di $f - w$ in D_k $\underset{\smile}{\geq} 1$ (PER LA SCELTA DI D_k; POTREBBE ESSERE PIÙ DI 1 PER RAGIONI DI MOLTEPLICITÀ); dunque $\exists z_{n,k} \in D_k$ tale che $f_n(z_{n,k}) = w$. Per ogni $n \geq n_1$ (EH SÌ, L'n_1 DELL'ENUNCIATO È PROPRIO L'n_1 DELLA NOSTRA DIM.), prendiamo k l'unico tale che $n_k \leq n < n_{k+1}$ e poniamo $z_n = z_{n,k} \in D_k$; se $n \to +\infty$ allora $k \to +\infty$ e dunque $z_n \to z$. (NOTA MIA: forse anche $k = n$ funziona).

COROLLARIO (PRIMO TEOREMA DI HURWITZ): se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in \mathcal{O}(\Omega)$ unif. sui CPT., e se ogni f_n non ha zeri, allora f è costante oppure non fa zeri.

Più in generale, se $\exists w \in \mathbb{C}$ t.c. $w \notin \operatorname{Im} f_n$ $\forall n$, allora f è costante oppure $w \notin \operatorname{Im} f$.

ES.: $f_n(z) = \frac{1}{n} e^z \to f \equiv 0$, ma $f_n(z) \neq 0$ $\forall z$.

DIM.: OVVIA.

COROLLARIO (SECONDO TEOREMA DI HURWITZ): se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$, $f_n \to f$ unif. sui CPT, e se le f_n sono (definitivamente) iniettive, allora f è costante oppure f è inj.

ES.: $f_n(z) = \frac{1}{n} z$ inj., ma $f_n \to f \equiv 0$.

DIM.: se f non inj., allora $\exists z_1 \neq z_2$ t.c. $f(z_1) = f(z_2)$; posta $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ e $h(z) = f(z) - f(z_2)$, allora $h_n \to h$ unif. sui CPT. e $h(z_1) = 0$, quindi o h è costante (e allora f costante), oppure per HURWITZ h_n ammette uno zero $\hat{z}_n$ e $\hat{z}_n \to z_1$, quindi $\hat{z}_n \neq z_2$ def., ma allora $f_n(\hat{z}_n) = f_n(z_2)$ def., assurdo.

ES. 1: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$, $f_n \to f$ unif. sui CPT., allora se ogni f_n è biolom. locale, allora o f è costante o f è biol. locale.

ES. 2: nelle stesse ipotesi, se ogni f_n è inj. e f non è costante, allora le $f_n^{-1} : f_n(\Omega) \to \Omega$ convergono unif. sui CPT. a $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ (NOTA: per HURWITZ, $f_n(\Omega) \cap f(\Omega) \neq \emptyset$ definit., e anche $f_n(\Omega)$, $f_m(\Omega)$, quindi ha senso parlare di convergenza, intendendola nella zona comune).

LEMMA DI SCHWARZ: (sì, è lo Schwarz senza la "t", non di Schwartz) se $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa con $f(0) = 0$; allora:

1. $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \Delta$;
2. $|f'(0)| \leq 1$;
3. $\exists z \neq 0 \ |f(z)| = |z| \iff |f'(0)| = 1 \iff |f(z)| = |z| \ \forall z \iff f(z) = e^{i\theta} z \ \forall z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$ (ossia f è rotazione).

DIM.: se $g(z) = f(z)/z$, allora $g \in \mathcal{O}(\Delta)$ (vedilo con le serie di potenze) e $g(0) = f'(0)$; se $z \in \Delta$ e $0 < |z| < r < 1$, per il principio del massimo:

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta| = r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta| = r} \frac{|f(\zeta)|}{r} < 1/r ;$$

facendo tendere r a 1 si ottiene $|g(z)| \leq 1$, che dimostra (1) e (2).
(3): se $|f(z)| = |z|$, allora $|g(z)| = 1$, quindi g è costante, ossia $g \equiv e^{i\theta} \rightsquigarrow f(z) = e^{i\theta} z$.

<u>AUTOMORFISMI</u>: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, si indica:

$$\mathrm{Aut}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid f(\Omega) = \Omega \text{ e } f \text{ iniett.} \} = \{ f : \Omega \to \Omega \mid f \text{ biolom.} \}.$$

<u>NOTAZIONE</u>: se $a \in \Delta$, si indica:

$$\gamma_a : \Delta \longrightarrow \Delta, \qquad z \longmapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

detta "trasformazione di Möbius".

<u>OSSERV.</u>: valgono:

1. $\gamma_a^{-1}(0) = \{a\}$;
2. $1 - |\gamma_a(z)|^2 = \dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$, e dunque $\gamma_a(\Delta) \subseteq \Delta$;
3. γ_a si estende con continuità a $\partial\Delta$;
4. γ_a è un automorfismo di Δ, e $\gamma_a^{-1}(z) = \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z} = \gamma_{-a}(z)$.

In particolare, per ogni $a \in \Delta$ esiste un automorfismo di Δ che manda a in 0 (ed è γ_{-a}); dunque $\mathrm{Aut}(\Delta)$ è transitivo ($\forall a, b \in \Delta$ $(\gamma_b^{-1} \circ \gamma_a)(a) = b$).

<u>ROTAZIONI</u>: indichiamo, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, $\rho_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z$.

<u>COROLLARIO DI SCHWARZ</u>: $\mathrm{Aut}(\Delta) = \{ \rho_\theta \circ \gamma_a \mid \theta \in \mathbb{R}, a \in \Delta \}$.

<u>OSSERV.</u>: $\{\gamma_a\}$ e $\{\rho_\theta\}$ sono sottogruppi di $\mathrm{Aut}(\Delta)$, ma $\mathrm{Aut}(\Delta)$ non è il loro prodotto diretto (ci sono più coppie che danno la stessa). [NOTA: che $\{\gamma_a\}$ sia sottogr. non ne è sicuro...]

DIM. [COROLLARIO]: se $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ con $\gamma(0) = 0$, allora $\gamma^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ con $\gamma^{-1}(0) = 0$; per Schwarz, $|\gamma'(0)| \leq 1$ e $|(\gamma^{-1})'(0)| \leq 1$ $\Rightarrow$

$$|(\gamma^{-1})'(0)| = \frac{1}{|\gamma'(0)|}$$

$\Rightarrow |\gamma'(0)| = 1 \overset{\text{SCHWARZ}}{\Longrightarrow} \gamma = \rho_\theta$ per qualche θ.

Se invece $\gamma^{-1}(0) = a$, preso $\gamma_1 \overset{\text{def}}{=} \gamma \circ \gamma_a^{-1}$, vale $\gamma_1(0) = 0$, da cui per quanto detto $\gamma_1 = \rho_\theta$, e dunque $\gamma = \rho_\theta \circ \gamma_a$.

<u>OSSERV.</u>: gli autom. di Δ sono tutti della forma $\gamma(z) = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

OSSERV.: le (2) e (3) valgono per qualsiasi $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, non solo per le γ_a.

ES.: se $f: \Delta \to \Delta$ olom. con due pt.i fissi, allora $f = \mathrm{id}_\Delta$.

ES.: se $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ con $\gamma \neq \mathrm{id}_\Delta$, allora vale una e una sola tra:

1. γ ha un unico pt. fisso in Δ e nessuno in $\partial\Delta$ ("autom. ellittici" o "rotazioni non euclidee");
2. γ non ha pt.i fissi in Δ e ne ha uno solo in $\partial\Delta$ ("aut. parabolici");
3. γ non ha pt.i fissi in Δ e ne ha esattamente 2 in $\partial\Delta$ ("aut. iperbolici").

ES.: $\mathrm{Aut}(\Delta)$ è "doppiamente transitivo" su $\partial\Delta$, ossia $\forall \zeta_1, \zeta_2, \mu_1, \mu_2 \in \partial\Delta$ $\exists \gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ t.c. $\gamma(\zeta_1) = \mu_1$ e $\gamma(\zeta_2) = \mu_2$ (a meno che $\zeta_1 = \zeta_2$ e $\mu_1 \neq \mu_2$, ovviamente).

OSSERV.: $\mathrm{Aut}(\Delta)$ non è doppiam. trans. su Δ, e non è triplamente trans. su $\partial\Delta$.

LEMMA DI SCHWARZ-PICK: se $f: \Delta \to \Delta$ olom., allora:

1. $\forall z, w \in \Delta$ $\left|\dfrac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z - w}{1 - \bar{w} z}\right|$;
2. $\forall z \in \Delta$ $|f'(z)|/_{1 - |f(z)|^2} \leq 1/_{1 - |z|^2}$;
3. $\exists z, w$ t.c. vale "=" in (1) $\iff$ $\exists z$ t.c. vale "=" in (2) $\iff$ vale "=" sempre $\iff$ $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

DIM.: applicare Schwarz a $\gamma_{f(w)} \circ f \circ \gamma_w^{-1}$.

NOTAZ.: si indica:

$$\omega : \Delta \times \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(z, w) \longmapsto \operatorname{arctanh}\left|\frac{z - w}{1 - \bar{w} z}\right| = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w} z}\right|}{1 - \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w} z}\right|}.$$

Ricordiamo che $\operatorname{arctanh} : [0, 1) \to [0, +\infty)$ ed è strettam. crescente.

COROLLARIO: se $f: \Delta \to \Delta$ olom., allora:

$$\forall z, w \in \Delta \quad \omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w),$$

con "=" per qualche $z \neq w$ se e solo se $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

<u>Osserv.</u>: ω è una distanza completa su Δ che induce la topologia euclidea. ω si dice "distanza di Poincaré" (è quella che lui ha usato per il suo modello di geometria non euclidea a infinite parallele.

LEZIONE 6: [VEDI RETRO].

LEZIONE 7: lemma di Wolff e teorema di Wolff-Denjoy.

<u>Osserv.</u>: se $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ con $f(x_0) = x_0$, per il lemma di Schwarz-Pick vale:

$$\forall r > 0 \quad f(B_\omega(z_0, r)) \subseteq B_\omega(z_0, r),$$

dove $B_\omega(z_0, r) \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \Delta \mid \omega(\zeta, z_0) < r\}$.

Se invece $f(z) \neq z \ \forall z \in \Delta$, allora c'è un punto del bordo che "si comporta come pt. o fisso". Infatti, per S.-P.:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right| \overset{f(z_0) = z_0}{\Longrightarrow} \left|\frac{f(z) - z_0}{1 - \bar{z}_0 f(z)}\right|^2 \leq \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \left|\frac{f(z) - z_0}{1 - \bar{z}_0 f(z)}\right|^2 \geq 1 - \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right|^2$$

$$\frac{(1 - |f(z)|^2)\cancel{(1 - |z_0|^2)}}{|1 - \bar{z}_0 f(z)|^2} \geq \frac{(1 - |z|^2)\cancel{(1 - |z_0|^2)}}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|1 - \bar{z}_0 f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{|1 - \bar{z}_0 z|^2}{1 - |z|^2}.$$

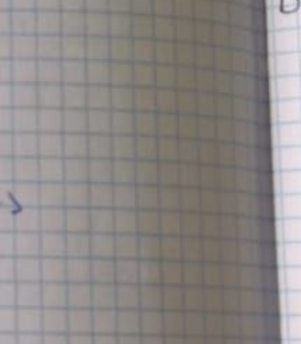
Questo vale quando c'è un $z_0 \in \Delta$ con $f(z_0) = z_0$, ma se mando z_0 al bordo...

<u>Oriciclo</u>: l'"or." di centro $\tau \in \partial\Delta$ e raggio $R > 0$ è:

$$E(\tau, R) \overset{\text{def}}{=} \left\{ z \in \Delta \;\middle|\; \frac{|1 - \bar{\tau} z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}.$$

$$\frac{|1 - \bar{\tau} z|^2}{1 - |z|^2} = \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2}$$

È quello che si ottiene facendo palle (di ω) di centro z e mandando τ al bordo. Disegno:



RECUPERO LEZIONE 6: distanza di Poincaré, trasformata di Cayley, geodetiche.

RECAP: vale:

$$\omega(z,w) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|} = \omega(0, \gamma_w(z));$$

$$f:\Delta\to\Delta \text{ olom.} \Rightarrow \omega(f(z), f(w)) \le \omega(z,w);$$

vale "=" in $z_0 \neq w_0 \iff$ vale "=" sempre $\iff f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

FATTO: vale:

$$\mathrm{Isom}(\omega) = \mathrm{Aut}(\Delta) \cup \overline{\mathrm{Aut}(\Delta)}.$$

OSSERV.: le palle di ω sono:

$$B_\omega(z_0, r) \overset{\text{def}}{=} \{ z\in\Delta \mid \omega(z, z_0) < r \},$$

quindi quelle centrate in 0 sono:

$$B_\omega(0, r) = \left\{ z\in\Delta \;\middle|\; \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|} < r \right\} = \{ z\in\Delta \mid |z| < \tanh r \} = B_E(0, \tanh r).$$

In generale, vale:

$$B_\omega(z_0, r) = B_E\left(\frac{1-(\tanh r)^2}{1-(\tanh r)^2\cdot|z_0|^2}\cdot z_0, \frac{(\tanh r)(1-|z_0|^2)}{1-(\tanh r)^2\cdot|z_0|^2} \right).$$

ω-GEODETICHE: una curva $\gamma:\mathbb{R}\to\Delta$ è una "ω-g." (FLA) se:

$$\forall t_1, t_2 \in\mathbb{R} \quad \omega(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|,$$

ossia se (moralmente) è un'isometria dalla retta al disco.

ES.: $t \mapsto (\tanh t)\, z_0/|z_0|$ è geodetica $\forall z_0 \neq 0$ (i diametri, a velocità opportuna, sono geodetiche).

ES.: con un'opportuna parametrizz., gli archi di circonf. ortogonali a $\partial\Delta$ sono geod. (sono tutte e sole le immagini di diametri tramite automorf. di Δ).

METRICA DI POINCARÉ: la dist. di Poinc. è indotta dalla metrica riemanniana data da:

$$\forall z\in\Delta, \forall v\in\mathbb{C} \quad \chi_\Delta^2(z,v) = \frac{|v|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

che in $z=0$ coincide con l'euclidea. Vale:

$$\chi_\Delta(f(z), f'(z)) = \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} = \chi_\Delta(z, 1).$$

OSSERV.: il disco di Poincaré ha curvatura gaussiana costante e negativa.

TRASFORMATA DI CAYLEY: definiamo:

$$H^+ \overset{def}{=} \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}, \quad \begin{cases} \partial H^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\} & \text{in } \hat{\mathbb{C}} \\ \partial H^+ = \mathbb{R} & \text{in } \mathbb{C} \end{cases}.$$

La "t. di C." è:

$$\Psi : \Delta \to H^+, \quad z \mapsto i \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

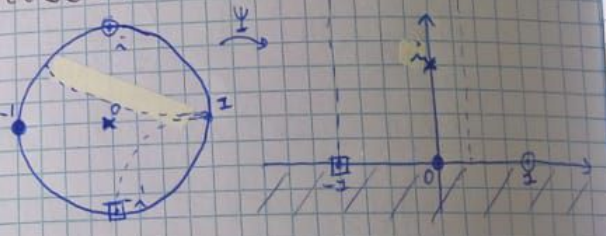
che è un biolomorfismo tra H^+ e Δ, con inversa:

$$\Psi^{-1} : w \mapsto \frac{w-i}{w+i}.$$

DIM. $[\Psi(\Delta) \subseteq H^+]$: $\operatorname{Im}(\Psi(z)) = \operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{1-z} \cdot i\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}\right) =$

$$= \operatorname{Re}\Bigg(\underbrace{\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{z-\bar{z}}{|1-z|^2}}_{\in i\cdot\mathbb{R}}\Bigg) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0.$$

$z \in \Delta \Leftrightarrow |z| < 1$



Vale:

$\Psi(0) = i$, $\Psi(-1) = 0$, $\Psi(1) = \infty$,

Ψ(geodetiche per 1) = rette verticali,

$\Psi(i) = 1$, $\Psi(-i) = -1$.

Inoltre:

$$f : H^+ \to H^+ \quad \longleftrightarrow \quad \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi : \Delta \to \Delta.$$

FATTO: vale:

$$\operatorname{Aut}(H^+) = \left\{ w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \right\};$$

(det = 1)

inoltre, l'applicazione $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}\right)$ da $SL(2,\mathbb{R})$ a $\operatorname{Aut}(H^+)$, passata a $PSL(2,\mathbb{R})$ (che è $SL(2,\mathbb{R})$ con $M \sim -M$), è un isomorfismo di gruppi tra $PSL(2,\mathbb{R})$ e $\operatorname{Aut}(H^+) \cong \operatorname{Aut}(\Delta)$.

DIM.: $\gamma \in \operatorname{Aut}(H^+) \Leftrightarrow \phi \overset{def}{=} \Psi^{-1} \circ \gamma \circ \Psi \in \operatorname{Aut}(\Delta) \Leftrightarrow \gamma = \Psi \circ \phi \circ \Psi^{-1} = \Psi \circ \left(z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right) \circ \Psi^{-1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ [conti...] $\Leftrightarrow \gamma : w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}$ per qualche a, b, c, d con $ad-bc > 0$; dividendo per $ad-bc$ abbiamo la tesi.

OSSERV.: se $\gamma \in \mathrm{Aut}(H^+)$, con $\gamma: w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}$, è un automorf. parabolico (ossia ha un unico pt. fisso sul bordo), a meno di coniugio possiamo supporre $\mathrm{Fix}(\gamma)=\{\infty\}$; ma:

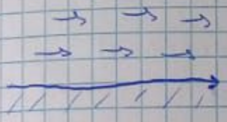
$$\gamma(\infty)=\infty \iff a/c = \infty \iff c=0,$$

quindi $\gamma: w\mapsto \frac{a}{d}w+\frac{b}{d}$. Essendo parabolico, l'equaz. $\gamma(w)=w$ non ha soluz. in $\mathbb{C}$, e questo vuol dire che $a/d=1$, quindi:

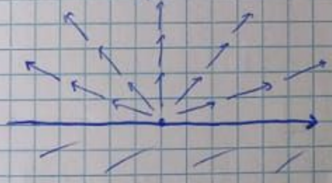
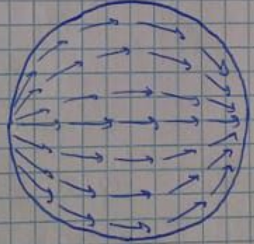
$$\gamma: w\mapsto w+\beta, \qquad \beta\in\mathbb{R}.$$

Gli autom. parabolici sono quindi tutte e sole le traslaz. parallele all'asse reale, che in Δ diventano della forma:

$$\gamma: z\mapsto \sigma_0\cdot\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0} z}, \quad \text{con } \begin{cases} \sigma_0 = \frac{2-ic}{2+ic}; \\ z_0 = \frac{ic}{2-ic}\tau \\ c\in\mathbb{R} \\ \tau\in\partial\Delta \ \text{(pt. fisso)}\end{cases}$$

 ;  .

Se invece $\gamma\in\mathrm{Aut}(H^+)$ è iperbolico, possiamo supporre $\mathrm{Fix}(\gamma)=\{0,\infty\}$; analog. a prima, otteniamo $\gamma: w\mapsto \lambda w$ con $\lambda>0$:

 ;  .

FATTO: se $f: \hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ olomorfa, allora $\exists P,Q\in\mathbb{C}[z]$ coprimi tali che:

$$f = P/Q.$$

DIM.: $\hat{\mathbb{C}}$ cpt e $Z_f = \{z\in\mathbb{C} \mid f(z)=0\}$ discreto, dunque Z_f è finito, e analog. $P_f = \{z\in\mathbb{C} \mid f(z)=\infty\}$. Sia $Z_f=\{z_1,\dots,z_n\}$ e $P_f=\{w_1,\dots,w_r\}$ (con molteplicità), e sia:

$$g(z) = \frac{(z-w_1)\cdot\ldots\cdot(z-w_r)}{(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)}\cdot f(z).$$

g non ha né zeri né poli in $\mathbb{C}$.

- Se $g(\infty)\in\mathbb{C}$, allora $g(\hat{\mathbb{C}})\subseteq\mathbb{C} \Rightarrow g$ limitata $\Rightarrow g$ costante;

- se $g(\infty)=\infty$, allora $\frac{1}{g}(\infty)=0 \Rightarrow \frac{1}{g}$ costante (come sopra) $\Rightarrow g$ costante.

OSSERV.: per calcolare $f(\infty)$, si fa:

$$f(\infty)=\lim_{w\to\infty} \frac{P(w)}{Q(w)} = \lim_{w\to 0} \frac{P(1/w)}{Q(1/w)} =$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{a_m (1/w)^m + \dots + a_1 \cdot 1/w + a_0}{b_n (1/w)^n + \dots + b_1 \cdot 1/w + b_0} = \lim_{w\to 0} \left(\frac{a_m + \dots + a_0 w^m}{b_n + \dots + b_0 w^n} \cdot w^{n-m} \right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n>m \\ a_m/b_n & \text{se } n=m \\ \infty & \text{se } n<m \end{cases}.$$

ORDINE E GRADO: si definisce:

$$\mathrm{ord}_f(\infty) \overset{\text{def}}{=} \deg Q - \deg P = n-m, \qquad \deg(f) \overset{\text{def}}{=} \max\{\deg P, \deg Q\}.$$

MOLTEPLICITÀ: sia $f(z_0)=w_0$, allora:

(ORDINE DI ANNULLAMENTO)

- se $w_0 \in \mathbb{C}$, $\delta_f(z_0) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{ord}_{f-w_0}(z_0) \geq 1$;
- se $w_0=\infty$, $\delta_f(z_0) \overset{\text{def}}{=} -\mathrm{ord}_f(z_0) \geq 1$.

TEOREMA: se $f:\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ olom. non costante, allora:

$$\forall w_0 \in \hat{\mathbb{C}} \quad \sum_{z\in f^{-1}(w_0)} \delta_f(z) = \deg f$$

DIM.: se $w_0=0$, allora:

se $f(\infty)=0$

$$\sum_{z\in f^{-1}(0)} \delta_f(z) = \sum_{z\in f^{-1}(0)\cap\mathbb{C}} \delta_f(z) + \delta_f(\infty) = \deg P + \max\{0, \deg Q - \deg P\} = \deg f.$$

(GLI ZERI IN $\mathbb{C}$ SONO GLI ZERI DEL NUMERATORE)

Se $w_0=\infty$, allora:

PERCHÉ È ∞

$$\sum_{z\in f^{-1}(\infty)} \delta_f(z) = \deg Q + \max\{0, -(\deg Q - \deg P)\} = \deg f.$$

Se $w_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, allora:

$$\deg(f-w_0) = \deg f \ \text{ e } \ f(z)-w_0 = \frac{P(z)-w_0 Q(z)}{Q(z)},$$

e ricade nel caso sopra.

COROLLARIO: vale:

$$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ \gamma : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \right\} \cong PSL(2,\mathbb{C}).$$

DIM.: $\gamma \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \Rightarrow 1 \underset{\gamma \text{ autom.}}{=} \sum_{z \in \gamma^{-1}(0)} \delta_\gamma(z) = \deg \gamma$.

OSSERV.: $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ è 3-transitivo.

DIM.: usa $0, 1, \infty$.

OSSERV.: vale:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{\gamma : z \mapsto az+b \mid a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}.$$

RECUPERO LEZIONE 13: teorema di Weierstrass.

FATTO: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua; allora f ammette una primitiva (olomorfa) in Ω se e solo se $\forall \gamma$ curva chiusa C^1 a tratti in Ω vale $\int_\gamma f\,dz = 0$.

DIM.: ($\Rightarrow$): ovvio. ($\Leftarrow$): f è olomorfa per (Cauchy–Goursat–)Morera; fissato $z_0 \in \Omega$, $\forall w \in \Omega$ sia γ_w una curva C^1 a tratti in Ω da z_0 a w. Poniamo $F(w) \overset{\text{def}}{=} \int_{\gamma_w} f\,dz$, che è ben def. per ipotesi. Si conclude con la "direttissima" (come ad AM2 per vedere che CHIUSA + SEMPL. CONN. $\Rightarrow$ ESATTA e altri risultati analoghi). Si dimostra quindi che:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i f, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f.$$

OSSERV.: abbiamo quindi un criterio per l'esistenza di primitive.

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ nella stessa comp. conn. di $\mathbb{C} \setminus \Omega$, allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c.:

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b}.$$

DIM.: se $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$, allora $g'(z) = \frac{(z-b)-(z-a)}{(z-b)^2}$ e $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{(z-b)-(z-a)}{(z-b)(z-a)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$, quindi $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Ind}(\gamma, a) - \mathrm{Ind}(\gamma, b)) = 0$; dunque g'/g ammette una primitiva f, che sarà tale che

(l'indice è costante nelle comp. conn. di $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma \supseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$)

$e^f = g$.

Osservi: ω è una distanza completa su Δ che induce la topologia euclidea. ω si dice "distanza di Poincaré" (è quella che lui ha usato per il suo modello di geometria non euclidea con infinite parallele.

LEZIONE 6: [VEDI RETRO].

LEZIONE 7: lemma di Wolff e teorema di Wolff-Denjoy.

Osservi: se $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ con $f(x_0) = x_0$, per il lemma di Schwarz-Pick vale:

$$\forall r > 0 \quad f(B_\omega(z_0, r)) \subseteq B_\omega(z_0, r),$$

dove $B_\omega(z_0, r) \overset{def}{=} \{ \zeta \in \Delta \mid \omega(\zeta, z_0) < r \}$.

Se invece $f(z) \neq z \ \forall z \in \Delta$, allora c'è un punto del bordo che "si comporta come pt.o fisso". Infatti, per S.-P.:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \overset{f(z_0) = z_0}{\Longrightarrow} \left| \frac{f(z) - z_0}{1 - \bar{z}_0 f(z)} \right|^2 \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \left| \frac{f(z) - z_0}{1 - \bar{z}_0 f(z)} \right|^2 \geq 1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|^2$$

$$\frac{(1 - |f(z)|^2)\cancel{(1 - |z_0|^2)}}{|1 - \bar{z}_0 f(z)|^2} \geq \frac{(1 - |z|^2)\cancel{(1 - |z_0|^2)}}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|1 - \bar{z}_0 f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{|1 - \bar{z}_0 z|^2}{1 - |z|^2}.$$

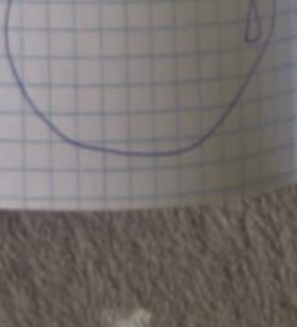
Questo vale quando c'è un $z_0 \in \Delta$ con $f(z_0) = z_0$, ma se mando z_0 al bordo...

Orociclo: l'"or." di centro $\tau \in \partial\Delta$ e raggio $R > 0$ è:

$$E(\tau, R) \overset{def}{=} \left\{ z \in \Delta \;\middle|\; \frac{|1 - \bar{\tau} z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}.$$

$$\frac{|1 - \bar{\tau} z|^2}{1 - |z|^2} = \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2}$$

È quello che si ottiene facendo palle (di ω) di centro t e mandando t al bordo. Viene:



$$\lim_{\zeta \to \tau} [\omega(z,\zeta) - \omega(0,\zeta)] = \frac{1}{2} \log \frac{|1-\bar{\tau} z|^2}{1-|z|^2}.$$

È UN TERMINE DI NORMALIZZAZIONE, PER GESTIRE IL FATTO CHE $\omega(z,\zeta) \to +\infty$, SFRUTTANDO CHE $\omega(z,\zeta) - \omega(0,\zeta)$ È LIMITATA PER LA DISUG. TRIANGOLARE.

LEMMA DI WOLFF: sia $f \in Hol(\Delta,\Delta)$ con $f(z) \neq z$ $\forall z \in \Delta$; allora $\exists!$ $\tau \in \partial\Delta$ "che si comporta come pt. fisso", ossia tale che:

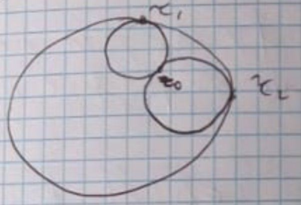
$$\frac{|1-\bar{\tau} f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{|1-\bar{\tau} z|^2}{1-|z|^2} \quad \forall z \in \Delta,$$

o equivalentemente:

$$\forall R > 0 \quad f(E(\tau,R)) \subseteq E(\tau,R);$$

inoltre, se c'è un caso di uguaglianza nella disuguaglianza sopra allora vale sempre l'uguale e f è un automorf. parabolico di pt. fisso τ.

DIM.: (UNICITÀ): se ce n'è due, τ_1 e τ_2: prendiamo R_1, R_2 tali che i due oricicli siano tangenti ($\overline{E(\tau_1,R_1)} \cap \overline{E(\tau_2,R_2)} = \{z_0\}$); allora:



$$\begin{cases} f(E(\tau_1,R_1)) \subseteq E(\tau_1,R_1) \\ f(E(\tau_2,R_2)) \subseteq E(\tau_2,R_2) \end{cases} \Rightarrow f(z_0) = z_0, \text{ assurdo.}$$

(ESISTENZA): l'idea è perturbare la funzione per creare un pt. fisso interno. Sia $r_\nu \uparrow 1$ e sia $f_\nu = r_\nu \cdot f$; allora $f_\nu(\Delta) \subseteq \Delta_{r_\nu} \subset\subset \Delta \Rightarrow \exists!$ $w_\nu \in \Delta$ t.c. $f_\nu(w_\nu) = w_\nu$; a meno di sottosucc., per compattezza $w_\nu \to \tau \in \bar{\Delta}$, allora:

$$f_\nu(w_\nu) = w_\nu \rightsquigarrow r_\nu f(w_\nu) = w_\nu;$$

se $\tau \in \Delta$, allora:

$$\begin{array}{ccc} r_\nu f(w_\nu) & = & w_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \cdot f(\tau) & = & \tau \end{array}, \text{ assurdo;}$$

quindi $\tau \in \partial\Delta$. Inoltre:

$$\frac{|1-\overline{x_\nu \tau_\nu} f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{|1-\overline{x_\nu} z|^2}{1-|z|^2}$$

$\downarrow \nu \to +\infty$ $\qquad\qquad$ $\downarrow \nu \to +\infty$

TESI.

(SE VALE L'"="): possiamo scrivere:

$$\frac{|1-\overline{\tau} z|^2}{1-|z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{\tau+z}{\tau-z}\right),$$

quindi la formula con l'"=" si può scrivere:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\tau+f(z)}{\tau-f(z)} - \frac{\tau+z}{\tau-z}\right) \leq 0;$$

per il principio del massimo, se c'è un "=" allora c'è sempre e la funzione dentro è costante:

$$\frac{\tau+f(z)}{\tau-f(z)} - \frac{\tau+z}{\tau-z} \equiv i c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui (risolvendo in "$f(z)$") si ha che f è aut. parab.

PUNTO DI WOLFF: se $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$, $f \neq id_\Delta$, si dice "pt. di W." quel punto (se esiste) di Δ tale che sia pt. fisso di f, oppure il τ del LEMMA DI WOLFF.

La formula del lemma, dunque, vale per $\tau \in \overline{\Delta}$ pt. di Wolff.

NOTAZ.: $f^2(z) = f(f(z))$, $f(z)^2 = f(z) \cdot f(z)$.

ORBITA: se $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ e $z \in \Delta$, si definisce:

$$O^+(z) = \{f^n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

È un modo di pensare a f come a un sistema dinamico discreto: come si comporta $O^+(z)$ al variare di z (o di f)?

STABILITÀ: se z_1 è "vicino" a z_2, allora $O^+(z_1)$ e $O^+(z_2)$ hanno "qualitativamente" lo stesso "comportamento".

STABILITÀ STRUTTURALE: se f_1 è "vicina" a f_2, allora hanno "qualitativamente" la stessa "dinamica".

MORALE: in Δ non c'è il caos (ma vedrò che nella sfera di Riemann sì).

TEOREMA DI WOLFF-DENJOY: sia $f \in \mathrm{Hom}(\Delta, \Delta)$ che non sia un automorf. ellittico; allora:

$$f^k \to \tau \in \overline{\Delta} \text{ pt. di Wolff, per } k \to +\infty.$$

DIM.: se $\tau \in \Delta$, a meno di automorf. $\tau = 0$ [CIOÈ: se $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ con $\gamma(0) = \tau$, presa $g \overset{\text{def}}{=} \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ vale $g(0) = 0$ e $g^n = \gamma^{-1} \circ f^n \circ \gamma$, quindi se vale per g vale per f; si dice che g ed f sono "coniugate", e dunque hanno la stessa dinamica]. Allora:

$$\forall z \in \Delta \quad |f(z)| < |z| \Rightarrow$$ (STRETTO, SENNÒ SAREBBE ELLITTICO)

$$\Rightarrow \forall r < 1 \ \exists \lambda_r \in (0,1) \text{ t.c. } \forall z \in \Delta_r \ |f(z)| \leq \lambda_r \cdot |z|$$

(analogam. alla dim. del LEMMA DI WOLFF col principio del massimo), ossia $f(\overline{\Delta_r}) \subseteq \Delta_r$, e dunque:

$$|f^2(z)| \leq \lambda_r |f(z)| \leq \lambda_r^2 |z| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f^n(z)| \leq \lambda_r^n |z| \leq \lambda_r^n \cdot r \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

dunque $f^n \to 0$ unif. sui CPT. [QUI NELLE NOTE C'È UN ERRORE]

Se invece $\tau \in \partial\Delta$, ossia f non ha pti fissi: supponiamo che $z_0 \in \Delta$ sia tale che $f^n(z_0) \to x \in \overline{\Delta}$; se fosse $x \in \Delta$, allora $f(x) = f(\lim f^n(z_0)) = \lim(f(f^n(z_0))) = \lim(f^{n+1}(z_0)) = x$, assurdo; quindi se $f^n(z_0)$ converge allora il limite deve stare sul bordo. Ma $\{f^n(z_0)\} \subseteq \overline{\Delta}$ CPT., quindi basta far vedere che τ è l'unico pt. di accumulaz. di $\{f^n(z_0)\}$ (ovvio), sia $f^{n_k}(z_0) \to \sigma$.

IDEA: prendo l'oriciclo con z_0 sul bordo; se l'immagine di E toccasse ∂E fuori da τ, avrei un pt. di uguaglianza, ossia f automorf. parabolico, per cui $f^n \to \tau$ (su H^+: $f(z) = z + c$). Altrimenti, vale:

$$\exists \lambda_R \in (0,1): \frac{|1 - \overline{\tau} f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \lambda_R \frac{|1 - \overline{\tau} z|^2}{1 - |z|^2} \quad \forall z \in \overline{E(\tau, R)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|1-\bar{\tau} f^n(z)|^2}{1-|f^n(z)|^2} \leq \lambda_R^n \cdot \frac{|1-\bar{\tau} z|^2}{1-|z|^2} \leq \lambda_R^n \cdot R \quad \forall z \in \overline{E(\tau, R)}.$$

ITERANDO

Se $f^{n_k}(z_0) \to \sigma \neq \tau$, allora definitivamente $f^{n_k}(z_0) \notin \overline{E(\tau, r)}$ [se $\sigma \in \partial\Delta$, allora non ci appartiene proprio mai]

se r è piccolo:

Ma $f^n(z_0) \in E(\tau, \lambda_R^n R) \Rightarrow f^{n_k}(z_0) \in E(\tau, \rho)$ definit., per ρ piccolo, assurdo.

LEZIONE 8: germi, spighe, fascio, prolungamento analitico lungo una curva

SPIGA: sia $a \in \mathbb{C}$; sull'insieme $\{(U, f) \mid U$ intorno di a, $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa$\}$ mettiamo la relaz. d'equiv.:

$$(U, f) \sim (V, g) \overset{\text{def}}{\iff} \exists W \text{ int. di } a \text{ t.c. } W \subseteq U \cap V \text{ e } f|_W = g|_W.$$

In particolare, non è necessario che f e g coincidano su tutto $U \cap V$ (che potrebbe avere più componenti connesse).

L'insieme quoziente si indica $\mathcal{O}_a$, detto "spiga" dei "germi" di funzione olom. in a, e un suo elemento $\underline{f}_a \overset{\text{def}}{=} [(U, f)]$ si dice "germe" di f in a.

FASCIO: il "f." dei germi di funz. ol. è:

$$\mathcal{O} \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{O}_a.$$

È definita:

$$\begin{aligned} p: \mathcal{O} &\to \mathbb{C}. \\ \underline{f}_a &\mapsto a \end{aligned}$$

GERMI DEFINITI DA UNA FUNZIONE: se $\underline{f}_a \in \mathcal{O}_a$ e $(U, f) \in \underline{f}_a$ con U aperto, si definisce:

$$\mathcal{N}(U, f) \overset{\text{def}}{=} \{\underline{f}_z \mid z \in U, \ \underline{f}_z = [(U, f)] \in \mathcal{O}_z\}.$$

FATTO: esiste un'unica topologia su $\mathcal{O}$ tale che la famiglia:

$$\{\mathcal{N}(U,f)\}_{(U,f)\in f_a}$$

sia un sist. fond. di int. aperti di f_a, per ogni $f_a \in \mathcal{O}$.
Con questa topol., $\mathcal{O}$ è di Hausdorff.

DIM.: che $\exists!$ top. si fa. Se $f_a \neq g_b$, $f_a, g_b \in \mathcal{O}$, allora:

- se $a \neq b$, sia $U \ni a$, $V \ni b$, con $U \cap V = \emptyset$, $(U,f) \in f_a$, $(V,g) \in g_b$; allora $\mathcal{N}(U,f) \cap \mathcal{N}(V,g) = \emptyset$;
- se $a = b$, siano $(U,f) \in f_a$ e $(V,g) \in g_b = g_a$, e sia $D \subseteq U \cap V$ ~~un~~ disco di centro a. Essendo $f_a \neq g_a$, necessariamente $\mathcal{N}(D, f|_D) \cap \mathcal{N}(D, g|_D) = \emptyset$; infatti, se $\exists\, h_z \in \mathcal{N}(D, f|_D) \cap \mathcal{N}(D, g|_D)$, allora $z \in D$ e $f_z = h_z = g_z$, dunque $\exists W \supseteq D$ int. di z t.c. $f|_W = g|_W$, e per prolungamento analitico $f|_D = g|_D$, ossia $f_a = g_a$, assurdo.

COROLLARIO: la topologia ristretta ad ogni $\mathcal{O}_a$ è discreta.

FATTO: $p: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ è continua, aperta ed omeom. locale.

DIM.: se $V \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $p^{-1}(V) = \{f_a \mid a \in V\} = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \text{ aperto} \\ f: W \to \mathbb{C} \text{ olom.}}} \mathcal{N}(W,f)$, che è aperto, quindi ~~p~~ p è continua.

$p(\mathcal{N}(V,f)) = V \Rightarrow p$ aperta. Inoltre, $p: \mathcal{N}(V,f) \to V$ è un omeom., dato che un'inversa è
$$V \longrightarrow \mathcal{N}(V,f)$$
$$z \longmapsto f_z$$

Tuttavia, p non è un rivestimento.

PROLUNGAMENTO ANALITICO LUNGO UNA CURVA: se $f_a \in \mathcal{O}$ e $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ curva con $\gamma(0) = a$ (continua), un "p.a." di f_a lungo γ è una curva $\tilde{\gamma}: [0,1] \to \mathcal{O}$ continua tale che $\tilde{\gamma}(0) = f_a$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

Non tutte le curve si possono sollevare a $\mathcal{O}$ (cosa che invece si varrebbe se p fosse un rivestimento).

ES.: $a=1$, $\underline{f}_a = \underline{(\sqrt{z})}_a$, $\gamma(t)=1-t$; allora $\underline{f}_a$ non ha un pr. an. lungo γ. [...]

ES.: se $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $a=\gamma(0)$, f_a, g_a date e $P\in\mathbb{C}[x,y]$ tale che $P(f_a,g_a)=0$ [SÌ, SI POSSONO FARE OPERAZ. SUI GERMI, FACENDOLE SUI RAPPRESENTANTI]; se f_a, g_a prolungabili lungo γ, con $\underline{f}_{\gamma(t)}, \underline{g}_{\gamma(t)}$ prolung., allora $P(\underline{f}_{\gamma(t)}, \underline{g}_{\gamma(t)})=0$ $\forall t$.

DIM.: l'insieme in cui è vero è sia chiuso (è luogo di zeri) che aperto (a mano).

[...] DIM.: $\underline{f}_a = \underline{(\frac{1}{z})}_a$, $\underline{g}_a = \underline{z}_a$, $P = x\cdot y-1$: per ES. precedente, dovrebbe valere $(\underline{f}_{\gamma(1)})\cdot z = 1$ anche per $z=0$.

OPERAZIONI SULLE SPIGHE: si definisce:

$$\underline{f}_a + \underline{g}_a \overset{\text{def}}{=} [(U\cap V, (f+g)|_{U\cap V})],$$

con $(U,f)\in\underline{f}_a$, $(V,g)\in\underline{g}_a$, che è ben def.;

$$\underline{f}_a \cdot \underline{g}_a \overset{\text{def}}{=} [(U\cap V, (f\cdot g)|_{U\cap V})];$$

$$\lambda\cdot\underline{f}_a \overset{\text{def}}{=} (\underline{\equiv\lambda})_a\cdot\underline{f}_a;$$

in modo analogo.

Ciascun $\mathcal{O}_a$ è un'algebra su $\mathbb{C}$, e ha un unico massimale dato da:

$$m_a \overset{\text{def}}{=} \{\underline{f}_a\in\mathcal{O}_a \mid \underline{f}_a(a)=0\}.$$

Se $\underline{f}_a\in\mathcal{O}_a$, è ben definito $\underline{f}_a(a)\in\mathbb{C}$. Inoltre, per ogni $k\in\mathbb{N}$ è ben definito $\underline{f}_a^{(k)}(a)$.

NOTAZ.: se $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ aperto, si indica $\mathcal{O}_\Omega = p^{-1}(\Omega)$.

SEZIONI: una "s." di p su Ω è una $s:\Omega\to\mathcal{O}_\Omega$ continua tale che $p\circ s=id_\Omega$, ossia $s(z)\in\mathcal{O}_z$ $\forall z\in\Omega$.

L'insieme $\mathcal{O}(\Omega)$ delle sezioni su Ω è in corrispond. biun. con $\mathrm{Hol}(\Omega,\mathbb{C})$.

DERIVATE DI GERMI: si definisce:

$$d : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$$
$$[U, f] \longmapsto [U, f'] \,.$$

Questo è un rivestimento. Moralmente, dato che la derivata di f è derivata di $f+c$ per ogni costante $c \in \mathbb{C}$, questo dà gli strati del rivestimento.

Segue che i prolungam. analitici si sollevano alle primitive, e tante altre cose belle (ad esempio, se ho una funz. su un dominio sempl. conn., la primitiva ha la stessa "$+c$" globalmente).

<u>LEMMA</u>: se $D \subset \mathbb{C}$ disco aperto, allora ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ ammette una primitiva $F \in \mathcal{O}(D)$, unica a meno di costante additiva.

DIM.: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \rightsquigarrow F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ è una primit. di f (definita su tutto D, dato che il raggio di conv. è lo stesso di f), l'UNICITÀ è ovvia (la differenza è cost., dato che è primitiva di $\equiv 0$).

DIM. [d È RIVEST.]: se $(U, f) \in f_a \in \mathcal{O}_a$ e $D \subseteq U$ disco aperto di centro a (con $(D, f|_D) \in f_a$), sia $\mathcal{P} \stackrel{def}{=} \mathcal{N}(D, f|_D)$. Per LEMMA, $\exists F \in \mathcal{O}(D)$ t.c. $F' = f|_D$; se $\forall c \in \mathbb{C}$ poniamo $\mathcal{P}_c \stackrel{def}{=} \mathcal{N}(D, F+c)$, ci basta vedere che $d^{-1}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{P}_c$. Ma:

- $d(\mathcal{P}_c) = \mathcal{P} \Rightarrow \bigcup_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{P}_c \subseteq d^{-1}(\mathcal{P})$;
- se $g_z \in d^{-1}(\mathcal{P})$, allora $z \in \mathcal{P}$ e $d(g_z) = f_z$, dunque $\exists V \subseteq D$ intorno aperto connesso di z t.c. $g'|_V = f|_V$; ma $F'|_V = f|_V$, dunque $\exists c \in \mathbb{C}$ $g|_V = F+c|_V$, ossia $g_z \in \mathcal{P}_c$.

Inoltre, $\underbrace{\mathcal{P}_c \cap \mathcal{P}_{c'} = \emptyset}_{\text{OVVIO}}$ $\forall c \neq c'$ e $d : \mathcal{P}_c \to \mathcal{P}$ è omeom. (è continua perché sì, è aperta perché $d(\mathcal{N}(U,F)) = \mathcal{N}(U, F')$, è surgettiva perché sì, è iniett. perché conserva le spighe).

<u>COROLLARIO</u>: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sempl. conn. e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora f ammette una primitiva $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ unica a meno di costante additiva.

DIM.:
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_\Omega \arrow[d, "d"] \\ \Omega \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & \mathcal{O}_\Omega \end{tikzcd}$$

Ω sempl. conn. e d rivest. $\Rightarrow \exists F : \Omega \to \mathcal{O}_\Omega$ continua t.c. $d \circ F = f$; siccome $id \stackrel{\text{def germe}}{=} p \circ f = p \circ (d \circ F) = (p \circ d) \circ F = p \circ F$,

anche F è sezione: $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Il sollevam. è unico a meno del suo valore in un pt.

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sempl. conn. e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla, allora:

1. $\exists g \in \mathcal{O}(\Omega)$ $f = e^g$, unica a meno di $+2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$;
2. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ \exists h_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ $f(z) = (h_n(z))^n \ \forall z \in \Omega$, unica a meno di $\cdot \zeta_n^k$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

DIM.: g è primitiva di f'/f; $h_n = \exp(g/n)$.

LEZIONE 9: teorema di uniformizzazione di Riemann.

TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE DI RIEMANN: sia X superf. di Riemann qualsiasi, e sia $\pi : \tilde{X} \to X$ riv. univ.; allora vale una e una sola tra:

1. $\tilde{X} \cong \hat{\mathbb{C}}$ e $X \cong \hat{\mathbb{C}}$ [CASO ELLITTICO]; (biolom. a $\hat{\mathbb{C}}$)
2. $\tilde{X} = \mathbb{C}$ e $X = \mathbb{C}$, oppure $X = \mathbb{C}^*$, oppure $X =$ toro (ossia è isomorfo a $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$) [CASO PARABOLICO];
3. $\tilde{X} = \Delta$ e X non è né $\hat{\mathbb{C}}$, né $\mathbb{C}$, né $\mathbb{C}^*$, né un toro [CASO IPERBOLICO].

TEOREMA 1: se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ dominio semplic. connesso, allora $\Omega \cong \Delta$.

TEOREMA 2: se $\Omega \subseteq\subseteq \mathbb{C}$ dominio limitato, allora esiste [un unico] $\varphi : \Delta \to \Omega$ rivestim. olom. [con $\varphi(0) = z_0$ e $\varphi'(0) > 0$].

FATTO: ogni $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ sempl. conn., allora Ω è biolom. a un dominio limitato.

DIM. [TEOR. 1]: segue da TEOR. 2 e FATTO.

DIM. [TEOR. 2]: Ω limit. $\Rightarrow$ WLOG $\Omega \subseteq \Delta$, $0 \in \Omega$.

LEMMA: se $\Omega \subsetneq \Delta$ dominio e $0 \in \Omega$, allora $\exists f : \Delta \to \Delta$ olom. tale che: • $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ e $\Omega \subseteq f(\Delta)$; • se $\Omega_1 \overset{\text{def}}{=}$ componente connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0, allora $f|_{\Omega_1} : \Omega_1 \to \Omega$ è un rivestim.; • $d_1 \overset{\text{def}}{=} \inf_{z \notin \Omega_1} |z| > \inf_{z \notin \Omega} |z| \overset{\text{def}}{=} d$.

DIM. LEMMA: sia $a \in \Delta \setminus \Omega$ e $b \in \Delta$ t.c. $b^2 = -a$ [NOTA: $0 \in \Omega$, quindi $a, b \neq 0$]; prendiamo $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ con:

$$\varphi(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \quad \psi(z) = \frac{z+b}{1+\bar{b}z}.$$

(perché lo è $z \mapsto z^2$)

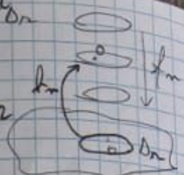
Posta $f : \Delta \to \Delta$, $z \mapsto \frac{\bar{b}}{|b|} \cdot \varphi(\psi(z)^2)$, questa è un rivestimento e $f(\Delta) = \Delta$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2|b| \cdot \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2} > 0$. Inoltre, $\varphi^{-1}(\Omega) \subseteq \Delta^*$ (perché $\varphi(0) = a \notin \Omega$) e $f|_{\Omega_1} : \Omega_1 \to \Omega$ è un rivestim. Se $d_1 = 1$, allora ok ($d_1 = 1 \iff \Omega_1 = \Delta$); se invece $d_1 < 1$, sia $z_1 \in \partial\Omega_1$ con $|z_1| = d_1$; allora $f(z_1) \notin \Omega$ (altrim. $z_1 \notin \partial\Omega_1$), e quindi $|f(z_1)| \geq d$; per Schwartz, $|f(z_1)| < |z_1| = d_1$.

DIM. TEOR. 2: (UNICITÀ): se:
$$\begin{tikzcd} & \Delta \arrow[d, "\varphi_1"] & 0 \arrow[dl, bend left] \\ \Delta \arrow[r, "\varphi_2"] & \Omega & \\ 0 \arrow[r, mapsto] & z_0 & \end{tikzcd}$$
, allora possiamo fare sollevamenti:
$$\begin{tikzcd} & \Delta \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dl, "\tilde{\varphi}_2"'] \\ \Delta \arrow[r, "\varphi_2"'] \arrow[ur, bend left, "\tilde{\varphi}_1"] & \Omega \end{tikzcd}$$
, scelti in modo che $\tilde{\varphi}_1(0) = \tilde{\varphi}_2(0) = 0$. Dunque anche $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ sono rivest. di Δ, e dunque sono automorf. di Δ con $\tilde{\varphi}_1(0) = 0$ e $\tilde{\varphi}_1'(0) > 0$. Dunque $\tilde{\varphi}_1 = id$, ossia $\varphi_1 = \varphi_2$.

(ESISTENZA): supponiamo $\Omega \subset\subset \Delta$ e $z_0 = 0 \in \Omega$; sia $\mathcal{F} \overset{def}{=} \{f \in \mathcal{Hol}(\Delta, \Delta) \mid f$ soddisfa (1) e (2) del LEMMA sopra$\}$, che è non vuoto per LEMMA; se $f \in \mathcal{F}$, sia Ω_f la comp. conn. di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0; sia $d_f = \inf_{z \notin \Omega_f} |z|$ (sappiamo che $d_f = 1 \iff \Omega_f = \Delta$). L'obiettivo è trovare f con $d_f = 1$. Abbiamo $d_f \leq 1$ $\forall f \in \mathcal{F}$; sia $d = \sup_{f \in \mathcal{F}} \{d_f\}$.

Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ t.c. $d_{f_n} \to d$; per MONTEL, a meno di sottosucc. $f_n \to f_0 \in \mathcal{Hol}(\Delta, \Delta)$ (a priori in $\mathcal{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$, ma $f_0(0) = 0$, quindi o $f_0 \equiv 0$ oppure f_0 è aperta e quindi $f_0(\Delta) \subseteq \Delta$ in quanto $f_0(\Delta) \subseteq \overline{\Delta}$). Vediamo che $f_0 \in \mathcal{F}$. Vale $f_0(0) = 0$ e $f_0'(0) \geq 0$; anzi, $f_0'(0) > 0$ (e quindi f_0 non è costante), dato che:

se $r > 0$, con $\Delta_r \subset\subset \Omega$, sia h_n l'inversa di f_n su Δ_r tale che



$h_n(0)=0$; allora $h_n \in \mathcal{H}ol(D_n, \Delta)$ e $f_n \circ h_n = id_{D_n}$; quindi per Montel $h_n \to h_0 \in \mathcal{H}ol(D_n, \Delta)$ a meno di sottosucc.; chiaramente anche $f_0 \circ h_0 = id_{D_n}$, per cui f_0 non è cost. e $f_0'(0)>0$.

Inoltre, se Ω_{f_0} è la comp. conn. di $f_0^{-1}(\Omega)$ contenente 0, vogliamo $f_0(\Omega_{f_0}) = \Omega$.

Sia $z_0 \in \Omega$ e γ curva in Ω da 0 a z_0; ricopriamo γ con un numero finito di dischi chiusi $D_0, \dots, D_k$ con $D_j \subset\subset \Omega$, $0 \in D_0$, $z \in D_k$ e $D_j \cap D_{j+1} \neq 0$ $\forall j$. Sia $h_{n,0}$ l'inversa di f_n su D_0 tale che $h_{n,0}(0)=0$; sia $h_{n,j}$ l'inversa di f_n su D_j che coincide con $h_{n,j-1}$ su $D_{j-1} \cap D_j$ (che in quanto intersez. di dischi è semplic. connesso, quindi c'è un modo univoco di proseguire).

A meno di sottosucc. $h_{n,0} \to h_{0,0} \in \mathcal{H}ol(D_0, \Delta)$; per il teorema di Vitali, $h_{n,j} \to h_{0,j} \in \mathcal{H}ol(D_j, \Delta)$ $\forall j$.

Chiaramente $f_0 \circ h_{0,j} = id_{D_j} \Rightarrow f_0 \circ h_{0,k} = id_{D_k} \Rightarrow$
$\Rightarrow f_0(h_{0,z}(z_0)) = z_0 \in f_0(\Delta)$.

Posta $\tilde{\gamma} = h_{0,j} \circ \gamma$, $\tilde{\gamma}$ è una curva continua t.c. $f_0 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(0)=0$, $\tilde{\gamma}(1) = h_{0,k}(z_0)$, quindi $h_{0,k}(z_0) \in \Omega_{f_0}$.

Infine, vediamo che $f_0|_{\Omega_{f_0}} : \Omega_{f_0} \to \Omega$ è un rivestimento.

Sia $z_0 \in \Omega$ e $D \subset\subseteq \Omega$ disco di centro z_0. Per ogni $w_0 \in$ $\in f_0^{-1}(z_0) \cap \Omega_{f_0}$ vediamo che $\exists U_{w_0} \subseteq \Omega_{f_0}$ tale che $f_0|_{U_{w_0}} : U_{w_0} \to D$ biolom. e $U_{w_0} \cap U_{w_1} = \emptyset$ se $w_0 \neq w_1$ in $f_0^{-1}(z_0)$.

Per Hurwitz, $\exists n_1 \geq 1$ t.c. $\forall n \geq n_1$ $\exists w_n \in \Delta$ con $f_n(w_n) = z_0$ e $w_n \to w_0$; in particolare, $w_n \in \Omega_{f_0}$ definitivam.

Sia $h_n : D \to \Delta$ l'inversa locale di f_n tale che $h_n(z_0) = w_n$. A meno di sottosucc., $h_n \to h_0 \in \mathcal{H}ol(D, \Delta)$ tale che $h_0(z_0) = w_0$ e $f_0 \circ h_0 = id_D$; quindi prendiamo $U_{w_0} = h_0(D)$.

Se $\tilde{w}_0 \in f_0^{-1}(z_0) \cap \Omega_{f_0}$, con lo stesso procedimento otteniamo

$\tilde{h}_0$ e $U_{\tilde{w}_0} = \tilde{h}_0(D)$. Se per assurdo $w_0 \neq \tilde{w}_0$ ed $\exists w \in U_{w_0} \cap U_{\tilde{w}_0}$, allora $w = h_0(z_1) = \tilde{h}_0(\tilde{z}_1)$ con $z_1, \tilde{z}_1 \in D \Rightarrow z_1 = f_0(h_0(z_1)) = $
$= f_0(\tilde{h}_0(\tilde{z}_1)) = \tilde{z}_1$, ossia $z_1 = \tilde{z}_1$; segue che z_1 è uno zero di $h_0 - \tilde{h}_0$, ma le $h_n - \tilde{h}_n$ non hanno zeri per n ~~abbastanza~~ abbastanza grande (perché stanno in fogli disgiunti dei rivestimenti), quindi per Hurwitz $h_0 \equiv \tilde{h}_0$, e in particolare $w_0 = \tilde{w}_0$, assurdo.

Quindi $f_0 \in \mathcal{F}$ e $d_{f_0} = d$. Se $d = 1$ ok; se $d < 1$, per LEMMA applicato a Ω_{f_0} si ottiene, per composiz., una $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ con $d_{\tilde{f}} > d$, assurdo.

DIM. [FATTO]: sia $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$; allora $z - a$ non si annulla su Ω, quindi $\exists h \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $(h(z))^2 = z - a$. Siano $z_1, z_2 \in \Omega$ tali che $h(z_1) = \pm h(z_2) \Rightarrow z_1 - a = z_2 - a \Rightarrow z_1 = z_2$, ossia h è iniett. e $h(\Omega) \cap -h(\Omega) = \emptyset$. Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $D \stackrel{def}{=} B(h(z_0), r) \subset\subseteq h(\Omega)$; allora $-D \cap h(\Omega) = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow |h(z) + h(z_0)| \geq r \quad \forall z \in \Omega \Rightarrow 2|h(z_0)| \geq r$.
È quindi ben definita:

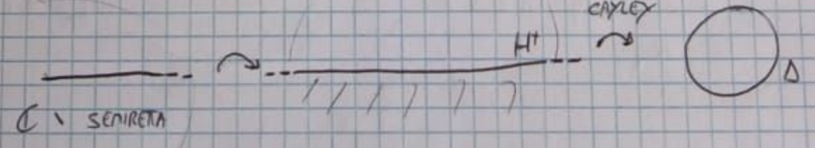
$$f(z) = \frac{r}{4} \frac{1}{|h(z_0)|} \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}.$$

f è iniett., e vale:

$$\left| \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \right| = |h(z_0)| \cdot \left| \frac{1}{h(z_0)} - \frac{2}{h(z) + h(z_0)} \right| \leq \frac{4|h(z_0)|}{r},$$

dunque $f(\Omega) \subseteq \Delta$, quindi Ω è biolom. a un dominio limit.

MORALE:



LEZIONE 10: formula generalizzata di Cauchy, eq. di Cauchy-Riemann non omogenea, primo teorema di Runge.

NOTAZIONE: se $K \subseteq \mathbb{C}$ qualsiasi, indichiamo:

$$\mathcal{O}(K) \stackrel{def}{=} \{ f|_K \mid f \in \mathcal{O}(U),\ U \supseteq K \text{ aperto} \}.$$

Vale ovviamente $\mathcal{O}(K) \subseteq C^0(K)$. Indichiamo:

$$\|f\|_K \overset{\text{def}}{=} \sup_{z\in K} |f(z)|.$$

OSSERV.: se K CPT., allora $\|\cdot\|_K$ è una norma su $\mathcal{O}(K)$.

PROBLEMA: se K CPT., $\Omega \supseteq K$ dominio [SI È SBAGLIATO: BASTA APERTO], quand'è che ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ può essere approssimata unif. su K da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$? Cioè, quand'è che $\mathcal{O}(\Omega)|_K$ è denso in $\mathcal{O}(K)$?

I problemi di questo tipo si dicono "problemi di Runge".

FORMULA GENERALIZZATA DI CAUCHY: sia $\Omega \Subset \mathbb{C}$ con $\partial\Omega$ che sia unione finita di curve di Jordan (ma basta che sia abbastanza regolare da poterci integrare sopra), e sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$ (non necess. olomorfa); allora:

$$\forall w \in \Omega \quad u(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar z}(z)}{z-w}\, \underbrace{dz \wedge d\bar z}_{\text{(LEBESGUE)}}.$$

DIM.: l'integrale di superficie è ben def. (perché $1/z$ è integrabile in un disco chiuso di centro 0: si fa in polari).

Non possiamo usare parenti di Gauss-Green, perché è un integrale improprio. Fissato $w \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < d(w, \partial\Omega)$, poniamo $\Omega_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \Omega \setminus \overline{D(w,\varepsilon)} = \{z \in \Omega \mid |z-w| > \varepsilon\}$. Se $v \in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$, per Gauss-Green:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\, d\zeta = \int_{\Omega_\varepsilon} dv \wedge d\zeta = \cancel{\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial z} dz\right)\wedge d\zeta} + \int_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar z} d\bar z\right)\wedge d\zeta =$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial \bar z} d\bar z$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \bar z}\, d\bar z \wedge dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u/\partial \bar z\,(z)}{z-w}\, d\bar z \wedge dz \Longrightarrow$$

$$v(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{u(z)}{z-w}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \bar z}(z) = \frac{\partial u/\partial \bar z\,(z)}{z-w}\right)$$

$$\Longrightarrow \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{u(z)}{z-w}\, dz = \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\, dz - \int_{\partial D(w,\varepsilon)} \frac{u(z)}{z-w} = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u/\partial \bar z\,(z)}{z-w}\, d\bar z \wedge dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D(w,\varepsilon)} \frac{u(z)}{z-w}\,dz = \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\,dz + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u/\partial \bar z\,(z)}{z-w}\,dz\wedge d\bar z$$

$$\underset{t \mapsto w+\varepsilon e^{it}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{u(w+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\cdot i\varepsilon e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} u(w+\varepsilon e^{it})\,dt.$$

Per $\varepsilon \to 0$, abbiamo:

$$i\int_0^{2\pi} \cdots = \int_{\partial\Omega} \cdots + \int_{\Omega_\varepsilon} \cdots$$

$$2\pi i\, u(w) = \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\,dz + \int_{\Omega} \frac{\partial u/\partial\bar z\,(z)}{z-w}\,dz\wedge d\bar z.$$

EQUAZIONE DI CAUCHY-RIEMANN NON OMOGENEA: quella omog. è:

$$\partial u/\partial \bar z = 0,$$

e definisce le funz. olomorfe; quella non omog. è:

$$\partial u/\partial\bar z = \varphi.$$

FATTO: se $\varphi \in C^k_c(\mathbb{C}) \overset{\text{def}}{=} \{ f \in C^k(\mathbb{C}) \mid f \text{ a supp. cpt.}\}$ e Ω è la parte interna del supporto di φ (che potrebbe essere un pelo più grande del luogo di non zeri), poniamo:

$$u(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{w-z}\cdot\varphi(z)\,dz\wedge d\bar z;$$

allora $u \in C^k(\mathbb{C})$, $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\bar\Omega)$ e $\partial u/\partial\bar z = \varphi$ in Ω.

DIM.: sia μ misura a supp. cpt. K (o equivalentemente μ sta nel duale di $C^0(K)$), e in particolare $\mu = \frac{1}{2\pi i}\varphi\,\underbrace{dz\wedge d\bar z}_{\text{LEBESGUE}}$; allora:

$$u(w) = \int \frac{1}{w-z}\,d\mu(z).$$

- u è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus K$: se $a \in \mathbb{C}\setminus K$, allora:

$$\forall z \in K \quad \frac{1}{w-z} = \frac{1}{(a-z)\left(1-\frac{a-w}{a-z}\right)} = \frac{1}{a-z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a-w}{a-z}\right)^n \text{ per}$$

$\left|\frac{a-w}{a-z}\right| < 1$, ossia per $w \in D(a,\varepsilon)$ con $0<\varepsilon<d(a,K)$;

quindi:

$$u(w)=\int \frac{1}{w-z}\,d\mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a-w)^n \int \frac{1}{(a-z)^{n+1}}\,d\mu(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (a-w)^n, \quad \text{con } c_n \overset{\text{def}}{=} \int \frac{1}{(a-z)^{n+1}}\,d\mu(z),$$

dunque u è olomorfa (tra l'altro, $u^{(n)}(a) = c_n / n!$).

- Facciamo il cambio di var. $\zeta = w - z$ ($z = w-\zeta$, $d\zeta = -dz$, $d\bar\zeta = -d\bar z$); allora:

$$u(w) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(w-\zeta)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta,$$

e quindi $u \in C^k(\mathbb{C})$ (la derivata si può portare dentro l'integrale, e $\varphi \in C^k(\mathbb{C})$).

- Vale:

$$\forall w\in\Omega \quad \frac{\partial u}{\partial \bar w}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar w}(w-\zeta)}{\zeta}\, d\zeta\wedge d\bar\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(z)}{z-w}\, dz\wedge d\bar z;$$

se applichiamo la FORM. GEN. DI CAUCHY su un disco $D \supseteq\supseteq \Omega$ (in particolare $\varphi|_{\partial D} \equiv 0$):

$$\forall w\in\Omega \quad \frac{\partial u}{\partial \bar w}(w) = \varphi(w) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\int_{\partial D}\cdots}} = \varphi(w).$$

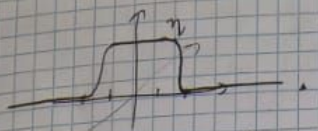
FATTO: se $K \subset\subset \mathbb{C}$ CPT., e V intorno aperto di K, allora esiste una $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno di K e $\operatorname{supp}(\psi) \subset\subset V$. ψ si dice "funzione di taglio".

DIM.: sia $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } t\le 0 \\ e^{-1/t} & \text{se } t>0 \end{cases}$:

. Vale $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $h^{(n)}(0) = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Poniamo poi:

$$\eta: \mathbb{C}\to\mathbb{R}, \quad z \mapsto \frac{h(1-|z|^2)}{h(1-|z|^2)+h(|z|^2-\frac{1}{4})},$$

che è $C^\infty(\mathbb{C})$ (il denom. non si annulla mai), ha immagine in $[0,1]$, ed è tale che $\eta|_{\overline{D(0,1/2)}} \equiv 1$, $\eta|_{\mathbb{C}\setminus D(0,1)} \equiv 0$ e $\eta > 0$ in $D(0,1)$:



Basta trovare ψ con $\psi|_K \equiv 1$, non serve $\psi|_{\text{intorno di } K} \equiv 1$ (tanto ~~al~~ ~~limite~~ poi prendo un K un pelo più grande ed è fatta). [NOTA: CI CREDO POCO...] [MA TANTO NON SERVE]

$\forall p \in K$, sia $r_p > 0$ tale che $\overline{D(p, 2r_p)} \subseteq V$; essendo K CPT.,
$\exists p_1, \dots, p_s \in K$ tali che $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} D(p_j, \frac{1}{2} r_{p_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} D(p_j, 2r_{p_j}) \stackrel{\text{def}}{=} W \subseteq V$.

Sia $g_j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ data da:
$$g_j(w) = \begin{cases} \eta\left(\frac{w - p_j}{r_j}\right) & \text{se } w \in D(p_j, 2r_{p_j}) \\ 0 & \text{se } w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(p_j, r_{p_j})} \end{cases}.$$

g_j è ben def., è $C^\infty(\mathbb{C})$ e ha immagine in $[0,1]$; inoltre,
$g \equiv 1$ su $\overline{D(p_j, \frac{1}{2} r_{p_j})}$, $g \equiv 0$ su $\mathbb{C} \setminus \overline{D(p_j, r_{p_j})}$ e $g > 0$ su $D(p_j, r_{p_j})$.

Definiamo:
$$\psi(w) = 1 - \prod_{j=1}^{s} (1 - g_j(w)).$$

ψ è $C^\infty(\mathbb{C})$; inoltre, se $w \in K$ allora $\exists j_0$ tale che $w \in D(p_{j_0}, \frac{1}{2} r_{p_{j_0}})$,
dunque $g_{j_0}(w) = 1$ e $\psi(w) = 1$. (NOTA: $\psi \equiv 1$ su un intorno di K)
Se $w \notin W$, allora $w \notin D(p_j, 2r_{p_j})$ $\forall j \Rightarrow g_j(w) = 0$ $\forall j \Rightarrow \psi(w) = 0$.

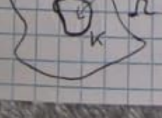
PRIMO TEOREMA DI RUNGE: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $K \subset\subseteq \Omega$ CPT., TFAE:

1. ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ è approssimabile unif. su K da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$;
2. $\Omega \setminus K$ non ha comp. conn. relativamente CPT. in Ω;
3. $\forall z \in \Omega \setminus K$ $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $|f(z)| > \|f\|_K$.

ES.:

SODDISFA (2.): $\Omega \setminus K$ ha 2 COMP. CONN., MA NESSUNA DELLE DUE È REL. CPT. IN Ω.

Invece:



COMP. CONN. DI $\Omega \setminus K$ REL. CPT. IN Ω. Se $a \in$ QUELLA COMP. CONN.,

allora $f(z)=\frac{1}{z-2}\in\mathcal{O}(K)$, e per principio del massimo dovrei avere max sul bordo, ma si approssima con $\mathcal{O}(\Omega)$ queste esplodono dentro quella comp. conn.

Dim. [P.T.R.]: $\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$: se per assurdo $\exists U$ comp. conn. rel. comp. $(U\subset\subset\Omega)$ allora $\partial U\subseteq\Omega\setminus U$ (dunque $\partial U\subseteq K$), per il principio del massimo:

$$\forall f\in\mathcal{O}(\Omega)\ \ \|f\|_{\bar U}\le\|f\|_{\partial U}\le\|f\|_K,$$ contro la (3).

$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$: per assurdo, sia U comp. conn. di $\Omega\setminus K$ con $U\subset\subset\Omega$. Sia $w\in U$ e sia $f(z)=\frac{1}{z-w}\in\mathcal{O}(K)$. Per (1), $\exists\{f_n\}\subseteq\mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|f_n-f\|_K\to 0$ (quindi $\{f_n\}$ è di Cauchy in $\mathcal{O}(K)$). Ma $f_n-f_m\in\mathcal{O}(\Omega)$, e per princ. del massimo $\{f_n\}$ è di Cauchy anche in $\mathcal{O}(\bar U\cup K)$ per qualche chiuso $\bar U$. Allora $\exists F\in C^0(\bar U)\cap\mathcal{O}(U)$ t.c. $f_n\to F$ unif. in $\bar U$ (NOTA: $\mathcal{O}(\bar U\cup K)\subseteq C^0(\bar U\cup K)$). Allora $(z-w)\cdot F(z)\equiv 1$ su K, e per il princ. del massimo applicato a $(z-w)F(z)-1$ in U deve valere $(z-w)F(z)-1\equiv 0$ su U, assurdo.

$\boxed{(1)+(2)\Rightarrow(3)}$: sia $z_0\in\Omega\setminus K$ e $D(z_0,r)\subseteq\Omega\setminus K$; le comp. conn. di $\Omega\setminus(K\cup\bar D)$ sono quelle di $\Omega\setminus K$ tranne quella a cui è stato tolto $\bar D$ (che ne, appunto, ha un buco), quindi anche $\Omega\setminus(K\cup\bar D)$ non ha comp. conn. rel. cpt. in Ω. Per (1), presa funzione che è nulla in un intorno di K e $\equiv 1$ in un intorno di $\bar D$, che sta in $\mathcal{O}(K\cup\bar D)$, è approssimabile con $f_n\in\mathcal{O}(\Omega)$ unif. su $\bar D\cup K$. Per $\varepsilon>0$, $\exists f_n\in\mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|f_n\|_K<\varepsilon$ e $|f_n(z_0)-1|<\varepsilon$, quindi, per $\varepsilon<1/2$, vale $\|f_n\|_K<|f_n(z_0)|$. [...]

LEZIONE 11: sviluppo olomorfo, secondo e terzo teorema di Runge.

[...] $(2)\Rightarrow(1)$: basta vedere che, $\forall\mu$ misura con supporto in K, vale:

$$\left(\forall f\in\mathcal{O}(\Omega)|_K\ \int f\,d\mu=0\right)\Rightarrow\left(\forall g\in\mathcal{O}(K)\ \int g\,d\mu=0\right).$$

Sia $g \in \mathcal{O}(K)$ e $U \supseteq K$ intorno aperto con bordo "buono" in cui g sia olom., e sia $\psi \in C_c^\infty(U)$ t.c. $\psi \equiv 1$ in un intorno di K. Se $w \in K$, allora:

$$g(w) = g(w)\psi(w) \overset{\text{FORM. GENER. DI CAUCHY}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{g(z)\psi(z)}{z-w}\,dz}_{0 \text{, poiché } \psi \in C_c^\infty(U)} + \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{\partial/\partial\bar z\,(g\psi)(z)}{z-w}\,dz\wedge d\bar z =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{g(z)\frac{\partial\psi}{\partial \bar z}(z)}{z-w}\,dz\wedge d\bar z =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{U\setminus K} g(z)\frac{\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}(z)}{z-w}\,dz\wedge d\bar z.$$

Dunque:

$$\int g(w)\,d\mu(w) = \frac{1}{2\pi i}\int d\mu(w)\int_{U\setminus K}\frac{g(z)\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}(z)}{z-w}\,dz\wedge d\bar z =$$

$$= \int_{U\setminus K} g(z)\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}(z)\underbrace{\left(\int \frac{1}{z-w}\,d\mu(w)\right)}_{\overset{\text{def}}{=}\varphi(z),\ z\in U\setminus K} dz\wedge d\bar z.$$

Per $z \in \mathbb{C}\setminus K$, posto $\varphi(z) = \int_K \frac{1}{z-w}\,d\mu(w)$, ci basta vedere che $\varphi \equiv 0$. Sappiamo che $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus K)$. Se $z \notin \Omega$, allora $\left(w \mapsto \frac{1}{z-w}\right) \in \mathcal{O}(\Omega)$, dunque $\varphi(z) = 0$ per ipotesi, ossia $\varphi|_{\mathbb{C}\setminus\Omega} \equiv 0$, e dunque $\varphi \equiv 0$ su tutta ~~essa~~ la comp. conn. di $\mathbb{C}\setminus K$ che interseca $\mathbb{C}\setminus\Omega$. Inoltre, $\varphi \equiv 0$ sulla comp. conn. illimitata di $\mathbb{C}\setminus K$; infatti $\int w^n\,d\mu(w) = 0$ $\forall n \geq 0$ e $\frac{1}{z-w}$ si può esprimere in serie di potenze di w che converge per $|z| > \|w\|_K$. Rimangono solo le comp. conn. rel. cpt. in Ω, ma per $(*)$ non ce ne sono.

<u>INVILUPPO OLOMORFO</u>: se $K \subseteq\subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, K cpt. e Ω aperto, si definisce:

$$\hat K_\Omega \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

<u>RIPASSO</u>: abbiamo già visto che, se $U \subseteq\subseteq \Omega$ con $\partial U \subseteq K$, allora $U \subseteq \hat K_\Omega$ per il principio del massimo.

<u>FATTO</u>: se $K \subseteq\subseteq \Omega$, allora:

1. $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\|f\|_{\hat K_\Omega} = \|f\|_K$;

2. $K \subseteq \hat{K}_\Omega$ e $\widehat{(\hat{K}_\Omega)}_\Omega = \hat{K}_\Omega$;

3. $d(w, \hat{K}_\Omega) = d(w, K)$ $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$; in partic. $d(\hat{K}_\Omega, \partial\Omega) = d(K, \partial\Omega)$;

4. $\hat{K}_\Omega$ è CPT. (dunque Ω è "olomorficamente convesso"; in più variabili non tutti gli aperti lo sono);

5. $\hat{K}_\Omega$ è l'unione di K e delle comp. conn. di $\Omega \setminus K$ relat. CPT. in Ω;

6. $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$ ha un numero finito di comp. conn., nessuna delle quali è contenuta in Ω (MORALE: $\hat{K}_\Omega$ tappa i buchi di K contenuti in Ω).

DIM.: (1): ovvio.

(2): $K \subseteq \hat{K}_\Omega$ ovvio. Se $z \in \widehat{(\hat{K}_\Omega)}_\Omega$, allora $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $|f(z)| \leq \|f\|_{\hat{K}_\Omega} = \|f\|_K \Rightarrow z \in \hat{K}_\Omega$.

(3): se $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, allora $1/(z-w) \in \mathcal{O}(\Omega)$, dunque $\forall z \in \hat{K}_\Omega$ $\left|\frac{1}{z-w}\right| \leq \max_{\zeta \in K} \left|\frac{1}{\zeta - w}\right| \Rightarrow |z-w| \geq \min_{\zeta \in K} |\zeta - w| = d(w, K)$, e facendo il minimo su $z \in \hat{K}_\Omega$: $d(w, \hat{K}_\Omega) \geq d(w, K)$. L'altra disug. segue da $K \subseteq \hat{K}_\Omega$.

(4): segue da (3): $\hat{K}_\Omega$ è limitato (usa $f = id_\Omega$), è chiuso in $\mathbb{C}$ e vale $d(\hat{K}_\Omega, \partial\Omega) > 0$.

(5): sappiamo che, se U è comp. conn. di $\Omega \setminus K$ rel. CPT. in Ω, allora $\partial U \subseteq K$ e dunque $U \subseteq \hat{K}_\Omega$. Vediamo che non c'è altro: sia $K_1 = K \cup \{\text{COMP. CONN. DI } \Omega \setminus K \text{ REL. CPT. IN } \Omega\} \subseteq \hat{K}_\Omega$. K_1 è chiuso in Ω, ed essendo chiuso in un CPT. ($\hat{K}_\Omega$) è CPT. Nessuna comp. conn. di $\Omega \setminus K_1$ è rel. CPT. in Ω (essendo $\Omega \setminus K_1 \subseteq \Omega \setminus K$). Per RUNGE 1, vale $(\hat{K}_1)_\Omega = K_1$, e dunque $\hat{K}_\Omega \subseteq (\hat{K}_1)_\Omega = K_1$ [NOTA: $H \subseteq K \Rightarrow \hat{H}_\Omega \subseteq \hat{K}_\Omega$]

[...]

ES.:

[⇐](6): sia $R>0$ t.c. $\hat{K}_\Omega \subseteq \Delta_R$. Siccome $\mathbb{C}\setminus\Delta_R$ è connesso e disgiunto da $\hat{K}_\Omega$, allora $\exists\, U_0$ comp. conn. di $\mathbb{C}\setminus\hat{K}_\Omega$ che contiene $\mathbb{C}\setminus\Delta_R$. Siano $U_1, U_2, \dots$ le altre comp. conn. di $\mathbb{C}\setminus\hat{K}_\Omega$, che sono tutte in Δ_R. Allora $U_j \not\subseteq \Omega$ $\forall j$; infatti, $\partial U_j \subseteq \hat{K}_\Omega$; se $U_j \subseteq \Omega$, allora $\overline{U}_j = U_j \cup \partial U_j \subset\subset \Omega$, contro (5).

Vediamo quindi che sono in numero finito. Sia $z_j \in U_j \setminus \Omega$ $\forall j$; se fossero infinite, $\exists\, z_{j_\nu} \to z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$; sia $\rho>0$ t.c. $D(z_0,\rho)\cap\hat{K}_\Omega = \emptyset$; allora $D(z_0,\rho)$ è connesso, dunque è contenuto in una comp. conn. di $\hat{K}_\Omega$, ma interseca ∞ comp. conn. di $\mathbb{C}\setminus\hat{K}_\Omega$, assurdo.

COROLLARIO: vale:

$$K = \hat{K}_\Omega \iff \mathcal{O}(\Omega)|_K \text{ è denso in } \mathcal{O}(K).$$

SECONDO TEOREMA DI RUNGE: siano $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ aperti; TFAE:

1. $\mathcal{O}(\Omega_2)|_{\Omega_1}$ è denso in $\mathcal{O}(\Omega_1)$;
2. nessuna comp. conn. di $\Omega_2\setminus\Omega_1$ è CPT.;
3. $\forall K \subset\subset \Omega_1$ (CPT.) vale $\hat{K}_{\Omega_1} = \hat{K}_{\Omega_2}$;
4. $\forall K \subset\subset \Omega_1$ (CPT.) vale $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$;
5. $\forall K \subset\subset \Omega_1$ (CPT.) vale $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ CPT.

Se queste condiz. valgono, allora (Ω_1, Ω_2) si dice "coppia di Runge".

COROLLARIO: se Y sp. top. di Hausd. localm. CPT., $X \subseteq Y$ chiuso e L comp. conn. CPT. di X. Allora esiste un sist. fond. di intorni $\{U\}$ di L rel. CPT. in Y tali che $\partial U \cap X = \emptyset$.

DIM. [S.T.R.]: (1) ⇒ (4): $\hat{K}_{\Omega_1} \subseteq \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ è ovvio. Se $z_0 \in \Omega_1 \setminus \hat{K}_{\Omega_1}$, vogliamo vedere che $z_0 \notin \hat{K}_{\Omega_2}$. Essendo $z_0 \notin \hat{K}_{\Omega_1}$, $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, $\exists \varepsilon>0$ t.c. $|f(z_0)| > \|f\|_K + \varepsilon$; per (1.), $\exists F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|F-f\|_{K\cup\{z_0\}} < \varepsilon/2 \Rightarrow |F(z_0)| > |f(z_0)| - \varepsilon/2 > \|f\|_K + \varepsilon/2 > \|F\|_K \Rightarrow z_0 \notin \hat{K}_{\Omega_2}$.

(3) ⇒ (4) ⇒ (5): OVVIO

(5) ⇒ (1): siano $K' = \hat{K}_{\Omega_2} \cap K_1$ e $K'' = \hat{K}_{\Omega_2} \setminus \Omega_1$; K' e K'' sono CPT. per

ipotesi, $K' \supseteq K$, e $K' \cap K'' = \emptyset$. Siano $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ e $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\hat{K}_{\Omega_2})$ definita da: $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in K' \\ 1 & \text{se } z \in K'' \end{cases}$. Allora, per RUNGE 1, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|F - \tilde{f}\|_{\hat{K}_{\Omega_2}} < \varepsilon$, dunque $\|F - f\|_K < \varepsilon$.

$$\boxed{\text{SITUAZIONE: } (1) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5). \quad \overset{\Uparrow}{(3)}}$$

$(1, 4, 5) \Rightarrow (3)$: per (4), $K' = \hat{K}_{\Omega_1}$. Basta vedere che $K'' = \emptyset$. Se $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\hat{K}_{\Omega_2})$, $\tilde{f}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in K' \\ 1 & \text{se } z \in K'' \end{cases}$ allora $\exists F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|F - \tilde{f}\|_{\hat{K}_{\Omega_2}} < \varepsilon$. Se $\exists z_0 \in K''$, allora $1/2 < |F(z_0)| \leq \|F\|_{\hat{K}_{\Omega_2}} = \|F\|_K < 1/2$, assurdo.

$(2) \Rightarrow (3)$: sia U comp. conn. di $\Omega_2 \setminus K$ rel. CPT. in Ω_2; essendo $\partial U \subseteq K \subseteq \Omega_1$, $L = U \setminus \Omega_1$ è CPT. in Ω_2. Se per assurdo $a \in L$ (cioè $L \neq \emptyset$), sia C la comp. conn. di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ contenente a; allora $C \cup U$ è connesso, ma U era la comp. conn. di $\Omega_2 \setminus K$ contenente $\Omega_2 \setminus \Omega_1$, dunque $C \subseteq U$; dunque C rel. CPT. in Ω_2, contro l'ipotesi. Dunque $L = \emptyset \Rightarrow U \subseteq \Omega_1 \Rightarrow \bar{U} \subseteq \Omega_1$ e $U \subseteq \hat{K}_{\Omega_1}$.

$(3) \Rightarrow (2)$: sia L comp. conn. di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ rel. CPT. in Ω_2; vogliamo vedere che $L = \emptyset$. Per il COROLLARIO (con $Y = \Omega_2$ e $X = \Omega_2 \setminus \Omega_1$), $\exists U$ intorno di L rel. CPT. in Ω_2 con $\partial U \subseteq \Omega_1$. Per il principio del max., $\widehat{\partial U}_{\Omega_2} \supseteq U$ e dunque $\widehat{\partial U}_{\Omega_2} \supseteq L$; per (3) vale $\widehat{\partial U}_{\Omega_2} = \widehat{\partial U}_{\Omega_2} \subseteq \Omega_1$, dunque $L = \emptyset$.

TERZO TEOREMA DI RUNGE: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ha $\{C_\alpha\}$ per componenti connesse ed è tale che $\forall \alpha$ $c_\alpha \in C_\alpha$, con $\{c_\alpha\} = E$ discreto; allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si può approssimare uniformem. sui CPT. con funzioni razionali con poli in E.

LEZIONE 12: terzo teorema di Runge, teorema di Malgrange, teorema di Mittag-Leffler

TERZO TEOREMA DI RUNGE (DETTO BENE): se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ha $\{C_\alpha\}$ per componenti connesse, e se $E \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme discreto costituito da esattamente un punto in ogni

C_α compatta, allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ può essere approssimata unif. sui CPT di Ω da funzioni razionali che abbiano per poli solamente punti di E.

In particolare, se nessuna C_α è CPT allora si può approssimare con funzioni raz. senza poli (cioè con polinomi).

DIM.: "$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G$ funz. raz. con poli in E t.c. $\|f - G\|_K < \varepsilon$" è la tesi.

Se $L = \hat{K}_\Omega$, $\mathbb{C} \setminus L$ ha una comp. conn. illimitata U_0 e un numero finito di comp. conn. limitate $W_1, \dots, W_r \not\subseteq \Omega$. Ogni W_j interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$, dunque interseca (e contiene) una C_{α_j} CPT. Sia $\{a_j\} = E \cap C_{\alpha_j} \subseteq W_j$.

Posto $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \supseteq \Omega \supseteq L$, le comp. conn. di $\Omega_0 \setminus L$ sono U_0 e $W_j \setminus \{a_j\}$, e in particolare nessuna di esse è rel. CPT. in Ω_0; per RUNGE 2:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists F \in \mathcal{O}(\Omega_0) \quad \|f - F\|_L < \delta.$$

OSSERV.: se f non è mai nulla in L, allora $\exists \eta > 0$ tale che $\min_{z \in L} |f(z)| > \eta$; dunque se $\delta < \eta/2$ abbiamo $F(z) \neq 0$ $\forall z \in L$ ($|f(z) - F(z)| < \delta \Rightarrow |F(z)| > |f(z)| - \delta > \eta/2$), dunque F non si annulla in un intorno di L.

Sia $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{j,n} (z - a_j)^n$ lo sviluppo di Laurent di F in a_j, e sia $g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{j,n} (z - a_j)^n$; allora $g_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_j\})$. Possiamo scrivere F come:

$$F = h + g_1 + \dots + g_r, \quad \text{per qualche } h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Esiste dunque un $P \in \mathbb{C}[z]$ t.c. $\|h - P\|_L < \delta$; dette:

$$g_{j,N}(z) = \sum_{n=-N}^{-1} c_{j,n} (z - a_j)^n,$$

allora esiste $N >> 1$ t.c. $\|g_j - g_{j,N}\| < \delta$ $\forall j$, e ci basta porre:

$$G \overset{\text{def}}{=} P + g_{1,N} + \dots + g_{r,N};$$

in questo modo $\|F-G\|_L < (p+1)\delta \Rightarrow \|f-G\|_L < (p+2)\delta$, e con $\delta < \varepsilon/_{p+2}$ abbiamo la tesi.

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, allora $\mathbb{C}[z]$ è denso in $\mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha comp. conn. CPT.

DIM.: ($\Rightarrow$) per RUNGE 2 (con $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_2 = \mathbb{C}$);
($\Leftarrow$) per RUNGE 3.

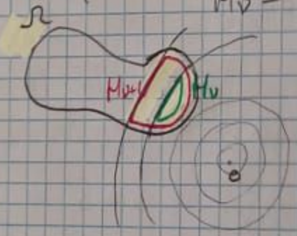
LEMMA: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, allora $\exists K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ tali che:

1. $\forall \nu$ K_ν CPT. in Ω;
2. $\forall \nu$ $K_\nu \subseteq \mathring{K}_{\nu+1}$;
3. $\Omega = \bigcup_\nu K_\nu$;
4. $\widehat{(K_\nu)}_\Omega = K_\nu$ $\forall \nu$.

$\left.\right\}$ "ESAUSTIONE IN CPT."

DIM.: definiamo:

$$H_\nu \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \Omega \mid |z| \leq \nu,\ d(z, \partial\Omega) \geq 1/\nu \}.$$



Gli H_ν soddisfano (1), (2) e (3). Poniamo $K_1 \overset{\text{def}}{=} \widehat{(H_1)}_\Omega$; esiste H_{ν_1} t.c. $K_1 \subseteq \mathring{H}_{\nu_1}$, per cui poniamo $K_2 \overset{\text{def}}{=} \widehat{(H_{\nu_1})}_\Omega$; e così via.

TEOREMA DI MALGRANGE: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, allora $\exists u \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi.$$

OSSERV.: u non è unica (basta sommarle un'olomorfa).

DIM. [TEOREMA]: se $K \subset\subset \Omega$ CPT., allora $\exists v \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\partial v/\partial \bar{z} = \varphi$ in un intorno di K (infatti, sia $\alpha \in C^\infty_c(\Omega)$ con $\alpha \equiv 1$ in un int. di K; si applica il risultato ad $\alpha\varphi$).
Prendendo $\{K_\nu\}$ come nel LEMMA, e $v_\nu \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $\partial v_\nu/\partial \bar{z} = \varphi$ in un int. di K_ν, in particolare:

$$v_{\nu+1} - v_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu).$$

Per RUNGE 1, $\exists h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|v_{\nu+1} - v_\nu - h_\nu\|_{K_\nu} < 2^{-\nu}$.

Poniamo:

$$u_\nu \overset{def}{=} v_\nu + \overbrace{\sum_{\mu \geq \nu} (v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu)}^{\text{CONVERGE A UNA FUNZ. IN } \mathcal{O}(K_\nu)} - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu ;$$

questa definizione dà una $u \in C^\infty(\Omega)$ indipendente da ν:

$$v_\nu + \sum_{\mu \geq \nu} (v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu = v_\nu + v_{\nu+1} - v_\nu - h_\nu +$$

$$+ \sum_{\mu \geq \nu+1} (v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu = v_{\nu+1} + \sum_{\mu \geq \nu+1} (v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu) +$$

$$- \sum_{\mu=1}^{\nu} h_\mu \implies u_{\nu+1}|_{K_\nu} \equiv u_\nu|_{K_\nu} .$$

Vale:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big|_{K_\nu} = \frac{\partial v_\nu}{\partial \bar z}\Big|_{K_\nu} = \varphi|_{K_\nu} ,$$ che è la tesi.

TEOREMA DI MITTAG-LEFFLER: (che poi è l'amante della moglie di Nobel ... anche se non è vero) sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subseteq \Omega$ discreto e, $\forall a \in E$, sia $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$; allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ tale che $f - p_a \in \mathcal{O}(\Omega)$, ossia $f - p_a$ è olom. anche in a, $\forall a \in E$.

DIM.: sia $\{K_\nu\}$ come nel LEMMA e sia $g_\nu = \sum_{a \in E \cap K_\nu} p_a$, che è una somma finita (potessi farla infinita, sarei a posto). Vale:

$$g_{\nu+1} - g_\nu = \sum_{a \in (K_{\nu+1} \setminus K_\nu) \cap E} p_a \in \mathcal{O}(K_\nu).$$

Per RUNGE, $\exists h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|g_{\nu+1} - g_\nu - h_\nu\|_{K_\nu} < 2^{-\nu}$. Poniamo:

$$f_\nu \overset{def}{=} g_\nu + \sum_{\mu \geq \nu} (g_{\mu+1} - g_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu \in \mathcal{O}(K_\nu \setminus E);$$

come prima, f non dipende da ν, quindi $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$.

Preso $a \in E$, se ν è tale che $a \in E \cap K_\nu$ allora:

$$f - p_a = \underbrace{(g_\nu - p_a)}_{\in \mathcal{O}((\mathbb{C} \setminus E) \cup \{a\})} \mod \mathcal{O}(K_\nu) \implies f - p_a \in \mathcal{O}_a .$$

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subseteq \Omega$ discreto e, $\forall a \in E$, U_a è intorno di a e $\varphi_a \in \mathcal{O}(U_a \setminus \{a\})$, allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ t.c. $f - \varphi_a \in \mathcal{O}_a$ $\forall a \in E$.

DIM: prendiamo p_a = la parte princip. di φ_a in a e applichiamo M-L a $\{p_a\}$.

GENERALIZZANDO: se $E \subseteq \Omega$ discreto e $m: E \to \mathbb{Z}$, vogliamo una $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ con zeri/poli i pt.i di E con ordine il corrispondente m, e nessun altro zero/polo. Dunque:

$$f \in \mathcal{O}^*_{\text{mai nulla}}(\Omega \setminus E), \quad (z-a)^{-m(a)} f(z) \text{ è olom. mai nulla vicino ad } a, \ \forall a \in E.$$

Si dice "problema di Weierstrass".

TEOREMA DI WEIERSTRASS: sì, si può fare.

FATTO: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $K \subseteq \Omega$ cpt. con $K = \hat{K}_\Omega$, e sia $f \in \mathcal{O}(K)$ mai nulla su K e sia $\varepsilon > 0$; allora $\exists F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla su Ω tale che $\|f - F\|_K < \varepsilon$.

DIM: $K = \hat{K}_\Omega \Rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ ha una comp. conn. illim. U_0 e $U_1, \dots, U_r \not\subseteq \Omega$ comp. conn. limitate. Scegliamo $a_j \in U_j \setminus \Omega$. Allora possiamo supporre che f sia razionale mai nulla in un int. di K, diciamo:

$$f(z) = c \cdot \prod_{\nu=1}^{d} (z - b_\nu)^{m_\nu},$$

con $c \in \mathbb{C}^*$, $m_\nu \in \mathbb{Z}^* (= \{\pm 1\})$, $b_\nu \in \mathbb{C} \setminus K$ $\forall \nu$.

Sia $R > 0$ t.c. $K \subseteq \Delta_R$, e in particolare $a_0 \overset{\text{def}}{=} R \in U_0$. Poniamo $A_j = \{\nu \mid b_\nu \in U_j\}$. Scriviamo:

$$f(z) = c \cdot G(z) \cdot (z-R)^{n_0} \cdot \prod_{j=0}^{r} \prod_{\nu \in A_j} \left(\frac{z - b_\nu}{z - a_j} \right)^{m_\nu},$$

dove:

$$G(z) = \prod_{j=1}^{r} (z - a_j)^{n_j}, \quad n_j = \sum_{\nu \in A_j} m_\nu.$$

Allora $G \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $G(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$. Ovviamente $z - R$ non si annulla in Δ_R, dunque $\exists \varphi_0 \in \mathcal{O}(\Delta_R)$ t.c. $z - R = e^{\varphi_0}$.

LEMMA: dato che b_ν e a_j appartengono alla stessa comp. conn. di $\mathbb{C} \setminus K$, allora esiste $\varphi_{\nu,j} \in \mathcal{O}(K)$ t.c. $\frac{z - b_\nu}{z - a_j} = \exp(\varphi_{\nu,j}(z))$.

Per LEMMA, in un intorno di K possiamo scrivere:

$$f(z) = c \cdot G(z) \cdot e^{h(z)}.$$

Per RUNGE, $\forall \delta > 0\ \exists H \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|h - H\|_K < \delta$, e dunque:
$$F(z) \overset{def}{=} c \cdot G(z) \cdot e^{H(z)} \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ è mai nulla e}$$
$$\|F - f\|_K < \varepsilon \text{ per } \delta \text{ sufficientem. piccolo.}$$

LEZIONE 13: [VEDI RETRO]

LEZIONE 14: funzioni olomorfe in più variabili, problema di Levi.

NOTAZIONI: indichiamo:

- $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
- $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $z^\alpha \overset{def}{=} z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| \overset{def}{=} \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! \overset{def}{=} \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$;
- $z_j = x_j + i y_j$.

OSSERV.: valgono (volendo, sono anch'esse notazioni):

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j}\right); \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}\right);$$

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j; \qquad d\bar z_j = dx_j - i\, dy_j;$$

$$\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j; \qquad \bar\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar z_j} d\bar z_j;$$

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n = \left(\tfrac{1}{2i}\right)^n d\bar z_1 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar z_n \wedge dz_n;$$

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2.$$

OSSERV.: vale $d = \partial + \bar\partial$, ossia:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j\right) = \partial f + \bar\partial f.$$

RIPASSO: un "dominio" è un aperto connesso.

DOMINIO (CON BORDO DI CLASSE) C^k: se $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un "dominio (con bordo di classe) C^k" è un $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio della forma:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\},$$

dove $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^k e $\operatorname{grad} \rho$ non si annulla in $\partial\Omega = \{\rho(z) = 0\}$.

DIM.: $\gamma \in Aut(\hat{\mathbb{C}}) \Rightarrow 1 \underset{\gamma \text{ autom.}}{=} \sum_{z \in \gamma^{-1}(0)} \delta_\gamma(z) = \deg \gamma$.

OSSERV.: $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ è 3-transitivo.

DIM.: usa $0, 1, \infty$.

OSSERV.: vale:

$$Aut(\mathbb{C}) = \{\gamma : z \mapsto az+b \mid a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}.$$

RECUPERO LEZIONE 13: teorema di Weierstrass.

FATTO: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua; allora f ammette una primitiva (olomorfa) in Ω se e solo se $\forall \gamma$ curva chiusa C^1 a tratti in Ω vale $\int_\gamma f\, dz = 0$.

DIM.: ($\Rightarrow$): ovvio. ($\Leftarrow$): f è olomorfa per (Cauchy–Goursat–)Morera; fissato $z_0 \in \Omega$, $\forall w \in \Omega$ sia γ_w una curva C^1 a tratti in Ω da z_0 a w. Poniamo $F(w) \overset{def}{=} \int_{\gamma_w} f\, dz$, che è ben def. proprio per ipotesi. Si conclude con la "direttissima" (come ad AM2 per vedere che CHIUSA + SEMPL. CONN. $\Rightarrow$ ESATTA e altri risultati analoghi). Si dimostra quindi che:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i f, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f.$$

OSSERV.: abbiamo quindi un criterio per l'esistenza di primitive.

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ nella stessa comp. conn. di $\mathbb{C} \setminus \Omega$, allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c.:

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b}.$$

DIM.: se $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$, allora $g'(z) = \frac{(z-b)-(z-a)}{(z-b)^2}$ e $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{(z-b)-(z-a)}{(z-b)(z-a)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$, quindi $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\, dz = 2\pi i \left(Ind(\gamma, a) - Ind(\gamma, b)\right) = 0$ (l'indice è costante nelle comp. conn. di $\mathbb{C} \setminus Im\,\gamma \supseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$); dunque g'/g ammette una primitiva f, che sarà tale che

$e^f = g$.

Osserv.: sia $\{u_n\}$ succ. di funz. olomorfe e limitate definite su $S \subseteq \mathbb{C}$ tale che $\sum |u_n|$ converg. unif. in S; allora:

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n(z))$$

converge unif. in S, e vale:

$$f(z_0) = 0 \iff \exists\, n \geq 1 \text{ t.c. } u_n(z_0) = -1.$$

Teorema di Weierstrass: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subseteq \Omega$ discreto, $k: E \to \mathbb{Z}$ qualsiasi, allora $\exists f \in \mathcal{M}(\Omega)$ t.c. $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$, f mai nulla su $\Omega \setminus E$ e:

$$(z-a)^{-k(a)} f(z)$$

è olomorfa e mai nulla vicino ad a, $\forall a \in E$.

Dim.: se E è finito basta prendere $f(z) = \prod_{a \in E} (z-a)^{k(a)}$. Altrimenti, sia $\{K_\nu\}$ un esaustione di Ω in cpt. (con K_ν cpt., $K_\nu \subseteq \mathring{K}_{\nu+1}$, $\bigcup K_\nu = \Omega$ e $\widehat{(K_\nu)}_\Omega = K_\nu$). Poniamo $F_\nu(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{a \in E \cap K_\nu} (z-a)^{k(a)}$. Allora $F_{\nu+1}/F_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu)$ ed è mai nulla in K_ν, dunque per Runge $\exists\, g_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla tale che $\left\| \frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} - g_\nu \right\|_{K_\nu} < \delta_\nu / (1+2^{\nu+1})$, dove $\delta_\nu = \min_{z \in K_\nu} \left| \frac{F_{\nu+1}(z)}{F_\nu(z)} \right| > 0$; su $\forall z \in K_\nu$ si ha che $|g_\nu(z)| \geq \left| \frac{F_{\nu+1}}{F_\nu}(z) \right| - \frac{\delta_\nu}{1+2^{\nu+1}} \geq$
$\geq \delta_\nu - \frac{\delta_\nu}{1+2^{\nu+1}} = \frac{2^{\nu+1}\delta_\nu}{1+2^{\nu+1}}$.

Poniamo $h_\nu = (g_\nu)^{-1}$ e osserviamo che:

$$\left\| \frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} h_\nu - 1 \right\|_{K_\nu} = \left\| \frac{1}{g_\nu} \left(\frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} - g_\nu \right) \right\| \leq \frac{1+2^{\nu+1}}{2^{\nu+1}\delta_\nu} \cdot \frac{\delta_\nu}{1+2^{\nu+1}} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Definiamo $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo:

$$f = F_\nu \cdot \prod_{\mu \geq \nu} \left(\frac{F_{\mu+1}}{F_\mu} h_\mu \right) \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu \quad \text{su } K_\nu.$$

Allora $f \in \mathcal{M}(K_\nu)$ (si ha) con poli e zeri descritti da k (si ha). Come in Mittag-Leffler, f non dipende da ν.

Corollario: sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$; allora esistono $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tali che $f = g/h$.

DIM.: $E = \{\text{poli di } f\}$; $k : E \to \mathbb{Z}$ con $k(a) = -\operatorname{ord}_a(f)$; sia $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ data da Weierstrass; allora $hf \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow g = hf$ funziona.

FATTO: $E \subseteq \Delta$ è il luogo di zeri di una funzione olomorfa limitata se e solo se $\sum_{a \in E} (1 - |a|)$ converge.

FUNZIONI SINGOLARI: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $X \subseteq \partial\Omega$ chiuso e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, f è "sing." lungo X se $\forall \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ con $\gamma([0,1)) \subseteq \Omega$ e $\gamma(1) \in X$ il germe $f_{\gamma(0)}$ non è prolungabile lungo γ, cioè:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \; ; \; \begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d] \\ {[0,1)} \arrow[r] \arrow[ur, "f_{\gamma(0)}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}.$$

TEOREMA: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\partial\Omega$ è singolare per f.

RECUPERO LEZIONE 15: funzioni olomorfe in più variabili.

OSSERV.: Consideriamo l'equazione:

$$\bar\partial u = \psi;$$

in una variabile, diventa $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \psi$, e per ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ esiste una $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ che la soddisfa. Non è detto che u sia a supporto CPT: se $\operatorname{supp} u \subseteq D(0,R)$, allora:

$$0 = \int_{|z|=R} u(z)\, dz = \int_{|z|<R} du \wedge dz = \int_{|z|<R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar z} d\bar z \right) \wedge dz =$$

$$= \int_{|z|<R} \frac{\partial u}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz = \int_{|z|<R} \psi \, d\bar z \wedge dz,$$

che dipende solo da ψ e in generale è non nullo.

In $n \geq 2$ variabili, l'equaz. diventa $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar z_j} d\bar z_j = \psi$; se $\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, d\bar z_j$, allora l'equaz. è risolubile se e solo se:

$$\forall l, k \quad \frac{\partial \psi_l}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar z_l} \quad \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_l \, \partial \bar z_k} \right),$$

dato che $\bar\partial \circ \bar\partial = 0$.

TEOREMA: sia $n \geq 2$ e siano $\psi_1, \dots, \psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ tali che:

Per RUNGE, $\forall \delta > 0$ $\exists H \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\|h - H\|_K < \delta$, e dunque:

$$F(z) \overset{\text{def}}{=} c \cdot G(z) \cdot e^{H(z)} \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ è mai nulla e}$$

$$\|F - f\|_K < \varepsilon \text{ per } \delta \text{ sufficientem. piccolo.}$$

LEZIONE 13: [VEDI RETRO]

LEZIONE 14: funzioni olomorfe in più variabili, problema di Levi.

NOTAZIONI: indichiamo:

- $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
- $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $z^\alpha \overset{\text{def}}{=} z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! \overset{\text{def}}{=} \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$;
- $z_j = x_j + i y_j$.

OSSERV.: valgono (volendo, sono anch'esse notazioni):

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j}\right); \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}\right);$$

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j; \qquad d\bar{z}_j = dx_j - i\, dy_j;$$

$$\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j; \qquad \bar{\partial} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j;$$

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n = \left(\tfrac{1}{2i}\right)^n d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_n;$$

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

OSSERV.: vale $d = \partial + \bar{\partial}$, ossia:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j\right) = \partial f + \bar{\partial} f.$$

RIPASSO: un "dominio" è un aperto connesso.

DOMINIO (CON BORDO DI CLASSE) C^k: se $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un "dominio (con bordo di classe) C^k" è un $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio della forma:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\},$$

dove $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^k e $\operatorname{grad} \rho$ non si annulla in $\partial\Omega = \{\rho(z) = 0\}$.

ES.: $B^n \subseteq \mathbb{C}^n$, $B^n = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\|^2 < 1 \} = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \underbrace{\|z\|^2 - 1}_{\rho(z)} < 0 \}$;

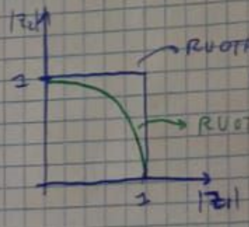
$\rho(z) = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 - 1 = x_1^2 + y_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_n^2 - 1$;

$\operatorname{grad} \rho(z) = 0 \iff z = 0 \notin \partial B^n = \{ \|z\|^2 = 1 \}$.

OSSERV.: chiedere che grad ρ non si annulli su $\partial\Omega$ implica che $\partial\Omega$ è una varietà reale di classe C^k e dimensione $2n-1$.

POLIDISCO UNITARIO: si definisce:

$$\Delta^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\Delta \times \ldots \times \Delta}_{n \text{ volte}} = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|^2 < 1 \} \subseteq \mathbb{C}^n.$$



RUOTANDO QUESTO SI OTTIENE Δ^2 (CHE QUINDI HA DELLE PARTI PIATTE).

RUOTANDO QUESTO SI OTTIENE B^2.

TEOREMA DI POINCARÉ: B^n e Δ^n non sono biolomorfi.

NOTAZIONI: se $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$ e $\underline{r} \in (\mathbb{R}^+)^n$, definiamo:

$$B(z_0, r) \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - z_0\| < r \};$$

$$P(z_0, \underline{r}) \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - (z_0)_j| < r_j \ \forall j = 1, \ldots, n \};$$

quest'ultimo si dice "polidisco" di centro z_0 e "poliraggio" $\underline{r}$. Vale:

$$P(z_0, \underline{r}) = D((z_0)_1, r_1) \times \ldots \times D((z_0)_n, r_n).$$

FUNZIONI OLOMORFE: $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, è "olomorfa" se:

- [DEF. 1] $\forall j, \forall z_1, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_n$ $\zeta \mapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ è olomorfa dove definita ("olomorfa separatamente in ciascuna variabile");
- [DEF. 2] $\forall j, \forall z_1, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_n$ $\zeta \mapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ è C^1 dove definita e vale $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0 \ \forall j$ (ossia $\overline{\partial} f \equiv 0$, che è l'"equaz. di Cauchy-Riemann"); [...]

NOTAZIONE: $P(z_0, r) \overset{\text{def}}{=} P(z_0, (r, \ldots, r))$.

[...] • [DEF. 3] $\forall z^\circ \in \Omega \ \exists r > 0$ t.c. $P(z^\circ, r) \subseteq \Omega$ e $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^\circ)^\alpha$ $\forall z \in P(z^\circ, r)$, per qualche serie assolutamente convergente $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^\circ)^\alpha$ (con $c_\alpha \in \mathbb{C}$) ("analitica complessa");

• [DEF. 4] $\forall j$, $\forall z_1, \dots, \xi_j, \dots, z_n$ $\xi \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, \xi, z_{j+1}, \dots, z_n)$ è C^0 dove definita, f è localm. limitata e vale:

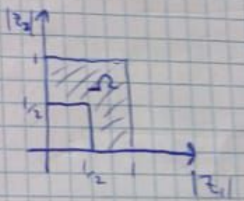
$$\forall z^\circ \in \Omega \ \exists r > 0 \quad \begin{cases} P(z^\circ, r) \subseteq \Omega \\ f(z) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{|z_1 - z_1^\circ| = r} \cdots \int_{|z_n - z_n^\circ| = r} \dfrac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\xi_n - z_n)} \, d\xi_1 \dots d\xi_n \end{cases}$$

NOTAZIONE: indichiamo:

$$|z - z^\circ| = r \overset{def}{\iff} \begin{cases} |z_1 - z_1^\circ| = r \\ \vdots \\ |z_n - z_n^\circ| = r \end{cases} ; \qquad \xi - z \overset{def}{=} (\xi_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\xi_n - z_n).$$

TEOREMA: le quattro definizioni sono equivalenti.

FENOMENO DI HARTOGS: definiamo $\Omega = \Delta^2 \setminus \overline{P(0, 1/2)}$.
Il "teorema di Hartogs" dice che ogni $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estende olomorficamente a tutto Δ^2.



DIM.: fissiamo $z_1 \in \Delta$ e poniamo $u_{z_1}(z_2) \overset{def}{=} u(z_1, z_2)$;
u_{z_1} è olomorfa in z_2 {in un disco o in un anello, a seconda di dov'è messo z_1} $\Rightarrow u_{z_1}(z_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z_1) \cdot z_2^n$, con:

$$a_n(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_2| = 3/4} \frac{u(z_1, \xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi.$$

In particolare, se a_n è olom. in z_1 e se $n < 0$ e $\frac{1}{2} < |z_1| < 1$, allora $a_n(z_1) = 0$ (perché a quel punto u_{z_1} è definita (e olomorfa) su un disco e non ha singolarità) $\Rightarrow a_n \equiv 0$ se $n < 0$ (perché $a_n \equiv 0$ su un aperto) $\Rightarrow u(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_1) \cdot z_2^n$ è olomorfa in Δ^2.

PROBLEMA DI LEVI: (che non è Levi-Civita) caratterizzare i domini di $\mathbb{C}^n$ che sono il dominio naturale di definizione di una funzione olomorfa.

PUNTI ESSENZIALI: un $P \in \partial\Omega$ (Ω dominio) si dice "essenziale" se $\exists\, u \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\forall \Omega_2$ aperto contenente P, $\forall \Omega_1 \subseteq \Omega \cap \Omega_2$ ($\Omega_1 \neq \emptyset$) $\nexists\, \tilde{u} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\tilde{u}|_{\Omega_1} \equiv u|_{\Omega_1}$.

Moralmente, un pt. ess. è un punto per cui ci sono funzioni che non si estendono oltre P.

DOMINIO DI OLOMORFIA: un dom. $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è "d. di ol." se ogni $P \in \partial\Omega$ è essenziale (ossia se $\exists\, u \in \mathcal{O}(\Omega)$ che funzioni per ogni P, cioè se Ω è il dominio naturale di definizione di u, come vedremo).

FATTO: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora f non ha zeri isolati ($\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$).

DIM.: se 0 fosse zero isolato, allora $\frac{1}{f}$ sarebbe olom. in un $P(0,r) \setminus \overline{P(0,\frac{r}{2})}$ ma non estendibile a $P(0,r)$, assurdo per Hartogs.

OSSERV.: $\{f=0\}$ ha "dimensione" complessa $n-1$.

ES.: $\sum_{n \geq 0} (z_1+z_2)^n$ converge in $\{|z_1+z_2|<1\}$ che non è limitato.

ES.: $\sum_{n \geq 0} (z_1 \cdot z_2)^n$ converge in $\{|z_1 \cdot z_2|<1\}$, che non è limitato.

ES.: $\sum_{n \geq 0} (z_1)^n$ converge in $\Delta \times \mathbb{C}$.

PROBLEMA: caratterizzare i domini di convergenza delle serie di potenze.

TEOREMA DI SERRE-EHRENPREISS: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio e $K \subset\subset \Omega$ cpt. tale che $\Omega \setminus K$ sia ancora un dominio (cioè sia connesso); allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ si estende olomorf. a tutto Ω, ossia la restrizione $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ è surgettiva.

LEZIONE 15: [VEDI RETRO].

LEZIONE 16: [VEDI RETRO].

LEZIONE 17: inviluppo logaritmico, convessità olomorfica.

INVILUPPO CONVESSO: se $L \subseteq \mathbb{C}^n$, l'"inv. conv." di L è il più piccolo convesso contenente L, ossia l'intersez. dei convessi contenenti L. È una definiz. reale, più che complessa.

DIM.: $E = \{$poli di $f\}$; $k : E \to \mathbb{Z}$ con $k(a) = -\mathrm{ord}_a(f)$; sia $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ data da Weierstrass; allora $hf \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow g = hf$ funziona.

FATTO: $E \subseteq \Delta$ è il luogo di zeri di una funzione olomorfa limitata se e solo se $\sum_{a \in E} (1 - |a|)$ converge.

FUNZIONI SINGOLARI: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $X \subseteq \partial\Omega$ chiuso e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, f è "sing." lungo X se $\forall \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ con $\gamma([0,1)) \subseteq \Omega$ e $\gamma(1) \in X$ il germe $f_{\gamma(0)}$ non è prolungabile lungo γ, cioè:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d] \\ {[0,1)} \arrow[r] \arrow[ur, "f_{\gamma(0)}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}.$$

TEOREMA: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\partial\Omega$ è singolare per f.

RECUPERO LEZIONE 15: funzioni olomorfe in più variabili.

OSSERV.: Consideriamo l'equazione:

$$\bar\partial u = \psi;$$

in una variabile, diventa $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \psi$, e per ogni $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ esiste una $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ che la soddisfa. Non è detto che u sia a supporto CPT: se supp $u \subseteq D(0,R)$, allora:

$$0 = \int_{|z|=R} u(z)\, dz = \int_{|z|<R} du \wedge dz = \int_{|z|<R} \left(\frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar z} d\bar z \right) \wedge dz =$$

$$= \int_{|z|<R} \frac{\partial u}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz = \int_{|z|<R} \psi \, d\bar z \wedge dz,$$

che dipende solo da ψ e in generale è non nullo.

In $n \geq 2$ variabili, l'equaz. diventa $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar z_j} d\bar z_j = \psi$; se $\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, d\bar z_j$, allora l'equaz. è risolubile se e solo se:

$$\forall l, k \quad \frac{\partial \psi_l}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar z_l} \quad \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_l \partial \bar z_k} \right),$$

dato che $\bar\partial \circ \bar\partial = 0$.

TEOREMA: sia $n \geq 2$ e siano $\psi_1, \dots, \psi_n \in C^\infty_c(\mathbb{C}^n)$ tali che:

$\forall 1 \le h \le n, \forall 1 \le k \le n$ $\quad \frac{\partial \psi_h}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar z_h}$;

se $\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \, d\bar z_j$, allora esiste $u \in C^\infty_c(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial u = \psi$.

DIM.: poniamo: $u_j(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)}{\zeta - z_j} \, d\zeta \wedge d\bar\zeta$.

Vogliamo far vedere che:

- $\bar\partial u_j = \psi$ (e si verifica a mano, derivando sotto il segno di integrale, sfruttando le condizioni di compatibilità, facendo un cambio di variabile e usando la formula di Cauchy non omogenea applicata a un disco abbastanza grande);
- u_j è a supporto CPT. (poiché $\frac{\partial u_j}{\partial \bar z_\ell} = \psi_\ell \equiv 0$ PER $\|z\| >> 1$, u_j è olomorfa per $\|z\| >> 1$; inoltre $u_j \equiv 0$ non appena $|z_i| >> 1$, con $i \neq j$, per definiz. di u_j (in dimensione 1 non lo posso fare); quindi $u_j \equiv 0$ sulla comp. conn. illimitata di $\mathbb{C}^n \setminus \operatorname{supp} \psi_j$, per cui u_j ha supporto CPT.);
- u_j non dipende da j ($u_j - u_h$ è olom. su tutto $\mathbb{C}^n$ (di sicuro lo è separatamente in ogni variabile) ed è $\equiv 0$ per $\|z\| >> 1$, dunque è $\equiv 0$ ovunque).

DIM. [TEOR. DI SERRE-EHRENPREISS]: lo schema (che è tipico in più var. complesse) è:

1. trovare un'estensione C^∞ $\hat f$ tale che $\bar\partial \hat f = \psi \neq 0$ in generale;
2. prendere u "buona" tale che $\bar\partial u = \psi$;
3. l'estensione cercata è $\tilde f = \hat f - u$.

Sia $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C}^n)$ tale che $\varphi \equiv 0$ in un intorno U di $K \subseteq U \subset\subset \Omega$ e $\varphi \equiv 1$ in un intorno W di $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ tale che $\mathbb{C}^n \setminus W$ sia limitato.

Poniamo:

$$\hat f(z) = \begin{cases} \varphi \cdot f & \text{in } \Omega \setminus K \\ 0 & \text{in } U \end{cases} \quad \text{(ben def.)};$$

allora $\hat f \in C^\infty(\Omega)$. Poniamo $\psi = \bar\partial \hat f$.
Allora $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C}^n)$, dato che $\operatorname{supp} \psi$

per costruzione è contenuto in $\underbrace{\mathbb{C}^n \setminus W}_{\text{(LIMITATO)}} \Subset \Omega$. Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial u = \psi$ e con $u \equiv 0$ vicino a $\partial\Omega$, e sia $\tilde f = \hat f - u$. Chiaramente $\bar\partial \tilde f \equiv 0 \Rightarrow \tilde f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ma $\tilde f \equiv \hat f \equiv f$ in un intorno di $\partial\Omega$, ed essendo $\Omega \setminus K$ connesso, per il principio di identità $\tilde f = f$ su $\Omega \setminus K$. [NOTA: "buona" = a supporto cpt.]

FUNZIONI OLOMORFE IN PIÙ VARIABILI: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olom. ("$f \in \mathcal{O}(\Omega)$") se $\forall z^\circ \in \Omega$ $\exists P(z^\circ, r) \subseteq \Omega$ t.c.:

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^\circ)^\alpha \text{ con converg. assoluta in } P(z^\circ, r).$$

LEMMA DI ABEL: sia $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \subseteq \mathbb{C}$ e siano $\rho_1, \dots, \rho_n > 0$ t.c. $\exists M > 0$ per cui $|c_\alpha| \cdot \rho_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{\alpha_n} \leq M$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$; allora:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^\circ)^\alpha \text{ conv. ass. in } P(z^\circ, \rho),$$

con $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$. Inoltre, $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\beta} (z - z^\circ)^\alpha \text{ conv. ass. in } P(z^\circ, \rho),$$

dove si intende:

$$\frac{\partial}{\partial z_\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z_1^{\beta_1} \cdots \partial z_n^{\beta_n}} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial z_\beta}(z - z^\circ)^\alpha = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}(z - z^\circ)^{\alpha-\beta} & \text{se } \beta \leq \alpha \\ 0 & \text{se } \exists j \text{ t.c. } \beta_j > \alpha_j \end{cases}.$$

COROLLARIO: $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$ e vale:

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial f}{\partial z_\alpha}(z^\circ)(z - z^\circ)^\alpha.$$

COROLLARIO: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora $\bar\partial f \equiv 0$.

DIM.: $f(z) - f(z^\circ) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z^\circ)(z_j - z_j^\circ) + O(\|z - z^\circ\|^2)$ ($f(z) - f(z^\circ)$ è $\sum_{j=1}^{+\infty} P_j(z - z^\circ)$, con P_j polinomio omogeneo di grado j con coeff. $\frac{\partial^j f}{\partial z_\alpha}(z^\circ)$, $|\alpha| = j$). Ora derivo e calcolo in z°.

PRINCIPIO DI IDENTITÀ: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale

che $\{f=0\}$ abbia parte interna non vuota, allora $f \equiv 0$.

DIM.: sia $F_\alpha = \{\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = 0\}$ e sia $E = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}^n} F_\alpha$. Allora E è chiuso non vuoto (contiene $\{f=0\}$), ed è aperto: se $z^0 \in E$, per il primo COROLLARIO lo sviluppo in serie di f in z^0 è $\equiv 0$, quindi $f \equiv 0$ in un intorno U di z_0, da cui $U \subseteq E$.

COROLLARIO: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora f è olomorfa separatamente in ogni variabile.

FORMULA DI CAUCHY: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $P(z^0, \underline{r}) \subset\subset \Omega$, allora:

$$\forall z \in P(z^0, \underline{r}) \quad f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z^0)^{\underline{1}}} \, d\zeta,$$

con $\underline{1} = (1, \dots, 1)$. Il dominio di integrazione $\{|\zeta - z^0| = \underline{r}\}$ si dice "bordo di Šilov" di $P(z^0, \underline{r})$, ed è (strettam.) più piccolo di $\partial P(z^0, \underline{r})$ (fossimo in $\mathbb{R}^n$, P sarebbe un cubo e il b. di Šilov sarebbero i suoi vertici).

DIM.: basta usare la formula di Cauchy sulle singole variabili.

FORMULA DI CAUCHY PER TUTTE LE DERIVATE: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $P(z^0, \underline{r}) \subset\subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, allora:

$$\forall z \in P(z^0, \underline{r}) \quad \frac{\partial f}{\partial z_\alpha}(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta - z^0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}} \, d\zeta.$$

COROLLARIO: sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ continua in ogni variabile e local. limit. tale che $\forall z^0 \in \Omega \; \exists \underline{r} \in (\mathbb{R}^+)^n$ t.c. $P(z^0, \underline{r}) \subset\subset \Omega$ e valga la formula di Cauchy per $f(z)$ $\forall z \in P(z^0, \underline{r})$; allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

DIM.: analoga a quella in dimensione 1: si scrive:

$$\frac{1}{(\zeta - z)^{\underline{1}}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(z - z^0)^\alpha}{(\zeta - z^0)^{\alpha+1}},$$

e si usa l'ipotesi scambiando serie e integrale, poi si conclude con Abel.

COROLLARIO DI OSGOOD: se f local. limit. e separatam. (in ogni var.) olom., allora

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

RECUPERO LEZIONE 16: teoremi vari in più variabili, domini di convergenza

DIM. [OSGOOD]: sia $z^0 \in \Omega$ e sia $\underline{r} \in (\mathbb{R}^+)^n$ t.c. $P(z^0, \underline{r}) \subset\subset \Omega$. Allora:

(n VOLTE CAUCHY IN UNA VAR.)

$$\forall z \in P(z^0, \underline{r}) \quad f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int_{|\zeta_2 - z_2^0| = r_2} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \cdots$$

$$\cdots \int_{|\zeta_n - z_n^0| = r_n} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n} f(\zeta) \underset{\text{(FUBINI)}}{=} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta - z^0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dunque possiamo usare il COROLLARIO precedente.

COROLLARIO: se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ è tale che $\bar{\partial} f = 0$, allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

DIM.: $\bar{\partial} f = 0 \Rightarrow f$ olom. in ogni var., $f \in C^1 \Rightarrow f$ loc. lim.

DISUGUAGLIANZE DI CAUCHY: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z^0 \in \Omega$ e $\underline{r} \in (\mathbb{R}^+)^n$, tale che $P(z^0, \underline{r}) \subset\subset \Omega$, allora:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z^0) \right| \leq \frac{\alpha!}{\underline{r}^\alpha} M(\underline{r}),$$

dove:

$$M(\underline{r}) \overset{\text{def}}{=} \sup_{|\zeta - z^0| = \underline{r}} f(\zeta).$$

DIM.: vale

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z^0) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{f(z^0 + \underline{r} e^{i\underline{\theta}})}{(\underline{r} e^{i\underline{\theta}})^{\alpha+1}} \cdot i^n \left(\prod_{j=1}^n r_j e^{i\theta_j} \right) d\theta_1 \cdots d\theta_n =$$

$$= \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{f(z^0 + \underline{r} e^{i\underline{\theta}})}{\underline{r}^\alpha e^{i(\alpha_1\theta_1 + \cdots + \alpha_n\theta_n)}} d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

e da qui si chiude facilmente.

COROLLARIO DI LIOUVILLE: ogni $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ limitata è costante.

DIM.: analoga a quella in una variabile.

TEOREMA DELL' APPLICAZIONE APERTA: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è non costante, allo-

ra è aperta.

DIM: sia $z^0 \in U \subseteq \Omega$, con U intorno aperto convesso. f non cost. $\Rightarrow f|_U \not\equiv f(z^0)$. Sia $\tilde{z}^0 \in U$ con $f(z^0) \neq f(\tilde{z}^0)$ e sia $D \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{C} \mid z^0 + \zeta(\tilde{z}^0 - z^0) \in U\} \subseteq \mathbb{C}$. Sia $g \in \mathcal{O}(D)$ data da:

$$g(\zeta) = f(z^0 + \zeta(\tilde{z}^0 - z^0)).$$

Allora $g(0) \neq g(1)$ e g olom. $\Rightarrow g(D)$ intorno aperto di $g(0) = f(z^0)$ e $g(D) \subseteq f(U)$.

FATTO: se $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ dominio limitato e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante, allora:

$$|f(z)| \leq \sup_{x \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{\zeta \to x \\ \zeta \in \Omega}} |f(\zeta)| \quad \forall z \in \Omega.$$

DIM: sia $M = \sup \limsup |f(\zeta)|$. Se $M = +\infty$ ok. Se $M < +\infty$, sia $\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ data da:

$$\varphi(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } x \in \Omega \\ \limsup\limits_{\substack{\zeta \to x \\ \zeta \in \Omega}} |f(\zeta)| & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

φ è SCS $\Rightarrow$ ha massimo (per Weiers.) $\Rightarrow \varphi(\bar{\Omega})$ limit. $\Rightarrow f(\Omega) \subset\subset \mathbb{C}$. Chiamiamo $D = f(\Omega)$.

Sia $\tau \in \partial D$ e siano $\zeta_\nu \to \tau$ e $z_\nu \in \Omega$ t.c. $\zeta_\nu = f(z_\nu)$. Allora a meno di sottosucc., $z_\nu \to x \in \bar{\Omega}$. Se $x \in \Omega$, allora per continuità $\tau = f(x) \in D$, assurdo; quindi $x \in \partial\Omega$, dunque $|\tau| = \lim_{\nu \to +\infty} |f(z_\nu)| \leq \limsup\limits_{\substack{\zeta \to x \\ \zeta \in \Omega}} |f(\zeta)| \leq M$, per cui $\partial D \subseteq \overline{B^1(0, M)}$, ma D è aperto connesso (è immagine di un connesso), perciò $D \subseteq B^1(0, M)$ (aperto).

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z^0 \in \Omega$ tale che $|f(z)| < |f(z^0)|$ in un intorno di z^0, allora f è costante.

DIM: usa FATTO applicato a una $B(z^0, r) \subset\subset \Omega$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS: se $\{f_\nu\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ converge unif. sui CPT. a una $f : \Omega \to \mathbb{C}$, allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e vale:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_\nu}{\partial z^\alpha} \longrightarrow \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

TEOREMA DI MONTEL: sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$; allora:

$\mathcal{A}$ CPT. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ chiuso e limit. unif. sui CPT.

DIM.: ($\Leftarrow$): come in una var.
($\Rightarrow$): CPT. $\Rightarrow$ chiuso. Se $K \subset\subset \Omega$ CPT., sia $V_K : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ dato da $V_K(f) = \max_{z \in K} |f(z)|$. V_K è continua, dunque $V_K(\mathcal{A})$ è limitato.

TEOREMA DI VITALI: sia $\{f_\nu\} \in \mathcal{O}(\Omega)$ limitata unif. sui CPT. tale che $\{z^0 \in \Omega \mid \{f_\nu(z^0)\}$ converge$\}$ abbia parte interna non vuota. Allora f_ν converge unif. sui CPT a qualche $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

DIM.: la stessa che in una var.

DOMINI DI CONVERGENZA DI SERIE DI POTENZE: indichiamo con $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ le serie formali di potenze e con $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ quelle che convergono in un intorno di 0. Se $F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$, il suo "dom. di conv." è la componente connessa contenente 0 della parte interna di $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_\alpha| \cdot |z^\alpha| < +\infty\}$.

Inoltre:

$$\mathcal{C}(F) \neq \emptyset \Leftrightarrow F \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

INSIEMI CIRCOLARI: $S \subseteq \mathbb{C}^n$ è "circ." se:

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall z \in S \quad e^{i\theta} \cdot z \in S.$$

INSIEMI REINHARDT: $S \subseteq \mathbb{C}^n$ è "Rein." se:

$$\forall \theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi], \forall z \in S \quad (e^{i\theta_1} \cdot z_1, \dots, e^{i\theta_n} \cdot z_n) \in S.$$

INSIEMI CIRCOLARI COMPLETI: $S \subseteq \mathbb{C}^n$ è "c.c." se:

$$\forall \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \overline{\Delta}, \forall z \in S \quad (\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in S$$

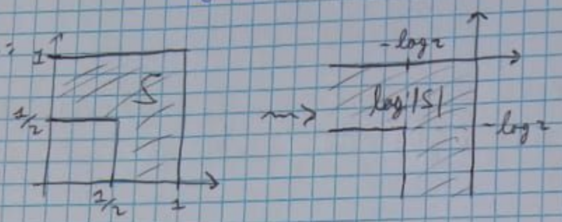
OSSERV.: se $F \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$, allora $\mathcal{C}(F)$ è circolare completo, e in particolare è connesso. Inoltre, per il lemma di Abel vale:

$$\mathcal{C}(F) = \mathrm{int}\left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_\alpha| \cdot |z^\alpha| < +\infty \right\}.$$

IMMAGINE LOGARITMICA: se $S \subseteq \mathbb{C}^n$, l'"imm. l." di S è:

$$\log|S| \overset{\text{def}}{=} \{ (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \mid z \in S,\ z_j \neq 0\ \forall j = 1, \dots, n \}.$$

ES.:



CONVESSITÀ LOGARITMICA: $S \subseteq \mathbb{C}^n$ è "logaritmicamente convesso" se $\log|S|$ è convesso (in $\mathbb{R}^n$).

TEOREMA: se $F \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$, allora $\mathcal{C}(F)$ è log. conv.

DIM.: siano $w, w' \in \mathcal{C}(F) \setminus \{0\}$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $P(0, |w| + \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}(F)$ e $P(0, |w'| + \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}(F)$ (si intende $|w| + \varepsilon = (|w_1| + \varepsilon, \dots, |w_n| + \varepsilon)$, e analog. $|w'| + \varepsilon$). Se $F = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$, per disug. di Cauchy $\exists\, C > 0$ t.c.:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |a_\alpha| \leq \frac{C}{\max\{(|w| + \varepsilon)^\alpha, (|w'| + \varepsilon)^\alpha\}}.$$

La funzione (reale) $t \mapsto a^t b^{1-t}$ è convessa $\forall a, b > 0$, quindi $\forall t \in [0,1]$, $\forall j = 1, \dots, n$ $\max\{(|w_j| + \varepsilon)^{\alpha_j}, (|w'_j| + \varepsilon)^{\alpha_j}\} = (\max\{|w_j| + \varepsilon, |w'_j| + \varepsilon\})^{\alpha_j} \geq$
$\geq ((|w_j| + \varepsilon)^t (|w'_j| + \varepsilon)^{1-t})^{\alpha_j} \geq$ ~~[illegible]~~ $(|w_j|^t |w'_j|^{1-t} + \varepsilon')^{\alpha_j}$ per un
(CONVESSITÀ) opportuno $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$; infatti, $(a + \varepsilon)^t (b + \varepsilon)^{1-t} - a^t b^{1-t}$ ~~[illegible]~~ è continua e strettam. positiva in $[0,1]$ (ed ε' è il suo minimo). Quindi:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |a_\alpha| \leq \frac{C}{\prod_{j=1}^n (|w_j|^t |w'_j|^{1-t} + \varepsilon')^{\alpha_j}} \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_\alpha| \cdot \prod_{j=1}^n (|w_j|^t |w'_j|^{1-t})^{\alpha_j} \leq \tilde{C} \Rightarrow \quad \text{(LEMMA DI ABEL)}$$

$$\Rightarrow (|w_1|^t |w'_1|^{1-t}, \dots, |w_n|^t |w'_n|^{1-t}) \in \mathcal{C}(F) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(\log|w_1|, \dots, \log|w_n|) + (1-t)(\log|w'_1|, \dots, \log|w'_n|) \in \log|\mathcal{C}(F)|.$$

PUNTI ESSENZIALI: un $P \in \partial\Omega$ (Ω dominio) si dice "essenziale" se $\exists\, u \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $\forall \Omega_2$ aperto contenente P, $\forall \Omega_1 \subseteq \Omega \cap \Omega_2$ ($\Omega_1 \neq \emptyset$) $\nexists\, \tilde{u} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\tilde{u}|_{\Omega_1} \equiv u|_{\Omega_1}$.

Moralmente, un pt. ess. è un punto per cui ci sono funzioni che non si estendono oltre P.

DOMINIO DI OLOMORFIA: un dom. $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è "d. di ol." se ogni $P \in \partial\Omega$ è essenziale (ossia se $\exists\, u \in \mathcal{O}(\Omega)$ che funzioni per ogni P, cioè se Ω è il dominio naturale di definizione di u, come vedremo).

FATTO: se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora f non ha zeri isolati ($\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$).

DIM.: se 0 fosse zero isolato, allora $\frac{1}{f}$ sarebbe olom. in un $P(0,r) \setminus \overline{P(0,\frac{r}{2})}$ ma non estendibile a $P(0,r)$, assurdo per Hartogs.

OSSERV.: $\{f=0\}$ ha "dimensione" complessa $n-1$.

ES.: $\sum_{n\geq 0} (z_1+z_2)^n$ converge in $\{|z_1+z_2|<1\}$ che non è limitato.

ES.: $\sum_{n\geq 0} (z_1 \cdot z_2)^n$ converge in $\{|z_1 \cdot z_2|<1\}$, che non è limitato.

ES.: $\sum_{n\geq 0} (z_1)^n$ converge in $\Delta \times \mathbb{C}$.

PROBLEMA: caratterizzare i domini di convergenza delle serie di potenze.

TEOREMA DI SERRE-EHRENPREISS: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio e $K \subset\subset \Omega$ cpt. tale che $\Omega \setminus K$ sia ancora un dominio (cioè sia connesso); allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ si estende olomorf. a tutto Ω, ossia la restrizione $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ è surgettiva.

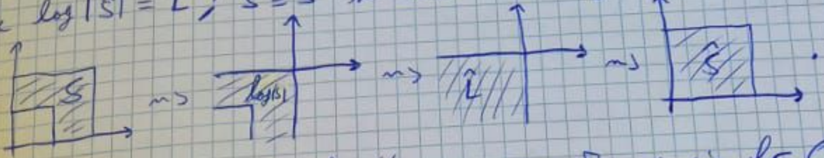
LEZIONE 15: [VEDI RETRO].

LEZIONE 16: [VEDI RETRO].

LEZIONE 17: inviluppo logaritmico, convessità olomorfica.

INVILUPPO CONVESSO: se $L \subseteq \mathbb{C}^n$, l'"inv. conv." di L è il più piccolo convesso contenente L, ossia l'intersez. dei convessi contenenti L, è una definiz. reale, più che complessa.

INVILUPPO LOGARITMICO: sia $S \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio di Reinhardt, $\hat{L}$ inv. convesso (in $\mathbb{R}^n$) di $\log|S|$ e $\hat{S} \subseteq \mathbb{C}^n$ l'unico Reinhardt tale che $\log|\hat{S}| = \hat{L}$; $\hat{S} \supseteq S$ si dice "inv. log." di S.



FATTO: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dom. di Reinhardt, con $0 \in \Omega$, e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$; allora l'espansione in serie di f in 0 converge (unif. sui CPT.) in $\hat{\Omega}$. Se Ω non di Reinhardt, non è nemmeno detto che converga in Ω (lo fa localmente, non necess. globalmente con la stessa serie).

DIM.: per $j \in \mathbb{Z}^+$, sia Ω_j la comp. conn. di $\{z \in \Omega \mid d(z, \partial\Omega) > \|z\|/j\}$ contenente 0. Ovviam. $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$. Fissato $j \in \mathbb{Z}^+$ e $z \in \Omega_j$, allora $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mapsto f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)$, con $|\zeta_1| = \dots = |\zeta_n| = 1 + 1/j$, va in un punto di Ω_j (perché $\|(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) - z\| \le \|z\|/j$); possiamo quindi definire:

$$(*) \qquad f_z(w) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi i)^n} \cdot \int_{|\zeta_1| = \dots = |\zeta_n| = 1 + 1/j} \frac{f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)}{(\zeta_1 - w_1) \cdot \ldots \cdot (\zeta_n - w_n)} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n .$$

Allora $f_z \in \mathcal{O}(P(0, 1 + 1/j))$.

Scegliendo z con $\|z\| << 1$, vale $(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in \Omega$ $\forall \zeta \in \overline{P(0, 1 + 1/j)}$. Dalla formula di Cauchy per f otteniamo che $f(z) = f_z(1, \dots, 1)$, dunque per il principio di identità $f(z) = f_z(1, \dots, 1)$ su tutto Ω_j (non solo per $\|z\| << 1$).

Per w contenuto in un CPT. di $P(0, 1 + 1/j)$, sviluppando in serie il denomin. di $(*)$ otteniamo lo sviluppo in serie di f_z in 0. Il coeff. a_α di w^α è:

$$a_\alpha(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1| = \dots = |\zeta_n| = 1 + 1/j} \frac{f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)}{\zeta^{\alpha + 1}} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n .$$

Vale $f_z(w) = \sum_\alpha a_\alpha(z) \cdot w^\alpha$ $\forall z \in \Omega_j$, $\forall w \in P(0, 1+1/j)$. Se z è piccolo, allora $f_z(1,\dots,1) = f(z) = \sum_\alpha 1/\alpha! \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0) \cdot z^\alpha$, dunque $a_\alpha(z) = 1/\alpha! \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0) \cdot z^\alpha$.

Siccome $\sum_\alpha a_\alpha(z) \cdot w^\alpha$ converge (unif. sui CPT.) per ogni $z \in \Omega_j$, allora anche la serie F di f converge (unif. sui CPT.) in Ω_j, ma quest'ultima non dipende da j, quindi converge (un. sui CPT.) in tutto Ω. Quindi $\Omega \subset C(F)$ e $C(F)$ logar. conv., ossia $\hat{\Omega} \subseteq C(F)$.

ES.: se $L \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\hat{L}$ suo invil. conv., allora:

$$\hat{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |A(x)| \le \max_{y \in L} |A(y)| \ \forall A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ lineare}\}.$$

MORALE: "convesso" vuol dire per ogni pt. del bordo c'è un iperpiano per cui sta tutto dallo stesso lato.

Vale anche con "$A(x)$" e "$A(y)$" al posto di "$|A(x)|$" e "$|A(y)|$", dato che siamo sui reali.

$\mathcal{F}$-INVILUPPO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio e $\mathcal{F}$ famiglia di funzioni (qualsiasi) su Ω (a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$), e $K \subseteq \Omega$ sottoinsieme, si dice "$\mathcal{F}$-inv." di K in Ω:

$$\hat{K}_{\mathcal{F}} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega \mid |f(z)| \le \|f\|_K \ \forall f \in \mathcal{F}\},$$

dove $\|f\|_K \overset{\text{def}}{=} \sup_{w \in K} |f(w)|$.

$\mathcal{F}$-CONVESSITÀ: Ω si dice "$\mathcal{F}$-convesso" se:

$$\forall K \subseteq \Omega \qquad K \subset\subset \Omega \Rightarrow \hat{K}_{\mathcal{F}} \subset\subset \Omega.$$

CONVESSITÀ OLOMORFICA: se $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$ e Ω $\mathcal{F}$-conv., si dice che Ω è "olomorficam. conv." e $\hat{K}_{\mathcal{F}}$ si dice "inviluppo olomorfo".

OSSERV.: se $n=1$, ogni $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è olom. conv.

FUNZIONALE DI MINKOWSKI: un "f. di M." è un $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_0^+$ tale che:

1. $\mu(z) = 0 \iff z = 0$;

2. $\mu(\lambda z) = |\lambda|\,\mu(z)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}^n$ (μ è "positivamente omogenea").

ES.: $\mu(z) = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p\right)^{1/p}$, con $0<p<1$, è f. di m.

OSSERV.: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio e μ f. di m., definiamo:

$$\mu_\Omega(z) \overset{def}{=} \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(z-w),$$

che moralmente è la distanza tra z e $\partial\Omega$ data da μ (che però non è una vera distanza).

Se $X \subseteq \Omega$, definiamo:

$$\mu_\Omega(X) \overset{def}{=} \inf_{z \in X} \mu_\Omega(z).$$

Se Ω è limitato, allora $X \subset\subset \Omega$ se e solo se $\mu_\Omega(X) > 0$.

DISCHI ANALITICI (OLOMORFI): un "d. an. (ol.)" è una $\varphi : \Delta \to \mathbb{C}^n$ olomorfa.

Si intende che $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$) olom. se $f = (f_1, \dots, f_m)$ e le f_i sono tutte olomorfe. Vale ancora che composiz. di olom. è olom.

Se φ si estende con continuità a $\partial\Delta$, allora $\varphi(\bar\Delta)$ si dice "disco analitico chiuso", e il suo "bordo" è $\varphi(\partial\Delta) \subsetneq$ $\subsetneq \partial(\varphi(\bar\Delta))$ (NOTA: quanto meno, non necess. $=$).

LEMMA 1: sia $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$; allora:

$$K \text{ limitato} \Rightarrow \hat{K}_\Omega \overset{def}{=} \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \text{ è limitato.}$$

DIM.: K lim. $\Rightarrow |z_j|$ lim. in K $\forall j \Rightarrow |z_j|$ lim. in $\hat{K}_\Omega$ $\forall j \Rightarrow \hat{K}_\Omega$ lim.

OSSERV.: $\hat{K}_\Omega$ è sempre chiuso.

LEMMA 2: $\hat{K}_\Omega$ è contenuto nella chiusura dell'inviluppo conv. di K.

DIM.: se $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$-lineare, allora $\exists \tilde{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare con $A = \mathrm{Re}\,\tilde{A}$; dunque $A(z) \le M \iff |e^{\tilde{A}(z)}| \le e^M$, ed $e^{\tilde{A}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.

LEMMA 3: se $\varphi(\bar\Delta) \subseteq \Omega$ disco anal. chiuso, allora $\widehat{\varphi(\partial\Delta)}_\Omega \supseteq \varphi(\bar\Delta)$.

DIM.: sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$; allora $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\Delta)$ e $f \circ \varphi \in C^0(\bar\Delta)$; per il princ.

dal max, $\sup_{z\in\varphi(\overline{\Delta})}|f(z)| = \sup_{\zeta\in\overline{\Delta}}|f(\varphi(\zeta))| = \sup_{\zeta\in\partial\Delta}|f(\varphi(\zeta))| = \sup_{z\in\varphi(\partial\Delta)}|f(z)|$.

TEOREMA: se $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ dominio, TFAE:

1. Ω è il dominio naturale di definiz. di una funz. olom., ossia $\exists f\in\mathcal{O}(\Omega)$ che non si può estendere olomorficam. a nessun $\Omega'\supsetneq\Omega$;
2. Ω è dominio di olomorfia;
3. Ω è olomorficam. convesso;
4. $\forall f\in\mathcal{O}(\Omega)$, $\forall\mu$ f. di Minkowski, $\forall K\subset\subset\Omega$:
$$|f|\le\mu_\Omega \text{ su } K \Rightarrow |f|\le\mu_\Omega \text{ su } \hat{K}_\Omega;$$
5. $\forall K\subset\subset\Omega$, $\forall\mu$ f. di Mink.:
$$\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega)=\mu_\Omega(K);$$
6. $\forall f\in\mathcal{O}(\Omega)$, $\forall K\subset\subset\Omega$, $\forall\mu$ f. di Mink.:
$$\sup_{z\in K}\frac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)} = \sup_{z\in\hat{K}_\Omega}\frac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)};$$
[ad es.: μ = euclidea]
7. è la (4) con "$\exists\mu$";
8. è la (5) con "$\exists\mu$";
9. è la (6) con "$\exists\mu$".

DIM.: SCHEMA:
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & 3 \arrow[lll] \\
& 2 \arrow[r] & 8 \arrow[ur] & \\
& 7 \arrow[r] & 9 \arrow[u] & \\
4 \arrow[ur] \arrow[r] & 6 \arrow[rr] & & 5 \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$
.

(1) ⇒ (2): ovvio (globale ⇒ locale).
(8) ⇒ (3): segue da $\mu_\Omega(L)>0 \Rightarrow L\subset\subset\Omega$ se L limitato e dal LEMMA 1.
(4) ⇒ (7): ovvia ($\forall\Rightarrow\exists$, dato che almeno una μ c'è).
(7) ⇒ (9): dalla (7) abbiamo $\sup_K \frac{|f|}{\mu_\Omega}\le 1 \Rightarrow \sup_{\hat{K}_\Omega}\frac{|f|}{\mu_\Omega}\le 1$; abbiamo già $\sup_{\hat{K}_\Omega}\frac{|f|}{\mu_\Omega}\ge\sup_K\frac{|f|}{\mu_\Omega}$ (è ovvia); posto $L=\sup_K\frac{|f|}{\mu_\Omega}\in\mathbb{R}$ e $g=\frac{1}{L}\cdot f\in$

$\in \mathcal{O}(\Omega)$, vale $\sup_K \frac{|g|}{\mu_\Omega} < 1 \overset{(7)}{\Rightarrow} \sup_{\hat{K}_\Omega} \frac{|g|}{\mu_\Omega} \le 1 \Rightarrow \sup_{\hat{K}_\Omega} \frac{|f|}{r_\Omega} \le \sup_K \frac{|f|}{r_\Omega}$,
da cui (9).

(9) $\Rightarrow$ (8): basta applicare (9) con $f \equiv 1$.
(4) $\Rightarrow$ (6): analoga a (7) $\Rightarrow$ (9).
(6) $\Rightarrow$ (5): analoga a (9) $\Rightarrow$ (8).
(5) $\Rightarrow$ (3): analogo a (7) $\Rightarrow$ (3). [...]

Lezione 18: caratterizzazione dei domini di olomorfia.

[...] (2) $\Rightarrow$ (8): la norma infinito funziona: $\mu(z) = \|z\|_\infty = \max\{|z_j| \mid j=1,\dots,n\}$. Infatti, se per assurdo $\exists K \subset\subset \Omega$ t.c. $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) < \mu_\Omega(K)$; siano δ_1, δ_2 t.c. $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) < \delta_1 < \delta_2 < \mu_\Omega(K)$; allora $\exists z^0 \in \hat{K}_\Omega$ t.c. $\mu_\Omega(z^0) < \delta_1$, mentre $K_{\delta_2} \overset{def}{=} \bigcup_{z \in K} \overline{P(z, \delta_2)} \subset\subset \Omega$. Per le disug. di Cauchy: $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall z \in K$ $\left|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z)\right| \le \frac{\alpha!}{\delta_2^{|\alpha|}} \|f\|_{K_{\delta_2}}$ (*). Per definiz. di inviluppo olomorfo, (*) vale anche $\forall z \in \hat{K}_\Omega$, e in particolare vale per z^0, da cui abbiamo che lo sviluppo in serie di potenze di ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ in z^0 converge in $P(z^0, \frac{\delta_1+\delta_2}{2})$; ma $\frac{\delta_1+\delta_2}{2} > \delta_1$, e quindi $P(z^0, \frac{\delta_1+\delta_2}{2}) \cap (\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}) \neq \emptyset$; dunque tutte le $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estendono oltre $P(z^0, \frac{\delta_1+\delta_2}{2}) \cap \partial\Omega$, contro (2).

(3) $\Rightarrow$ (1): Sia $\{w_j\}_{j \in \mathbb{Z}^+} \subseteq \Omega$ una succ. densa con ogni pt. che si ripete infinite volte. Sia, $\forall j \in \mathbb{Z}^+$, $P_j = P(w_j, r_j)$ il più grande polidisco di centro w_j e tutto in Ω. Sia $\{K_j\}$ esaustione di Ω ($K_j \subset\subset \Omega$ cpt.; $K_j \subseteq \mathring{K}_{j+1}$; $\bigcup_j K_j = \Omega$).

Per (3): $\widehat{K_j}_\Omega \subset\subset \Omega \Rightarrow \exists z_j \in P_j \setminus \widehat{K_j}_\Omega \Rightarrow \exists h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $h_j(z_j) = 1$ e $\|h_j\|_{K_j} < 1$. Sostituendo se necessario h_j con $h_j^{m_j}$, $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \gg 1$, possiamo supporre $\|h_j\|_{K_j} < 2^{-j}$. Poniamo:

$$h(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - h_j(z))^j .$$

Dato che $\sum_{j=1}^{+\infty} j/2^j$ converge (è la derivata di $\sum_{j=1}^{+\infty} z^j$), siccome $\forall z \in \Omega\ \exists j_0$ t.c. $z_0 \in K_j\ \forall j \geq j_0$, allora $h \in \mathcal{O}(\Omega)$.

NOTA: z_j è uno zero di ordine almeno j di h.

Ogni P_j contiene infiniti z_ℓ, che quindi si accumulano a $z_0^j \in \overline{P_j}$. Se $z_0^j \in \Omega$, allora dovrebbe essere uno zero di ordine infinito, e quindi $h \equiv 0$, assurdo.

Quindi $z_0^j \in \partial\Omega \cap \overline{P_j}$. $\underline{\{z_0^j\}\text{ sono}}$ densi in $\partial\Omega$: se non lo fossero, $\exists w_{j_0}$ t.c. $P(w_{j_0}, r_{j_0}) \cap \Omega$ non contiene nessun z_0^j, assurdo. Se h si estendesse a $\Omega' \supseteq \Omega$, allora si estenderebbe olomorficam. a un intorno di un z_0^j che sarebbe uno zero di ordine infinito, quindi $h \equiv 0$, assurdo.

$(1) \Rightarrow (4)$: Fissiamo $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ multiraggio e $\mu^{\underline{r}}(z) = \max_j \left\{\frac{|z_j|}{r_j}\right\}$.

Vediamo intanto (4) per le μ di questa forma. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $K \subset\subset \Omega$ t.c. $|f(z)| \leq \mu_\Omega^{\underline{r}}(z)\ \forall z \in K$.

LEMMA: $\forall g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall w \in \hat{K}_\Omega$, g ha una serie di potenze convergente in $P(w, |f(w)|\underline{r}) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mu^{\underline{r}}(z-w) < |f(w)|\}$.

LEMMA $\Rightarrow$ (4): se per assurdo $\exists w_0 \in \hat{K}_\Omega$ t.c. $|f(w_0)| > \mu_\Omega^{\underline{r}}(w_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(w_0, |f(w_0)|\underline{r}) \cap (\mathbb{C}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$, e ogni $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estende, contro (1), a $P(w_0, |f(w_0)|\underline{r})$.

DIM. LEMMA: fissiamo $g \in \mathcal{O}(\Omega)$; per $0 < t < 1$, poniamo $S_t \overset{def}{=}$
$= \bigcup_{z \in K} P(z, |f(z)|t\cdot\underline{r})$; allora $S_t \subset\subset \Omega \Rightarrow \exists M_t > 0$ t.c. $\|g\|_{S_t} < M_t$. Per Cauchy:

$$\forall z \in K \quad \left|\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(z)\right| \leq \frac{\alpha!\, M_t}{t^{|\alpha|}|f(z)|^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \forall z \in K \quad \left|f(z)^{|\alpha|} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(z)\right| \leq \frac{\alpha! \cdot M_t}{t^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall w \in \hat{K}_\Omega \quad \left|f(w)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(w)\right| \leq \frac{\alpha! \cdot M_t}{t^{|\alpha|}\underline{r}^\alpha} \rightsquigarrow$$

$\Rightarrow \forall w \in \hat{K}_\Omega$ la serie di pot. di g converge in $P(w, t|f(w)|\underline{r})$. Ora basta far tendere t a 1.

Se invece μ è Minkowski qualsiasi, dato $v \in \mathbb{C}^n$ non nullo, poniamo:

$$\delta^v_\Omega(z) \overset{def}{=} \sup\{r \mid r>0,\ z+\zeta v \in \Omega\ \forall |\zeta|<r\}.$$

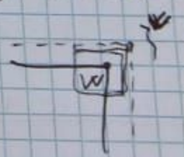
Dunque $\delta^v_\Omega(z)$ è il raggio del più grande disco contenuto in $\Omega \cap (z+\mathbb{C}v)$ centrato in z. Allora $\mu_\Omega(z) = \inf\limits_{\mu(v)=1} \delta^v_\Omega(z)$.

(OSSERV.: se $n=1$, allora $\mu(\zeta) = \mu(\zeta \cdot 1) = |\zeta| \cdot \mu(1)$).

Ci basta dimostrare (4) per $\mu_\Omega = \delta^v_\Omega$. Possiamo inoltre supporre $v = e_1$. [Poniamo $\underline{r}^k = (1, 1/k, \dots, 1/k)$, con $k \in \mathbb{Z}^+$; notiamo che $\mu^{\underline{r}^k}_\Omega \uparrow \delta^{e_1}_\Omega$ per $k \to +\infty$. Sia $K \subset\subset \Omega$; siccome K è cpt. e i $\mu^{\underline{r}^k}_\Omega$ sono continui, per il teorema di Dini la convergenza di $\mu^{\underline{r}^k}_\Omega$ a $\delta^{e_1}_\Omega$ è unif. su K.] Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $|f| \le \delta^{e_1}_\Omega$ su K, e sia $\varepsilon>0$. Per convergenza uniforme, abbiamo $|f| \le (1+\varepsilon)\mu^{\underline{r}^k}_\Omega$ su K $\forall k \gg 1$. Per (4), $|f| \le (1+\varepsilon)\mu^{\underline{r}^k}_\Omega \le$ $\le (1+\varepsilon)\delta^{e_1}_\Omega$ su $\hat{K}_\Omega$. Vale $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow |f| \le \delta^{e_1}_\Omega$ su $\hat{K}_\Omega$.

FATTO: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio con $0 \in \Omega$; se Ω è circolare completo ed è logaritmicam. convesso, allora è un dominio di olomorfia.

DIM.: basta vedere, per TEOREMA, che Ω è olomorf. convesso. Sia $K \subset\subset \Omega$; Ω circ. compl. $\Rightarrow \forall w \in K\ \exists U_w \subseteq \Omega$ intorno di w e $\zeta^w \in \Omega$ tali che $|z_j| \le |\zeta^w_j|\ \forall j, \forall z \in U_w$.



Per compattezza, $\exists \zeta^1, \dots, \zeta^k \in \Omega$ t.c.
$K \subseteq \bigcup\limits_{l=1}^{k} \{|z_j| \le |\zeta^l_j|\ \forall j\} \subset\subset \Omega$. Possiamo supporre $\zeta^l_j \neq 0\ \forall l, \forall j$. Sia $z \in \hat{K}_\Omega$; possiamo supporre $z_1, \dots, z_m \neq 0$ e $z_{m+1}, \dots, z_n = 0$. Per definiz. di $\hat{K}_\Omega$: $|z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{\alpha_m}| \le$ $\le \sup\limits_{z \in K} |z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{\alpha_m}| \le \max\limits_{1 \le l \le k} |(\zeta^l_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\zeta^l_m)^{\alpha_m}|\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^m$.

Posto $\nu_j = \alpha_j / |\alpha|$, vale $\sum_{j=1}^{m} \nu_j \log|z_j| \le \max_{1\le l\le k} \sum_{j=1}^{m} \nu_j \log|\zeta_j^l|$ per ogni $(\nu_1,\dots,\nu_m) \in (\mathbb{Q}^+)^m$ con $\sum_{j=1}^{m} \nu_j = 1$, e quindi vale $\forall (\nu_1,\dots,\nu_m) \in (\mathbb{R}^+)^m$ t.c. $\sum_{j=1}^{m} \nu_j = 1$. Dato che $(\log|z_1|, \dots, \log|z_m|)$ appartiene all'inviluppo convesso di $\bigcup_l \{(t_1,\dots,t_m) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \le t_j \le \log|\zeta_j^l|\ \forall j\}$, e siccome Ω è logaritm. conv., $\bigcup_l \{\dots\}$ è ben distante dal bordo di $\log|\Omega|$; dunque $z \in \bigcup_{l=1}^{k} \{0 \le |\zeta_j^l|\ \forall j\} \subseteq\subseteq \Omega$.

ES.: se Ω convesso (in senso reale), allora Ω è dominio di olomorfia. (uso iperpiani separatori per vedere che non si estende qualcosa oltre il bordo).

LEZIONE 19: funzioni armoniche, proprietà della media.

LAPLACIANO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $f \in C^2(\Omega;\mathbb{C})$ (cioè $f: \Omega \to \mathbb{C}$ di classe C^2), si definisce il "lapl." di f:

$$\Delta f \overset{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z}.$$

FUNZIONI ARMONICHE: $f \in C^2(\Omega;\mathbb{C})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, si dice "arm." se:

$$\Delta f \equiv 0.$$

OSSERV.: f è arm. se e solo se $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ sono armoniche.

OSSERV.: se f è olom., allora f (e $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$) è armonica.

PRINCIPIO DEL MASSIMO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ tale che $\Delta u \ge 0$, allora $\forall K \subseteq\subseteq \Omega$, $\forall z \in K$:

$$u(z) \le \sup_{\zeta \in \partial K} u(\zeta).$$

DIM.: se $\Delta u > 0$ su Ω, se per assurdo $\exists K \subseteq\subseteq \Omega$, $\exists w_0 \in K$ t.c. $u(w_0) > \sup_{\zeta \in \partial K} u(\zeta)$. In particolare, $\exists z_0 \in \mathring{K}$ t.c. $u(z_0) = \sup_{z \in K} u(z)$, quindi z_0 è un pt di massimo locale, quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) \leq 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta u(z_0) \leq 0, \text{ assurdo.}$$

In generale, se $v(z) \overset{def}{=} |z|^2 = z \cdot \bar{z}$, allora $\Delta v \equiv 4 > 0$ e $v(z) \geq 0$ $\forall z$. Possiamo quindi, dato $\varepsilon > 0$, porre:

$$u_\varepsilon(z) \overset{def}{=} u(z) + \varepsilon |z|^2 = u(z) + \varepsilon v(z).$$

Allora $u_\varepsilon \geq u$ e $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + \varepsilon \Delta v > 0$ su tutto Ω, per cui, dato $K \subseteq\subseteq \Omega$ e $z \in K$, vale:

$$u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) \underset{\text{(PER IL CASO PRECEDENTE)}}{\leq} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\zeta \in \partial K} u_\varepsilon(\zeta) \underset{\text{(CONV. UNIF.)}}{=} \sup_{\zeta \in \partial K} u(\zeta).$$

OSSERV.: l'insieme delle funz. arm. è uno spazio vett.

COROLLARIO: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $K \subseteq\subseteq \Omega$, e se $u, v \in C^2(\Omega)$ armoniche in un intorno di K tali che $u|_{\partial K} \equiv v|_{\partial K}$, allora $u|_K \equiv v|_K$.

DIM.: usando $\mathrm{Re}(u-v)$ e $\mathrm{Im}(u-v)$, possiamo supporre u a valori reali e $v \equiv 0$, per cui la tesi diventa $u|_{\partial K} \equiv 0 \Rightarrow u|_K \equiv 0$. Ma:

$$\begin{cases} u|_K \underset{\text{(PR. MAX)}}{\leq} \sup_{\zeta \in \partial K} u(\zeta) = 0 \\ (-u)|_K \leq \sup_{\zeta \in \partial K} (-u)(\zeta) = 0 \end{cases} \Rightarrow u|_K \equiv 0.$$

NUCLEO DI POISSON: se $a \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$, il "nucleo di P." di $D(a, \rho)$ è:

$$P_{a,\rho} : D(a,\rho) \times D(a,\rho) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(z, \zeta) \longmapsto \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{(\zeta - a) + (z - a)}{(\zeta - a) - (z - a)} \right).$$

In particolare, per $D(0,1)$:

$$P_{0,1}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

per cui:

$$P_{a,\rho}(z,\zeta) = P_{0,1}\left(\frac{z-a}{\rho}, \frac{\zeta-a}{\rho}\right).$$

FATTO: $P_{a,\rho}(z,\zeta) \geq 0 \quad \forall a, \forall \rho, \forall z, \forall \zeta$. Inoltre, se $\zeta \in \partial D(a,\rho)$, allora $P_{a,\rho}(\cdot, \zeta)$ è armonica in $D(a,\rho)$.

Se $h \in C^0(\partial D(a,\rho))$ qualsiasi, allora:

$$(*) \quad \forall \zeta_0 \in \partial D(a,\rho) \quad \lim_{z\to\zeta_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a+\rho e^{i\theta}) \cdot h(a+\rho e^{i\theta})\, d\theta}_{u(z)} = h(\zeta_0)$$

e $u: D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ si estende con continuità al bordo e vale:

$$u|_{\partial D(a,\rho)} \equiv h.$$

Questa formula ci dà un'espressione esplicita per l'estensione u di h a tutto $D(a,\rho)$.

DIM. [(*)]: WLOG $a=0$, $\rho=1$. Vale:

$$P_{0,1}(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{1+\bar\zeta z}{1-\bar\zeta z}\right) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(1+2\frac{\bar\zeta z}{1-\bar\zeta z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(1+2\sum_{n\geq 1}\bar\zeta^n z^n\right).$$

Quindi:

$$\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{Re}\left(2\pi + 2\sum_{n\geq 1}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\theta\right)}_{0} z^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{Re}(2\pi) = 1. \qquad (**)$$

Posto $T(z) \overset{def}{=} \left(\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta}) h(e^{i\theta})\, d\theta\right) - h(e^{i\theta_0})$, con $e^{i\theta_0} = \zeta_0$, vale:

$$T(z) = \left(\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta}) h(e^{i\theta})\, d\theta\right) - h(e^{i\theta_0})\cdot 1 \overset{(**)}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\theta})\left(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})\right) d\theta.$$

Allora TESI $\iff \lim_{z\to e^{i\theta_0}} T(z) = 0$. Fissato $\varepsilon>0$, sia $\delta>0$ tale che:

$$|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \delta \implies |h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})| < \varepsilon,$$

e sia $M = \max_{\zeta\in\partial D(0,1)} |h(\zeta)|$. Allora:

$$|T(z)| = \left| \int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|<\delta} \cdots + \int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geq\delta} \cdots \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|<\delta} P_{0,1}(z,e^{i\theta}) + 2M \int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geq\delta} P_{0,1}(z,e^{i\theta})\,d\theta \leq$$

$$\overset{(**)}{\leq} \varepsilon + 2M \underbrace{\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|\geq\delta} P_{0,1}(z,e^{i\theta})\,d\theta}_{\to 0 \text{ per } z\to e^{i\theta_0}} \longrightarrow \varepsilon \Rightarrow \text{TESI.}$$

(infatti: se $\underset{\partial D(0,1)}{\zeta \in} \neq \zeta_0$, allora $\lim_{z\to\zeta} P_{0,1}(z,\zeta_0)=0$)

FORMULA DI POISSON: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, u armonica in Ω e $\overline{D(a,\rho)} \subseteq \Omega$, allora:

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a+\rho e^{i\theta})\, u(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta \quad \forall z\in D(a,\rho)$$

DIM: LHS e RHS sono armoniche che coincidono su $\partial D(a,\rho)$.

COROLLARIO: ogni funz. arm. reale è localm. la parte reale di una funz. olomorfa, dove "loc." vale su ogni disco nel dominio.

PROBLEMA DI DIRICHLET: sia $h \in C^0(\partial D(a,\rho))$; allora $\exists!\, u : \overline{D(a,\rho)} \to \mathbb{R}$ armonica in $D(a,\rho)$ e coincidente con h su $\partial D(a,\rho)$.

DIM: $u(z) = \int_0^{2\pi} \cdots\, d\theta$, formula di Poisson.

OSSERV.: la formula di Cauchy dice che $\overset{\text{(OLOM.)}}{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$; nel caso $z=a$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\,d\zeta = \begin{cases} \zeta = a+\rho e^{i\theta} \\ d\zeta = i\rho e^{i\theta}\,d\theta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \cdot i\rho e^{i\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta = \text{MEDIA INTEGRALE DI } f \text{ SU } \partial D(a,\rho).$$

PROPRIETÀ DELLA MEDIA: si dice che $u : \Omega \to \mathbb{C}$ continua ha la "p. della m." se:

$$\forall\, \overline{D(a,\rho)} \subseteq \Omega \quad u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Abbiamo appena visto che vale per le olomorfe.

FATTO: $u:\Omega\to\mathbb{C}$ ha la pr. della media se e solo se è armonica.

DIM.: ($\Leftarrow$): ok. ($\Rightarrow$): se $\overline{D(x,\rho)} \subseteq \Omega$, $f = u|_{\partial D(x,\rho)}$, sia F l'estens. armon. di f in $D(x,\rho)$; basta vedere che $F \equiv u|_{\overline{D(x,\rho)}}$. Sappiamo che $F-u$ ha la pr. della media e che $(F-u)|_{\partial D(x,\rho)} \equiv 0$; ~~ma~~ ponendo $g = \pm \operatorname{Re}(F-u)$, se per assurdo $(F-u)|_{D(x,\rho)} \neq 0$ allora WLOG $\exists z_0 \in D(x,\rho)$ t.c. $g(z_0)>0$ (e prendiamo z_0 max. loc.). Per $r>0$, sia $M(r) \overset{def}{=} \sup_\theta g(z_0+re^{i\theta})$; per prop. della media, $g(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \le M(r)$. Ma z_0 max. loc. $\Rightarrow g(z_0)\ge M(r)$ per $r<<1$, per cui $g(z_0)\equiv M(r)$ per $r<<1$. Dunque $g(z_0)-g(z_0+re^{i\theta})\ge 0$ per $r<<1$ e $\theta\in[0,2\pi)$ e $g(z_0)-g(z_0+re^{i\theta})$ ha media 0, quindi è costantemente 0. Quindi g è costante in un intorno di z_0. Se come z_0 prendiamo il massimo globale di g su $\overline{D(x,\rho)}$, allora abbiamo che $\{z\in D(x,\rho) \mid g(z)=g(z_0)\}$ è aperto; ma chiaramente è anche chiuso, per cui $g\equiv g(z_0)$ su $D(x,\rho)$, assurdo ($g(z_0)>0$ e g tende a 0 sul bordo).

OSSERV.: dalla formula di Poisson si deduce che le funz. armon. sono anche analitiche.

FUNZIONI PLURIARMONICA: se $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ e $u\in C^2(\Omega)$, u si dice "plur." se:

$$\forall z_0\in\Omega,\ \forall v\in\mathbb{C}^n \quad \mathbb{C}\ni\zeta\mapsto u(z_0+\zeta v) \text{ armonica.}$$

FATTO: u (reale) è pluriarm. se e solo se è localm. la parte reale di una funz. olom.

FUNZIONI (PLURI)SUBARMONICHE: se $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, una $u:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ che sia semicontinua superiorm. si dice "subarm." se:

$$\forall x\in\Omega,\ \forall \overline{D(x,r)}\subseteq\Omega,\ \forall h\in C^0(\overline{\partial D(x,r)}) \text{ armonica in } D(x,r)$$

$$u|_{\partial D}\le h|_{\partial D} \Rightarrow u|_D\le h|_D.$$

TEOREMA: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $u: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ SCS, TFAE:

1. u subarmonica;
2. $u(x) \le \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(x,r)} u(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+re^{i\theta})\,d\theta$; [PROP. DELLA SOTTOMEDIA]
3. se $K \subseteq\subseteq \Omega$ e $h \in C^0(K)$ armonica in $\mathring{K}$, allora $h|_{\partial K} \ge u|_{\partial K} \Rightarrow$
 $\Rightarrow h|_K \ge u|_K$;
4. $\exists \{u_j\}$ succ. di subarmoniche tale che $u_j \searrow u$;
5. $\forall \delta>0$, $\forall \mu$ misura positiva su $[0,\delta]$, $\forall x$ t.c. $d(x,\partial\Omega)>\delta$:
$$u(x)\int_0^\delta d\mu(r) \le \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^\delta\left(\int_0^{2\pi} u(x+re^{i\theta})\,d\theta\right)d\mu(r);$$
6. $\forall\delta>0$, $\forall x$ t.c. $d(x,\partial\Omega)>\delta$ $\exists\mu$ misura positiva su $[0,\delta]$ t.c.:
$$u(x)\int_0^\delta d\mu(r) \le \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^\delta\left(\int_0^{2\pi} u(x+re^{i\theta})\,d\theta\right)d\mu(r);$$
7. $\forall y \in D(x,r)$:
$$u(y) \le \int_0^{2\pi} P_{x,r}(y, x+re^{i\theta})\cdot u(x+re^{i\theta})\,d\theta;$$
8. $u(x)\le \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(x,r)} u(y)\, d\,\mathrm{leb}(y)$; (LEBESGUE)
9. [se $u\in C^2(\Omega)$] $\Delta u \ge 0$.

LEZIONE 20: funzioni subarmoniche e plurisubarmoniche, pseudoconvessità.

DIM. [TEOREMA]: SCHEMA:
$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dd] & 6 \arrow[l] & 5 \arrow[l] \\
 & & 8 \arrow[ul] & \\
4 \arrow[r, leftrightarrow] & 1 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 2 \arrow[uu] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$
[...]

LEMMA: se $u:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ SCS limitata dall'alto, allora $\exists\{u_j\}\subseteq C^0(\Omega)$ t.c. ogni u_j è limit. dall'alto e $u_j \searrow u$.

DIM.: IDEA: $\forall j\ge1$ $u_j(x) \overset{def}{=} \sup_{y\in\Omega}\{u(y) - j|x-y|\}$.

[...] (5) $\Rightarrow$ (6): OVVIO.

(6)⇒(3): sia $h \in C^0(K) \cap \mathcal{H}arm(\mathring{K})$ con $h|_{\partial K} \geq u|_{\partial K}$; poniamo $f = u - h$, che è SCS. Vogliamo vedere che $f|_{\partial K} \leq 0 \Rightarrow f|_K \leq 0$. Se per assurdo fosse $f|_K \not\leq 0$, sia $y_0 \in \mathring{K}$ t.c. $M \overset{def}{=} f(y_0) = \max_{y \in K} f(y) > 0$. Scegliamo y_0 tale che $d(y_0, \partial K) > 0$ sia minima (tra gli $y_0 \in \operatorname{argmax}_{y \in K} f(y)$). Sia ρ_0 tale che $\overline{D(y_0, \rho_0)} \subseteq \mathring{K}$.

Per come abbiamo scelto y_0, $\forall\, 0 < \rho \leq \rho_0$ abbiamo che $f < M$ su un arco di $\partial D(y_0, \rho)$. Allora:

(QUELLA DATA DA (6))

$$\int_0^{\rho_0} \left(\int_0^{2\pi} f(y_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta \right) d\mu(\rho) < 2\pi M \int_0^{\rho_0} d\mu(\rho) =$$

$$= 2\pi f(y_0) \int_0^{\rho_0} d\mu(\rho).$$

Per proprietà della media: $\int_0^{2\pi} h(y_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(y_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} h(y_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta\, d\mu(\rho) = 2\pi h(y_0) \int_0^{\rho_0} d\mu(\rho).$$

Sommando alla precedente abbiamo un assurdo, per (6).

(3)⇒(1): ovvio.

(1)⇒(7): sia $u_j \downarrow u$ come nel LEMMA e sia $h_j(y) \overset{def}{=} \int_0^{2\pi} P_{x,r}(y, x + re^{i\theta}) \cdot u_j(x + re^{i\theta})\, d\theta$; allora:

$$\text{su } \partial D(x,r) \quad u|_{\partial D} \leq u_j|_{\partial D} = h_j|_{\partial D} \overset{(1)}{\Rightarrow} u|_D \leq h_j|_D \quad \forall j,$$

e si passa al limite per $j \to +\infty$.

(7)⇒(2): basta prendere $y = x$.

(1)⇒(4): $u_j = u + \frac{1}{j}$.

(2)⇒(5): ovvio (basta integrare).

(4)⇒(1): fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $S_j \overset{def}{=} \{ y \in \partial D(x,r) \mid u_j(y) \geq h(y) + \varepsilon \}$. Ogni S_j è CPT., $S_{j+1} \subseteq S_j$ e $\bigcap_{j \geq 1} S_j = \emptyset$; allora (per CPT-ezza) $\exists j_0$ t.c. $S_{j_0} = \emptyset$, ossia $\forall j \geq j_0$ $u_j|_{\partial D} < h|_{\partial D} + \varepsilon \Rightarrow \forall j \geq j_0$ $u|_D \leq u_j|_D \leq h|_D + \varepsilon \Rightarrow u|_D \leq h|_D$.

(2) ⟹ (8): integrando (2):

$$\int_0^r s\, u(x)\, ds \le \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} u(x+se^{i\theta})\, s\, d\theta\, ds = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(x,r)} u(y)\, d\,\mathrm{leb}(y).$$

(8) ⟹ (3): come (6) ⟹ (3) prendendo $\mu = r\, dr$.

NOTAZ.: $\mathrm{Harm}(\Omega) \stackrel{def}{=} \{$armoniche su $\Omega\}$; $SH(\Omega) \stackrel{def}{=} \{$subarm. su $\Omega\}$.

PRINCIPIO DEL MASSIMO: se $u \in SH(\Omega)$, Ω connesso e $x_0 \in \Omega$ t.c. $u(x_0) = \sup_{x\in\Omega} u(x)$, allora $u \equiv u(x_0)$.

DIM.: $C \stackrel{def}{=} \{x \mid u(x) = u(x_0)\}$ è chiuso, ed aperto per (8) (sennò avremmo $y_0 \in \partial C$ e $r>0$ t.c. $D(y_0,r) \subseteq\subseteq \Omega$ e $D(y_0,r) \cap (\Omega \setminus C) \neq \emptyset$, ma allora $u(y_0) \stackrel{(8)}{\le} \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(y_0,r)} u(y)\, d\,\mathrm{leb}(y) < \frac{u(y_0)}{\pi r^2}\int_{D(y_0,r)} d\,\mathrm{leb}(y)$, assurdo).

FATTO: se $u \in C^2(\Omega)$, allora:

$$u \text{ subarm.} \iff \Delta u \geq 0.$$

DIM.: ($\Leftarrow$): sia $h \in C^0(\overline{D(x_0,r)}) \cap \mathrm{Harm}(D(x_0,r))$, con $h|_{\partial D} \geq u|_{\partial D}$. Chiaramente $\Delta(u-h) \geq 0$. Per princ. del max, $(u-h)|_{\partial D} \le 0 \Rightarrow (u-h)|_D \le 0$.

($\Rightarrow$): se per assurdo $\exists x_0 \in \Omega$ t.c. $\Delta u(x_0) < 0$, allora $-u$ è subarm. in un intorno di x_0, e lo è anche u, quindi u è armonica in un intorno di x_0, e dunque $\Delta u(x_0) = 0$, assurdo.

FATTO: sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$; allora:

$$\forall p > 0 \quad |f|^p,\ \log|f| \in SH(\Omega).$$

DIM.: sia $\Omega' = \{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0\}$. In Ω', vale $\Delta|f|^p = p^2|f|^{p-2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 \geq 0$ e $\log|f| \underset{\text{LOCALM.}}{=} \mathrm{Re}(\log f)$ è armonica. Su $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\} = \Omega \setminus \Omega'$, la (2) è ovvia.

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN: se μ misura di probab. su $\underset{\text{(Un QUALSIASI SPAZIO)}}{\Omega}$ e $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, allora:

$$\forall g \in L^1(\mu) \quad \varphi\left(\int_\Omega g\, d\mu\right) \le \int_\Omega (\varphi \circ g)\, d\mu.$$

COROLLARIO: se $u \in SH(\Omega)$ e $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convessa crescente, allora $\varphi\circ u \in SH(\Omega)$.

DIM.: $\varphi(u(x)) \overset{(\varphi\text{ cresc.})}{\leq} \varphi\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(x,r)} u(\zeta)\,d\zeta\right) \overset{(\text{JENSEN})}{\leq} \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(x,r)} \varphi(u(\zeta))\,d\zeta$.

FUNZIONI PLURISUBARMONICHE: se $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ e $u:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ SCS, u è "plurs." se:

$$\forall z\in\Omega, \forall v\in\mathbb{C}^n \quad \zeta\mapsto u(z+\zeta v) \text{ è subarm. (dove definita).}$$

L'insieme delle plurs. si indica "$PSH(\Omega)$".

FATTO: se $u\in C^2(\Omega)$, allora:

$$u\in PSH(\Omega) \iff \forall z\in\Omega, \forall v\in\mathbb{C}^n \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z)\cdot v_j\bar v_k \geq 0.$$

FORMA DI LEVI: la "f. di L." di u in z, detta anche "hermitiana", è:

$$L_{u,z} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z)\right)_{j,k}.$$

OSSERV.: se $u\in C^2(\Omega)$, allora $u\in PSH(\Omega) \iff L_{u,z} \overset{\text{(SEMID. POS.)}}{\geq} 0 \quad \forall z\in\Omega$.

DIM.: sia $g(\zeta)=u(z+\zeta v)$; allora $\frac{\partial g}{\partial \zeta}(\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j}(z+\zeta v)\cdot\frac{\partial (z+\zeta v)_j}{\partial\zeta} +$

$$+ \sum_j \frac{\partial u}{\partial\bar z_j}(z+\zeta v)\underbrace{\frac{\partial\overline{(z+\zeta v)_j}}{\partial\zeta}}_{0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j}(z+\zeta v)\, v_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta g(\zeta) = 4\frac{\partial^2 g}{\partial\zeta\partial\bar\zeta}(\zeta) = \sum_{j,k}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z+\zeta v)\, v_j.$$

PLURISUBARMONICITÀ STRETTA: se $u\in C^2(\Omega)$, u è "strett. pl." se $L_{u,z}>0 \quad \forall z\in\Omega$.

FUNZIONI DI DEFINIZIONE E DOMINI DI CLASSE C^2: se $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \rho(z)<0\}$, con $\rho\in C^2(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ con grad ρ mai nullo su $\partial\Omega$, allora Ω si dice "d. di classe C^2" e ρ si dice "funz. di def." di Ω.

SPAZIO TANGENTE COMPLESSO: se Ω dom. di classe C^2, si def. lo spazio tang. c. a $\partial\Omega$ in x:

$$T_x^{\mathbb{C}} \partial\Omega = \left\{ v \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_j \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x)\, v_j = 0 \right\},$$

con ρ f. di def. di Ω. È lo sp. complesso più grande contenuto nel tangente reale.

LEVI-PSEUDOCONVESSITÀ: $x_0 \in \partial\Omega$ si dice "Levi-ps." se $L_{\rho, x_0} \geq 0$ su $T_{x_0}^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$, e si dice "strettam. pseudoconv." se $L_{\rho, x_0} > 0$ su $T_{x_0}^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$. Ω si dice "Levi-ps." o "str. ps." se ogni pt. di $\partial\Omega$ lo è.

TEOREMA (CONGETTURA DI LEVI): se $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ di classe C^2, allora:

Ω è dom. di olomorfia se e solo se è Levi-pseud.

OSSERV. 1: se ρ_1, ρ_2 funz. di def. di Ω, allora vicino a $\partial\Omega$ esiste $h > 0$ t.c. $\rho_2 = h \cdot \rho_1$ (h funzione), da cui:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial z_j} = \frac{\partial h}{\partial z_j}\rho_1 + h \frac{\partial \rho_1}{\partial z_j} \rightsquigarrow \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial^2 h}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\rho_1 + \frac{\partial h}{\partial z_j}\frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial \rho_1}{\partial z_j} +$$

$$+ h \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \rightsquigarrow \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k = h \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k \quad \text{se } v \in T_{x_0}^{\mathbb{C}}(\partial\Omega).$$

OSSERV. 2: se Ω è di classe C^2, allora:

$$\delta_\Omega(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -d(z, \partial\Omega) & \text{se } z \in \Omega \\ d(z, \partial\Omega) & \text{se } z \notin \Omega \end{cases} \quad \text{è di classe } C^2 \text{ vicino a } \partial\Omega.$$

Dunque δ_Ω può essere una funz. di def.

OSSERV. 3: se Ω è strett. pseudoc., allora $\exists \rho$ f. di def. t.c. $L_{\rho, x_0} > 0$ su tutto $\mathbb{C}^n$ $\forall x_0 \in \partial D$.

OSSERV. 4 (TEOREMA DI NARASIMHAN): se $p \in \partial\Omega$ strett. pseud., allora $\exists U$ intorno di p e $\Psi: U \to \mathbb{C}^n$ biolom. con l'immag. t.c. $\Psi(U \cap \Omega)$ è strett. conv. in $\Psi(p)$.

ES.: $\mathbb{B}^n = \{ \|z\|^2 < 1 \}$ è strett. pseudoc., ma anche $D = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 + |w|^{-2} < 4 \}$ lo è, pur non essendo nemmeno (forse) contraibile.

HARTOGS-PSEUDOCONVESSITÀ: $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è "Hh.-p." se $\exists \mu$ f. di

Mink. tale che $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$.

TEOREMA: se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, TFAE:

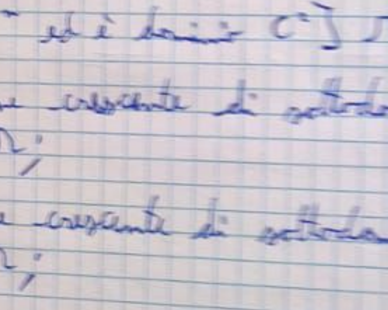
1. $\forall \{d_\alpha\}$ famiglia di dischi analitici chiusi in $\mathbb{C}^n$, se $\bigcup_\alpha \partial d_\alpha \subset\subset \Omega$, allora $\bigcup_\alpha d_\alpha \subset\subset \Omega$; [KONTINUITÄTSSATZ]
2. $\forall d$ disco analitico chiuso, $\forall \mu$ f. di M. $\mu_\Omega(\partial d) = \mu_\Omega(d)$;
3. $\exists \mu$ f. di M. t.c. $\forall d$ disco anal. ch. $\mu_\Omega(\partial d) = \mu_\Omega(d)$;
4. $\exists \Phi \in C^0(\Omega) \cap PSH(\Omega)$ t.c. $\Omega_c \overset{def}{=} \{\Phi < c\} \subset\subset \Omega \ \forall c \in \mathbb{R}$ (Φ si dice "esaustione PSH");
5. $\exists$ esaustione C^∞ SPSH;
6. Ω è Hartogs-pseudoc. (cioè $\exists \mu$ f. di M. t.c. $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$);
7. $\forall \mu$ f. di M. $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$;
8. [se $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ ed è dominio C^2] Ω è Levi-pseudoc.;
9. Ω è unione crescente di sottodomini Hartogs-pseudoc. relat. CPT. in Ω;
10. Ω è unione crescente di sottodomini C^∞ strett. pseudoc. rel. CPT. in Ω;
11. Ω è $PSH(\Omega)$-convesso.

COROLLARIO: se Ω dom. di olomorfia, allora Ω è pseudoconv.

DIM.: $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow |f| \in PSH(\Omega) \Rightarrow \hat{K}_{PSH(\Omega)} \subseteq \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$.

LEZIONE 21: domini pseudoconvessi

DIM. (TEOREMA): SCHEMA:



(5) $\Rightarrow$ (10): basta prendere $\Omega_j = \{\Phi < j\} \subset\subset \Omega$; Ω_j sono strett. pseud. perché Φ strett. pseudoconv. (Φ è l'esaustione).

(10) ⇒ (9): basta far vedere che C^0 strett. pseudoc. ⇒ Hart.-pseudoconv., che seguirà da (8) ⇒ (6) [PASSANDO DA 4, 5, 11, 1, 2, 7, sennò mi servirebbe avere già (10) ⇒ (9)].

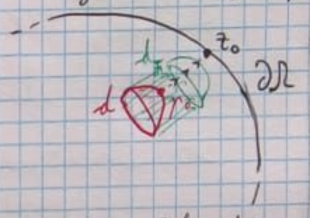
(9) ⇒ (6): sia $\mu = \|\cdot\|$. Da (6) ⇒ ... ⇒ (1), $-\log \mu_{\Omega_j} \in PSH(\Omega_j)$. Ma allora $-\log \mu_{\Omega_j} \searrow -\log \mu_\Omega$, quindi anche $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$.

[VOLENDO: questo dimostra (9) ⇒ (7)].

(6) ⇒ (4): basta porre $\Phi(z) = -\log \mu_\Omega(z) + \|z\|^2$, così siamo certi che è un'esaustione.

(4) ⇒ (5): è tecnico.

(1) ⇒ (2): se per assurdo $\exists$ d disco an. ch., $\exists$ μ f.d.m. t.c. $\mu_\Omega(\partial d) > \mu_\Omega(\mathring{d})$, sia $p_0 \in \mathring{d}$ con $\mu_\Omega(p_0) = \min_{p \in d} \mu_\Omega(p)$, e sia $z_0 \in \partial\Omega$ tale che $\mu_\Omega(p_0) = \mu(p_0 - z_0)$. Poniamo $d_j = d + (1 - 1/j)(z_0 - p_0)$ (cioè, se $d = \varphi(\bar{\Delta})$, allora $d_j = \varphi_j(\bar{\Delta})$, con $\varphi_j = \varphi + (1 - 1/j)(z_0 - p_0)$). Allora $\bigcup_j \partial d_j \subset\subset \Omega$ (almeno per $j \gg 1$), ma $\bigcup_j d_j \not\subset\subset \Omega$, contro la (1): assurdo.



(2) ⇒ (3): ovvio.

(3) ⇒ (1): se per assurdo $\exists \delta_0 > 0$, $\exists \{d_j\}$ dischi an. ch. tali che $\mu_\Omega(\partial d_j) \geq \delta_0 > 0$ e $\lim_{j \to +\infty} \mu_\Omega(d_j) = 0$, allora (3) sarebbe falsa: assurdo.

(7) ⇒ (6): ovvio.

(2) ⇒ (7): fissiamo μ, $z_0 \in \Omega$ e $v_0 \in \mathbb{C}^n$. Vogliamo vedere che $\zeta \overset{\psi}{\mapsto} -\log \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0)$ è SH. Possiamo assumere che $\|v_0\| \ll 1$, così ψ è definita (e continua) in $\bar{\Delta}$: $\psi \in C^0(\bar{\Delta})$. Per l'arbitrarietà di z_0 e di v_0, basta far vedere che $\psi(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\, d\theta$ (per gli altri pti basta adattarsi con z_0 e v_0). Fissiamo $\varepsilon > 0$. [...]

TEOREMA DI STONE-WEIERSTRASS: un'algebra di funzioni continue

su un CPT. K che "separi i pti." (per ogni coppia di punti c'è una funz. che ha valori diversi nei due punti), se (forse) valgono altre ipotesi (dovrebbe bastare che contenga le costanti), è densa in $C^0(K)$.

[--] Per STONE-W., $\exists\, p \in \mathbb{C}[z]$ t.c. $\sup_{\zeta\in\partial\Delta} |\psi(\zeta) - \operatorname{Re} p(\zeta)| < \varepsilon$. A patto di partire con $\varepsilon/2$ anziché ε e di sostituire p con $p+\varepsilon/2$, possiamo supporre $\operatorname{Re} p > \psi$ su $\partial\Delta$. Sia $v \in \mathbb{C}^n$ con $\mu(v)=1$ e sia $d: \zeta \mapsto z_0 + \zeta v_0 + e^{-p(\zeta)} v$.

SOTTOLEMMA: $d \Subset \Omega$.

Allora $\{z \mid \underbrace{\mu(z-z_0) \le |e^{-p(0)}|}_{(z = z_0 + |e^{-p(0)}| v \text{ con } \mu(v)=1)}\} \subseteq \Omega$; dunque $\mu_\Omega(z_0) \geq |e^{-p(0)}| =$

$= e^{-\operatorname{Re} p(0)} \Rightarrow \psi(0) = -\log \mu_\Omega(z_0) \le \operatorname{Re} p(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(e^{i\theta})\, d\theta \le$ ("$\operatorname{Re} p$" è armonica)

$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\, d\theta + \varepsilon$.

Per $\varepsilon \to 0$ abbiamo quanto cercato.

D/M. SOTTOLEMMA: su $\partial\Delta$, $\mu((z_0+\zeta v_0) - (z_0 + \zeta v_0 + e^{-p(\zeta)} v)) =$

$= \mu(e^{-p(\zeta)} v) = |e^{-p(\zeta)}|\, \mu(v) = e^{-\operatorname{Re} p(\zeta)} < e^{-\psi(\zeta)} = \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0) \Rightarrow$ ($\operatorname{Re} p > \psi$)

$\Rightarrow z_0 + \zeta v_0 + e^{-p(\zeta)} v \in \Omega \ \forall \zeta \in \partial\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_\Omega(\partial d) > 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_\Omega(d) > 0$.

(5) $\Rightarrow$ (11): sia $K \Subset \Omega$; essendo Φ esaustione, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $K \Subset \{\Phi < c\} \Rightarrow \hat{K}_{PSH(\Omega)} \subseteq \{\Phi < c\} \Subset \Omega$.

(11) $\Rightarrow$ (1): sia $d = \varphi(\bar\Delta)$ disco an. ch. e $u \in PSH(\Omega)$. Allora $u\circ\varphi \in SH(\Delta)$ (si fa). Per principio del massimo, $|u\circ\varphi(\zeta)| \le \sup_{\zeta\in\partial\Delta} |u(\varphi(\zeta))|$ $\forall \zeta \in \Delta$, quindi $\forall p \in d$ $|u(p)| \le \sup_{x\in\partial d} |u(x)|$. Dunque $d \subseteq \widehat{\partial d}_{PSH(\Omega)}$. Allora $\bigcup_\alpha d_\alpha \subseteq \bigcup_\alpha \widehat{\partial d_\alpha}_{PSH(\Omega)} \subseteq \widehat{\bigcup_\alpha \partial d_\alpha}_{PSH(\Omega)} \overset{(11)}{\Subset} \Omega$.

(7) $\Rightarrow$ (8): sia $\mu = \|\cdot\|$. Per (7), $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$. Inoltre, essendo $\partial\Omega$ di classe C^2, μ_Ω è C^2 vicino a $\partial\Omega$, dunque anche $-\log \mu_\Omega$ è C^2 vicino a $\partial\Omega$. Vogliamo vedere che la funz. di def. $-\mu_\Omega$ ha forma di Levi ≥ 0 su $T_x^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$. Ma $-\log\mu_\Omega \in PSH(\Omega) \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{-\log\mu_\Omega, x}(v,v) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ vicino a $\partial\Omega$.

$$\underbrace{L_{-\log\mu_\Omega, x}(v,v)}_{\|}$$

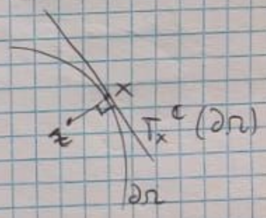
$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2(-\log\mu_\Omega)}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z)\, v_j \overline{v_k} =$$

$$= \sum_{j,k} \left(-\frac{1}{\mu_\Omega} \frac{\partial^2 \mu_\Omega}{\partial z_j \partial \bar z_k} + \frac{1}{\mu_\Omega^2} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial \bar z_k} \right) v_j \overline{v_k}.$$

Moltiplicando per μ_Ω, scegliendo $x \in \partial\Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$ t.c. $\sum_j \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(x)\, v_j = 0$ e facendo tendere $z \to x$:

$$\sum_{j,k} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial \bar z_k} v_j \overline{v_k} = \left(\sum_j \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z)\, v_j \right) \left(\sum_k \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial \bar z_k}(z)\, \overline{v_k} \right) =$$

$$= \left\| \sum_j \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z)\, v_j \right\|^2 \xrightarrow[z \to x]{} 0.$$



Ma $\mu_\Omega(z) = \|z - x\| \Rightarrow \frac{1}{\mu_\Omega^2} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial \bar z_k} v_j \overline{v_k} =$

$$= \frac{1}{\|z-x\|} \cdot \underbrace{\left\| \sum_j \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z)\, v_j \right\|^2}_{\simeq \|z-x\|^2} \to 0, \text{ quindi:}$$

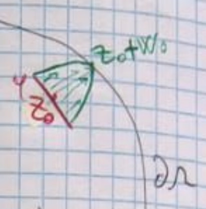
$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2(-\mu_\Omega)}{\partial z_j \partial \bar z_k}(x)\, v_j \overline{v_k} \geq 0.$$

(8) $\Rightarrow$ (4): se per assurdo non esistesse alcuna esaustione continua PSH, presa $\mu = \|\cdot\|$ e $u = -\log\mu_\Omega$, u è un'esaustione ($\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$), quindi non è PSH, dunque $\exists z_0$ vicino a $\partial\Omega$ (perché dentro riesco a renderla PSH) in cui u non è PSH, in cui cioè L_{u,z_0} ha un autoval. < 0, dunque $\exists v_0 \in \mathbb{C}^n$ (non nullo, $\|v_0\| = 1$), $\exists \lambda > 0$ $\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar\zeta}(\log \mu_\Omega)(z_0 + \zeta v_0)\big|_{\zeta = 0} = \lambda > 0$. Sia $\varphi(\zeta) = \log\mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0)$. Lo sviluppo di Taylor di φ è:

$$\log \mu_\Omega(z_0+\zeta v_0) = \psi(\zeta) = \psi(0) + 2\operatorname{Re}\Big(\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}(0)}_{A/2}\cdot\zeta + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}(0)}_{B/2}\cdot\zeta^2\Big) + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta\partial\bar\zeta}(0)\,|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2).$$

Sia $w_0 \in \mathbb{C}^n$ t.c. $\underbrace{\mu_\Omega(z_0) = \|w_0\| \text{ e } z_0+w_0 \in \partial\Omega}$.

(cioè: w_0 è il pt. di $\partial\Omega$ più vicino a z_0)



Allora:

$$\log\mu_\Omega(z_0+\zeta v_0) = \log\mu_\Omega(z_0) + \operatorname{Re}(A\zeta+B\zeta^2) + \lambda|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2).$$

Poniamo $\psi(\zeta) = z_0 + \zeta v_0 + e^{A\zeta+B\zeta^2} w_0$. Allora $\psi(0) = z_0 + w_0 \in \partial\Omega$ e vale:

$$\mu_\Omega(\psi(\zeta)) \overset{\text{(DISUG. TRIANG.)}}{\geq} \mu_\Omega(z_0+\zeta v_0) - \|w_0\|\cdot|e^{A\zeta+B\zeta^2}| =$$

$$= \mu_\Omega(z_0)\cdot|e^{A\zeta+B\zeta^2}|\cdot e^{\lambda|\zeta|^2+o(|\zeta|^2)} - \mu_\Omega(z_0)\cdot|e^{A\zeta+B\zeta^2}| \geq$$

$$\geq \|w_0\|\cdot|e^{A\zeta+B\zeta^2}|\left(e^{\frac{\lambda}{2}|\zeta|^2}-1\right) > 0 \quad \text{per } 0\neq|\zeta|\ll 1.$$

Quindi, per $0\neq|\zeta|\ll 1$, $\psi(\zeta)\in\Omega$, e dunque $\mu_\Omega\circ\psi$ ha minimo assoluto in $\zeta=0$, da cui:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}(\mu_\Omega\circ\psi)(0) = 0 \Rightarrow$$

(SVIL. DI TAYLOR)

$$\Rightarrow \underbrace{(\mu_\Omega\circ\psi)(\zeta)}_{>0 \text{ per } \zeta\neq 0} = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\zeta^2}(0)\,\zeta^2\right) + \frac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\zeta\partial\bar\zeta}(0)\,|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}(0) > 0;$$

inoltre:

$$\sum \frac{\partial\mu_\Omega}{\partial z_j}(\psi(0))\,\frac{\partial\psi_j}{\partial\zeta}(0) = 0 \Rightarrow \overbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}(0)}^{\text{def } v} \in T^{\mathbb{C}}_{z_0+w_0}(\partial\Omega).$$

Essendo $L_{\mu_\Omega,\, z_0+w_0}(v,v) = \dfrac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}(0) > 0$, allora $L_{-\mu_\Omega,\, z_0+w_0}(v,v) < 0$, contro (∂): assurdo.

LEZIONE 22: l'altra freccia della congettura di Levi, l'algebra $\mathcal{O}_0$.

TEOREMA DI HÖRMANDER: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconv., siano $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(\Omega)$ e sia:

$$f \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{n} f_j \, d\bar{z}_j ;$$

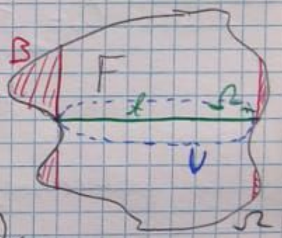
supponiamo che $\bar{\partial} f = 0$ (ossia che $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_i}$ $\forall i, j$); allora esiste $u \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$\bar{\partial} u = f,$$

ossia $\partial u / \partial \bar{z}_j = f_j$ $\forall j$.

IDEA DELLA DIM.: si fa per domini belli e si vede che passa alle esaustioni. Per farlo, ci si mette in $L^2(\Omega)$ sotto un'opportuna misura che va a 0 velocemente al bordo, e si prende u nell'ortogonale di $\mathcal{O}(\Omega)$ (che è sottosp.).

TEOREMA: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconv., sia $\Omega_n \stackrel{def}{=} \Omega \cap \{x_n = 0\}$ e $\tilde{\Omega}_n = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z', 0) \in \Omega_n\}$, cioè sempre lui ma visto in $\mathbb{C}^{n-1}$; se $f \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}_n)$, allora $\exists F \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $F(z', 0) = f(z')$ $\forall z' \in \tilde{\Omega}_n$.



DIM.: sia $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ proiez. ($\pi(\Omega_n) = \tilde{\Omega}_n$), e sia $B = \{z \in \Omega \mid \pi(z) \notin \tilde{\Omega}_n\} = \Omega \cap \pi^{-1}(\mathbb{C}^{n-1} \setminus \tilde{\Omega}_n)$. Allora Ω_n e B sono chiusi disgiunti in Ω (Ω_n è intersez. di Ω col chiuso $\{x_n = 0\}$, mentre B è Ω intersec. la controimm. di un chiuso). Possiamo quindi trovare una $\Psi \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\Psi|_B \equiv 0$ e $\Psi|_U \equiv 1$, con U intorno di Ω_n.

Vogliamo $u \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $F(z) = \Psi(z) f(\pi(z)) + z_n u(z)$ sia olom. in Ω; infatti, se $z = (z', 0) \in \Omega_n$, allora $F(z) = f(z')$. Ma:

$$F \text{ olom.} \iff \bar{\partial} F \equiv 0 \iff f(\pi(z)) \bar{\partial} \Psi + z_n \bar{\partial} u \equiv 0 \iff$$

$$\iff \bar{\partial} u = - \frac{f(\pi(z)) \bar{\partial} \Psi}{z_n}.$$

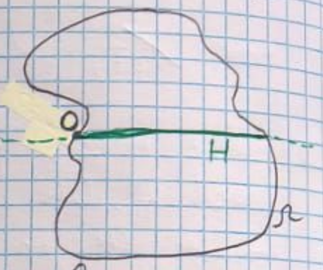
Qui entra in gioco che $\Psi|_U \equiv 1$: vale $\bar{\partial} \Psi \equiv 0$ in U, e quindi $- \frac{f(\pi(z)) \bar{\partial} \Psi}{z_n}$ è ben def. anche in Ω_n ed è $C^\infty(\Omega)$. Inoltre:

$$\bar\partial\left(\frac{(f\circ\pi)\cdot\bar\partial\psi}{z_n}\right)\equiv 0,$$

da cui per Hörmander esiste un'u come vogliamo.

COROLLARIO: se $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ pseudoc., allora Ω è dom. di olomorfia.

DIM.: per induz. su n. Per $n=1$ ok. Se vale fino a $n-1$, sia $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ e sia $x_0\in\partial\Omega$; vogliamo $F\in\mathcal{O}(\Omega)$ che non si estende oltre x_0. A meno di traslaz., WLOG $x_0=0$. Sia H iperpiano t.c. $x_0 \in \partial(\Omega\cap H)$.
A meno di rotaz., WLOG $H=\{z_n=0\}$.
Sia $\Omega_n=\Omega\cap H$ e $\tilde\Omega_n=\{z'\in\mathbb{C}^{n-1} \mid (z',0)\in\Omega_n\}$.
Allora $0'\in\partial\tilde\Omega_n$.



$\tilde\Omega_n$ è pseudoconv. (ad es. perché restringiamo un'esaustione pseudosubarm.). Per ip. ind. $\exists f\in\mathcal{O}(\tilde\Omega_n)$ che non si estende oltre $0'$. Allora $F\in\mathcal{O}(\Omega)$ data dal TEOREM non si estende oltre 0.

OSSERV: sia $\mathcal{O}_0$ la spiga dei germi di funz. olom. in 0. Allora $\mathcal{O}_0=\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$, con:

$$\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]\subseteq\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}\subseteq\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]].$$

In particolare, $\mathcal{O}_0$ è un'algebra. Ma di che tipo?
Se f olom. e $V=\{f=0\}$, possiamo associare a V (indovina un po'?) l'ideale:

$$\mathcal{I}(V) \overset{def}{=} \{g \text{ olom.} \mid g|_V\equiv 0\}.$$

Viceversa, dato $\mathcal{I}$ ideale di $\mathcal{O}_0$, possiamo considerare:

$$V_{\mathcal{I}} \overset{def}{=} \{z \mid g(z)=0\ \forall g\in \mathcal{I}\}.$$

Vale:

$$V\cup W \leftrightarrow \mathcal{I}(V)\cap\mathcal{I}(W).$$

TEOREMA: valgono:

1. $\mathcal{O}_0$ è un anello locale;
2. $\mathcal{O}_0$ è UFD;

3. $\mathcal{O}_0$ è un anello noetheriano (ossia ogni ideale è fin. gen.).

DIM.: (1): l'unico ideale massimale è $m_0 \overset{def}{=} \{f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \mid f(0)=0\}$. Infatti:

- m_0 è ideale proprio ($\mathbb{C} \cap m_0 = \{0\}$);
- se $f \notin m_0$, allora $1/f \in \mathcal{O}_0$ (perché $f \neq 0$ in un intorno di 0). [...]

ORDINE: se $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{O}_0$, si definisce:

$$\operatorname{ord}(f) \overset{def}{=} \min\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}.$$

SERIE NORMALIZZATE: si dice che $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{O}_0$ è "normalizzata" risp. a z_n se $a_{(0,\dots,0,\operatorname{ord}(f))} = 1$.

In particolare, f è normalizzata se e solo se:

$$f(z) = z_n^{\operatorname{ord} f} + \sum_{j=0}^{\operatorname{ord} f - 1} g_j(z') z_n^j + h(z),$$

con $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $\operatorname{ord} g_j = (\operatorname{ord} f) - j$ e $\operatorname{ord} h > \operatorname{ord} f$.

ES.: $\forall f \in \mathcal{O}_0\ \exists A \in GL(n, \mathbb{C})$ t.c. $f \circ A$ è normalizz. risp. a z_n).

POLINOMI DI WEIERSTRASS: se $\mathcal{O}_0' = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, un "pol. di W." è un elemento monico di $\mathcal{O}_0'[z_n]$ della forma:

$$p(z) = z_n^k + a_{k-1}(z') z_n^{k-1} + \dots + a_0(z'),$$

con $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathcal{O}_0'$ tali che $a_0(0) = \dots = a_{k-1}(0) = 0$. In altre parole, un p. di W. è un elemento $p \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ tale che $p(0', z_n) = z_n^k$.

TEOREMA DI PREPARAZIONE DI WEIERSTRASS: se $f \in \mathcal{O}_0$ normalizz. con $\operatorname{ord} f = k$, allora esiste una e una sola $u \in \mathcal{O}_0 \setminus m_0$ ed esiste uno e un solo pol. di W. W di grado k tali che:

$$f = u \cdot W.$$

TEOREMA DI DIVISIONE DI WEIERSTRASS: sia $f \in \mathcal{O}_0$ e sia $W \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ pol. di W.; allora $\exists!\, q \in \mathcal{O}_0$, $\exists!\, r \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ tali che:

$$\begin{cases} f = W q + r \\ \deg_{z_n} r < \deg_{z_n} W \end{cases}.$$

[...](2): per ind. su n. Per $n=1$, $f = z^k \cdot g$ con $g(0) \neq 0$ e $k = \operatorname{ord} f$. Se vale fino a $n-1$: sia $f \in \mathcal{O}_0$ normalizz. di ordine $k \geq 1$; scriviamo $f = u \cdot W$ con W p. di W.

FATTO: f irrid. in $\mathcal{O}_0 \iff W$ irrid. in $\mathcal{O}'_0[z_n]$.

Sia $W = W_1 \cdot \ldots \cdot W_m$ fattorizz. in irrid. (per ip. ind. $\mathcal{O}'_0$ è UFD, dunque anche $\mathcal{O}'_0[z_n]$).

LEMMA: $W_1, \ldots, W_m$ sono p. di W. a meno di invertibili.

Allora $f = \tilde{u} \cdot W_1 \cdot \ldots \cdot W_m$ è fattor. in irrid. in $\mathcal{O}_0$.

L'unicità è simile.

(3): simile (usando, anziché A UFD $\Rightarrow A[x]$ UFD, che un modulo fin. gen. su un anello noeth. è noeth.).

IDEA DIM. [T. DIVIS. DI WEIERSTRASS]: se $k = \deg_{z_n} W \geq 1$, siano $\delta, r > 0$ tali che $W \neq 0$ per $\begin{cases} |z_n| = r \\ \|z'\| < \delta \end{cases}$. Allora:

$$q(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(z', \zeta)}{W(z', \zeta)(\zeta - z_n)} \, d\zeta ;$$

$$r = f - W q .$$

IDEA DIM. [T. PREP. DI WEIERSTRASS]: $\exists \delta > 0, r > 0$ abbastanza piccoli t.c. $f(z', \cdot)$ ha esattamente $k = \operatorname{ord} f$ zeri in $|z_n| < r$, $\forall \|z'\| < \delta$. Siano $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_n(z')$ tali zeri; allora:

$$W(z', z_n) = \prod_{j=1}^{n} (z_n - \alpha_j(z')) , \quad u = f / W ;$$

si usa PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO, TEOR. DEI RESIDUI e TEOREMA DI ESTENSIONE DI RIEMANN.