IST ALG - LEZIONE 1 RICEVIMENTO: GIOVEDì 14:30 - 16:30

A anello (comm. con 1), S parte moltiplicativa, M un A-modulo

Esistono $A \to S^{-1}A$, $M \to S^{-1}M$ ← è un $S^{-1}A$-modulo

Proprietà: • S^{-1} è esatto: cioè se $0 \to M \to N \to P \to 0$ è esatta

allora anche $0 \to S^{-1}M \to S^{-1}N \to S^{-1}P \to 0$ è esatta

• $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$ (se $\exists f: A \twoheadrightarrow B$ da M un A-mod posso costruire un B-modulo: $B \otimes_A M$)

Riassumendo: $0 \to M \to N \to P \to 0$ esatta $\Rightarrow 0 \to S^{-1}A \otimes M \to S^{-1}A \otimes N \to S^{-1}A \otimes P \to 0$ esatta

(in generale si mantiene l'esattezza a destra)

Q è piatto se $\forall$ succ. esatta $0 \to M \to N \to P \to 0$ si ha che

$0 \to Q \otimes M \to Q \otimes N \to Q \otimes P \to 0$ è esatta (cioè si mantiene l'esattezza a sx)

OSS. $S^{-1}A$ è un A-modulo piatto.

• Ogni ideale di $S^{-1}A$ è della forma $S^{-1}I$ con I ideale di A

[non 1:1 : $I = (2) \subseteq \mathbb{Z}$, $J = (6) \subseteq \mathbb{Z}$, $S = \{3^n\}_{n \geq 0}$ $\Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}J$]

• Ideali primi di $S^{-1}A \longleftrightarrow$ Ideali primi P di A con $P \cap S = \emptyset$

• P ideale primo di A. $S = A \setminus P$ è moltiplicativo

$S^{-1}A = A_P$ $S^{-1}M = M_P$

Ideali primi di $A_P \longleftrightarrow$ Ideali primi di A contenuti in P

(Ideali (primi) di $A/I \longleftrightarrow$ Ideali (primi) di A contenenti I)

PROPRIETÀ LOCALE:

Def Una proprietà P è locale se:

- Quando vale $P(M)$ vale anche $P(S^{-1}M)$ $(\forall S)$

e inoltre

- Quando vale $P(M_m)$ $\forall m$ massimale allora vale anche $P(M)$

Esempio:

- X un A-modulo $x \in X$ [essere 0 è proprietà locale]

Se $x = 0$ allora $\frac{x}{1} = 0$ in $S^{-1}X$ per ogni S (ovvio)

e inoltre se $\frac{x}{1} = 0$ in X_m $\forall m$ ideale max allora $x = 0$.

Infatti: $Ann(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ è ideale di A

$x \neq 0 \Leftrightarrow Ann(x) \neq A$

Sia $m \supseteq Ann(x)$ massimale

Vediamo che $\frac{x}{1} \neq 0$ in X_m. Se per assurdo $\frac{x}{1} = 0$ in X_m

allora $\exists s \in A \setminus m : sx = 0 \Rightarrow s \in Ann(x) \subseteq m$. Assurdo

<u>PROPOSIZIONE:</u> X un A-modulo.

- $X = 0$ è proprietà locale

($\varphi : X \to Y$ di A-moduli) ⊛ φ iniettiva è propr. locale

- φ surgettiva è prop. locale

- $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ esatta è propr. locale

DIM: $\boxed{*}$ $0 \to K \to X \xrightarrow{\varphi} Y$ $K = \ker \varphi$ è esatta.

Quindi $0 \to S^{-1}K \to S^{-1}X \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}Y$ è esatta

- $K = 0 \Rightarrow S^{-1}K = 0$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

φ iniettiva $S^{-1}\varphi$ iniettiva

. se φ_m iniettiva $\forall m$ max $\Rightarrow K_m = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \varphi$ inj.

$\operatorname{Spec} A := \{P \subseteq A \mid P \text{ ideale primo}\}$ spazio topologico: (spettro di A)

Se I ideale di A

$V(I) := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \supseteq I\}$ costituisce l'insieme dei chiusi.

- $V(0) = \operatorname{Spec} A$
- $V(A) = \emptyset$
- $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V((I_\alpha \mid \alpha))$, dove $(I_\alpha \mid \alpha) = \sum I_\alpha$
- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$

Infatti: $V(I) \cup V(J) \subseteq V(IJ)$ dalla def.

$P \in V(IJ)$. Supponiamo $P \not\supseteq I$.

Sia $x \in I$, $x \notin P$. Ma $P \supseteq xJ$

$\forall j \in J$ $P \ni xj$, P primo $\Rightarrow P \ni j$ $\forall j \Rightarrow P \supseteq J$

$[X = \operatorname{Spec} A]$

Di conseguenza una base di aperti è data dagli X_f con $f \in A$

$X_f = X \setminus V(f) = \{P \in X \mid P \not\ni f\}$

La topologia si dice topologia di Zariski.

OSS. $V(I) = V(\sqrt{I})$ cioè $P \supseteq I \Leftrightarrow P \supseteq \sqrt{I}$

$\Rightarrow$ $x \in \sqrt{I} \Rightarrow x^n \in I \subseteq P \Rightarrow x \in P$

OSS. $V(I) = V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{I} = \bigcap_{P \supseteq I} P = \bigcap_{P \supseteq J} P = \sqrt{J}$

TEOREMA DEGLI ZERI DI HILBERT

$\mathbb{K}$ campo alg. chiuso. $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Se $f_1, \dots, f_m \in S$, $I = (f_1, \dots, f_m)$

$$\overline{V}(f_1, \dots, f_m) = \overline{V}(I) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m\} =$$
$$= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

Vale che $\left.\begin{array}{l} \overline{V}(I) \cup \overline{V}(J) = \overline{V}(IJ) \\ \bigcap \overline{V}(I_\alpha) = \overline{V}(\sum I_\alpha) \end{array}\right\}$ quindi definiscono una topologia su $\mathbb{K}^n$ (top. di Zariski)

Inoltre se $Y \subseteq \mathbb{K}^n$ definisco $\overline{I}(Y) := \{f \in S \mid f(p) = 0 \ \forall p \in Y\}$

(è un ideale di S).

TEOREMA (VARIE FORMULAZIONI) (NSS)

- Se $I \neq S$ allora $\overline{V}(I) \neq \emptyset$
- Se $\mathfrak{m}$ è ideale max di S allora $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$:
  $$\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \overline{I}(\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\})$$
- Se I, J sono ideali di S,
  $$\overline{V}(I) = \overline{V}(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$$
- Se $A \subseteq B$ è estensione di campi e B è fin. gen. come $\mathbb{K}$-algebra su A allora $[B : A] = \dim_A B < +\infty$ (cioè come moduli)

OSS. P, Q primi. Dimostrare che $P = Q$ è equivalente a dimostrare che $\overline{V}(P) = \overline{V}(Q)$

Esempio: $S = \mathbb{C}[a, b, c, d]$ vedo come matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$P = (a + d, ad - bc)$

$Q = (a + d, a^2 + 2bc + d^2)$ (fidati che sono primi)

$$\overline{V}(P) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{tr} A = 0 \\ \det A = 0 \end{array} \right\} \qquad \overline{V}(Q) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{tr} A = 0 \\ \operatorname{tr} A^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$\overline{V}(P) = \overline{V}(Q)$ = matrici nilpotenti

OSS. $I \subseteq S$. ($\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$)

$$\overline{V}(I) \longleftrightarrow \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} S : \mathfrak{m} \supseteq I\} \longleftrightarrow \operatorname{Max} S/I$$

Se $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} S$, $\mathfrak{m} \supseteq I$

$\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \overline{I}((\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

$\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}} \supseteq I$ vuol dire che se $f \in I$ allora $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$

La corrispondenza è quindi $\mathbb{K}^n \ni \underline{\alpha} \longleftrightarrow \mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$

Moduli Piatti

Proposizione: $\forall Q$ Se $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0$ esatta allora $Q\otimes M \xrightarrow{id\otimes\varphi} Q\otimes N \xrightarrow{id\otimes\psi} Q\otimes P \to 0$ esatta

Una mappa $Q\otimes M \to X$ è univocamente data da una bilineare $Q\times M \to X$.

visti sul prodotto

$$\left.\begin{array}{l} id\otimes\varphi : q\otimes m \longmapsto q\otimes\varphi(m) \\ id\otimes\psi : q\otimes m \longmapsto q\otimes\psi(m) \end{array}\right\}$$ sono banalmente bilineari e $(id\otimes\psi)\circ(id\otimes\varphi)=0$

È esatta in $Q\otimes P$, ovvero $id\otimes\psi$ è surgettiva.

$Q\otimes P$ è generato dagli $\{q\otimes p \mid q\in Q, p\in P\}$ ψ è surgettiva, quindi $\forall p\in P$ $p=\psi(m_p)$ $\Rightarrow \{q\otimes p\}_{\substack{q\in Q\\ p\in P}} = \{q\otimes\psi(m_p)\}_{\substack{q\in Q\\ p\in P}} = \{(id\otimes\psi)(q\otimes m_p)\}_{\substack{q\in Q\\ p\in P}}$

Per dir in modo diretto l'esattezza in $Q\otimes N$ si costruisce un'inversa da $Q\otimes P \longrightarrow Q\otimes N / Im(id\otimes\varphi)$

$$q\otimes p \longmapsto q\otimes n \quad \text{con } \psi(n)=p$$

È ben definita ed è l'inversa di $id\otimes\psi$ (indotta al quoziente)

Quindi $Ker(id\otimes\psi) = Im(id\otimes\varphi)$

ISTALG _ LEZIONE 2

Def Si definisce $\mathrm{Coker}\,\varphi$ come l'unico P per cui:

dato $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0$ tale che:

- $\psi \circ \varphi = 0$
- $\forall \chi : N \to Q$ t.c. $\chi \circ \varphi = 0$ allora $\exists !\, f : P \to Q$ t.c. $f \circ \psi = \chi$

OSS. È ben definito:

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dr] \arrow[d, dashed, shift left, "f'"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & P' \arrow[u, dashed, shift left, "f"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\psi = f' \circ \psi' = (f' \circ f) \circ \psi$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f' \circ f"', "id"] \\ N \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\psi"'] & P \end{tikzcd}$$

è unica $\Downarrow$

$f' \circ f = id$

$f \circ f' = id$

Def Si definisce $\mathrm{Ker}\,\varphi$ come l'unico K per cui:

dato $0 \to K \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N$ tale che:

- $\varphi \circ \psi = 0$
- $\forall \chi : Q \to M$ t.c. $\varphi \circ \chi = 0$ $\exists !\, f : Q \to K$ t.c. $\chi = \psi \circ f$

TEOREMA ZERI DI HILBERT

LEMMA: $I \subseteq S$ ideale. $\sqrt{I} = \bigcap_{\alpha \in \overline{V}(I)} m_\alpha$

DIM: $\alpha \in \overline{V}(I) \iff m_\alpha \supseteq I \xRightarrow{\text{ovvero}} m_\alpha \supseteq \sqrt{I}$

Sia $J = \bigcap_{\alpha \in \overline{V}(I)} m_\alpha \supseteq \sqrt{I}$ Inoltre $\sqrt{J} = J$ perché intersezione di ideali primi

Verifico che $\overline{V}(\sqrt{I}) = \overline{V}(I) = \overline{V}(J)$

In tal caso si ha $\sqrt{I} = \sqrt{J} = J$.

$J \supseteq \sqrt{I} \Rightarrow \overline{V}(J) \subseteq \overline{V}(\sqrt{I}) = \overline{V}(I)$

Se $\alpha \in \overline{V}(\sqrt{I})$ allora $m_\alpha \supseteq J$ e quindi $\alpha \in \overline{V}(J)$

- Se A è $\mathbb{K}$-algebra fin. gen. voglio descrivere $\mathrm{Max}\,A$ in modo simile a quanto fatto per S.

$\mathbb{K} \subseteq A$ e $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ t.c. il più piccolo sottoanello di A contenente $\mathbb{K}, a_1, \dots, a_n$ sia A

Cioè $\exists\ \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} A$ surgettiva

$x_i \longmapsto a_i$

quindi $A \cong \dfrac{S}{\mathrm{Ker}\,\pi} = S/I$ con $I = (f_1, \dots, f_k)$

$\left[\alpha \in K^n. \quad \mathfrak{M}_\alpha \supseteq I \iff \alpha \in \overline{V}(I) \right]$

- Se $\mathfrak{N}$ è massimale in A allora $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}/I$ per $\mathfrak{M}$ massimale di S e $\mathfrak{M} \supseteq I$

Quindi $\quad \mathrm{Max}\, A \longleftrightarrow \overline{V}(I)$

$$\mathfrak{M}_\alpha/I \longleftarrow\!\shortmid \alpha$$

Esempio: $A = \mathbb{C}[x,y]/x^2+y^2=1$

$$\mathrm{Max}\, A \longleftrightarrow \{(a,b) : a^2+b^2=1\}$$

$$(x-a, y-b)/x^2+y^2=1 \longleftarrow\!\shortmid (a,b)$$

Se come generatori di A scelgo $\begin{matrix} u = x+iy \\ v = x-iy \end{matrix}$

$$A = \mathbb{C}[u,v]/uv=1$$

$$\mathrm{Max}\, A \longleftrightarrow \{(c,d) \mid cd=1\}$$

Come sia fatto $\overline{V}(I)$ dipende dalla scelta dei generatori (all'interno di K^n)

OSS. $\mathrm{Max}\, A \subseteq \mathrm{Spec}\, A$

$\mathrm{Max}\, A \longleftrightarrow \overline{V}(I) \subseteq K^n$

Le topologie indotte su Max A sono sempre le stesse

$$\overline{V}(J) \cap \overline{V}(I) = \overline{V}(I+J) = \{\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}\, A \mid \mathfrak{M} \supseteq I+J\} =$$
$$= V(I+J) \cap \mathrm{Max}\, A$$

LEMMA: $A = S/I$ K-algebra fin. gen. allora: (sempre $K = \overline{K}$)

1) $J \subseteq A$ ideale allora $\overline{V}(J) = \emptyset \iff J = A$
2) $\overline{I}(\overline{V}(J)) = \sqrt{J}$
3) $\overline{V}(J_1) = \overline{V}(J_2) \iff \sqrt{J_1} = \sqrt{J_2}$
4) $\mathrm{Spec}\, A \ni p, q \quad p=q \iff \overline{V}(p) = \overline{V}(q)$
5) $\sqrt{J} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{M} \supseteq J \\ \mathfrak{M} \in \mathrm{Max}\, A}} \mathfrak{M}$

in pratica vale tutto lo stesso anche per K-alg fin. gen.

Def J ideale di A. $\overline{V}(J) := V(J) \cap \mathrm{Max}\, A$ oppure, posto $\tilde{J}/I = J$ con $\tilde{J}$ ideale di S, $\overline{V}(J) := \overline{V}(\tilde{J}) \subseteq \overline{V}(I) \longleftrightarrow \mathrm{Max}\, A$

$f: A \to B$ omomorfismo di anelli unitari ($f(1)=1$).

Se I ideale di A $\quad I^e = (f(I)) \subseteq B$

$\quad J$ ideale di B $\quad J^c = f^{-1}(J) \subseteq A$

OSS. $I^{ec} \supseteq I$

$J^{ce} \subseteq J$

f induce $\varphi: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. $\quad \varphi$ è <u>continua</u>:

$$p \longmapsto f^{-1}(p) = p^c$$

Sia $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} A$. $\quad \varphi^{-1}(V(I)) = V(I^e)$

Infatti: $\subseteq$ $\quad p \in \varphi^{-1}(V(I))$, cioè $\underset{\underset{\underset{p^c}{\parallel}}{f^{-1}(p)}}{\underset{\parallel}{\varphi(p)}} \supseteq I \quad \Rightarrow p \supseteq p^{ce} \supseteq I^e$

$\supseteq$ $\quad$ Se $p \supseteq I^e$ voglio far vedere che $\varphi(p) \supseteq I$

$\varphi(p) = f^{-1}(p) = p^c \qquad p^c \supseteq I^{ec} \supseteq I$

OSS. Quando $p \in \operatorname{Spec} A$ è $p \in \operatorname{Im}\varphi$?

$p \in \operatorname{Im}\varphi \iff p^{ec} = p$

$\Rightarrow$ $\quad p = q^c \quad q \in \operatorname{Spec} B \quad \Rightarrow p^e = q^{ce} \subseteq q \quad \Rightarrow p \subseteq p^{ec} \subseteq q^c = p$

$\Rightarrow p^{ec} = p$

$\Leftarrow$ $\quad$ Sia $S = A \setminus p$ e $T = f(S)$

Considero $\tilde{f}: S^{-1}A \to T^{-1}B$ $\quad$ ← Non può essere $=0$, cioè $0 \notin T$, perché vale che $\underset{\uparrow\ 0 \in f(p)}{\ker f \subseteq} f^{-1}(f(p)) \underset{\uparrow\ p^{ec}=p}{=} p$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & B \arrow[d, "\pi'"] \\ S^{-1}A \arrow[r, "\tilde{f}"'] & T^{-1}B \end{tikzcd}$$

Dico che $g^{-1}(T^{-1}B\, g(p)) = p$

Sicuramente vale $\supseteq$ (è un esteso-contr.)

$\subseteq$: $T^{-1}B\, g(p) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq T^{-1}B$ massimale (*)

$g^{-1}(\mathfrak{M}) = \pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\mathfrak{M}))$

$\tilde{f}^{-1}(\mathfrak{M})$ è un ideale primo in $S^{-1}A$ (dentro $S^{-1}p$), quindi $\underset{\underset{g^{-1}(\mathfrak{M})}{\parallel}}{\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\mathfrak{M}))}$ è contenuto in $p \Rightarrow g^{-1}(T^{-1}B\, g(p)) \subseteq g^{-1}(\mathfrak{M}) \subseteq p$

(*) Attenzione: $\mathfrak{M}$ potrebbe non esistere. Cioè potrebbe essere $T^{-1}B\,g(p) = T^{-1}B$

In tal caso $1 = \dfrac{x}{f(s)}$ con $x \in p^e$. Quindi

$\exists\, \xi \in S$ t.c. $f(\xi)(x - f(s)) = 0$ ovvero $\underset{\underset{p^e}{\cap}}{f(\xi)x} = \underset{\underset{f(S)}{\cap}}{f(s)f(\xi)} \Rightarrow \underset{\underset{p^{ec}=p}{\uparrow}}{S \cap p \neq \emptyset}$ Assurdo

In realtà lo scopo era dimostrare che $\exists\, \mathfrak{M} \supseteq T^{-1}B\,g(p)$

A questo punto vale che $p = g^{-1}(T^{-1}B\,g(p)) \subseteq g^{-1}(\mathfrak{M}) \subseteq p$, quindi $\pi'^{-1}(\mathfrak{M})$ è un primo che si contrae su p $\quad (p = g^{-1}(\mathfrak{M}) = f^{-1}(\pi'^{-1}(\mathfrak{M})))$

$(\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}})$

A, B due $\mathbb{K}$-algebre (fin. gen.) $\quad f: \underbrace{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_h)}_{A}\ \text{con } I=(f_1,\dots,f_h) \longrightarrow \underbrace{\mathbb{K}[y_1,\dots,y_m]/(g_1,\dots,g_k)}_{B}\ \text{con } J=(g_1,\dots,g_k)$

Dare una tale f vuol dire, posto

$f(x_1)=\varphi_1(y_1,\dots,y_m)$

$\vdots$

$f(x_n)=\varphi_n(y_1,\dots,y_m)$

deve essere $f_i(\varphi_1(y),\dots,\varphi_n(y))\in(g_1,\dots,g_k)$

$[f: g\longmapsto g\circ\varphi]$ dove $\varphi:\mathbb{K}^m\longrightarrow\mathbb{K}^n$, $y\longmapsto(\varphi_1(y),\dots,\varphi_n(y))$

PROPOSIZIONE: A,B $\overline{\mathbb{K}}$-alg. fin. gen.

1) Se $\mathfrak{M}$ è ideale massimale di B allora $f^{-1}(\mathfrak{M})$ è ideale massimale di A

2) $\mathfrak{M}_\alpha\in\overline{V}(J)$ allora $f^{-1}(\mathfrak{M}_\alpha)=\mathfrak{M}_{\varphi(\alpha)}$ con

$$\varphi:\mathbb{K}^m\longrightarrow\mathbb{K}^n$$
$$\beta\longmapsto(\varphi_1(\beta),\dots,\varphi_n(\beta))$$

DIM: $\boxed{2}\Rightarrow\boxed{1}$ perché ogni ideale massimale di B è della forma $\mathfrak{M}_\alpha/J$ per $\alpha\in\overline{V}(J)$

$\boxed{2}$ $f^{-1}(\mathfrak{M}_\alpha)=\{g\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \mid f(g)\in\mathfrak{M}_\alpha$, cioè $g(\varphi)\in\mathfrak{M}_\alpha$ ovvero ancora $g(\varphi(\alpha))=0\}=$

$=\{g\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\mid g\in\mathfrak{M}_{\varphi(\alpha)}\}$

$=\mathfrak{M}_{\varphi(\alpha)}$

FUNZIONI REGOLARI SU $\operatorname{Max}A$ E $\operatorname{Spec}A$

$(\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}})$

Se $A=S=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\ni f$ $\quad\operatorname{Max}S=\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}})$ posso definire $f:\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}$, $\alpha\longmapsto f(\alpha)$

Se $A=S/I$ e $\sqrt{I}=I$ posso definire $A\longrightarrow$ Funzioni da $\overline{V}(I)$ a $\mathbb{K}$

Preso $\bar f\in A$ $\exists f\in S$ e l'appl. $\alpha\longmapsto f(\alpha)$ è ben definita.

Infatti se $\bar f=0$ $f\in I\Rightarrow f(\alpha)=0$ $\forall\alpha\in\overline{V}(I)$ (mi dice che non dipende dal rappr. $\bar f-\bar f'=0\rightsquigarrow f(\alpha)=f'(\alpha)\ \forall\alpha$)

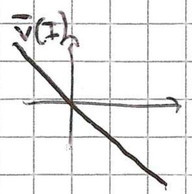
È iniettiva: $S\ni f\longmapsto 0$ se $f(\alpha)=0$ $\forall\alpha\in\overline{V}(I)$ allora $f\in\mathfrak{M}_\alpha$ $\forall\alpha\in\overline{V}(I)$

$f\in\bigcap_{\alpha\in\overline{V}(I)}\mathfrak{M}_\alpha=\sqrt{I}=I$.

Esempio: $\mathbb{C}[x,y]/(x+y)^2=0$

$x+y\longmapsto$ funz. 0

$\notin I$



Quindi $I=\sqrt{I}$ è necessario per l'iniettività

ISTALG. LEZIONE 3

$S = K[x_1,\dots,x_n]$ $\qquad Y = K^n$

$f \in S \qquad Y_f = \{\alpha \in K^n \mid f(\alpha) \neq 0\}$

Funzione regolare su Y_f $= \left\{\frac{g}{f^m}\right\} = S_f$

Def $X = \mathrm{Spec}\,A$, U aperto di X (A generico)

$\mathcal{O}(U)$ = funzioni regolari su U $= \{\sigma = (\sigma_p) \in \prod_{p\in U} A_p \mid \forall p \in U\ \exists f, a \in A :$
$p \in X_f \subseteq U$ e $\sigma_q = \frac{a}{f}$ in A_q $\forall q \in X_f\}$
$(f \notin p)$

Si ha quindi una mappa iniettiva di quelli
← essere 0 è proprietà locale

$$A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$
$$a \longmapsto \sigma = (\sigma_p) = \frac{a}{1} \in A_p \ \forall p$$

Se $U \subseteq V$ si ha anche

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$$
$$\sigma = (\sigma_p)_{p\in V} \longrightarrow \sigma = (\sigma_q)_{q\in U}$$

PROPOSIZIONE: $\mathcal{O}(X) = A$ (cioè la mappa sopra è isomorfismo)

DIM: Abbiamo già visto che è iniettiva.

Sia $\sigma = (\sigma_p)_{p\in X}$. $\forall p\ \exists f_p, a_p$ t.c. $p \in X_{f_p} \subseteq X$ e

$$\sigma_q = \frac{a_p}{f_p} \quad \forall q \in X_{f_p}$$

Quindi $X = \bigcup_i X_{f_i}$ e $\sigma_p = \frac{a_i}{f_i}$ $\in A_p$ $\forall p \in X_{f_i}$

[Dico che lo spec A è compatto.

$\forall p\ \exists i : f_i \notin p$ $(f_p \notin p)$ $\Rightarrow \Sigma(f_i) = A$ (quindi $\Sigma(f_i) \not\subseteq \mathfrak{m}$ per nessun massimale, quindi $\Sigma(f_i) \ni 1$) $\Rightarrow 1 = \Sigma(f_i)$ ⇓ 1 = comb. lin. finita

$\Rightarrow (f_1,\dots,f_m) = A \Rightarrow \bigcup_i^m X_{f_i} = X$]

$\forall i,j \le m$ ~~Sia~~ $\forall q \in X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_if_j}$

in A_q $\quad \sigma_q = \frac{a_i}{f_i} = \frac{a_j}{f_j}$ $\quad$ considero $A_{f_if_j} \longrightarrow \prod_{q\in X_{f_if_j}} A_q$, $\quad \frac{a}{f} \mapsto \left(\frac{a}{f}\right)_q$ $\quad$ ← in ogni pezzo inverto più roba

$S^{-1}A$ con $S = \{f_i^h f_j^k\}_{h,k\ge 0}$

Quindi $\frac{a_i}{f_i} = \frac{a_j}{f_j}$ in $A_{f_if_j}$

perché la mappa è iniettiva ($\frac{a_i}{f_i} - \frac{a_j}{f_j} = 0$ in $S^{-1}A_q$ $\forall q$ e quindi per ogni primo di $S^{-1}A$, da cui $\frac{a_i}{f_i} - \frac{a_j}{f_j} = 0$ in $S^{-1}A$)

$\Rightarrow \exists m : \forall i,j \quad (f_if_j)^m (a_if_j - a_jf_i) = 0$

gli i,j sono finiti, basta prendere il max al variare delle coppie

cioè $\exists m : \forall i,j \quad a_i f_i^m f_j^{m+1} - a_j f_j^m f_i^{m+1} = 0$

Poiché $A = (f_1, \dots, f_n) \Rightarrow A = (f_1^{m+1}, \dots, f_n^{m+1})$ $\quad 1 = \sum \beta_i \beta_i = (\sum \beta_i f_i) \in (f_1^{m+1}, \dots, f_n^{m+1})$ [oppure vedendo che $f_i \in \sqrt{(f_1^{m+1}, \dots, f_n^{m+1})}$ $\forall i$]

$$1 = \sum_i b_i f_i^{m+1} \qquad \text{Preso } a \in A \quad a := \sum a_i b_i f_i^m$$

Dico che $a_q = \sigma_q$ $\forall q$ TUTTI, ovvero $a = \frac{a_j}{f_j}$ in A_{f_j}

Ciò vale se e solo se $\Updownarrow$

$\exists k \quad f_j^k (a f_j - a_j) = 0$

Dico che vale con $k = m$:

$$a f_j^{m+1} = \sum_i a_i b_i f_i^m f_j^{m+1}$$
$$= \sum_i a_j b_i f_j^m f_i^{m+1} = a_j f_j^m \left(\sum_i b_i f_i^{m+1}\right) = a_j f_j^m$$

Quindi $(\sigma_p) = \left(\frac{a}{1}\right)$, da cui la surgettività.

Esempio: $\mathbb{C}[x,y] \supseteq \mathbb{C}[\underset{a}{x^4}, \underset{b}{x^3y}, \underset{c}{xy^3}, \underset{d}{y^4}] = A$ è dominio (ovvio: è sottoanello)

$X = \operatorname{Spec} A$

$(a,b,c,d) = \mathfrak{M} = (x,y) \cap A$ è max in A (contraz. di massimale di $\mathbb{C}$-alg. fin. gen.) $\qquad V(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{M}\}$ quindi $U = X \setminus \{\mathfrak{M}\}$ è aperto

$\subseteq$ è ovvio e (a,b,c,d) è max

Scriviamo $U = X_a \cup X_d$ (è equivalente a dire $V(a,d) = V(\mathfrak{M})$) $\quad X \setminus V(a,d) = X \setminus V(\mathfrak{M})$

$\supseteq$ se $x^4 \notin p$ (o $y^4 \notin p$) $p \in \operatorname{Spec} A$ allora $p \neq \mathfrak{M} \Rightarrow p \in U$ (è ovvio: $(a,d) \subseteq \mathfrak{M} \Rightarrow X_a \cup X_d \subseteq U$)

$\subseteq$ per assurdo Se $x^4, y^4 \in p$ allora $x^{12}y^4 = a^3 d = b^4 \in p \Rightarrow b \in p$

e analogamente $c \in p \Rightarrow p \supseteq \mathfrak{M} \Rightarrow p \notin U$ $(p = \mathfrak{M})$

Per definire una ~~funzione~~ funzione regolare su U basta ~~che~~ prendere u, v

tali che $\left(\begin{matrix} \frac{u}{a^n} \in A_a & u \in A \\ \frac{v}{d^m} \in A_d & v \in A \end{matrix}\right)$ e $\frac{u}{a^n} = \frac{v}{d^m}$ in A_{ad} $\leftarrow S = \{a^h d^k\}$

(e scegliere degli n e m)

e porre $\begin{cases} \sigma_q = \left(\frac{u}{a^n}\right)_q & \text{se } q \in X_a \\ \sigma_q = \left(\frac{v}{d^m}\right)_q & \text{se } q \in X_d \end{cases}$

Ad esempio, prendiamo $\frac{b^2}{a} = \underset{A}{\underset{\notin}{x^2y^2}} = \frac{c^2}{d}$ (quindi ci sono funz. reg. non banali su aperti veri)

A noetheriano

$I \subseteq A$ ideale

Def $\operatorname{Ass} I = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid p = (I : x) \text{ per qualche } x\}$ sono i primi associati.

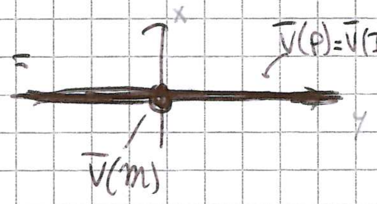
$\mathrm{Ass}\, I = \{ p \in \mathrm{Spec} A \mid p = \mathrm{Ann}(\bar{x}) \text{ con } \bar{x} \in A/I \}$ (Assassini)

<u>Def</u> Un ideale primo $P \supseteq I$ si dice minimale se $P \supsetneq Q \supseteq I$, Q primo $\Rightarrow Q = P$

oss. Minimale $\Rightarrow$ associato

<u>Def</u> Dato I, se P è minimale su I si dice componente isolata.
Se $p \in \mathrm{Ass}\, I$ non minimale allora si dice componente immersa

<u>Esempio</u>: $A = \mathbb{C}[x,y]$ $\quad I = (x^2, xy)$

$\bar{V}(I) =$ 

Sia $P = (x) = I : y$
$P \supseteq I$ quindi è associato. È anche minimale

$m = (x,y) = I : x$ quindi è associato e immerso

oss.
- $\underset{\text{divisori di zero}}{\mathcal{D}}(A) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, 0} P$
- $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}I) = \mathrm{Ass}_A I \cap \mathrm{Spec}\, S^{-1}A$ ← identificando $\mathrm{Spec}\, S^{-1}A \subseteq \mathrm{Spec} A$
- $\mathrm{Ass}\, I$ è un insieme finito
- $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ con q_i primari e essenziali $(q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} q_j)$, allora $\{\sqrt{q_i}\} = \mathrm{Ass}_A I$. Se n è minimale, allora $n = |\mathrm{Ass}\, I|$

ESERCIZI

<u>Esercizio 1.3</u> ① Essere piatto è propr. locale.

M un A-modulo. Dobbiamo verificare che
1) M piatto $\Rightarrow S^{-1}M$ piatto $\forall S$
2) $\forall m \in \mathrm{Max} A$ $\; M_m$ piatto $\Rightarrow M$ piatto.

$\boxed{1}$ $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta come $S^{-1}A$ moduli

$S^{-1}M = S^{-1}A \otimes_A M$ $\qquad S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} X = (M \otimes_A S^{-1}A) \otimes_{S^{-1}A} X = M \otimes_A (S^{-1}A \otimes_{S^{-1}A} X)$
$= M \otimes_A X$ come $S^{-1}A$ moduli $(= S^{-1}(M \otimes_A X)$ come A-mod.$)$ (grazie alla struttura di X)

Tensorizzando con $S^{-1}M$ si ha

$0 \to S^{-1}(M \otimes_A X) \to S^{-1}(M \otimes_A Y) \to S^{-1}(M \otimes_A Z) \to 0$ che è esatta per piattezza di M e per esattezza di S^{-1}.

$\boxed{2}$ M_m piatto $\forall m \in \mathrm{Max} A$. Sia

$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta di A-moduli

Tensorizzo con M:

$$0 \longrightarrow M\otimes_A X \xrightarrow{\varphi} M\otimes_A Y \longrightarrow M\otimes_A Z \longrightarrow 0$$

esatto

Devo solo dimostrare l'iniettività di φ. L'iniettività è propr. locale $\Rightarrow$ M piatto $\left(S^{-1}(M\otimes_A X) = S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}X \text{ e si ha } S^{-1}M \text{ piatto}\right)$

Esercizio 1.4: $A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{K}$

A non è noetheriano

A_m è noetheriano $\forall m \in \operatorname{Max} A$

Esercizio 1.6: $f: \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $f(e_i) = 0 \ \forall i$

$e_i (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

Allora $f \equiv 0$

Sia $x = (1, 2, 4, 8, 16, \dots) = e_0 + 2e_1 + 4e_2 + \dots + 2^n y$

$f(x) = f(e_0) + 2f(e_1) + \dots + 2^n f(y) = 2^n f(y)$

Potendo scegliere n come mi pare si ha

$2^n \mid f(x) \quad \forall n \quad \Rightarrow f(x) = 0$

Sia $D = \{ (a_n) \mid 2^n | a_n \ \forall n \}$

Se $d \in D$ allora $f(d) = 0$ facendo come sopra $f(d) = 2^n f(\text{coda})$

$T = \{ (a_n) \mid 3^n | a_n \ \forall n \}$

Se $t \in T$ allora $f(t) = 0$

Se $x = (x_n)$ $\quad x_n = \underbrace{2^n a_n}_{\in D} + \underbrace{3^n b_n}_{\in T}$ perché $(2,3) = 1$

$\Rightarrow D + T = \prod^{\infty} \mathbb{Z}$ $\quad \Rightarrow f \equiv 0$ $\quad \left(f(x) = 0 \ \forall x \right)$

Esercizio 1.7: $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ non è libero

Se per assurdo ε_i $i \in I$ fosse una base di $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$

perché $\#(\prod \mathbb{Z}) > \#(\mathbb{N})$ si ha $\#(I) > \#(\mathbb{N})$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad e_n = \sum a_{jn} \varepsilon_j$ somme finite

$e_n \in \langle \varepsilon_{j_{n_1}}, \dots, \varepsilon_{j_{n_{k_n}}} \rangle$ quindi esiste $J \subseteq I$ numerabile

tale che $e_n \in \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\varepsilon_i$ $\quad \forall n$. Si ha $I \neq J$

$$\prod^{\infty} \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\varepsilon_i \right) \cup \left(\bigoplus_{i \notin J} \mathbb{Z}\varepsilon_i \right)$$

Definisco, preso $i_0 \in I \setminus J$

$$f : \prod \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \text{si ha che } f \neq 0, \text{ ma } f(e_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x = \sum_{i \in I} x_i \varepsilon_i \longmapsto x_{i_0}$$

Assurdo per l'esercizio precedente.

Esercizio 1.8: $X = \operatorname{Spec} A$ è compatto

$$X = \bigcup_i X_{f_i} \Rightarrow X = \bigcup^{n} X_{f_i}$$

$$\emptyset = \bigcap_\alpha V(I_\alpha) \Rightarrow \emptyset = \bigcap^{n} V(I_\alpha)$$

Se $V(\sum I_\alpha) = \emptyset$ allora $\sum I_\alpha = A \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$A = I_{\alpha_1} + \dots + I_{\alpha_m}$ e quindi $\emptyset = \bigcap^{n} V(I_{\alpha_i})$

Esercizio 1.9: $X = \operatorname{Spec} A$

$\{p\}$ chiuso $\Leftrightarrow$ p massimale

$\Leftarrow$ ovvio. p max $\Rightarrow V(p) = \{p\}$

$\Rightarrow$ Sia $m \supseteq p$ primo. Se $\underset{\{p\}}{\overset{\shortparallel}{V(I)}}$ è chiuso $\Rightarrow m \in V(I) \Rightarrow m = p$

ISTALG - LEZIONE 4

ESTENSIONI INTERE

<u>Def</u> $A \subseteq B$ ~~[illegible]~~ anelli. Un elemento $b \in B$ si dice intero su A se $\exists a_1, \dots, a_n$ t.c.

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Se $f: A \to B$ omomorfismo di anelli. $b \in B$ è intero su A se lo è su $f(A)$.

<u>Esempio:</u> $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$

$\sqrt{2}$ è intero su $\mathbb{Z}$ $\quad (\; t^2 - 2 = 0 \;)$

$\frac{1}{2}$ non è intero su $\mathbb{Z}$ (Se $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots + a_n = 0$ moltiplico per 2^n

$\rightsquigarrow \underbrace{1 + 2(a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1} a_n)}_{\text{dispari}} = \underbrace{0}_{\text{pari}}$

Assurdo)

<u>Lemma:</u> TFAE: $A \subseteq B$ anelli, $b \in B$. [Sempre anelli commutativi con 1]

1) b è intero su A

2) $A[b]$ è un A-mod fin. gen.

3) $\exists A[b] \subseteq C \subseteq B$ anello e C è fin. gen. come A-mod.

4) $\exists$ un $A[b]$-modulo fedele M fin. gen. come A-mod.

Dim: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ $\quad b^n = a_1 b^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_i \in A$

$A[b]$ come A-modulo è generato da $1, b, \dots, b^{n-1}$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Ovvio. Basta prendere $C = A[b]$

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$ $M = C$ è un $A[b]$-modulo. È fin. gen. come A-mod.

È fedele: infatti, se $x \in A[b]$ $x \neq 0$ $\quad x \cdot 1 = x \neq 0$ (C è anello)

(non esiste $x \in A[b]$ t.c. $xy = 0 \quad \forall y \in C$)

$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$ Considero $\varphi: M \to M$, $m \mapsto bm$ omomorfismo di A-moduli ($\varphi \neq 0$ perché fedele come $A[b]$-mod.)

Per Hamilton-Cayley $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ tali che

$$0 = \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \dots + a_n$$

Quindi $0 = \varphi^n(m) + a_1 \varphi^{n-1}(m) + \dots + a_n =$

$= (b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n) m \quad \forall m \in M$

M è fedele $\Rightarrow b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0 \Rightarrow b$ intero

COROLLARIO: $A \subseteq B$ (eventualmente identificato A con $f(A)$)

1. $b_1, \dots, b_n \in B$ sono interi su A $\Leftrightarrow$ $A[b_1, \dots, b_n]$ è fin. gen. come A-modulo
2. $C = \{b \in B \mid b \text{ intero su } A\} = \overline{A}^B$ è un sottoanello di B

Def. $A \subseteq B$ è finito se B è un A-modulo fin. gen.

Def. $A \subseteq B$ è intero se tutti gli elementi di B sono interi su A

COROLLARIO:

3. finito $\Rightarrow$ intero
4. $A \subseteq B \subseteq D$. $A \subseteq B$ e $B \subseteq D$ sono finite $\Rightarrow$ $A \subseteq D$ è finito
5. $A \subseteq B \subseteq D$. $A \subseteq B$ e $B \subseteq D$ sono intere $\Rightarrow$ $A \subseteq D$ è intero.

DIM: 3- Nella formulazione 3 del lemma, $A[b] \subseteq C \subseteq B$, basta prendere $C = B$

4- $A \subseteq B$ finito $\Rightarrow \exists\, b_1, \dots, b_k$: $B = Ab_1 + \dots + Ab_k$
$B \subseteq D$ finito $\Rightarrow \exists\, d_1, \dots, d_h$: $D = Bd_1 + \dots + Bd_h$

$\{b_i d_j\}_{\substack{i \le k \\ j \le h}}$ generano D come A-modulo.

1- Per induzione su n.
Passo base: lemma precedente
Passo induttivo:
($\Leftarrow$) Vale per 3-
($\Rightarrow$) Sappiamo che $E = A[b_1, \dots, b_n]$ finito su A
b_{n+1} è intero su A. (e quindi su E)

$A \subseteq E \subseteq E[b_{n+1}]$ è finito su E $\Rightarrow$ È finito su A

2- $1 \in C$.
Se $c_1, c_2 \in C$ allora $A[c_1, c_2]$ è finito su A.

$\Rightarrow c_1 + c_2,\ c_1 c_2$ interi su A.

5- $A \subseteq B \subseteq D$.

$D \ni d$, $d^n + b_1 d^{n-1} + \dots + b_n = 0$ con $b_i \in B$

$\Rightarrow A \underset{\text{finito}}{\subseteq} A[b_1, \dots, b_n] \underset{\text{finito}}{\subseteq} A[b_1, \dots, b_n, d]$ $\Rightarrow$ d intero su A

ha senso parlarne solo se A è dominio

In generale, di solito lavoreremo con A dominio, $K = \mathrm{Frac}(A)$.

Consideremo $K \subseteq L$ estensione di campi algebrica e $A \subseteq B = \overline{A}^L$. Vogliamo studiare B

Se $x \in L$, sia μ_x il polinomio minimo di x su K

$\mu_x = t^n + k_1 t^{n-1} + \dots + k_n$ con $k_i \in K$. Se $k_i \in A$ allora x è intero su A

Non è vero il viceversa, cioè non è vero che se $k_i \notin A$ allora

x non è intero su A.

Infatti, prendendo $L = K$, $\forall\, k \in K$ $\quad \mu_k = t - k$

Se $x \in K$ è intero su A, allora $\mu_x = t - x$. In generale non è vero che $x \in A$. (può esserci una relazione di grado più alto)

<u>Def</u> A dominio, $K = \mathrm{Frac}(A)$. Se $\overline{A}^K = A$, ovvero $x \in K$ intero su $A \Rightarrow x \in A$, allora A si dice normale.

<u>LEMMA:</u> Se A è a fattorizzazione unica allora è normale.

DIM: $x = \frac{a}{b} \in K$, $a, b \in A$ intero su A, cioè

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad \text{con } a_i \in A$$

$$\Rightarrow \quad a^n = b\left(-a_1 a^{n-1} - a_2 a^{n-2} b - \dots - a_n b^{n-1}\right)$$

$\Rightarrow b$ invertibile $\left(\frac{a}{b} \text{ era ridotto, } a \text{ e } b \text{ coprimi}\right)$.

$\Rightarrow x \in A \qquad \left(x = \frac{a}{b} = ab^{-1}\right)$

<u>Esempio:</u> • $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non è normale

Poiché $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ è intero, basta trovare un elemento intero su $\mathbb{Z}$. $\quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} \in K \qquad \omega^3 = 1$

• $\mathbb{C}[x,y]\big/_{y^2 = x^3} \cong \mathbb{C}[t^2, t^3] \subseteq \mathbb{C}[t]$

$$x \longmapsto t^2$$
$$y \longmapsto t^3$$

$\frac{y}{x} \in K \longmapsto t \notin \mathbb{C}[t^2, t^3]$ ma $z^2 - t^2$ risolve

<u>LEMMA:</u> A normale, $x \in L$ $\qquad (A \subseteq K \subseteq L$ alg.$)$

Quindi in particolare A dominio

x intero su $A \iff \mu_x \in A[t]$

DIM: $\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ $\exists\, f(t)$ monico, $f \in A[t]$ tale che $f(x) = 0$

$K[t] \ni \mu_x \mid f$. Considero $A \subseteq K \subseteq L \subseteq \overline{L}$

Se $\mu_x(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ intero su A

$\mu_x = \prod (t - \alpha_i) = t^m + k_1 t^{m-1} + \dots + k_m$. Allora

i $k_i \in A[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ $(k_i \in K) \Rightarrow k_i$ intero su A

$\Rightarrow k_i \in A$ $\Rightarrow \mu_x \in A[t]$

<u>Esempio</u>: $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} = K$ d square free. $d \in \mathbb{Z}$

$\overline{A}^L = B \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = L$

1) Se $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ $\Rightarrow$ $B = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

2) Se $d \equiv 1 \pmod 4$ $\Rightarrow$ $B = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$

$\boxed{1}$ $\sqrt{d}^2 = d$ $\Rightarrow B \supseteq \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

$\boxed{2}$ $\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 = \frac{d+1+2\sqrt{d}}{4}$ $\rightsquigarrow$ $\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) = \frac{d-1}{4} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow B \supseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$

$\boxed{\subseteq}$ Sia $x = a + b\sqrt{d}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$
$(x \in L)$

Cerco $\mu_x = (t - (a+b\sqrt{d}))(t + (a+b\sqrt{d})) = t^2 - 2at + a^2 - db^2$

$\mathbb{Z}$ normale (è UFD) $\rightarrow$ $x \in B \iff 2a \in \mathbb{Z}$ e $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$

* Se $d \equiv 3, 2 \pmod 4$: $a = \frac{m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$

$\frac{m^2}{4} - db^2 \in \mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $m^2 - 4db^2 \in 4\mathbb{Z}$

$\rightarrow$ Se m pari : $a \in \mathbb{Z}$ Deve essere allora

~~$\Rightarrow \sqrt{b}$ intero~~ $db^2 \in \mathbb{Z}$

sq. free

$b = \frac{x}{y}$ ~~[illegible]~~ $db^2 = \frac{x^2 d}{y^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 | d \Rightarrow y = \pm 1$

$(x, y) = 1$ $\Rightarrow b \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ Se m dispari: $a = \frac{1}{2} + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

Voglio allora che

~~$\Rightarrow \frac{1}{2} + b\sqrt{d}$ intero~~ $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{4} - db^2 \in \mathbb{Z}$

Cioè $1 - 4db^2 \in 4\mathbb{Z}$, ovvero $4db^2 = 1 + 4z$ $z \in \mathbb{Z}$

$b = \frac{x}{y}$ $(x, y) = 1$ $y^2 | 4d$ $\Rightarrow y = \pm 1$ $\vee$ $y = \pm 2$

(perché d è square free)

- Se $y = 1$ $\frac{1}{4} - \underbrace{dx^2}_{\in \mathbb{Z}} \notin \mathbb{Z}$ Assurdo

- Se $y = 2$ $\Rightarrow x$ dispari $\underset{\substack{\parallel\\ 3}}{dx^2} = \underset{\substack{\parallel\\ 1}}{1 + 4z}$ $\pmod 4$ Assurdo

(oppure 2)

Analogamente gli altri casi...

<u>LEMMA</u>: $A \subseteq B$, I ideale di B, S parte molt. di A.

- $A \subseteq B$ intera $\Rightarrow$ $A/_{I^c} \subseteq B/_I$ intera
- $A \subseteq B$ intera $\Rightarrow$ $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ intera
- $\overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B} = S^{-1}(\overline{A}^B)$

DIM: 1- Ovvio

2- $b \in B$, $s \in S$. Dico che $\frac{b}{s}$ intero su $S^{-1}A$

b intero. $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$ Divido per s^n

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s^n} = 0$$

3- $\supseteq$ Conseguenza di 2-

$\subseteq$ $\frac{b}{s}$ intero su $S^{-1}A$

in $S^{-1}B$ $\to$ $\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{t}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{t} = 0$ dove $t \in S$, $a_i \in A$ (WLOG il t è comune a tutti)

Moltiplico per $t^n s^n$

$\Rightarrow (bt)^n + a_1 s (bt)^{n-1} + \dots + a_n s^n t^{n-1} = 0$ in $S^{-1}B$

$\Rightarrow \exists r \in S$: $r^n\left((bt)^n + \dots + a_n s^n t^{n-1}\right) = 0$ in B

$(btr)^n + a_1 s r (btr)^{n-1} + \dots + a_n s^n r^n t^{n-1} = 0$

$\Rightarrow btr \in \overline{A}^B$ $t, r \in S$ $\Rightarrow$ $\frac{b}{s} = \frac{btr}{str} \in S^{-1}\overline{A}^B$

__TEOREMA:__ $A \subseteq B$

$$\overline{A[t]}^{B[t]} = \overline{A}^B[t]$$

__LEMMA:__ A dominio. Essere normale è proprietà locale.

DIM: • A normale $\Rightarrow$ $S^{-1}A$ normale:

È caso particolare del 3- del lemma precedente

• A_m normale $\forall m \in \operatorname{Max} A$ $\Rightarrow$ A normale

$b \in K = \operatorname{Frac}(A)$ intero su A.

$A \subseteq A_m \subseteq K$ $\Rightarrow b$ intero su A_m $\forall m \in \operatorname{Max} A$

$\Rightarrow b \in m$ $\forall m \in \operatorname{Max} A$ $\Rightarrow$ $b \in A$ (stare in un modulo è propr. locale)

NON HA SENSO

Considero $A \hookrightarrow \overline{A}$ l'inclusione. Dico che è surgettiva, ovvero $A = \overline{A}$

Localizzo: $S^{-1}A = A_m \longrightarrow S^{-1}\overline{A} = \overline{S^{-1}A} = S^{-1}A = A_m$

Poiché qui è surgettivo e la surgettività è proprietà locale, vale la tesi.

Dimostro che

$\frac{a}{1} \in \left(\frac{b}{1}\right)$ con $\frac{a}{b} \in \overline{A}$

IST ALG - LEZIONE 5

$f: A \to B$ omomorfismo di anelli induce $\varphi: \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$
$\mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}^c$

Se B è intero su A allora φ è surgettiva e chiusa. NI... Dipende

Mi basta invertire il termine noto

LEMMA: $A \subseteq B$ domini, B intero su A A è un campo $\Leftrightarrow$ B è campo.

DIM: $\Rightarrow$ $A \subseteq B$ è estensione algebrica. Si sa che $A[b] = A(b)$

Quindi $\forall b \in B$ $b \neq 0$, $b^{-1} \in B$

$\Leftarrow$ $a \in A$ $a \neq 0$ $\frac{1}{a} \in B$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \text{con } a_i \in A$$

Moltiplico per a^{n-1}:

$$\frac{1}{a} = -a_1 - a_2 a - \dots - a_n a^{n-1} \in A$$

LEMMA: $f: A \to B$ con B intero

1) Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, B$
$\mathfrak{p}$ è massimale $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}^c$ è massimale

2) Se $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, B$ e $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$,
Se $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{q}^c$ allora $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$

DIM: $\boxed{1}$ $A/\mathfrak{p}^c \hookrightarrow B/\mathfrak{p}$ è iniettiva e intera. Per il lemma precedente sui campi tesi.

$\mathfrak{p}^c \supseteq \mathrm{Ker} f$

$\boxed{2}$ $A/\mathfrak{p}^c \hookrightarrow B/\mathfrak{p}$ Pongo $S = A \setminus \mathfrak{p}^c$

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{p}^c & \hookrightarrow & B/\mathfrak{p} \\ \| & & \\ A/\mathfrak{q}^c & \hookrightarrow & B/\mathfrak{q} \end{array}$$

$$(A/\mathfrak{p}^c)_{\mathfrak{p}^c} \hookrightarrow S^{-1}(B/\mathfrak{p}) = \frac{S^{-1}B}{S^{-1}\mathfrak{p}}$$
$$\|$$
$$(A/\mathfrak{q}^c)_{\mathfrak{p}^c} \hookrightarrow S^{-1}(B/\mathfrak{q}) = \frac{S^{-1}B}{S^{-1}\mathfrak{q}}$$

è un campo

$\Downarrow$

$S^{-1}(B/\mathfrak{p})$ e $S^{-1}(B/\mathfrak{q})$ campi

$\Downarrow$

$S^{-1}\mathfrak{p}$ e $S^{-1}\mathfrak{q}$ massimali e $S^{-1}\mathfrak{p} \subseteq S^{-1}\mathfrak{q}$ $\Rightarrow S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$

corrispondenza tra ideali primi

PROPOSIZIONE: $f: A \to B$ intero $\varphi: \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$

$A \subseteq B$ → 1) lying over: φ surgettiva $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ $\exists \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, B : \mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$

$f: A \to B$ → 2) going up: $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}\, A$, $\mathfrak{q}_1 \in \mathrm{Spec}\, B$ t.c. $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$ allora $\exists\, \mathfrak{q}_2 \supseteq \mathfrak{q}_1$ tale che $\mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{p}_2$

3) φ è chiuso

OSS. (Esercizio) φ chiusa $\Rightarrow$ going up chiusa $\not\Rightarrow$ intera

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]$. Vale going up perché $(0) \subseteq (p)$, $(f) \subseteq (g, p)$ con f irr e g fattore irr. di f modulo p.

Non è chiusa perché $\varphi(V(f)) = \{p : f \text{ irr. modulo } p\} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z} \setminus \{\#\text{ finito di } p\}$ che è aperto

DIM: [redacted]

$\boxed{1}$ $A \subseteq B$ $\quad p \in \operatorname{Spec} A$ $\quad S = A \setminus p$

$S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ intera. Sia $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} S^{-1}B$

$\cup$
$S^{-1}p$ $\quad$ Allora $\mathfrak{m}^c$ è massimale in $S^{-1}A$, ovvero $\mathfrak{m}^c = S^{-1}p$. Se $q \subseteq B$ e $S^{-1}q = \mathfrak{m}$ allora $q^c = p$

$$\begin{pmatrix} A & \subseteq & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}A & \to & S^{-1}B \end{pmatrix}$$

OSS. $A \subseteq B$ è necessario. Prendendo $f: A \to A/I = B$ intera. $f(A) = B$. $V(I) = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ non è surgettiva su $\operatorname{Spec} A$

$\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} A/I$

$\boxed{3}$ $f: A \to B$ intera.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & A/I \cong f(A) \arrow[r, "j", hook] & B \end{tikzcd}$$

$f = j \circ \pi$.

Spezzo anche φ: $\operatorname{Spec} B \xrightarrow{j^*} \operatorname{Spec} f(A) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Spec} A$

$\operatorname{Spec} f(A) = V(I) \subseteq \operatorname{Spec} A$ ← chiuso

Ci siamo ridotti quindi a $A \subseteq B$.

$\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

J ideale di B. Dico che $\varphi(V(J)) = V(J^c)$

($\subseteq$) $q \supseteq J \Rightarrow q^c \supseteq J^c$

($\supseteq$) $p \supseteq J^c$ $\qquad p/J^c \subseteq \boxed{A/J^c \subseteq B/J}$ intera

(punto 1) $\exists\, q \in \operatorname{Spec} B$, $q \supseteq J$ tale che $\left(q/J\right)^c = p/J^c \Rightarrow q^c = p$

$\boxed{2}$ Grazie al (3) prendendo $J = q_1$ primo si riesce a chiudere.

OSS. Intera $\Rightarrow$ chiusa $\Rightarrow$ going-up
$\qquad\quad\ \Leftarrow\!\!\!\!/ \qquad\qquad \Leftarrow\!\!\!\!/$

Esempio: $A = \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}[x] = B$ $\qquad \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = \{\bullet\}$ è ovviamente chiusa.
Ma ovviamente $\mathbb{C}[x]$ non è intero su $\mathbb{C}$

Def $f: A \to B$ soddisfa la proprietà del going down se $\forall\, p_1 \subseteq p_2 \subseteq A$ [redacted] e $q_2 \in \operatorname{Spec} B$ t.c. $q_2^c = p_2$ allora $\exists\, q_1 \subseteq q_2$ primo tale che $q_1^c = p_1$.

OSS. • Aperta $\Rightarrow$ going down.
• Intera $\not\Rightarrow$ going down.

Esempio: $B = \mathbb{C}[t, z]$ $\qquad A = \mathbb{C}[x, y, z]/_{y^2 = x^3 + x^2}$

Per Nullstellensatz $\mathrm{Max}\,A = \{\mathfrak{m} = (x-a, y-b, z-c) \mid y^2-x^3-x^2 \subseteq \mathfrak{m}\}$

$\mathrm{Max}\,B = \mathbb{C}^2$ $\qquad$ $\mathrm{Max}\,A = \{(a,b,c) \mid b^2 = a^3 + a^2\}$

$$A \longrightarrow B$$
$$z \longmapsto z$$
$$x \longmapsto t^2-1$$
$$y \longmapsto t^3-t$$

$(t^2-1)^3 + (t^2-1)^2 = t^2(t^2-1)^2 = (t^3-t)^2$

ok, è ben definita.

È intera: z risolve $\omega - z$, t risolve $\omega^2 - (t^2-1) - 1$

Prendo la corrispondente appl. $\varphi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathrm{Max}\,A$
$$(d,c) \longmapsto (d^2-1, d^3-d, c)$$

Vediamo le fibre di φ:

Si verifica a mano che φ è surgettiva $\left(\frac{b}{a}, c\right) \longmapsto (a,b,c)$

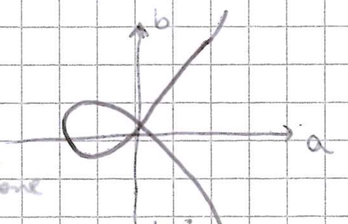
$\varphi(d,c) = \varphi(\delta, \gamma)$ se e solo se:

$c = \gamma$. Se $d^2-1 = \delta^2-1 \neq 0 \overset{\text{divido con l'altra}}{\Longrightarrow} d = \delta$

Se $d^2-1 = 0 = \delta^2-1 \Rightarrow d = \pm 1$, $\delta = \pm 1$

Quindi $\varphi(1,c) = \varphi(-1,c)$

La parte reale di $b^2 = a^3 + a^2$ è



forse per dire che (nemmeno se $A \subseteq B$) vale l'implicazione

A CHE SERVE?

$A \to B$ è iniettiva. Sia $h \in A$: $f(h) = 0$ ovvero

$f(h)(d,c) = 0 \quad \forall d \; \forall c$

$h(\varphi(d,c)) = h(d^2-1, d^3-d, c) = 0$

φ surgettiva su $\mathrm{Max}\,A$. Quindi $h(a,b,c) = 0 \;\; \forall (a,b,c) \in \mathrm{Max}\,A$

$\Updownarrow$

$h \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\,A} \mathfrak{m} = \mathcal{J}(A)$

perché coincide con Jacobson: $1 + hz \in A^* = \left(\mathbb{C}[x,y]/_{y^2-x^3-x^2}\right)[z]^*$ ovvero i coeff. di h stanno in $N\left(\mathbb{C}[x,y]/_{y^2-x^3-x^2}\right)$ che è dominio

Quindi $h \in \sqrt{0}$

$y^2-x^3-x^2$ è irriducibile $\rightarrow$ Ma A è un dominio. $\Rightarrow h = 0$

Non vale il going down:

$$\underset{\substack{\| \\ P_2}}{P_1 \subseteq \underline{(x-a, y-b, z-c)}} \subseteq A$$

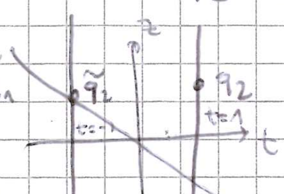
$$\underset{\substack{\| \\ q_2}}{\overset{\mathfrak{p}}{(t-d, z-c)}} \subseteq B$$

Scelgo $a = d^2-1$, $b = d^3-d$, $c = c$ con $d = 1$, $c = 1$

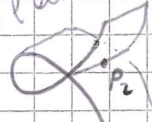
$\Rightarrow P_2 = (x, y, z-1)$ $\qquad$ $q_2 = (t-1, z-1)$

$P_2 \subseteq q_2^c$ facile. q_2 max, P_2 max $\Rightarrow q_2^c = P_2$

$q_2^c = P_2$



la retta passante per l'altra controimmagine di P_2 (chiamata $\tilde{q}_2$)



$\tilde{q}_1 \not\subseteq q_2$ $\qquad$ $\tilde{q}_1 = (t+z)$

$\tilde{q}_1^{\,c} = P_1 \subseteq P_2$

$(\tilde{q}_1 \subseteq \tilde{q}_2 \Rightarrow \tilde{q}_1^{\,c} = P_1 \subseteq P_2 = \tilde{q}_2^{\,c})$

Prendo $P_1 := \tilde{q}_1^{\,c}$.

Se Dico che $\tilde{q}_1$ è l'unico ideale primo di B tale che $\tilde{q}_1^{\,c} = P_1$ ho

finito, perché $\tilde{q}_1 \nsubseteq q_2$

Sia q_1 tale che $q_1^c = p_1 \subseteq A$

$A/_{p_1} \subseteq B/_{q_1}$ è intera

da cui, sugli spec

Valgono perché gli unici primi che contengono questi sono massimali [SPOILER: $\dim A = \dim B = 2$ e sono domini]

$$\mathrm{Max}\,A \supseteq V(p_1) \leftarrow V(q_1) \subseteq \mathrm{Max}\,B = \mathbb{C}^2$$

perché intera è surgettiva.

$V(q_1) \twoheadrightarrow V(p_1) \ni \mathfrak{m}^c$ è surgettiva

Sia $\mathfrak{m}$ massimale $\subseteq B$ ~~$\mathfrak{m} \supseteq \tilde{q}_1 \Rightarrow \mathfrak{m} \supseteq q_1$~~.

Prendo $\mathfrak{m} \supseteq \tilde{q}_1$, cioè $\mathfrak{m} = (t-d, z+d)$ e scelgo $d \neq \pm 1$

$\overset{\shortparallel}{(t+z)}$ $\quad (\mathfrak{m}^c \in V(p_1))$ quindi $\mathfrak{m}$ è l'unico massimale

Visto prima che le fibre di φ hanno cardinalità 1 fuori da $\{t = \pm 1\}$

che si contrae su $\mathfrak{m}^c \Rightarrow \mathfrak{m} \supseteq q_1$

$\forall d \neq \pm 1 \quad q_1 \subseteq (t-d, z+d)$

$\Rightarrow$ Se $g \in q_1 \quad g(d, -d) = 0 \quad \forall d \neq \pm 1 \Rightarrow$

thm. fond. alg.: infinite radici and

$\Rightarrow$ Se $g \in q_1 \quad g(+d, -d) = 0 \quad \forall d \Rightarrow t+z \mid g \Rightarrow$

$\Rightarrow (t+z) = \tilde{q}_1 \subseteq q_1 \overset{(\tilde{q}_1^c = q_1^c)}{\underset{\text{intera}}{\Rightarrow}} \tilde{q}_1 = q_1$

~~[illegible]~~ $\Rightarrow$

TEOREMA:

$A \subseteq B$ domini e A normale allora: $\quad (A \subseteq B$ intera$)$

1) vale il going down

2) φ è aperta

TEOREMA:
- φ aperta $\Rightarrow$ vale going down
- f piatta (B è A-mod. piatto) $\Rightarrow$ vale going down
- A e B noetheriani e B fin. gen. come A-algebra
  vale going down $\Rightarrow \varphi$ aperta

IST ALG _ LEZIONE 6

Def $A \subseteq B$ I ideale di A

$b \in B$ è intero su I se $\exists\, a_1, \dots, a_n \in I$ tali che

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

LEMMA: Se $A \subseteq B$ intera. Allora $\overline{I}^B = \sqrt{I^e}$

DIM: $\subseteq$ b intero su I

$$\underbrace{b^n = a_1 b^{n-1} + \dots + a_n}_{I^e} \quad \text{con } a_i \in I \quad \Rightarrow b \in \sqrt{I^e}$$

$\supseteq$ $b \in \sqrt{I^e}$ Sia $b^n = c = b_1 \alpha_1 + \dots + b_m \alpha_m$ con $\alpha_i \in I$, $b_i \in B$

Considero $\varphi : M \to M$, $a \mapsto c \cdot a$ dove $M = A[b_1, \dots, b_m]$

M è A-modulo fin. gen. (B intero su A)

$\varphi(M) \subseteq IM$

Per Hamilton-Cayley $\varphi^k + \beta_1 \varphi^{k-1} + \dots + \beta_k = 0$ con $\beta_i \in I$

Valuto in 1:

$$c^k + \beta_1 c^{k-1} + \dots + \beta_k = 0$$

$$\Rightarrow b^{nk} + \beta_1 b^{n(k-1)} + \dots + \beta_k = 0 \quad \Rightarrow b \in \overline{I}^B.$$

senza non poter parlare di Frac(A)

LEMMA: $A \subseteq \mathrm{Frac}(A) \underset{\text{est. alg.}}{\subseteq} L$. A (dominio) normale.

Se $x \in L$ allora x intero su $I \iff \mu_x = t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \dots + \alpha_n$ con α_i [illegible]

DIM: $\Leftarrow$ ovvio (basta elevare la relazione ad una potenza alta)

$\Rightarrow$ x risolve un polinomio $f(t) = t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$ con $a_i \in$ [illegible]

$$\mu_x \mid f \quad \Rightarrow \forall \beta \text{ radice di } \mu_x \quad \beta \text{ intera su } I$$

I coefficienti di μ_x sono funzioni simmetriche elementari delle radici, quindi sono interi su I.

coeff. di μ_x α_i intero su I, $\alpha_i \in \mathrm{Frac}(A) \Rightarrow \alpha_i \in A$

$\alpha_i \in A$, α_i intero su $I \Rightarrow \alpha_i \in \sqrt{I^e}_{\text{in } A} = \sqrt{I}$ perché considero $A \subseteq A$ intera $\overline{I}^A = \sqrt{I^e} = \sqrt{I}$

TEOREMA: $A \subseteq B$ intera, A, B domini, A normale.

Allora: 1) vale il going down

2) $\varphi : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$, $p \mapsto p^c$ è aperta.

DIM: $\boxed{1}$ $p_1 \subseteq p_2 \in \operatorname{Spec} A$ $\quad q_2 \in \operatorname{Spec} B$: $q_2^c = p_2$

$S = B \setminus q_2$. Mi basta trovare un $Q \in \operatorname{Spec} S^{-1}B$ tale che $Q \cap A = p_1$.

$\exists$ tale $Q \iff p_1^{ec} = p_1$ (cioè $p_1 \in \operatorname{Im} \varphi$, φ indotta da $A \subseteq S^{-1}B$)

riferite all'inclusione $A \subseteq S^{-1}B$

$\supseteq$ $p_1^{ec} \supseteq p_1$ ok.

$\subseteq$ Sia $\underset{\in A}{x} \in p_1^{ec}$. Dico che $x \in p_1$

In particolare $x \in p_1^e = S^{-1}B \cdot p_1 = S^{-1}(Bp_1)$

$x = \frac{y}{s}$ con $s \in S$ e $y \in \underset{\overset{\shortparallel}{p_1^e}}{Bp_1} \subseteq B$ Quindi $\Rightarrow y$ intero su A, $y \in \sqrt{p_1^e}$

$A \subseteq B$ (lemma di prima) $\Rightarrow y$ intero su p_1 (per l'altro lemma) $\Rightarrow$ $\mu_y = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ con $a_i \in p_1$ (A normale, $\sqrt{p_1} = p_1$)

Cerco ora μ_s (s è intero su A, quindi algebrico su $\operatorname{Frac}(A)$)

($s \in B$) $s = \frac{y}{x}$ in $\operatorname{Frac}(B)$. Vale $\left(\frac{y}{x}\right)^n + \underset{\overset{\cap}{\operatorname{Frac}(A)}}{\frac{a_1}{x}} \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} = 0$

Quindi $\mu_s \mid t^n + \frac{a_1}{x} t^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ in pratica dico che una frazione è radice se e solo se il numeratore annulla qualcosa di simile

Ma: Se $f(y) = 0$ e $f(t) \in \operatorname{Frac}(A)[t]$

allora $\exists\, g : \deg g = \deg f$, $g \in \operatorname{Frac}(A)[t]$ e $g(s) = 0$ e viceversa.

$\Rightarrow \mu_s \overset{(?)}{=} \left(\frac{y}{x}\right)^n + \frac{a_1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$. Ma A è normale $\Rightarrow \mu_s \in A[t]$ (s intero su A)

$\left(\mu_s = t^n + \frac{a_1}{x} t^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$

$\Rightarrow b_i := \frac{a_i}{x^i} \in A$ $\qquad \underset{\overset{\cap}{p_1}}{a_i} = \underset{\overset{\cap}{A}}{x^i}\, \underset{\overset{\cap}{A}}{b_i}$

Se $x \notin p_1$ allora $b_i \in p_1$ $\forall i$.

Quindi s è intero su p_1 $\Rightarrow s \in \sqrt{B \cdot p_1} \subseteq \sqrt{q_2} = q_2$ ($p_1^e \subseteq q_2$)

Assurdo perché $s \in B \setminus q_2$

$\Rightarrow x \in p_1$.

$\boxed{2}$ $\varphi : \underset{\overset{\shortparallel}{Y}}{\operatorname{Spec} B} \to \underset{\overset{\shortparallel}{X}}{\operatorname{Spec} A}$

$b \in B$. Dico che $\varphi(Y_b)$ è aperto. $\mu_b = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ con $a_i \in A$ (è il pol. min perché A normale)

Mostro che $\varphi(Y_b) = \bigcup_{i=1}^{n} X_{a_i}$

$\subseteq$ $q \in \operatorname{Spec} B : b \notin q$. Se $q^c \notin \bigcup_{i=1}^{n} X_{a_i} \Rightarrow a_i \in q^c$ $\forall i$

(Vale sempre) $\Rightarrow b$ intero su q^c $\quad \underset{\overset{\notin}{q}}{b^n} = \underbrace{-(a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n)}_{\in\, q^{ce} \subseteq q}$. Assurdo.

② Sia $p \in \operatorname{Spec} A$: $\exists_i \ a_i \notin p$. Cerco $q \in \operatorname{Spec} B$ tale che

$q^c = p$ e $b \notin q$ (cioè $q \in Y_b$)

Sicuramente esistono q t.c. $q^c = p$. (φ surgettiva)

Se per assurdo $b \in q$ $\forall q : q^c = p$:

Dico che $\forall q \in Min(p^e)$ $q^c = p$:

sia $q \supseteq p^e$ minimale. Allora $p \subseteq q^c \subseteq A$

$$q \subseteq B$$

Se $q^c \neq p$ $\exists q_1 \subsetneq q$ e $q_1^c = p$ per il punto precedente (going down)

$\Rightarrow q_1 \supseteq p^e \Rightarrow q$ non minimale. Assurdo

Quindi $\forall q \supseteq p^e$ minimale, $q^c = p$.

$\Rightarrow b \in q$ $\forall q \supseteq p^e$ minimali per ip. di assurdo $\Rightarrow b \in \bigcap_{q \supseteq p^e} q = \sqrt{p^e} \Rightarrow b$ intero su p

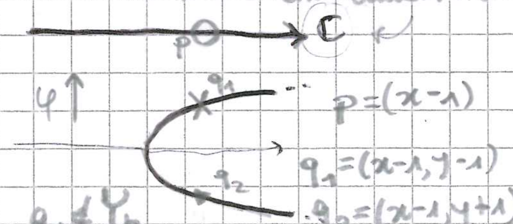
$\Rightarrow a_i \in p$ $\forall i$. Assurdo.

Esempio: $A = \mathbb{C}[x] \subseteq B = \mathbb{C}[x,y]/_{y^2=x}$ [Nel setting di sopra, esistono $q \in \operatorname{Spec} B$ tali che $q^c = p$, ma $q \notin Y_b$]

Il disegno ha poco senso, manca una dimensione

Max A =

Max B =



Pongo $b = y-1$ e prendo Y_b

Y_b = tutto tranne un punto

$\varphi(Y_b) = \operatorname{Spec} A$ ~~non è aperto in Max A~~

$q_1^c = q_2^c = p$ ma $q_1 \notin Y_b$

~~Quindi~~ (A, B domini, B intero su A, A normale) ~~$\Rightarrow \varphi: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ aperta~~

~~[illegible] φ Max B $\to$ Max A aperta.~~

ESERCIZI

Esercizio 2.2: A dominio, M un A-mod. piatto

1) M ha torsione nulla

2) N piatto, $m \in M$, $n \in N$. $m \otimes n = 0 \iff m = 0 \vee n = 0$

3) Dai controesempio togliendo l'ipotesi N piatto.

Dim: $\boxed{1}$ Sia $a \in A$ $a \neq 0$. $A \xrightarrow{\cdot a} A$, $m \mapsto a \cdot m$ è iniettiva (perché A dominio)

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot a} A \to A/_{(a)} \to 0$$

$\otimes M$

$$0 \to M \to M \to M/_{aM} \to 0$$

$m \mapsto am$

iniettiva Tesi.

$\boxed{2}$ M e N non hanno torsione. Considero $m \in M$, $m \neq 0$

$$0 \to A \to M \to M/_{Am} \to 0$$ esatta.

$a \mapsto am$

$(\otimes N$

$$0 \to A \to M \otimes N \to M/_{Am} \otimes N \to 0 \quad \text{esatta}$$

$n \longmapsto m \otimes n$

iniettiva $\Rightarrow m \otimes n = 0 \Rightarrow n = 0$
$(m \neq 0)$

$\boxed{3}$ $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$

$1 \otimes p = p1 \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$ ma $1 \neq 0$ e $p \neq 0$

Esercizio 2.10: A noetheriano, I ideale di A, $a \in A$.

$$a \in I \iff a_p \in I_p \quad \forall\, p \in Ass(I)$$

Dim: $(\Rightarrow)$ ovvio

$(\Leftarrow)$ $\bar{a} \in A/_I$ Devo dimostrare che $\bar{a} = 0 \iff \bar{a}_p = 0$ in $(A/_I)_p$ $\forall\, p \in Ass(I)$

Mi posso ridurre quindi a $I = 0$ $(B = A/_I)$

Devo mostrare che $\bar{a} = 0$ in B $\iff$ $\bar{a}_q = 0$ in B_q $\forall q \in Ass(0)$

Supponiamo $\bar{a} \neq 0$.

L'ipotesi significa che: $\bar{a}_p = 0$ vuol dire $\exists\, s \notin q : s\bar{a} = 0$, cioè

$$Ann(\bar{a}) \nsubseteq q \quad \forall q \in Ass(0)$$

[redacted]

[Lemma di Scansamento]: $I \subseteq q_1 \cup \ldots \cup q_k \Rightarrow I \subseteq q_i$ per un qualche I

Nel nostro caso A noetheriano $\Rightarrow Ass(0) = \{q_1, \ldots, q_k\}$

$$\Rightarrow Ann(\bar{a}) \nsubseteq \bigcup_{q_k \in Ass(0)} q_k = \mathcal{D}(A)$$
divisori di zero

[redacted]

Assurdo

Esercizio 2.9: M un A-modulo finitamente presentato e S parte moltiplicativa

fin. gen. con relaz. finite, cioè $\exists\, m, n$ t.c. $A^n \to A^m \to M \to 0$ esatta

Allora
$$S^{-1}Hom_A(M,N) \cong Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

Dim:
$$\frac{\varphi}{s} \longmapsto \frac{\varphi}{s}\left(\left(\frac{m}{t}\right) \mapsto \frac{\varphi(m)}{st}\right)$$

Dico che è isomorfismo.

Se M libero ($M = A^n$ per un cert n) allora è vero.

$$Hom_A(A^n, N) \cong N^n \qquad \Rightarrow S^{-1}Hom_A(A^n, N) \cong S^{-1}N^n = (S^{-1}N)^n$$

$\varphi \longmapsto (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ $\qquad \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{s} \mapsto \left(\frac{a_1}{s}, \ldots, \frac{a_n}{s}\right)$

$$Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, S^{-1}N) \cong (S^{-1}N)^n$$

$\frac{\varphi}{s} \longmapsto \left(\frac{\varphi(e_1)}{s}, \ldots, \frac{\varphi(e_n)}{s}\right)$

M generico (fin. presentato) $\Rightarrow \exists\, n, m, \alpha, \beta$

$$A^n \xrightarrow{\alpha} A^m \xrightarrow{\beta} M \to 0 \quad \text{esatta}$$

$\mathrm{Hom}(-,N)$

prima $\otimes S^{-1}A$ e poi $\mathrm{Hom}(-,S^{-1}N)$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{t_\beta} \mathrm{Hom}_A(A^m,N) \xrightarrow{t_\alpha} \mathrm{Hom}_A(A^n,N) \quad \text{esatta}$$

$\otimes S^{-1}A$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(A^m,N) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(A^n,N) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}((S^{-1}A)^m,S^{-1}N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}((S^{-1}A)^n,S^{-1}N)
\end{tikzcd}$$

Per lemma dei 5 è isomorfismo

Esercizio 2.4: $\mathrm{Spec}\,A$ sconnesso. Allora $A = B \times C$

HINT: $\mathrm{Spec}\,A = U \sqcup V$ aperti

Dimostro che $A = \mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(V)$

oppure $\mathrm{Spec}A = V(I) \sqcup V(J) \Rightarrow \underset{(\text{unione è tutto})}{I \cap J = IJ = 0} \wedge \underset{(\text{disgiunti})}{I + J = A}$

$$\Rightarrow A = A/0 = A/IJ = A/I \times A/J.$$

ISTALG. LEZIONE 7

Def A anello. $\dim A = \sup\{ n \mid \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subseteq A$ ideali primi$\}$

OSS. Se A è un campo $\dim A = 0$ ovvio

Se $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ $\dim A = n$ (lo dimostreremo)

PROPOSIZIONE: $A \subseteq B$ intera. Allora $\dim A = \dim B$.

DIM: Se $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ è catena di ideali primi in B

$\mathfrak{q}_0^c \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n^c$ è catena di ideali primi in A

vale per lemmi prec.

$\Rightarrow \dim A \geq \dim B$

Viceversa, se $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ catena in $\operatorname{Spec} A$

esistono (per il going up)

$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ con $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$ (quindi sono tutti distinti)

$\mathfrak{q}_i$ primo in B

$\Rightarrow \dim B \geq \dim A$. $\Rightarrow \dim A = \dim B$

(LEMMA DI NOETHER)

TEOREMA: $\mathbb{K}$ campo. Sia A una $\mathbb{K}$-algebra fin. gen. $A = \mathbb{K}[a_1, \dots, a_n]$

allora:

1) Se $\mathbb{K}$ è infinito $\exists\, b_1, \dots, b_m$ con $m \leq n$ combinazioni $\mathbb{K}$-lineari degli a_i tali che:

$\nexists\, p \neq 0,\ p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m] : p(b_1, \dots, b_m) = 0$

(a) $b_1, \dots, b_m$ sono algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$

(b) A è finito su $\mathbb{K}[b_1, \dots, b_m]$

2) Se $\mathbb{K}$ finito, valgono le stesse conclusioni senza la richiesta che le b_i siano comb. lin. delle a_i, ma solo che $b_i \in A$.

DIM: $\boxed{1}$ Se $a_1, \dots, a_n$ sono algebricamente indipendenti ho finito.

succede solo nel caso $\mathbb{K}[a_1, \dots, a_n] \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Altrimenti $\exists\, f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ e $f \neq 0$

Cambio variabili:
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - \lambda_2 x_1 \\ \vdots \\ y_n = x_n - \lambda_n x_1 \end{cases}$$

Scrivo $f = f_h(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_0(x_1, \dots, x_n)$ con f_i parte omogenea di grado i

Quindi $f(x_1,\dots x_n) = f(x_1, y_2+\lambda_2 x_1, \dots, y_n+\lambda_n x_1) = f_h(x_1, y_2+\lambda_2 x_1, \dots) + \dots + f_0$

resta lo stesso spezzamento con gli stessi polinomi ($y_i+\lambda_i x_i$ sono omogenei)

$f_h(x_1, y_2+\lambda_2 x_1, \dots) = x_1^h f_h(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + \underbrace{\dots}_{\text{robe di grado } <h \text{ in } x_1}$

Se $\exists \lambda_2, \dots \lambda_n$ tali che $f_h(1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \neq 0$ allora ottengo

$f = c x_1^h + x_1^{h-1} g_1(y_2,\dots,y_n) + \dots + g_h(y_2,\dots,y_n)$ $(c \in \mathbb{K})$

$\Rightarrow$ Si ha una relazione $a_1^h + a_1^{h-1} \frac{g_1(a_2,\dots,a_n)}{c} + \dots + \frac{g_h(a_2,\dots,a_n)}{c} = 0$

Cioè a_1 è intero su $\mathbb{K}[a_2,\dots,a_n]$. Per induzione si chiude.

Se $\mathbb{K}$ infinito allora riesco a trovarlo: (per $\mathbb{K}$ il lemma vale banalmente)

f_h è omogeneo di grado h.

Se $f_h(1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad \forall c_2,\dots,c_n \Rightarrow f_h(x_1,\dots,x_n) = f_h(x_1)$

Ma $\Rightarrow f_h(\lambda, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) = \lambda^h f(1, c_2, \dots, c_n) = 0$ cioè $f_h(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda$

quindi $f_h = 0$

$\boxed{2}$ Il caso $\mathbb{K}$ finito ~~[illegible]~~ si fa quasi allo stesso modo, facendo il cambio di variabili $y_2 = x_2 - x_1^{m_1} \dots$

con gli m_i scelti opportunamente

Esempio: $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$

A meno di fare un cambio di variabili lineare posso supporre
$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m] \subseteq A$ e A sia intero su $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$ — Per il lemma di Noether

$\pi: \operatorname{Max} A \longrightarrow \operatorname{Max} \mathbb{C}[x_1,\dots,x_m] = \mathbb{C}^m$

è la proiezione sulle prime m-variabili

In particolare, $\dim A = \dim \mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]$, perché A intero su $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$

($x_1,\dots,x_m \in A$ alg. ind. e A finito su $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]$)

M un A-modulo

$M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \dots \supsetneq M_0 = 0$

M_i sottomoduli e M_i / M_{i-1} sono semplici (irriducibili)

sinonimo di semplice

non ha sottomoduli non banali

Def Una serie di questo tipo si dice di Jordan-Holder.

LEMMA: Se M (un A-modulo) ha una serie di J.H. di lunghezza n allora

se $N_h \supsetneq N_{h-1} \supsetneq \dots \supsetneq N_0$ allora $h \le n$.

In particolare tutte le serie di J.H. hanno la stessa lunghezza che si indica con $\ell(M) = \ell_A(M)$.

DIM: Per induz su n. $n=0 \Rightarrow M=0$

$n=1$ $\quad M \supsetneq 0$ e M è semplice

$n>1$ $\quad M' = M_{n-1}$ ha serie di J.H. di $\ell = n-1$

Siano $N_i' = M' \cap N_i$

$N_h' \supseteq N_{h-1}' \supseteq \dots \supseteq N_0'$ $\quad$ Non è detto siano tutti distinti

Se sono tutti distinti $\Rightarrow h \le n-1 \le n$.

Sia $k = \min\{n : N_k' = N_{k+1}'\}$

Dimostro che gli N_j' con $j > k$ sono tutti distinti

$$\begin{tikzcd}
N_k' \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & N_k \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\subsetneq" rotate=-90] & \frac{N_k}{N_k'} \subseteq M/M' \arrow[d, phantom, "\subsetneq" rotate=-90] \\
N_{k+1}' \arrow[r, hook] & N_{k+1} \arrow[r] & \frac{N_{k+1}}{N_{k+1}'} \subseteq M/M'
\end{tikzcd}$$

Ma M/M' semplice

$\Downarrow$

$N_k/N_k' = 0 \ \wedge\ \dfrac{N_{k+1}}{N_{k+1}'} = M/M'$

$\Rightarrow N_k \subseteq M', \quad N_{k+1} \not\subseteq M'$

$\Rightarrow k = \max\{i : N_i \subseteq M'\}$ $\quad$ (perché $N_0 \subseteq \dots \subseteq N_h$)

(Se ce ne fosse un'altra avrei gli stessi passaggi con i contenimenti in M', ma gli N_i' sono crescenti)

Quindi può esserci al massimo un'uguaglianza

$\Rightarrow N_0' \subsetneq N_1' \subsetneq \dots \subsetneq N_k' \subsetneq N_{k+2}' \subsetneq \dots \subsetneq N_h'$

$\Rightarrow$ per ip. induttiva $h-1 \le n-1$ $\quad \Rightarrow h \le n$.

COROLLARIO: 1) ℓ è additiva: $\quad 0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$ esatta

Y ha JH $\Leftrightarrow X, Z$ la hanno

Inoltre $\ell(Y) = \ell(X) + \ell(Z)$

2) M ha serie di JH ~~[illegible]~~ $(\ell(M) < +\infty) \Leftrightarrow M$ è noetheriano e artiniano

3) $A = K$ campo. $\ell(M) = \dim_K M$

DIM: $\square$ $\Leftarrow$ $\quad 0 = \overset{Y_0}{X_0} \subsetneq \dots \subsetneq \overset{Y_h}{X_h} = X \subseteq Y$ $\quad$ (tramite φ)

$0 = Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_k = Z$ $\quad Y_{i+h} = \psi^{-1}(Z_i)$

(per esattezza $Y_h = X = \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = \psi^{-1}(0) = \psi^{-1}(Z_0)$)

$$0 = Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_h \subsetneq Y_{h+1} \subsetneq \dots \subsetneq Y_{h+k} = Y$$

$$Y_i / Y_{i-1} = \begin{cases} X_i / X_{i-1} & \text{se } i \le k \\ Z_i / Z_{i-1} & \text{se } i > k \end{cases}$$ sono semplici. Quindi è una serie di Jordan-Hölder per Y di lunghezza

$\Rightarrow \ell(Y) = \ell(X) + \ell(Z)$

($\Leftarrow$) Presa serie JH per Y, eventualmente togliendo roba ne ho una su X e una su Z. ~~...~~ Si riesce a scrivere l'uguaglianza tra le lunghezze

[2] ($\Leftarrow$) ovvia (ogni catena deve stabilizzare in entrambi i sensi)

($\Rightarrow$) M noeth. e artiniano.

Per noeth. ho un sottomodulo massimale proprio.

Infatti, ~~...~~

Sia $\mathcal{F} = \{N \subsetneq M\}$ ~~...~~. Per noeth. $\exists$ el. max. M_1

$0 \neq M/M_1$ è semplice (perché M_1 è massimale)

Iterando ottengo $M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots \supsetneq M_N = 0$ ← stabilizza per artinianità

LEMMA: A anello, $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_h$ ideali max di A (non necessariamente distinti) e $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_h = 0$

Allora A noetheriano $\Leftrightarrow$ A artiniano

DIM: $A \supseteq \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_h = 0$

I quozienti sono

$A/\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1 / \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, ..., $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{h-1}$

$K_1 = A/\mathfrak{m}_1$-modulo, $K_2 = A/\mathfrak{m}_2$ modulo, $K_h = A/\mathfrak{m}_h$-modulo

Quindi ognuno dei quozienti è noetheriano se e solo se artiniano se e solo se $\ell < +\infty$. (2 e 3 del corollario precedente)

Se A è noetheriano/artiniano, allora $A/\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, ... sono noetheriani/artiniani ma sono spazi vettoriali, quindi sono entrambe le cose. A questo punto torno indietro a cascata $0 \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{h-1} \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{h-2} \to \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{h-2} / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{h-1} \to 0$

$\ell < +\infty$; $\ell < +\infty$ (per [1]) ; $\ell < +\infty$

$\Rightarrow \dots$ $0 \to \mathfrak{m}_1 \to A \to A/\mathfrak{m}_1 \to 0 \Rightarrow \ell(A) < \infty$

$\ell < +\infty$; dunque ; $\ell < +\infty$

$\Rightarrow A$ è noetheriano e artiniano

<u>TEOREMA:</u> A artiniano $\Leftrightarrow$ A noetheriano e $\dim A = 0$

DIM: $\Rightarrow$ Dico che $\dim A = 0$

P primo $\Rightarrow B = A/P$ è artiniano e dominio.

Dico che è campo. Sia $b \in B$, $b \neq 0$

$(b) \supseteq (b^2) \supseteq \dots \supseteq (b^n) \supseteq \dots$

B artiniano $\Rightarrow$ stabilizza $\Rightarrow \exists h \quad (b^h) = (b^{h+1})$

$b^h = cb^{h+1} \underset{B \text{ dominio}}{\Rightarrow} 1 = cb \Rightarrow b \in B^*$

$\Rightarrow B$ campo $\Rightarrow P$ massimale. $(\Rightarrow \dim A = 0)$

[...]

IST ALG - LEZIONE 8

⇒ [...] A ha un numero finito di ideali massimali;

Infatti $\mathcal{F} = \{ \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k \mid \mathfrak{m}_i \text{ massimali} \}$

$\exists$ elemento minimale $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k$ (per artinianità)

Dico che $\operatorname{Spec} A = \{ \mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k \}$ (già visto che $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Max} A$)

Infatti $\forall \mathfrak{m}$ max $\quad \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k$

per lemma di scansamento $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$ per un certo i

$\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$

In particolare $N = \sqrt{0} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_k$

Dico che $\exists h$ t.c. $N^h = 0$

In tal caso $(\mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_k)^h = 0 \quad \Rightarrow A$ noetheriano

usando [Se $\mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_e = 0$ con $\mathfrak{m}_i \in \operatorname{Max} A$, A noeth $\Leftrightarrow A$ art.]

Considero allora

$$N \supseteq N^2 \supseteq \dots \supseteq N^h = N^{h+1} = \dots \qquad \text{Dico } N^h = 0$$

(stabilizzo per artinianità)

Sia $\mathcal{G} = \{ I \text{ ideale} \mid I \cdot N^h \neq 0 \}$ (Se $N^h \neq 0$, $N \in \mathcal{G}$)

Prendo I minimale in $\mathcal{G}$, $\exists x \in I$, $y \in N^h$: $xy \neq 0$

Allora $I = Ax$ per minimalità di I

Stiamo lavorando sempre con quelli commutativi $\quad N^h I \subseteq I$

$$(N^h I) N^h = I N^{2h} = I N^h \neq 0 \quad \overset{\text{per min.}}{\Rightarrow} \quad N^h I = I$$

I è A-mod fin. gen. e N^h è ideale nel radicale di Jacobson

Posso usare adesso Nakayama (I è principale) per dire $I = 0$

Assurdo $\Rightarrow \mathcal{G} = \emptyset \Rightarrow N^h = 0$

$\Rightarrow N \cdot N^h = 0$

⇐ Gli ideali primi sono anche max ($\dim A = 0$) e sono in numero finito per noetherianità $\{ \mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_h \}$

(per noeth. ha finiti primi minimali)

$$\sqrt{0} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_h$$

e per noetherianità $\sqrt{0}^k = 0$ (perché $\sqrt{0}$ è fin. gen.) $\Rightarrow (\mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_h)^k = 0$

$\Rightarrow A$ artiniano per il lemma di prima

OSS. A artiniano, $\operatorname{Spec} A = \{ \mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_h \}$

$U_i = \{ \mathfrak{m}_i \}$ è aperto e chiuso

$\Rightarrow \operatorname{Spec} A = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \dots \sqcup U_h$ è totalmente sconnesso

$\Rightarrow \mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(U_1) \times \ldots \times \mathcal{O}(U_k)$ (per un esercizio precedente)

Quindi $A = B_1 \times \ldots \times B_k$ con B_i artiniani e $\operatorname{Spec} B_i = U_i$?

cioè B_i locali artiniani.

OSS. - $A \subseteq B$ finito, A noeth. $\varphi : \underset{Y}{\operatorname{Spec} B} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$

$\varphi^{-1}(p) = \{ q \in \operatorname{Spec} B \ : \ q^c = p \} = V(p^e)$ ← vale solo se p è massimale!

[...]

Esempio: $A = \mathbb{C}[\underset{y}{x^2}] \subseteq \mathbb{C}[x] = B$ [è lo stesso esempio della lezione 6]

$$\varphi : \underset{\operatorname{Max} B}{\mathbb{C}} \longrightarrow \underset{\operatorname{Max} A}{\mathbb{C}} \qquad \varphi^{-1}(1) = \{\pm 1\}$$

$$\alpha \longmapsto \alpha^2$$

[...] Definisco $\varphi^{-1}(p) = Y_p = \operatorname{Spec}\left(\frac{S^{-1}B}{S^{-1}p^e}\right)$ dove $S = A \setminus p$

Infatti $q \in \operatorname{Spec}\left(\frac{S^{-1}B}{S^{-1}p^e}\right) \Leftrightarrow \begin{matrix} q \cap S = \emptyset \\ q \supseteq p^e \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} q^c \subseteq p \\ q^c \supseteq p \end{matrix}$

Vale che:

1) Gli anelli che definiscono le fibre sono artiniani (gli $\frac{S^{-1}B}{S^{-1}p^e}$)

2) $\#(Y_p) < +\infty \quad \forall p$

DIM: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ ovvio, visto prima

$\boxed{1}$ A noeth. $\underset{\substack{B \text{ finito} \\ (B \text{ è } A\text{-mod. fin. gen.})}}{\Rightarrow} B$ noeth. $\Rightarrow \frac{S^{-1}B}{S^{-1}p^e}$ noeth. (B noeth $\Rightarrow S^{-1}B$ noeth, B noeth $\Rightarrow B/I$ noeth.)

Dico che $\dim \frac{S^{-1}B}{S^{-1}p^e} = 0$. Dato $q_1 \subseteq q_2$

Ma $q_1^c = q_2^c = p$ perché $q_1, q_2 \in \operatorname{Spec}\left(\frac{S^{-1}B}{S^{-1}p^e}\right) = Y_p = \varphi^{-1}(p)$

$\overset{B \text{ intero}}{\Longrightarrow} q_1 = q_2$

ANELLI DI DIMENSIONE 1

Esempi: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[x,y]/(f)$ $f \neq 0$, $\mathbb{F}_p[x,y]/(f)$ $f \neq 0$

Studiamo A noetheriano, dominio, $\dim A = 1$

In particolare anche per A normale.

Esempio: $A = \mathbb{C}[x,y]/(f)$ f irriducibile. Quando A_m è normale? $m \in \operatorname{Max} A$

Supponiamo $m = (x,y)$ $\quad \overline{m} = m/(f)$

$f \in m$

$f = f_d + \ldots + f_1$ dove f_i omogeneo di grado i

$A_{\mathfrak{m}}$ è normale $\iff f_1 \neq 0 \iff \nabla f(0,0) \neq 0$

[È circa thm. del Dini: se $\nabla f(0,0) \neq 0$, il luogo di zeri di f è parametrizzabile localmente, che significa algebricamente che l'ideale massimale $\overline{\mathfrak{m}}$ è principale]

Esempio: per provare e capire...

$$f = f_d + \dots + f_2 + x \qquad \mathfrak{m} = (x,y) \subseteq \mathbb{C}[x,y]$$

Dico che $\overline{\mathfrak{m}} = (y)$

$$0 = f = x\, g_0(x) + y\, g_1(x) + y^2 g_2(x) + \dots$$

$$g_0(0) \neq 0 \rightsquigarrow g_0(x) \notin \mathfrak{m}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{y \cdot *}{g_0(x)} \in A_{\mathfrak{m}}\, y \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathfrak{m}} = (x,y) \subseteq (y) \Rightarrow \overline{\mathfrak{m}} = (y)$$

Quindi abbiamo visto che $f_1 \neq 0 \Rightarrow \overline{\mathfrak{m}}$ principale. Con il seguente teorema si chiude una freccia

TEOREMA: A dominio noetheriano locale $\dim A = 1$.

TFAE:

1) A è UFD
2) A normale
3) $\mathfrak{m}$ è principale
4) A è anello di valutazione discreta $(*)$

Def ~~$\mathbb{K}$ campo~~. Una mappa di valutazione discreta è $v : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ tale che:

è valutaz. $\begin{cases} v(xy) = v(x) + v(y) \\ v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\} \end{cases}$

è discreta $\{ \ \operatorname{Im} v = \mathbb{Z} \cdot q \quad (\text{con } q \in \mathbb{Q})$

Def A dominio. Si dice di valutazione discreta se $A = \{x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid v(x) \geq 0\}$ per una certa valutazione discreta v.

Esempio: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $\quad p \in \mathbb{N}$ primo

$$v_p(m) = \max\{i \mid p^i \mid m\} \quad \text{per } m \in \mathbb{Z} \quad m \neq 0$$

$$v_p\left(\frac{m}{n}\right) = v_p(m) - v_p(n)$$

v_p è valutazione discreta.

Se A è UFD, p è primo in A vale la stessa def di sopra per $v_p : \operatorname{Frac}(A) \to \mathbb{Q}$

(*)

Dim: $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$

Dico che se A è DVD allora:

(- è locale) ← anche se le abbiamo per ipotesi lo dimostriamo (cioè vale in assoluto)

- ogni ideale è principale ($\Rightarrow$ (noetheriano) e UFD)

(- dim $A = 1$)

$v : K^* \to \mathbb{Q}$ $\quad A = \{x : v(x) \geq 0\}$

WLOG $\mathrm{Im}\, v = \mathbb{Z}$

- $\mathfrak{m} = \{x \in K^* \mid v(x) \geq 1\}$ Dico che $\mathfrak{m}$ è l'unico max di A, ovvero $x \in A \setminus \mathfrak{m} \iff x \in A^*$

$\Updownarrow$

$v(x) = 0$

$v(1) = 0$ perché $v(x) = v(x \cdot 1) = v(x) + v(1)$

Se $v(x) = 0 \Rightarrow v(\frac{1}{x} \cdot x) = v(1) = 0$

$v(\frac{1}{x}) + v(x) = v(\frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$

Viceversa, se $\frac{1}{x} \in A$ (e $x \in A$)

$0 = v(\frac{1}{x} \cdot x) = \underset{\geq 0}{v(\frac{1}{x})} + \underset{\geq 0}{v(x)} \Rightarrow v(x) = v(\frac{1}{x}) = 0$

- Sia $y : v(y) = 1$. Dimostro che ogni ideale $\neq 0$ è della forma (y^n)

$v(I)$ ha un minimo n. Dico che $I = (y^n)$

$n = 0$: $I = A \iff v(I) = \mathbb{N} \iff \exists x \in I$ invertibile

$n > 0$: $\forall x \in I$, $v(x) = m \geq n$

$\Rightarrow v(\frac{x}{y^m}) = 0 \Rightarrow \frac{x}{y^m} \in A^*$

$\Rightarrow x = y^m \cdot \frac{x}{y^m} \in (y^m) \subseteq (y^n)$

$\Rightarrow I \subseteq (y^n)$. Preso $x \in I$ t.c. $v(x) = n$

$v(\frac{y^n}{x}) = 0 \Rightarrow \frac{y^n}{x} \in A^*$

$y^n = x \cdot \frac{y^n}{x} \in (x) \subseteq I$

$\Rightarrow I = (y^n)$

- Quindi gli unici ~~anelli~~ ideali primi sono $\{0\}$ e $(y) = \mathfrak{M}$

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ già fatta.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$ Sia $\mathfrak{M} = (x)$ voglio definire valutaz. su $\mathrm{Frac}(A)^*$

tale che $A = \{x \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$

Se $y \in A$, $y \neq 0$ pongo $v(y) = \max\{i \mid x^i \mid y\}$

Dico che è ben definita (cioè esiste una potenza massima)

$\{0\}$ e $\mathfrak{M}$ sono gli unici ideali primi di A (per ipotesi)

Quindi $\sqrt{(y)} = \mathfrak{M}$, cioè $\exists h : \mathfrak{M}^h \subseteq (y)$ (A noeth) quindi $\mathfrak{M}$ fin. gen. $\Rightarrow \exists h$ uniforme

cioè $(x^h) \subseteq (y) \Rightarrow y \mid x^h$

Allora $x^{h+1} \nmid y$. se lo fosse, $x^{h+1} \mid x^h$, cioè

$x^h = x^{h+1} v \rightsquigarrow_{A \text{ dominio}} 1 = xv \rightsquigarrow x \in A^*$ Assurdo ($\mathfrak{M} \neq A$)

Estendo v a $\mathrm{Frac}(A)^*$

$v\left(\frac{y}{z}\right) = v(y) - v(z)$. Così v è ben definita ed

è una valutazione:

- $y, z \in A$ $v(y) = i$ $v(z) = j$ $y = x^i u$ $z = x^j v$

$(yz) = x^{i+j} uv \Rightarrow v(yz) \geq i+j$

se $x^{i+j+1} \mid x^{i+j} uv$ allora $x \mid u \vee x \mid v$. Assurdo. (x primo)

Quindi $v(yz) = i+j$

Tutto si comporta bene sui quozienti

Resta da dire che $A = \{y \mid v(y) \geq 0\} \cup \{0\}$

$\subseteq$ ovvio

$\supseteq$. Sia $y \in \mathrm{Frac}(A)^*$ t.c. $v(y) = m \geq 0$. allora

$y = x^m u$ con $v(u) = 0$

Basta quindi dire che se $u \in \mathrm{Frac}(A)^*$ e $v(u) = 0$

allora $u \in A$.

$u = \frac{v}{w}$ $v, w \in A$. $v(w) = v(v) = m \geq 0$ $v = x^m c$, $w = x^m d$

Osservo che se $a \in A$ e $v(a) = m$ $a = x^m b$ e $b \in A^*$ ($b \in A$, $x \nmid b$ cioè $b \notin \mathfrak{M}$)

$\Rightarrow u = \frac{c}{d}$ con $c, d \in A^*$ $\rightsquigarrow u \in A^*$ [...]

ISTALG - LEZIONE 9 -

[...] $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$

Sia $\underset{\neq 0}{a} \in \mathfrak{m}$ $\quad \sqrt{a} = \mathfrak{m}$ perché A locale, $\dim A = 1$

Se $(a) = \mathfrak{m}$ ho finito. Altrimenti:

$\exists h : \mathfrak{m}^h \not\subseteq (a), \mathfrak{m}^{h+1} \subseteq (a)$. (A noeth. $\Rightarrow \mathfrak{m}$ fin. gen.)

Sia $b \in \mathfrak{m}^h \setminus (a)$ $\qquad x = \frac{b}{a} \notin A$ $\left(\begin{array}{l} a \notin A^* \\ b \notin (a) \end{array}\right)$

Dico che $y = \frac{a}{b} \in A$ e $(y) = \mathfrak{m}$

Innanzitutto vedo che $x\mathfrak{m} = A$:

$\left.\begin{array}{l} [x\mathfrak{m} \subseteq A \\ [x\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m} \end{array}\right\} \Rightarrow x\mathfrak{m} = A$

$\phi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, $m \mapsto xm$ usando che A è dominio. Per la fedeltà come $A[x]$-mod.

Se $x\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, ($\mathfrak{m}$ fin. gen.), noetherianità (Hamilton-Cayley) $\Rightarrow$ x intero su A
$\Downarrow$ A normale
$x \in A$
Assurdo

$x\mathfrak{m} = \frac{b}{a}\mathfrak{m} \subseteq \frac{\overset{\subseteq (a)}{\mathfrak{m}^{h+1}}}{a} \subseteq A$

Quindi $A = x\mathfrak{m} \Rightarrow \frac{1}{x}A = \mathfrak{m}$ cioè $yA = \mathfrak{m}$

ovvero $\mathfrak{m} = (y)$

OSS. Togliendo l'ipotesi A locale non è più vero che normale $\Rightarrow$ fattoriale (UFD)

TEOREMA: $\mathbb{K}$ campo, $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$

Allora $\dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f) = n$

e si usa $\overline{A[t]}^{B[t]} = \overline{A}^B[t]$ (non dimostrato)

DIM: $\dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f) = \dim(\overline{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]_f)$

Perché l'estensione è intera ($\overline{\mathbb{K}}$ è intera su $\mathbb{K}$)

Quindi WLOG $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

Inoltre

$\dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f) \leq \dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n])$

Scelgo $\alpha \in \mathbb{K}^n$ con $f(\alpha) \neq 0$ ($\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ quindi infinito, quindi esiste)

WLOG $\alpha = 0$ $\qquad$ f non appartiene a nessuno di questi

$(0)_f \subsetneq (x_1)_f \subsetneq (x_1, x_2)_f \subsetneq \dots \subsetneq (x_1, \dots, x_n)_f \subsetneq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f$

è catena di lunghezza n di ideali primi ($f(0) \neq 0$).

$\Rightarrow \dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f) \geq n$

Dico che $\dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) \leq n$.

Per induz. su n:

$n=1$: $\mathbb{K}[x]$ è PID $\Rightarrow \dim \mathbb{K}[x]=1$

(gli ideali primi sono (0) e i max)

$n-1 \Rightarrow n$:

Sia $0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_m$ Voglio dire $m \le n$
$P_1 \ni g \neq 0$ g irriducibile (prendi $f \in P_1$, $f = \prod g_i$ irriducibili $\Rightarrow \exists i : g_i \in P_1$)

Poiché voglio una catena più lunga possibile, WLOG

$P_1 = (g)$

$$0 \subsetneq P_1/(g) \subsetneq P_2/(g) \subsetneq \dots \subsetneq P_m/(g) \subsetneq \frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]}{(g)} = B$$

B è $\mathbb{K}$-algebra fin. gen. (generata da $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$)

Per la dim del lemma di Noether

$\exists y_1,\dots,y_u \in B$ $u < n$ e $y_1,\dots,y_u$ alg. indip.

B intero su $\mathbb{K}[y_1,\dots,y_u]$ Nell'enunciato ho $u \le n$, ma g dà una relazione, quindi almeno un x_k è intero

Per ip. indutt. $\dim B = \dim(\mathbb{K}[y_1,\dots,y_u]) \le u$

$m \le u+1 < n+1 \Rightarrow m \le n$

(ho catena lunga $m-1$ in B)

<u>Def</u> Sia $A \supseteq \mathbb{K}$ dominio. Un insieme massimale di elementi di A algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$ si dice una base di trascendenza

$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(A) = \min(\#\{\text{base di trascendenza}\})$

OSS. $\mathbb{K} \subseteq A \subseteq \operatorname{Frac}(A)$

$\{x_i\} \subseteq A$ sono base di trascendenza di $A \Leftrightarrow$ lo sono di $\operatorname{Frac}(A)$

~~[illegible]~~

$\Leftarrow$ ok.

$\Rightarrow$ Se $\{x_i\} \cup \{\frac{a}{b}\}$ sono alg. indip.

$A \ni a,b$ algebrici su $\mathbb{K}(\{x_i\})$ perché $\{x_i\}$ base di trasc. di A $\Rightarrow \frac{a}{b}$ algebrico su $\mathbb{K}(\{x_i\})$ Assurdo ($\{x_i\} \cup \{\frac{a}{b}\}$ alg. dip.)

<u>TEOREMA</u>: $\mathbb{K} \subseteq K$ campi.

$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} K = n < +\infty$. Allora tutte le basi di trascendenza hanno n elementi.

DIM: $\{y_1, \dots, y_m\}$ base di trascendenza di K su $\mathbb{K}$

Sia $\{z_i\}_{i \in I}$ altra base di tr. Dico che ha al più m-elementi. (in realtà ha esattamente m elementi)

$\exists N$: $y_1, \dots, y_m$ sono algebrici su $z_1, \dots, z_N$ (ovvero su $\mathbb{K}(z_1, \dots, z_N)$)

(perché gli $\{y_i\}_i$ sono algebrici sugli $\{z_j\}_j$ e ognuno ne "tocca" un numero finito)

Allora $\{z_i\}_{i \in I} = \{z_1, \dots, z_N\}$ perché gli altri z_i sono algebrici su $\{y_i\}$ che sono alg. sugli $\{z_j\}_{j \leq N}$

Sia $B = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ $\qquad C = \mathbb{K}[z_1, \dots, z_N]$ $\qquad$ B algebrico su C, C algebrico su B

Gli $\{z_1, \dots, z_N\}$ sono algebrici su $\{y_1, \dots, y_m\}$

$\Rightarrow \exists b \in B$ tale che $\{z_1, \dots, z_N\}$ sono interi su $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]_b$

(denominatore comune sulle relazioni ...) $\leftarrow$ WLOG le relaz sono moniche e coeff. in $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_m)$

$b \in B \Rightarrow b$ algebrico su $C \Rightarrow \frac{1}{b}$ algebrico su C

A questo punto $y_1, \dots, y_m, \frac{1}{b}$ sono algebrici su $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_N]$

Come sopra, invertendo i ruoli,

$\exists c \in C$ t.c. $y_1, \dots, y_m, \frac{1}{b}$ sono interi su $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_N]_c$

Si ha quindi

$$C_c\left[y_1, \dots, y_m, \tfrac{1}{b}\right] = B_b[z_1, \dots, z_N]_c$$

$$\begin{array}{ccccccc} B & \subseteq & B_b & \overset{\text{intera}}{\subseteq} & B_b[z_1, \dots, z_N] & \subseteq & \mathbb{K}\left[y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_N, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right] \\ & & & & \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \ \text{intera} \\ & & & & C & \subseteq & C_c \end{array}$$

Guardando le dimensioni:

$\dim(B) = \dim(B_b) = \dim(B_b[z_1, \dots, z_N]) = m$ $\qquad \rightarrow$ Per il teorema precedente

$\dim(C) = \dim(C_c) = \dim\left(\mathbb{K}\left[y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_N, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right]\right) = N$

Ma $\mathbb{K}\left[y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_N, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right] = (B_b[z_1, \dots, z_N])_c$

è una localizzazione ha dim $\leq$ dell'anello sopra.

$\Rightarrow N \leq m$. Ma $m = \min\{\#\{\text{base di tr}\}\} \Rightarrow N = m$.

<u>COROLLARIO</u>: A dominio $\mathbb{K}$-alg. fin. gen.

$\dim A = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} A = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Frac}(A) < \infty$

DIM: Per lemma di Noether $\exists y_1, \dots, y_m \in A$ alg. ind. tale che

A finito su $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$

Quindi $y_1, \dots, y_m$ è base di trascendenza di A e quindi di $\operatorname{Frac}(A)$

$$\dim A = \dim \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] = m = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Frac}(A) = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} A$$

A intera su $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ $\qquad$ $\dim \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]_f$ con $f = 1$ $\qquad$ Tutte le basi di tr. di un campo hanno stessa cardinalità $\qquad$ base di tr. di A se e solo se di Frac(A)

Def $A \supseteq \mathfrak{p}$ ideale primo

$$ht(\mathfrak{p}) = \dim A_\mathfrak{p}$$
altezza di $\mathfrak{p}$

$$\operatorname{coht} \mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}$$
coaltezza

LEMMA: A dominio $\mathbb{K}$-alg. fin. gen.

$\mathfrak{p} \subseteq A$ primo t.c. $ht(\mathfrak{p}) = 1$ (cioè $\mathfrak{p}$ minimale in $\operatorname{Spec} A \setminus \{0\}$)

Allora $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$

DIM:

1° CASO: $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$0 \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq A$ quindi $\mathfrak{p} = (f)$ con f irriducibile

WLOG x_n compare in f

Dico che in $A/(f)$ $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}$ sono alg. indip. su $\mathbb{K}$ (l'unica relaz. che posso usare è $\overline{f}$, in cui compare anche $\overline{x}_n$)

$\Rightarrow \dim A/(f) \geq n-1$

(*) Se fosse $\geq n$ $0 \subsetneq \overline{\mathfrak{p}}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \overline{\mathfrak{p}}_{n+1} \subsetneq A/(f)$

potrei sollevarla a $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{n+1} \subsetneq A$

ma $\dim A = n$. Assurdo.

$\Rightarrow \dim A/(f) = n-1 = \dim A - 1$

Ma non serve. Si dimostra direttamente l'uguaglianza

CASO GENERALE:

$\left[\dim A/\mathfrak{p} \leq n-1 \quad \text{Come sopra } (A \text{ è dominio}) \quad (*)\right]$

Per il lemma di Noether

Siano $y_1, \dots, y_n$ alg. indip. su $\mathbb{K}$ e A intero su $B = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \subseteq & A \\ \cup\!\!\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\!\!\mid \\ \mathfrak{p}^c & \subseteq & B \end{array}$$

$\mathfrak{p}^c$ minimale per going down (A, B domini, B normale)

$\Rightarrow$ $A/\mathfrak{p} \supseteq B/\mathfrak{p}^c$ è intero

$\dim B/\mathfrak{p}^c = \dim B - 1 = n-1$ ← uso il 1° caso.

$\dim A/\mathfrak{p}$ "

$\Rightarrow \dim A/\mathfrak{p} = n-1 = \dim A - 1$

COROLLARIO: A $\mathbb{K}$-alg. fin. gen., allora:

1) $ht(\mathfrak{p})$, $\operatorname{coht}(\mathfrak{p})$ sono finiti;

2) A è catenario, ovvero $\forall\, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ogni catena massimale di primi

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell = \mathfrak{q}$ ha lunghezza $\ell = \dim A/\mathfrak{p} - \dim A/\mathfrak{q}$

3) Se A è dominio $\forall p$ primo

$$\dim A = ht(p) + coht(p)$$

DIM: ~~1~~

$\boxed{1}$ $coht(p) = \dim A/_p \leq \dim A < +\infty$ perché è (dominio) $\mathbb{K}$-algebra fin. gen.

$ht(p) = \dim A_p \leq \dim A < +\infty$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Considero $\underbrace{0 \subseteq p}_{l_1} \underbrace{\cancel{\subseteq \mathfrak{M}}}_{\cancel{l_2}}$ lunghezze delle catene max

$l_1 = \dim A - \dim A/_p$

(era molto più facile)...

~~$l_2 = \dim A/_p - \dim A/_{\mathfrak{M}}$~~

~~$0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_{l_1} = p \subsetneq q_1 \subsetneq \dots \subsetneq q_{l_2} = \mathfrak{M} \subsetneq A$~~

~~ho catena lunga $l_1 + l_2 = \dim A$~~

Ma $l_1 = \dim A_p \Rightarrow \dim A = \dim A_p + \dim A/_p = ht(p) + coht(p)$

~~$l_2 = \dim A/_p$~~ ~~$(\dim A/_{\mathfrak{M}} = 0)$~~

$\boxed{2}$ $p = p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_l = q$

per lemma precedente

$p_1/_{p_0}$ è min $\neq 0$ in $A/_{p_0}$ $\Rightarrow \dim A/_{p_1} = \dim A/_{p_0} - 1$

$p_2/_{p_1}$ è min $\neq 0$ in $A/_{p_1}$ $\Rightarrow \dim A/_{p_2} = \dim A/_{p_1} - 1$

$\vdots$

$\Rightarrow \dim A/_q = \dim A/_p - l$

OSS - In geometria algebrica

$ht(p) = \operatorname{codim} p$ inteso come $\dim p := \dim V(p)$

$coht(p) = \dim p$

max length catene di sottovarietà irriducibili

$\operatorname{codim} p = \dim A - \dim V(p)$

- A anello locale noetheriano $(A, \mathfrak{M})$

→ Vale che $\dim A < +\infty$

In particolare, q ideale $\mathfrak{M}$-primario, q generato da s elementi

→ $\dim A = \min\{s : \exists q,\ \sqrt{q} = \mathfrak{M}$ e q generato da s elementi$\}$

Altra caratterizzazione: q $\mathfrak{M}$-primario: Vale che

$A/_{q^n}$ è un A-modulo di lunghezza finita (serie JH)

→ Per n grande, $n \longmapsto \ell(A/q^n)$ è un polinomio di grado $\dim A$.

<u>Esempio:</u> $A = \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]_{(x_1,\dots,x_n)}$

$$\dim A = \mathrm{ht}\,(x_1,\dots,x_n) = \dim \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] - \dim \frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]}{(x_1,\dots,x_n)} = n$$

Se $q = \mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_n)$ vale che

$$\frac{(\mathfrak{m}^k)_\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}^{k+1})_\mathfrak{m}} = \left(\frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}}\right)_\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}}$$

Quindi posso vedere come $A/\mathfrak{m}$-mod ($\mathbb{K}$-sp. vett.)

$$\Rightarrow 0 \to \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}} \longrightarrow A/\mathfrak{m}^{k+1} \longrightarrow A/\mathfrak{m}^k \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \ell(A/\mathfrak{m}^k) = \ell(A/\mathfrak{m}) + \ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \dots + \ell(\mathfrak{m}^{k-1}/\mathfrak{m}^k)$$

$$\Rightarrow \ell(A/\mathfrak{m}^k) = 1 + n + \underbrace{\dim \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]_2}_{\binom{n+1}{2}} + \dots + \underbrace{\dim \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]_{k-1}}_{\binom{n+k-2}{k-1} \,\simeq\, k^{n-1}}$$

poli omogenei di grado 2

Asintoticamente, ogni termine è $\sim k^{n-1}$, e ne sommo k, quindi

$$\ell(A/\mathfrak{m}^k) \sim k \cdot k^{n-1} \sim k^n$$

ISTALG. LEZIONE 10.

PROPOSIZIONE: A è noetheriano. Allora ogni catena discendente di primi $P_0 \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$ stabilizza.

DIM: A_{P_0} è anello locale noetheriano, quindi $\dim A_{P_0} < +\infty$ quindi la catena stabilizza.

TEOREMA DELL'IDEALE PRINCIPALE DI KRULL:

A noetheriano, $x \in A$ non divisore di zero $(x \notin A^*)$

Sia $P \supseteq (x)$ primo minimale. Allora $ht(p) = 1$

DIM: Localizziamo in P.

$$\underset{\substack{\parallel \\ B}}{A_p} \supseteq \underset{\substack{\parallel \\ q}}{pA_p} \supseteq xA_p = (x)_B$$

q è minimale tra i primi contenenti (x) (ed è max in B)

x non è invertibile in B

x non è divisore di zero

$\left(\begin{array}{c} x \notin \bigcup \text{ primi minimali di } A \\ \Updownarrow \\ x \notin \bigcup \text{ primi minimali di } B \end{array} \right)$

In particolare q non può essere minimale in B, quindi $\dim B = ht(q) \geq 1$

q è l'unico primo in B contenente $(x)_B$ (q è max) e minimale per x $\Rightarrow \sqrt{(x)_B} = q$

$(x)_B$ è q-primario. B è noetheriano locale.

Ma $\dim B = \min\{s : \exists I, \sqrt{I} = q \text{ e } I = (y_1, \dots, y_s)\}$

$\Rightarrow \dim B \leq 1$

$\Rightarrow \dim B = ht(p) = 1$.

PROPOSIZIONE:

A noetheriano, $x_1, \dots, x_n \in A$ non divisori di zero

$P \supseteq (x_1, \dots, x_n)$ primo minimale. Allora $ht(p) \leq n$

(si dimostra come la parte finale sopra)

TEOREMA:

A noetheriano, A è K-algebra fin. gen. dominio oppure A locale

$x \in A$ non divisore di zero e $x \notin A^*$. Allora

$$\dim A/(x) = \dim A - 1$$

DIM: • Supponiamo A K-alg. fin. gen. e dominio

$x \neq 0$, $\dim A/(x) \leq \dim A - 1$. Infatti, presa catena $\overline{P_1} \subsetneq \overline{P_2} \subsetneq \overline{P_d}$ massimale in $A/(x)$ si ha la catena

$0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_d$ è catena in A di lunghezza $d+1$

Per l'altra disuguaglianza:

$x \in p$ con p minimale $\xRightarrow{\text{per Krull}} ht(p) = 1$

$$\left[\begin{aligned} \dim A &= ht(p) + coht(p) \\ &= 1 + \dim A/p \end{aligned}\right] \Rightarrow \dim A/p = \dim A - 1$$

$\Downarrow$ Per il lemma ← Qui si usa DAVVERO l'ipotesi dominio

~~Ma p è minimale tra quelli che contengono (x), quindi~~

$p \supseteq (x)$

$\Rightarrow \dim A/p \leq \dim A/(x)$ $\qquad \Rightarrow \dim A/(x) \geq \dim A/p = \dim A - 1$

$\Rightarrow \dim A/(x) = \dim A - 1$.

- Supponiamo A locale e noetheriano

$x \in \mathfrak{M}$, x non divisore di zero

$B = A/(x) \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{M}/(x)$

$\dim B \leq \dim A - 1$ perché $x \notin \bigcup$ ideali primi minimali di A

(quindi data catena in B, ci posso aggiungere un minimale all'inizio)

Sia $d = \dim B$. Dico che vale anche l'altra disug.

Sicuramente $\exists$ ideale $\mathfrak{n}$-primario $I/(x)$ tale che $I/(x) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d)$

e $\sqrt{I/(x)} = \mathfrak{n}$

Allora, preso $I = (x_1, \dots, x_d, x)$, I è $\mathfrak{M}$-primario ($\sqrt{I} = \mathfrak{M}$)

$\Rightarrow \dim A \leq d+1 = \dim B + 1$

OSS. $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ $\qquad$ [Controesempio: l'ipotesi di dominio serve]

$A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m] \big/ (f_1, \dots, f_h)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Max} A &\longleftrightarrow \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f_i(\alpha) = 0 \quad i = 1, \dots, h\} \\ &\qquad\qquad \| \\ &\qquad \bigcup_{i=1}^{t} V(P_i) \\ &\qquad\qquad \| \\ &\qquad \bigcup_{i=1}^{t} \operatorname{Spec}(A/P_i) \end{aligned}$$

Siano $P_1, \dots, P_t \supseteq (f_1, \dots, f_h)$ i primi minimali (A è noetheriano)

Prendo $\bar{f} \in A$ $\quad \bar{f}$ non divisore, $\bar{f}$ non invertibile

$\operatorname{Max}(A/(\bar{f})) = V(\bar{f}) \cap \operatorname{Max} A$

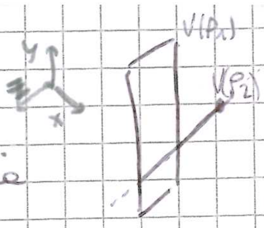
$\bar{f}$ non divisore di zero significa $\bar{f} \notin \bigcup P_i$, cioè $\bar{f} \notin P_i \ \forall i$,

cioè $V(\bar{f}) \not\supseteq V(P_i) \ \forall i$, cioè $\bar{f} \neq 0$ su $V(P_i)$

$\bar{f}$ non invertibile non significa che $\bar{f}$ è non invertibile su ogni $V(P_i)$. Può non essere invertibile in generale ma essendo

in un $V(P_i)$

Infatti, ad esempio, sia



$A = \mathbb{K}[x,y,z] \big/ \underset{f_1}{(x^2-x}, \underset{f_2}{xy)} = I$

$P_1 = (x)$

$P_2 = (x-1, y)$ $\qquad (I = P_1 \cdot P_2)$

$(f) = (xz + 1 - x)$

$A = A/_{P_1} \times A/_{P_2}$ (la dim è il max delle dim dei 2)

$f \equiv 1$ su $V(P_1)$ e $f \neq 0$ su $V(P_2)$

$V(f) \cap V(P_2) = \{pt\} = \{(1,0,0)\}$ $\qquad \dim A = \dim V(P_1) = 2$

$\underset{\max}{(f, I) = (x-1, y, z)} \longrightarrow \dim A/_{(f)} = \dim \{pt\} = 0$

$= \dim V_A(f) = \max_i \{\dim (V(f) \cap V(P_i))\}$ oppure dentro A

Quindi la dimensione è calata di 2.

<u>PROPOSIZIONE:</u>

A locale noetheriano con ideale max $\mathfrak{m}$. $\qquad \mathbb{K} = A/_{\mathfrak{m}}$

Allora $\dim_{\mathbb{K}} \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \geq \dim A$

(è generato come $A/_{\mathfrak{m}}$-modulo, quindi come A-mod)

DIM: Sia $d = \dim_{\mathbb{K}} \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \Rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) = \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$

Per Nakayama $\Rightarrow (x_1, \dots, x_d) = \mathfrak{m}$ che è $\mathfrak{m}$-primario $\rightarrow d \geq \dim A$

<u>Def</u> A locale noetheriano si dice regolare se

$$\dim_{A/\mathfrak{m}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = \dim A$$

è noetheriano (non nec. dominio!)

• Sia $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \big/ (f_1, \dots f_n)$ con $f_i(0) = 0 \quad \forall i$

$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n) \big/ (f_1, \dots, f_n)$ $\qquad$ Quando $A_{\mathfrak{m}}$ è regolare?

Scriviamo il Jacobiano $\qquad J(0) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)_{ij}$

Sia $r = \mathrm{rk}(J(0))$

<u>PROPOSIZIONE:</u> $A_{\mathfrak{m}}$ è regolare $\iff d = \dim A_{\mathfrak{m}} = n - r$

DIM: $f_i = \underset{\text{lineare}}{l_i} + \underset{\text{grado} \geq 2}{g_i}$ $\qquad J(0) = \begin{pmatrix} — l_1 — \\ \vdots \\ — l_n — \end{pmatrix}$ con l_i visti come vettori

A meno di comb. lineari delle f_i e di un cambio di coordinate lineare posso supporre che

$$\begin{cases} f_i = x_i + g_i & i = 1, \dots, r \\ f_i = g_i & i > r \end{cases} \quad \text{(per Gauss)}$$

Calcoliamo $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$. $\quad \mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)\big/(f_1, \dots, f_r)$

$$\mathfrak{m}^2 = \big((x_i x_j) + (f_1, \dots, f_r)\big)\big/(f_1, \dots, f_r)$$

$$\mathfrak{m}\big/\mathfrak{m}^2 = (x_1, \dots, x_n)\big/(x_i x_j, f_k)_{i,j,k} = (x_1, \dots, x_n)\big/(x_i x_j, \ell_k) = (x_{r+1}, \dots, x_n)\big/(x_i x_j)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = n - r$$

Quindi $A_{\mathfrak{m}}$ è regolare $\Leftrightarrow \dim A_{\mathfrak{m}} = n - r$.

PROPOSIZIONE: Con le notazioni precedenti se $d = n - r$

$$A_{\mathfrak{m}} = \left(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\big/(f_1, \dots, f_r) \right)_{\mathfrak{m}_B} =: B \qquad \text{dove } \mathfrak{m}_B = (x_1, \dots, x_n)\big/(f_1, \dots, f_r)$$

DIM: sicuramente

$B \twoheadrightarrow A_{\mathfrak{m}}$ (aggiungo le altre relazioni).

Dico che è anche iniettiva. Per fare questo dimostro prima che B è dominio:

definisco $\underbrace{Gr(B)}_{\text{graduato associato a } B} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{m}_B^i}{\mathfrak{m}_B^{i+1}}$ con prodotto definito da

$0 \neq \overline{x} \in \frac{\mathfrak{m}_B^i}{\mathfrak{m}_B^{i+1}}$ $\quad (x \in \mathfrak{m}_B^i)$

$0 \neq \overline{y} \in \frac{\mathfrak{m}_B^j}{\mathfrak{m}_B^{j+1}}$ $\quad (y \in \mathfrak{m}_B^j)$

$\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{xy} \in \frac{\mathfrak{m}_B^{i+j}}{\mathfrak{m}_B^{i+j+1}}$

Se $Gr(B)$ è dominio allora anche B è dominio.

Infatti, poiché $\bigcap_n \mathfrak{m}_B^n = 0$ (in B) $\leftarrow$ B noeth. locale: $\mathfrak{m}_B(\bigcap_n \mathfrak{m}_B^n) = \bigcap_n \mathfrak{m}_B^n$ - si chiude per Nakayama

$x, y \in B \setminus \{0\}$

$\exists i, j$: $x \in \mathfrak{m}_B^i \setminus \mathfrak{m}_B^{i+1}$, $y \in \mathfrak{m}_B^j \setminus \mathfrak{m}_B^{j+1}$ cioè $\overline{x} \neq 0$ in $\mathfrak{m}_B^i/\mathfrak{m}_B^{i+1}$, $\overline{y} \neq 0$ in $\mathfrak{m}_B^j/\mathfrak{m}_B^{j+1}$

Sto ipotizzando $Gr(B)$ dominio $\rightarrow$ $\Rightarrow xy \in \mathfrak{m}_B^{i+j} \setminus \mathfrak{m}_B^{i+j+1}$ (cioè $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} \neq 0$ in $\mathfrak{m}_B^{i+j}/\mathfrak{m}_B^{i+j+1}$ da cui $xy \neq 0$ in B)

Calcolo $Gr(B)$: $\quad \left(\frac{\mathfrak{m}_B^i}{\mathfrak{m}_B^{i+1}} = \left(\frac{\mathfrak{m}_B^i}{\mathfrak{m}_B^{i+1}}\right)_{\mathfrak{m}_B} = \frac{\mathfrak{m}_B^i}{\mathfrak{m}_B^{i+1}} \right)$

$B\big/\mathfrak{m}_B = \mathbb{K}$ $\qquad \frac{\mathfrak{m}_B}{\mathfrak{m}_B^2} = \langle \overline{x}_{r+1}, \dots, \overline{x}_n \rangle$ $\leftarrow$ (come nella dimostrazione sopra)

$A/\mathfrak{m}$ campo

$Gr(B)$ è generato come quello da $\mathbb{K}$ e da $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$

(grazie alla definizione del prodotto dimostro per induz. che generano tutto)

Quindi si ha $\mathbb{K}[x_{r+1}, \dots, x_n] \twoheadrightarrow Gr(B)$

$\dim \mathbb{K}[x_{r+1}, \dots, x_n] = n - r$ se dimostro ~~Probl.~~ che $\dim Gr(B) = \dim B$ $\Rightarrow$ questa è iniettiva (se avesse Ker la dim calerebbe)

$\dim \frac{\mathfrak{m}_B}{\mathfrak{m}_B^2} = n - r \geq \dim B \overset{\text{ho mappa surg.}}{\geq} \dim A_{\mathfrak{m}} = n - r$ (cioè B è regolare)

[. . .]

IST ALG - LEZIONE 11

[...] Dimostro che $\dim Gr(B) = \dim B$:

$$Gr(B) \supseteq M = \frac{m_B}{m_B^2} \oplus \frac{m_B^2}{m_B^3} \oplus \dots$$

bonde: localizzazioni calano la dim

(*) Infatti: $\frac{M^i}{M^{i+1}} = \frac{m_B^i}{m_B^{i+1}}$ $\qquad \dim Gr(B) \geq \dim Gr(B)_M \overset{(*)}{=} \dim B = n-r$ (*)

$$\Rightarrow \ell\left(\frac{M^n}{M^{n+1}}\right) = \ell\left(\frac{m_B^n}{m_B^{n+1}}\right) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \ell\left(\frac{Gr(B)_M}{M^n}\right) = \ell\left(\frac{B}{m_B^n}\right) \quad \forall n$$

perché $\ell(A/m^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell(m^i/m^{i+1})$

Ma

$n \longmapsto \ell\left(\frac{B}{m_B^n}\right)$ per n grande è polinomio di grado $\dim B$

$\Rightarrow \dim B = \dim Gr(B)_M$ $\qquad \Rightarrow \dim Gr(B) \geq n-r$

Ma avendo mappa surgettiva

$$\underbrace{K[x_{r+1}, \dots, x_n]}_{\dim = n-r} \longrightarrow Gr(B) \qquad \left(Gr\, B = K[x_{r+1}, \dots, x_n]/I\right)$$

e $\dim Gr(B) = n-r = \dim B$.

$K[x_{r+1}, \dots, x_n]$ dominio, mappa surgettiva e stesso dimensione

Krull $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow K[x_{r+1}, \dots, x_n] \cong Gr(B)$

In realtà per il thm. successivo e Krull

$\Rightarrow Gr(B)$ dominio $\Rightarrow B$ dominio

e poiché $\dim B = n-r = \dim A_m$ per thm dell'ideale di Krull, essendo $B \twoheadrightarrow A_m$ si ha anche l'iniettività (B dominio noeth. locale)

$\Rightarrow B \cong A_m$

OSS. Abbiamo anche dimostrato che $Gr(B) = B/m_B \oplus \frac{m_B}{m_B^2} \oplus \dots \cong K[x_{r+1}, \dots, x_n]$

ALGEBRA OMOLOGICA

CLASSIFICAZIONE DEI FIBRATI VETTORIALI

Def Sia X sp. topologico. Un K-fibrato vettoriale su X è

una coppia (Y,π), dove Y è uno sp. topologico e $\pi : Y \longrightarrow X$ è continua e surgettiva, tali che, poste

$$+ : Y \times_X Y \longrightarrow Y \quad \text{somma su } Y \text{ e}$$

$$Y \times_X Y = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \pi(y_1) = \pi(y_2)\}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times Y \longrightarrow Y \quad \text{prodotto per scalari su } Y,$$

$\forall x \in X$ $Y_x = \pi^{-1}(x)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e π è loc. banale, vale a dire $\forall x \in X$ $\exists U \subseteq X$ aperto, $x \in U$, $\exists s$, $\exists \varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{K}^s \times U$ continua tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^s \times U \arrow[dl, "p_2"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo e, per ogni $y \in U$, $\varphi_y := \varphi_U|_{Y_y \cap \pi^{-1}(U)} : Y_y \cap \pi^{-1}(U) \longrightarrow \{y\} \times \mathbb{K}^s$ è un isomorfismo $\mathbb{K}$-lineare.

OSS. Localmente $Y_x = \{y \in Y \mid \pi(y) = x\}$ è uno spazio vettoriale. In particolare su ogni componente connessa di X queste fibre sono isomorfe ad uno spazio dato (Lavorando su spazi connessi possiamo definire il rango di un fibrato) ← FORSE

<u>Esempio</u>: V un $\mathbb{C}$-sp. vettoriale, $X = \mathbb{P}(V)$

$$Y = \{(v, \ell) \in V \times \mathbb{P}(V) \mid v \in \ell\}$$

$$\begin{array}{lll}
\pi : Y \to X, & + : Y \times_X Y \to Y, & \cdot : \mathbb{C} \times Y \to Y \\
(v, \ell) \mapsto \ell & (v_1, v_2, \ell) \mapsto (v_1 + v_2, \ell) & (\lambda, (v, \ell)) \mapsto (\lambda v, \ell)
\end{array}$$

è un fibrato vettoriale localmente banale, ma non globalmente banale. (Verificare che sia non globalmente banale non è ovvio...)

Da ora in poi assumiamo che $\exists r$ tale che $Y_x \cong \mathbb{K}^r$ $\forall x \in X$. (Quindi diciamo che Y è un $\mathbb{K}$-fibrato vettoriale di rango r)

$Y \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale loc. banale di rango r

$\exists$ ric. $\{U_\alpha\}$ di X tale che

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\cong", "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{K}^r \times U_\alpha \arrow[dl, "\pi_{U_\alpha}"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

In $U_\alpha \cap U_\beta =: U_{\alpha\beta}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^r \times U_{\alpha\beta} \arrow[dr] & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\cong", "\varphi_\alpha"'] \arrow[r, "\cong"', "\varphi_\beta"] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^r \times U_{\alpha\beta} \arrow[dl] \\ & U_{\alpha\beta} & \end{tikzcd}$$

Sia $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}$ $\qquad \varphi_{\beta\alpha}(v,x) = (\psi_{\beta\alpha}(v,x), x)$

Pongo $\psi_{\beta\alpha,x}(v) := \psi_{\beta\alpha}(v,x)$ $\qquad \psi_{\beta\alpha,x} : \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^r$

$\psi_{\beta\alpha,x} \in GL(r)$ per def. di fibrato vettoriale

$\psi_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(r,\mathbb{K})$, $\quad x \longmapsto \psi_{\beta\alpha,x}$ è continua rispetto alla topologia di $\mathbb{K}^{r^2}$ indotta.

$\left(GL(r,\mathbb{K}) \subseteq M(r,r,\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{r^2} \right)$

Infatti

$$x \longmapsto \Big(\underset{\psi_{\beta\alpha}(e_1,x)}{\underset{\shortparallel}{\psi_{\beta\alpha,x}(e_1)}} \Big| \dots \Big| \underset{\psi_{\beta\alpha}(e_r,x)}{\underset{\shortparallel}{\psi_{\beta\alpha,x}(e_r)}} \Big)$$

e quindi è continua

Variano in modo continuo perché $\psi_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ è continua

Quindi $\psi_{\beta\alpha} \in C^0(U_{\alpha\beta}, GL(r,\mathbb{K}))$

In $U_{\alpha\beta\gamma}$ si ha $\psi_{\gamma\beta}\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\gamma\alpha}$

- Sia X paracompatto (ogni ric. ha raffinamento loc. finito).

Lavoreremo sempre con ric. loc. finiti.

Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ric. loc. finito. Siano $\psi_{\beta\alpha} \in C^0(U_{\alpha\beta}, GL(r,\mathbb{K}))$ tali che $\forall \alpha,\beta,\gamma$ $\psi_{\gamma\beta}\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\gamma\alpha}$. Allora posso costruire un fibrato vettoriale $Y = \bigsqcup \mathbb{K}^r \times U_\alpha \big/ \sim$ dove $\underset{\mathbb{K}^r\times U_\alpha}{(v,x_1)} \sim \underset{\mathbb{K}^r\times U_\beta}{(w,x_2)}$ se $x_1 = x_2$ e $w = \psi_{\beta\alpha,x_1}(v)$

Questo implica $\psi_{\alpha\alpha} \equiv id$ e $\psi_{\beta\alpha}^{-1} = \psi_{\alpha\beta}$

Mettiamo su Y la top. più fine tale che $\bigsqcup \mathbb{K}^r \times U_\alpha \longrightarrow Y$ è continua. (ovvero la top. quoz.)

Y è fibrato vettoriale su X con mappa $\pi : Y \longrightarrow X$, $\quad [(v,x)] \longmapsto x$

e operazioni $[(v,x)] + [(w,x)] = [(v+w,x)]$

$\lambda[(v,x)] = [(\lambda v, x)]$

Quando è che il fibrato vettoriale così costruito è banale $Y \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{K}^r \times X$?

deve preservare le fibre, essere isomorfismo $\mathbb{K}$-lineare lì (far commutare $Y \to \mathbb{K}^r \times X$, $\searrow X \swarrow$)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^r \times U_\alpha & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\cong"', "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\Phi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}"] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{K}^r \times U_\alpha \arrow[ll, bend right, "\phi_\alpha"'] \arrow[dl, "\pi_{U_\alpha}"] \\
& U_\alpha \arrow[from=ul, "\pi"', phantom] &
\end{tikzcd}$$

Chiamiamo $\phi_\alpha := (\Phi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = \varphi_\alpha \circ \Phi|^{-1}_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$

$\phi_\alpha(v,x) = (\psi_\alpha(v,x), x)$
$= (\psi_{\alpha,x}(v), x)$

Come prima $\Psi_\alpha : U_\alpha \to GL(r,\mathbb{K})$
$x \mapsto \psi_{\alpha,x}$

continua, come prima.

Si ha

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^r \times U_{\alpha\beta} \arrow[rr, bend left, "\psi_{\beta,\alpha}"] & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\cong"', "\varphi_\alpha"] \arrow[r, "\cong", "\varphi_\beta"'] \arrow[d, "\Phi|_{\pi^{-1}(U_{\alpha\beta})}"] & \mathbb{K}^r \times U_{\alpha\beta} \\
& \mathbb{K}^r \times U_{\alpha\beta} \arrow[ul, "\phi_\alpha"] \arrow[ur, "\phi_\beta"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft\quad\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

$\psi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$

$\psi_{\beta\alpha,x} = \Psi_{\beta,x} \circ \Psi_{\alpha,x}^{-1}$

in realtà abbiamo visto solo ($\Rightarrow$), ma rifacendo i diagrammi si costruisce l'isomorfismo con $\mathbb{K}^r \times X$ per l'altra freccia

Quindi Y è banale $(\cong \mathbb{K}^r \times X)$ se e solo se $\exists\, \Psi_\alpha \in C^0(U_\alpha, GL)$ $\forall \alpha \in I$ tali che $\psi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \cdot \Psi_\alpha^{-1}$.

$^{-1}$ è l'inversa dell'immagine, non la funz. inversa

Dato un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, si definisce

$$H^1(\mathcal{U}, GL(r)) := \left\{ \{\psi_{\beta\alpha}\}_{\alpha,\beta} \in C^0(U_{\alpha\beta}, GL(r)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi_{\alpha\alpha} = id \\ \psi_{\gamma\beta}\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\gamma\alpha} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

per $\psi_{..}$ nella stessa famiglia

dove $\psi_{..} \sim \psi'_{..}$ se esistono $\Psi_\alpha \in C^0(U_\alpha, GL(r))$ $\forall \alpha \in I$ tali che $\psi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta\, \psi'_{\beta\alpha}\, \Psi_\alpha^{-1}$

$H^1(\mathcal{U}, GL(r))$ classifica i fibrati vettoriali che si banalizzano su $\mathcal{U}$.

Se ho $\mathcal{U}'$ raffinamento di $\mathcal{U}$, cioè $\forall \alpha' \exists \alpha$: $\left(U'_{\alpha'} \subseteq U_\alpha,\ \alpha' \mapsto \alpha \right)$

ho automaticamente delle mappe di $H^1(\mathcal{U}', GL(r))$ come restrizioni degli elementi di $H^1(\mathcal{U}, GL(r))$. Quindi ho una mappa $H^1(\mathcal{U}, GL(r)) \xrightarrow{Res^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}} H^1(\mathcal{U}', GL(r))$

Passo al limite diretto $\varinjlim H^1(\mathcal{U}, GL(r)) =: H^1(X, GL(r))$

$\varinjlim H^1(\mathcal{U}, GL(r)) = \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, GL(r)) \big/ \sim$ dove $\psi_{\mathcal{U}} \sim \psi_{\mathcal{U}'}$ se $\exists\, \mathcal{U}''$ che raffina $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ tale che $Res^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}''}(\psi) = Res^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}(\psi')$

uguale nel quoziente, cioè equivalenti.

IST ALG - LEZIONE 12

ESERCIZI

Esercizio 1.4: • $\mathbb{F}_2[x_1, x_2, \dots] / (x_i^2 - x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (Anello non noetheriano con localizzazioni per max noetheriane)

Alternativa: $\prod^{\infty} \mathbb{K}$.

Esercizio 3.2: $\mathbb{K}((t))$ non è algebrico su $\mathbb{K}(t)$.

$\alpha = \sum_{n \geq 0} t^{n!}$ è trascendente su $\mathbb{K}(t)$ allo stesso modo per cui

$0{,}110100010000000100000000000000010\dots$ è trascendente

$\left(= \sum_n^{\infty} 10^{-2^n} \right)$

Esercizio 3.4: $A = \mathbb{K}[x,y] / (x^5 - y^3)$ è dominio e trova $\overline{A}^{\mathrm{Frac}(A)}$.

$\dim \mathbb{K}[x,y] = 2$ $\qquad \varphi : \mathbb{K}[x,y] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[t^3, t^5]$

$0 \subsetneq I \subsetneq \ker\varphi \subsetneq \mathfrak{M}$

A è dominio

se fosse stretto avrei assurdo per dimensione

è primo perché $\mathbb{K}[t^3, t^5]$ è dominio

è stretto perché $\mathbb{K}[t^3, t^5]$ non è campo

Esercizio 3.5: Dimostra che la normalizzazione di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots]$ non è noetheriana.

Dimostriamo prima che $\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$ (con p_n l'n-esimo primo)

Più in generale, se $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Q}$ square free coprimi a coppie, ovvero $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = 1 \iff \begin{cases} (a,c) = 1 \\ (b,d) = 1 \\ (a,d) = 1 \\ (b,c) = 1 \end{cases}$ e $\frac{a}{b}$ square free $\iff a, b$ square free

minimi termini

allora $\sqrt{m_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{n-1}})$. Per induzione:

$n = 1$ ovvio

$n-1 \Rightarrow n$: $\sqrt{m_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{n-1}}) \iff \sqrt{m_n} = x + y\sqrt{m_{n-1}}$

con $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{n-2}}) \iff m_n = x^2 + m_{n-1} y^2 + 2xy\sqrt{m_{n-1}}$

$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 m_{n-1} = m_n \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = m_n \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 m_{n-1} = m_n \\ x = 0 \end{cases}$

Assurdo perché $\sqrt{m_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{n-2}})$ per ip. induttiva

Assurdo perché $\sqrt{\frac{m_n}{m_{n-1}}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{n-2}})$ per ip. induttiva

Segue allora che:

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\dots)$ ha come base su $\mathbb{Q}$

$$\{\sqrt{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\}_{i_1<\dots<i_k}$$
$$\sqrt{p_I} \quad \text{con } I=(i_1,\dots,i_k)$$

Sono anche base di $\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3},\dots]$ su $\mathbb{Z}$. Ma:

$$\overline{\mathbb{Z}[\sqrt{p}]} = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{p}] & \text{se } p\equiv 2,3 \ (4) \\ \mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{p}+1}{2}\right] & \text{se } p\equiv 1 \ (4)\end{cases}$$

Sia $\delta_p := \begin{cases} \sqrt{p} & \text{se } p\equiv 2,3 \ (4) \\ \frac{\sqrt{p}+1}{2} & \text{se } p\equiv 1 \ (4)\end{cases}$ Allora

$\overline{\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3},\dots]} = \mathbb{Z}[\delta_2,\delta_3,\dots]$. Infatti:

$\supseteq$ ovvio (oppure fatto)

$\subseteq$ Se $x\in F_{raz}(\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3},\dots]) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\dots)$, allora

x intero su $\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3},\dots] \iff x$ intero su $\mathbb{Z}$ (perché $\sqrt{2},\sqrt{3},\dots$ sono interi su $\mathbb{Z}$).

Vediamo che $\{x\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\dots,\sqrt{p_n}) \mid x \text{ intero su } \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\delta_2,\dots,\delta_n]$

Per induzione:

- $n=1$ ovvio.
- $n-1\Rightarrow n$: $x\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\dots,\sqrt{p_n})$ intero su $\mathbb{Z}$. $x = y+z\sqrt{p_n}$ con $y,z\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\dots,\sqrt{p_{n-1}})$

Se $z=0$ è vero per ip induttiva.

Altrimenti: $\mu_x = (t-(y+z\sqrt{p_n}))(t-(y-z\sqrt{p_n})) =$
$$=(t-y)^2 - z^2p_n = t^2-2ty+y^2-z^2p_n$$

Guarda questo

$\Rightarrow 2y\in\mathbb{Z}[\delta_2,\dots,\delta_{p_{n-1}}]$ e $y^2-z^2p_n\in\mathbb{Z}[\delta_2,\dots,\delta_{p_{n-1}}]$

Mmmmh... Maffei si è perso!

Reload:

$\overline{C} = \mathbb{Z}[\delta_2,\dots,\delta_{p_{n-1}}] \rightsquigarrow C = \mathbb{Z}[x_2,x_3,x_5,\dots]/(x_p^2=p)_p$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \mu_p = t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{p}{4} & p\equiv 2,3 \ (4) \\ \mu_p = t^2-t+\frac{1-p}{4} & p\equiv 1 \ (4)\end{cases}$$

Se C noeth. allora anche $\mathbb{Z}[x_p \mid p\equiv 3 (4)]/(2, x_p^2-p)_{p \text{ primi}}$

è noeth. $\Rightarrow \mathbb{F}_2[x_p \mid p\equiv 3(4)]/(x_p^2=1)_{p \text{ primi}}$ noeth.

$\Rightarrow$ Cambiando coordinate $y_p = x_p - 1$ si ha

$\mathbb{F}_2[y_p \mid p \equiv 3\ (4)] \big/ y_p^2 = 0$ noetheriano, ma ciò

è assurdo perché $(y_1) \subsetneq (y_1, y_2) \subsetneq \dots$

Rifletta meglio alla prossima lezione [...]

Esercizio 2.5: E campo (non nec. algebricamente chiuso), $E \subseteq A$ con A finitamente generato su E. Allora $\forall I \subseteq A$ ideale vale

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \mathrm{Max} A}} \mathfrak{m}.$$

Considero $A = K[a_1, \dots, a_n] \longrightarrow \overline{K}[a_1, \dots, a_n] = B$

$$\sqrt{I^e} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I^e \\ \mathfrak{m} \in \mathrm{Max} B}} \mathfrak{m} \Rightarrow (\sqrt{I^e})^c = \Big(\bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq I^e} \mathfrak{m}\Big)^c = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq I^e} \mathfrak{m}^c = \bigcap_{\substack{\mathfrak{n} \supseteq I \\ \mathfrak{n} \in \mathrm{Max} A}} \mathfrak{n}$$

$$\sqrt{I^e} = \overline{I}^B \Rightarrow (\sqrt{I^e})^c = (\overline{I}^B)^c \overset{?}{=} \sqrt{I}$$

Vediamolo: $\subseteq$ $x \in \overline{I}^B \cap A \Rightarrow \begin{cases} x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n \in I \\ a_i \in I \\ x^i \in A \end{cases} \Rightarrow x \in \sqrt{I}$

L'altra inclusione è ovvia.

Esercizio 3.10: Segue dall'esercizio 2.8: ($f: A \to B$. Se f^* è aperta allora f soddisfa il going down.)

$$\begin{array}{ll} p_1 \subseteq p_2 \subseteq A & q_2^c = p_2 \\ \quad\ \cap & \\ q_1 \subseteq q_2 \subseteq B & \exists q_1 \subseteq q_2 \text{ t.c. } q_1^c = p_1 \Leftrightarrow p_1 \in f^*(Y_{q_2}) \end{array}$$

$$\overset{\text{es. } 2.8}{\Longleftrightarrow} p_1 \in \bigcap_{b \notin q_2} f^*(Y_b)$$

Ma, posto $C_b := X \setminus f^*(Y_b)$, è chiuso

$\Rightarrow C_b = V(I_b) = \{p \in \mathrm{Spec} A \mid I_b \subseteq p\}$ $C_b = V(I_b)$

Se $\exists b \notin q_2$: $p_1 \notin f^*(Y_b)$ allora $p_1 \in C_b \Rightarrow I_b \subseteq p_1 \subseteq p_2$ Assurdo ($p_2 \notin C_b$)

Esercizio 2.8: $f: A \to B$. $f^*: Y = \mathrm{Spec} B \to \mathrm{Spec} A = X$. Sia $q \in Y$ e sia

$Y_q := \{Q \in Y \mid Q \subseteq q\}$ (che è omeo. a $\mathrm{Spec} B_q$). Allora

$$f^*(Y_q) = \bigcap_{b \notin q} f^*(Y_b)$$

Osserviamo che vale per $f = id$

Vediamo inoltre che, se Z_i insiemi, $f^*(\bigcap Z_i) \subseteq \bigcap f^*(Z_i)$

ma in generale non vale l'altra inclusione. $\qquad Y_q = \bigcap_{b \notin q} Y_b$

In questo caso però:

Se $p \in \bigcap_{b \notin q} f^*(Y_b)$, allora sia $q_b \in Y_b$ quello tale che $q_b^c = p$.

Abbiamo:

$$\begin{tikzcd} & & & A \arrow[d, "f"] \\ p^e \subseteq & I \subseteq & q \subseteq & B \end{tikzcd} \qquad I^c = p, \quad I \in Y_q$$

$I := \bigcap_{b \notin q} q_b$, $\quad p^{ec} = p$.

$S := B \setminus q \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} p \subseteq & & & A \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "\tilde{e}"] \\ p^e \subseteq & I \subseteq & q \subseteq & B \arrow[d, "S^{-1}id"] \\ S^{-1}p^e \subseteq & S^{-1}I \subseteq & S^{-1}q \subseteq & S^{-1}B \arrow[uu, bend right=60, "\tilde{c}"'] \end{tikzcd}$$

Ci basta che $p^{\tilde{e}\tilde{c}} = p$:

($\subseteq$) $x \in A$, $f(x) \in S^{-1}p^e \Rightarrow f(x) = \frac{c}{s}$ con $c \in p^e$, $s \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists t \in S$ tale che $tsf(x) = tc \Rightarrow sf(x) = c$, ma $c \in p^e \subseteq I$

a meno di sostituire $b \in p^e$ e $s \in S$

$\Rightarrow sf(x) \in \bigcap_{b \notin q} q_b$, ma per $b = s$ si ha $x \in q_b^c = p$.

$(f(x) \in q_b)$

($\supseteq$) ovvio.

ISTALG - LEZIONE 13

Esercizio 3.5: $C = \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots]$. $\overline{C}$ non è noetheriano.

[...] C non è noetheriano. Dico che

$$C_p = C/(p) \quad \text{ha dim } 0.$$

$\mathbb{Z} \subseteq C$ intera. Dimostro che C_p ha un numero infinito di ideali massimali. ($\Rightarrow$ non è artiniano $\overset{\text{dato}}{\Rightarrow}$ non è noetheriano)

Questa proprietà implica che vale la stessa cosa per $\overline{C}$, ovvero che né C né $\overline{C}$ sono noetheriani.

$C \subseteq \overline{C}$ inclusione intera, mappa sugli spettri surg. e $\mathfrak{m}$ max $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{m}^c$ max

$$C = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p, \dots] \Big/ (x_p^2 = p)_{p \text{ primi}}$$

Prendo (3).

$$C/(3) = \mathbb{F}_3[x_p \dots] \Big/ \begin{pmatrix} x_3^2 = 0 & \\ x_p^2 = 1 & p \equiv 1 \ (3) \\ x_q^2 = 2 & q \equiv 2 \ (3) \end{pmatrix}$$

Costruisco mappe al variare di $q \equiv 1 \ (3)$

$$C/(3) \xrightarrow{\varphi_q} \mathbb{F}_{3}$$

$x_3 \longmapsto 0$

$x_p \longmapsto 1 \quad p \neq q \quad p \equiv 1 \ (3)$

$x_q \longmapsto 2$

$x_p \longmapsto 0 \quad p \equiv 2 \ (3)$

$\mathfrak{M}_q = \operatorname{Ker} \varphi_q$ è massimale, la mappa è surgettiva.

Variando su q ho costruito infiniti massimali.

$H^1(X, GL(n)) \longleftrightarrow$ fibrati vettoriali di rango n su X

Se cambio la topologia su K^n tale spazio cambia radicalmente

Inoltre cambia radicalmente anche in base ai coefficienti

$H^1(X, G)$ classifica i fibrati vettoriali $Y \xrightarrow{\pi} X$ su cui G agisce a destra e che localmente sono

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & K^r \times U \arrow[d, "p_2"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Aut}_G(Y_p) = G$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Aut}(Y_p) \cong G$

$\shortparallel$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\varphi \longmapsto \varphi(1)$

$\{\varphi : Y_p \to Y_p \mid \varphi(gh) = \varphi(g)\cdot h \ \ \forall g \in Y_p,\ \forall h \in G\}$ $\qquad$ $\varphi_k \longleftarrow k$

$\varphi_k(g) = kg$

? (*)

FIBRATI VETTORIALI NEL CASO DI ANELLI

Vorrei definire il prodotto di spazi topologici in modo migliore da quello classico, perché vorrei che, se $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t] = \mathbb{C}$, $Y = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[s] = \mathbb{C}$ (non proprio, ci sarebbe anche $(0) \in X$), $X \times Y$ vorrei fosse come $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t,s] = \mathbb{C}^2$.

Con le topologie "normali" avrei aperti brutti.

Def $X \times Y$ (+ mappe p_X e p_Y) è sp. top. tale che $\forall Z$ $\forall \alpha : Z \to X$ $\forall \beta : Z \to Y$ $\exists!\, \varphi : Z \to X \times Y$ tale che $p_X \varphi = \alpha$ (proiez. su X) e $p_Y \varphi = \beta$ (proiez. su Y)

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "\alpha"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Se $X \times Y$ ha tale proprietà allora si dice prodotto di X e Y.
(il prodotto di X e Y è uno spazio + 2 mappe p_X, p_Y)

Def $X \sqcup Y$ si dice coprodotto di X e Y se, date $X \overset{i_X}{\hookrightarrow} X \sqcup Y$, $Y \overset{i_Y}{\hookrightarrow} X \sqcup Y$, $\forall Z$ $\forall \alpha : X \to Z$ $\forall \beta : Y \to Z$ $\exists!\, \varphi : X \sqcup Y \to Z$ tale che $\varphi i_X = \alpha$ e $\varphi i_Y = \beta$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i_X"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "i_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "\beta"] \\ & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(il coprodotto di X e Y è uno spazio + 2 mappe i_X e i_Y)

Considero la categoria degli anelli unitari con morfismi di anelli unitari. Dati $X = \mathrm{Spec}\,A$ $\quad Y = \mathrm{Spec}\,B$, cerco C tale che $\forall D$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}\,D \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & \mathrm{Spec}\,C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spec}\,A & & \mathrm{Spec}\,B \end{tikzcd}$$

(Lavoriamo solo con mappe indotte sugli spettri degli anelli)

Ovvero cerco C tale che commuti

$$\begin{tikzcd} & D & \\ & C \arrow[u, dashed] & \\ A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[uur, bend left, "\alpha"] & & B \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[uul, bend right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Dato che posso definire $A \times B \to D$, $(a,b) \longmapsto \alpha(a)\cdot\beta(b)$ che è $\mathbb{Z}$-bilineare,

viene da sé che $C = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ $\quad$ su $\mathbb{Z}$ perché α e β sono omomorfismi di anelli

Def

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rrd, bend left, "\alpha"] \arrow[rd, dashed, "\varphi"] \arrow[rdd, bend right, "\beta"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

+ 2 mappe p_X, p_Y

$\left[X \times_Z Y = \{(x,y) \mid f(x) = g(y)\} \right.$ ← il prodotto fibrato è lui

$p_X(x,y) = x$

$\left. p_Y(x,y) = y \right]$

$X \times_Z Y$ si dice prodotto fibrato di X e Y su Z se, fissate delle mappe $X \xrightarrow{f} Z$ e $Y \xrightarrow{g} Z$, $\forall W$, $\forall \alpha : W \to X$ $\forall \beta : W \to Y$ tali che $f\alpha = g\beta$, $\exists! \varphi : W \to X \times_Z Y$ tale che $p_X \varphi = \alpha$ e $p_Y \varphi = \beta$.

Def Il coprodotto fibrato di A e B su C (anelli), date $C \xrightarrow{f} A$ e $C \xrightarrow{g} B$, è (un anello + 2 mappe i_A, i_B) tale che $\forall D$ $\forall \alpha : A \to D$ $\forall \beta : B \to D$ per cui $\alpha f = \beta g$ $\exists! \varphi : \circledast \to D$ tale che $\varphi i_A = \alpha$, $\varphi i_B = \beta$

~~$\exists! \, i_A : A \to \circledast$~~

~~$\exists! \, i_B : B \to \circledast$~~

$\circledast$ è $A \otimes_C B$.

$i_A : A \to A \otimes_C B$

$a \mapsto a \otimes 1$

$$\begin{tikzcd}
D & & \\
& A \otimes_C B \arrow[lu, dashed, "\varphi"'] & A \arrow[l, "i_A"] \arrow[llu, bend right, "\alpha"'] \\
& B \arrow[u, "i_B"] \arrow[luu, bend left, "\beta"] & C \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Fisso $\mathbb{K}$ e lavoro con $\mathbb{K}$-algebre.

Con queste definizioni posso dire cosa è un fibrato vettoriale su $\operatorname{Spec} A$. Date $A \xrightarrow{f} B$, ho $Y = \operatorname{Spec} B \xrightarrow{f^*} \operatorname{Spec} A = X$

Con somma $+ : Y \times_X Y \to Y$, indotta da $B \to B \otimes_A B$ e prodotto per scalari .... [...]

Caso particolare: $A = \mathbb{K}$ $B = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_r]$ $(\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}})$

è il copr. fibrat. nella cat. delle $\mathbb{K}$-alg

$+ : \mathbb{K}^r \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ è indotta da $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_r] \to \mathbb{K}[t_1, \dots, t_r] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t_1, \dots, t_r]$

$(x_1, \dots)\ (y_1, \dots) \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r)$ $\qquad t_i \longmapsto t_i \otimes 1 + 1 \otimes t_i$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ è indotta da $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_r] \to \mathbb{K}[t] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t_1, \dots, t_r]$

$t, (x_1, \dots, x_r) \longmapsto (t x_1, \dots, t x_r)$ $\qquad t_i \longmapsto t \otimes t_i$

In generale: $+ : A[x_1, \dots, x_r] \to A[x_1, \dots, x_r] \otimes_A A[x_1, \dots, x_r]$

$x_i \longmapsto x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$

$\circledast$

A anello, $B = A[t_1, \dots, t_r]$

$$\cdot : A[x_1,\dots,x_r] \longrightarrow A[t] \otimes_A A[x_1,\dots,x_r]$$
$$x_i \longmapsto t \otimes x_i$$

Ancora più generale: B = coprodotto di A e $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]$

$X = \operatorname{Spec} A \qquad B = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r] = A[x_1,\dots,x_r]$

Y = prodotto di Spec A e Spec $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]$

$Y = \operatorname{Spec} B = X \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r]$

attraverso mappa su coprod. fibrato

Definisco $\begin{cases} + : Y \times_X Y \longrightarrow Y & \text{prod. fibrato} \\ \cdot : \mathbb{A}^1_A \times Y \longrightarrow Y \end{cases}$ $\qquad \mathbb{A}^1_A = \operatorname{Spec} A[t]$

come sopra

Sono coprodotti fibrati, passando agli spettri ho i prodotti fibrati

Y è fibrato vettoriale banale di rango r.

Def) Un fibrato vettoriale V su $X = \operatorname{Spec} A$ è $V = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$

con operazioni (indotte da) $+ : B \to B \otimes_A B$, $\cdot : B \to A[t] \otimes_A B = B[t]$ omo. di anelli

t.c. che $\forall p \in X \ \exists f \in A : p \in X_f$ e il diagr. commuta

$$\begin{tikzcd} V_f = \operatorname{Spec} B_f \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \operatorname{Spec}(A_f[x_1,\dots,x_r]) \arrow[dl, "p_1"'] \\ & X_f & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Spec}(A_f[x_1,\dots,x_r]) \cong X_f \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_r])$

indotta da $A \to B$; indotta da $A_f \hookrightarrow A_f[x_1,\dots,x_r]$

$(B_f \cong A_f[x_1,\dots,x_r]$ compatibile con $+$ e $\cdot)$

Se X connesso posso parlare di rango del fibrato.

Def A anello comm. con 1. M un A-modulo.

$M^{\otimes m} = \underbrace{M \otimes_A \dots \otimes_A M}_{m \text{ volte}}$. L'algebra tensoriale di M su A è

$TM = \bigoplus_{m \geq 0} M^{\otimes m}$. È A-modulo e algebra con prodotto definito

da

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \dots \otimes y_m) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_m$$

(poniamo $M^{\otimes 0} = A$ e $1 \cdot z = z \ \forall z \in TM$). È associativa ma non

commutativa.

Ha la seguente proprietà: $\forall B$ A-algebra (non per forza comm.)

$\forall \varphi : M \to B$ di A-moduli $\exists! \ \Phi : TM \to B$ che estende φ.

Def $SM = TM / (x \otimes y = y \otimes x)_{x,y \in M}$ ideale bilatero generato è detta algebra simmetrica di M su A

Ha la propr. che $\forall B$ A-alg. associativa commutativa $\forall \varphi : M \to B$

di A-moduli $\exists! \ \Phi : SM \to B$ che estende φ.

Esempio: $M = A^r \Rightarrow SM \cong A[x_1, \dots, x_r]$. $\left(\begin{array}{l} e_i \mapsto x_i, \\ e_i \otimes e_j \mapsto x_i x_j \end{array} \text{ e così via} \right)$

Dalla definizione di fibrato vettoriale $\underset{\operatorname{Spec} B}{V} \xrightarrow{\varphi^*} X = \operatorname{Spec} A$

indotta da $A \xrightarrow{\varphi} B$ con operazioni $+ : V \times_X V \to V$

$\cdot : \mathbb{A}^1 \times_{\mathbb{Z}} V \to V$

$\left(\begin{array}{l} \text{indotte da } + : B \to B \otimes_A B \\ \text{omomorfismi di anelli (A-lineari)} \quad \cdot : B \to B[t] \end{array} \right)$ non so come sono definite (lo so solo per il fibrato banale)

Localmente $B_f \cong A_f[x_1, \dots, x_r]$

$\cup\!\!\mid$

$P_f = A_f x_1 \oplus \dots \oplus A_f x_r \qquad (P_f \cong A_f^r)$

$P := \{ b \in B : \cdot(b) = bt \}$ dove $\cdot : B \to B[t]$

è A-sottomodulo di B

CONSEGUENZE: 1) P è fin. gen.

2) P è proiettivo

3) $B = SP$

Morale: Spec_ è funtore controvariante, quindi manda prodotti in coprodotti e viceversa, e prodotti fibrati in coprodotti fibrati e viceversa

Vale perché, prendendo f banalizzante,

$P_f = \{ b \in A_f[x_1, \dots, x_r] \mid \cdot(b) = bt \}$

Qui le operazioni le conosco $(\cdot(x_i) = t x_i)$ ed è di anelli, e quindi qui so che $P_f = A_f x_1 \oplus \dots \oplus A_f x_r$

IST ALG - LEZIONE 14

$P = \{ b \in B : \bullet(b) = bt \}$ è un A-sottomodulo di B

OSS. $P_f = \{ b \in B_f : \bullet_f(b) = bt \}$

Infatti: ① (se $b \in P$) se $\bullet(b) = bt$ allora $\bullet_f(b) = bt$. Preso un qualsiasi $\frac{b}{f^m} \in P_f$ allora

$$\bullet_f\left(\frac{b}{f^m}\right) = \frac{bt}{f^m} = \frac{b}{f^m} t \quad \text{OK} \quad \text{cioè } \frac{b}{f^m} \in \{ b \in B_f \mid \bullet_f(b) = t \}$$

② Viceversa, se $b = \frac{\beta}{f^m}$ $(b \in B_f)$ e $\bullet_f\left(\frac{\beta}{f^m}\right) = \frac{\beta}{f^m} t$, allora

$$\frac{\bullet(\beta)}{f^m} - \frac{\beta t}{f^m} = 0 \quad \overset{\exists n}{\Rightarrow} f^n(\bullet(\beta) - \beta t) = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{\beta f^n}{f^{m+n}} \in P_f \qquad \left(\bullet(\beta f^n) = \beta f^n t \atop \text{perché } \bullet(\beta) f^n = \bullet(\beta f^n) \right)$$

dato che $f^n \in A$ e $\bullet()$ è di A-mod

Possiamo definire il fibrato vettoriale anche nel modo seguente:

$\exists f_1, \dots, f_m$ t.c. $X = \bigcup_{i=1}^m X_{f_i}$, $B_{f_i} \cong A_{f_i}[x_1, \dots, x_r]$ e

$P_f \cong A_{f_i}^r$ (modulo localmente libero di rango r).

OSS. Stiamo chiedendo localmente libero non nel senso di $\forall m \in \mathrm{Max}$

La proprietà di sopra implica P_m libero $\forall m$, ma non vale il viceversa:

Se q primo, ($\exists$ f_0:) $f_0 \notin q$ $\quad P_q = (P_{f_0})_{q_{f_0}} = (A_{f_0}^r)_{q_{f_0}} = A_q^r$ (S^{-1} passa alle somme dirette)

Come moduli

• **PROPOSIZIONE:** $S_A P \xrightarrow{x} B$ è isomorfismo.

(S_A: algebra simmetrica su A)

DIM: Dimostro che vale localmente: (isomorfismo è proprietà locale)

$$(S_A P)_m \xrightarrow{x_m} B_m \cong A_m[x_1, \dots, x_r]$$

Usa stesse argomentazioni di sopra

$P_m \cong A_m x_1 \oplus \dots \oplus A_m x_r$ e qui è vero perché

$$(S_A P)_m = S_{A_m} P_m = S_{A_m}(A_m x_1 \oplus \dots \oplus A_m x_r) \cong A_m[x_1, \dots, x_r]$$

Esempio ultima lezione

(e l'isomorfismo è esattamente lo stesso.)

PROPOSIZIONE: Se Spec B è un fibrato vettoriale su Spec A allora

1) P è localmente libero di rango r (nel senso nostro)

2) $S_A P \cong B$

3) P è fin. gen.

Viceversa, dato P con le proprietà 1, 3. possiamo costruire $B := S_A P$ e delle mappe

$B \to B \otimes_A B$, $B \to B[t]$, $A \to B$ in modo tale che B sia fibrato vettoriale su A.

Esercizio: Definisci le 3 mappe dell'enunciato

Esercizio: La proprietà 1 implica la 3. Infatti:

se M è A-modulo ed $\exists f_1, \dots, f_n : (f_1, \dots, f_n) = A$ e tali che M_{f_i} è fin. gen., allora M è fin. gen.

PROPOSIZIONE: A noetheriano, M un A-modulo fin. gen. TFAE:

(A) M è loc. libero di rango r (nel senso nostro)

(B) $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\,A \quad M_\mathfrak{m} \cong A_\mathfrak{m}^r$

(C) M è proiettivo e $\dim_{A/\mathfrak{m}} (M/\mathfrak{m}M) = r \quad \forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\,A$

DIM: $\boxed{A} \Rightarrow \boxed{B}$ già visto

$\boxed{B} \Rightarrow \boxed{C}$ M proiettivo se

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] \arrow[ul, dashed, "\exists"] & \end{tikzcd}$$ esatta

cioè $\mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\alpha\circ} \mathrm{Hom}(M,L) \to 0$ esatta

M proiettivo se conserva le succ. esatte corte tramite $\mathrm{Hom}(M,-)$

Verifico che M è proiettivo usando che la surgettività è locale

$$(\mathrm{Hom}_A(M,N))_\mathfrak{m} \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{m}\circ} (\mathrm{Hom}_A(M,L))_\mathfrak{m} \to 0$$

Vale se fin. pres. (noeth. + fin. gen. $\Rightarrow$ fin. pres.)

$$\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}, N_\mathfrak{m}) \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{m}\circ} \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}, L_\mathfrak{m}) \to 0$$

$$N_\mathfrak{m}^r \xrightarrow{r \text{ copie di } \alpha_\mathfrak{m}} L_\mathfrak{m}^r \to 0 \quad \text{OK.}$$

Per la dim è ovvio potendo localizzare senza cambiare nulla.

$\boxed{C} \Rightarrow \boxed{B}$ M proiettivo fin. gen.

Considerando $0 \to N \to A^n \to M \to 0$ esatta

la succ. spezza $\Rightarrow A^n = M \oplus N$

Localizzo e scelgo n minimo. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\to$ Osservo che $n = r$: $\dim_{A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}M_\mathfrak{m} = r$

Per Nakayama r generatori si sollevano a r generatori di $M_\mathfrak{m}$

Quindi $A_\mathfrak{m}^r = M_\mathfrak{m} \oplus N_\mathfrak{m}$. Tensorizzo per $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}$

$$\left(A/_I \otimes X = X/_{IX} \right) \qquad \left(A_m/_m\right)^r = \left(M_m/_{mM_m}\right) \oplus \left(N_m/_{mN_m}\right)$$

$A/_m$ - spazi vett. di dim r

$\Rightarrow N_m/_{mN_m} = 0 \Rightarrow N_m = 0$ per Nakayama (roba locale) $\Rightarrow M_m \cong A_m^r$

(*)

$K \subseteq L$ di Galois finita

<u>Esempio:</u> $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ $\quad xy = 1$, $x^2+y^2=1$ $\quad$ su $\mathbb{R}$ sono quadriche distinte, su $\mathbb{C}$ sono isomorfe

<u>Def</u> Se V è un L-spazio vettoriale, una K-forma (struttura) di V è un $V_0 \subseteq V$ K-sottospazio tale che $L \otimes_K V_0 \xrightarrow{\cong} V$ isomorfismo
$$\lambda \otimes v \longmapsto \lambda v$$

<u>Def</u> Se A è una L-algebra, una K-forma (struttura) di A è un $A_0 \subseteq A$ K-sottoalgebra tale che $L \otimes_K A_0 \xrightarrow{\cong} A$ è isomorfismo.
$$\lambda \otimes v_0 \longmapsto \lambda v_0$$

Osserviamo che se V_0 è una K-forma di V allora possiamo definire un'azione di $Gal(L/K) = \Gamma$ su V:
$$\sigma \cdot (\lambda v_0) = \sigma(\lambda) v_0 \qquad \text{con } \lambda \in L,\ v_0 \in V_0,\ \sigma \in \Gamma$$

Questa azione è K-lineare e inoltre verifica
$$\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda)\sigma(v) \qquad \forall v \in V \ \forall \lambda \in L. \qquad \text{[è sesquivariante]}$$

<u>LEMMA:</u> V un L-spazio vettoriale e se Γ agisce su V in modo K-lineare e verifica $\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda)\sigma(v)$ $\forall \lambda \in L$ $\forall v \in V$ allora
$$V_0 := V^\Gamma \text{ è una } K\text{-forma (o } K\text{-struttura).}$$

DIM: [...]

<u>LEMMA DI ARTIN:</u> $\chi_1, \dots, \chi_n : G \longrightarrow E^*$ omomorfismi di gruppi distinti (E campo) allora sono E-lin. indip.

DIM: Per induz. su n: $n=1$ ok. ($\chi(g) \neq 0 \ \forall g$)

$n-1 \Rightarrow n$: $\quad a_1\chi_1 + \dots + a_n\chi_n = 0$

Valuto in gh: $a_1\chi_1(g)\chi_1(h) + \dots + a_n\chi_n(g)\chi_n(h) = 0$

Variando su tutti gli h ho: $a_1\chi_1(g)\chi_1 + \dots + a_n\chi_n(g)\chi_n = 0$

Moltiplico la prima relazione che avevo per $\chi_1(g)$ e sottraggo:

$$a_2(\chi_1(g)-\chi_2(g))\chi_2+\dots+a_n(\chi_1(g)-\chi_n(g))\chi_n=0$$

Per ip. indutt. $a_i(\chi_1(g)-\chi_i(g))=0$

χ_1,χ_i distinti $\Rightarrow \exists g_i : \chi_1(g_i)\neq\chi_i(g_i) \Rightarrow a_i=0$

[...] DIM: $\Gamma=\{\sigma_1=id,\sigma_2,\dots,\sigma_m\}$

$\sigma_i:L\to L$, vedendoli come $\sigma_i:L^*\to L^*$ sono distinti e di gruppi

Quindi sono lin. ind. su L.

V_0 sicuramente è un K-sottospazio.

Dobbiamo dimostrare che $L\otimes_K V_0 \cong V$

$$\lambda\otimes v_0 \longmapsto \lambda v_0$$

Sia $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ base di L su K

$$L=K\lambda_1\oplus\dots\oplus K\lambda_n$$

Quindi $L\otimes_K V_0=\lambda_1 K\otimes_K V_0\oplus\dots\oplus\lambda_n K\otimes_K V_0=\lambda_1V_0\oplus\dots\oplus\lambda_nV_0$

Devo quindi mostrare che $\forall v\in V$ si scrive in modo unico come $\sum^n\lambda_iv_i$ con $v_i\in V_0$. Dico che se esiste è unica.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1(v)=v&=\sum\lambda_iv_i\\ \sigma_2(v)&=\sum\sigma_2(\lambda_i)v_i\\ &\vdots\\ \sigma_n(v)&=\sum\sigma_n(\lambda_i)v_i\end{aligned}\right\}$$

Metto in matrice i coefficienti

$$\left(\sigma_h(\lambda_j)\right)^T_{h,j=1,\dots,n}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\sigma_2(\lambda_1)&\dots&\sigma_n(\lambda_1)\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \lambda_n&\sigma_2(\lambda_n)&\dots&\sigma_n(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango n:

se le ~~righe~~ colonne fossero dipendenti avrei

$$\sum_i c_i\sigma_i(\lambda_j)=0 \quad \forall j \quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n \text{ base di } L \text{ su } K) \Rightarrow \sum c_i\sigma_i=0 \quad \text{Assurdo per Artin.}$$

Esistono allora $\mu_{ih}\in L:\forall j \ \sum_h\mu_{ih}\sigma_h(\lambda_j)=\delta_{ij}$

(la matrice è invertibile, l'inversa è $(\mu_{hi})_{h,i}$)

S'ha $\mu_{ih}\sigma_h(v)=\sum_j\mu_{ih}\sigma_h(\lambda_j)v_j$

$$\overset{\forall i}{\Rightarrow}\sum_h\mu_{ih}\sigma_h(v)=\sum_{h,j}\underbrace{\mu_{ih}\sigma_h(\lambda_j)}_{\delta_{ij}}v_j=v_i$$

Quindi la scrittura se esiste è unica. Dico ora che $\underbrace{v_i=\sum_h\mu_{ih}\sigma_h(v)}_{\in V_0 \text{ attraverso l'algebra lineare}}$

ovvero che $v=\sum\lambda_iv_i=\sum_{i,h}\lambda_i\mu_{ih}\sigma_h(v)$

$$v=\sigma_1(v)=\sum_{i,h}\lambda_i\mu_{ih}\sigma_h(v)=\sum\lambda_iv_i \quad \cancel{=\sigma_1(v)}$$

Vale se e solo se $\sum_i\lambda_i\mu_{ih}=\begin{cases}1 & h=1\\ 0 & h\neq1\end{cases}$

(perché deve valere $\forall v\in V$ e i σ_i sono indip.)

Pongo allora $C_h := \sum_i \lambda_i \mu_{ih}$ ← Banalmente è $(\mathrm{Id})_{h1} = \delta_{h,1}$ perché $(\mu_{hi}) = (\sigma_i(\lambda_j))^{-1}$ e la prima colonna di $(\sigma_i(\lambda_j))$ è data dai λ_i.

SUPERFLUO

Voglio dire che

$$C_1\sigma_1 + \ldots + C_m\sigma_m = \sigma_1 = id$$ Basta dimostrarlo sulla base

ovvero

$$\underbrace{C_1\sigma_1(\lambda_j) + \ldots + C_m\sigma_m(\lambda_j)}_{(*)} = \lambda_j \quad \forall j$$

Ma $(*) = \sum_{i,h} \lambda_i \underbrace{\mu_{ih}\sigma_h(\lambda_j)} = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \quad \forall j$ OK.

<u>TEOREMA</u>: $K \subseteq L$ di Galois finita. A una L-algebra che ha almeno una K-forma. Allora

$$K\text{-forme di } A \Big/ \text{isom. su } K \longleftrightarrow H^1(\Gamma; \mathrm{Aut}_L(A))$$

OSS. Se V_0 è K-forma, allora è ovvio che $V_0 = V^\Gamma$, essendo

$$V^\Gamma = (L \otimes_K V_0)^\Gamma = L^\Gamma \otimes_K V_0^\Gamma = K \otimes_K V_0 = V_0.$$

(*) Nella parte di fibrati vettoriali su spettri si ha dunque che

$$\{\text{fibrati vettoriali su Spec}A\} \longleftrightarrow \{P\ A\text{-moduli localmente liberi (nel senso nostro)}\}$$

Infatti, se $\mathrm{Spec}\,\underset{B_1}{S_A P_1} \cong \mathrm{Spec}\,\underset{B_2}{S_A P_2}$ come fibrati vettoriali, allora $\exists \varphi$ tale che $\varphi: B_1 \to B_2$ isomorfismo e, tra le altre cose, fa commutare

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\cdot_1} & B_1[t] \\ \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow \tilde\varphi \\ B_2 & \xrightarrow{\cdot_2} & B_2[t] \end{array}$$

dove $\tilde\varphi|_{B_1} = \varphi$ e $\tilde\varphi(t) = t$

($\cdot_1$ e $\cdot_2$ sono i prodotti scalari che definiscono i fibrati)

Quindi $P_2 = \{b' \in B_2 \mid \cdot_2(b') = b't\} \cong \{b \in B_1 \mid \cdot_2(\varphi(b)) = \varphi(b)t\} \cong$

$$\cong \{b \in B_1 \mid \tilde\varphi(\cdot_1(b)) = \tilde\varphi(bt)\} \cong \{b \in B_1 \mid \cdot_1(b) = bt\} = P_1$$

IST ALG - LEZIONE 15

Sia A_0 una K-algebra e poniamo $A = L \otimes_K A_0$ con $K \subseteq L$ di Galois finita. A_0 è quindi una K-struttura di A per costruzione.

Data un'algebra A vogliamo studiare $\{A' \text{ } K\text{-struttura di } A\}/_{isom}$

Vale che

$$\{A' \text{ } K\text{-struttura di } A\}/_{isom} \longleftrightarrow H^1(\Gamma; \mathrm{Aut}_L(A))$$

Esempio:

$$A = \mathbb{C}[t, \tfrac{1}{t}] = \mathbb{C}[x,y]/_{xy=1} \cong \mathbb{C}[x,y]/_{x^2+y^2=1}$$

$A_0 = \mathbb{R}[t, \frac{1}{t}]$ è $\mathbb{R}$-forma

$A_1 = \mathbb{R}[x,y]/_{x^2+y^2=1}$ è $\mathbb{R}$-forma

non sono isomorfe

- Siano Γ e G due gruppi. Γ agisce su G tramite

$$\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$$
$$\gamma \longmapsto (g \longmapsto {}^{\gamma}g = \gamma \cdot g)$$

notazione

Def I cocicli

$$Z^1(\Gamma; G) = \left\{ c : \begin{array}{l} \Gamma \longrightarrow G \\ \sigma \longmapsto c_\sigma \end{array} \;\middle|\; c_{\sigma\tau} = c_\sigma\, {}^{\sigma}(c_\tau) \right\}$$

Def $H^1(\Gamma; G) = Z^1(\Gamma; G)/_{\sim}$ dove $c \sim d$ se e solo se $\exists g \in G$ tale che $d_\sigma = g\, c_\sigma ({}^{\sigma}g)^{-1}$ $(\forall \sigma \in \Gamma)$

OSS. Se G non è abeliano $H^1(\Gamma; G)$ non è un gruppo, ma solo un insieme puntato, cioè esiste $e : \sigma \longmapsto 1_G$ $\forall \sigma \in \Gamma$ (le mappe tra insiemi puntati mandano p.to base in p.to base)

OSS. • $c_{1_\Gamma} = 1_G$

• $\{\sigma : c_\sigma = 1_G\}$ è un sgr, fissato $c \in Z^1(\Gamma; G)$

OSS. Se Γ e G sono gruppi top. possiamo chiedere che l'azione di Γ su G è continua e che $c : \Gamma \to G$ sia continua

Nel caso $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ e l'est. è infinita consideriamo G con topologia discreta e Γ con la top. nella quale un sist. fond. di intorni di 1_Γ è dato dai sottogruppi di indice finito

(è equiv. a prendere i sgr. normali di ind. finito)

L/K, M/K di Gal. $K \overset{\text{finita}}{\subseteq} M \subseteq L$ ($[L:K]=+\infty$)

Allora $\mathrm{Gal}(L/K) \rhd \mathrm{Gal}(L/M)$ perché

vale $\mathrm{Gal}(L/K) \big/ \mathrm{Gal}(L/M) = \mathrm{Gal}(M/K)$

$\forall$ sgr. di indice finito $\exists$ sgr. dentro normale di indice finito è vero perché c'è bigezione tra sottoestensioni di Galois e sgr. normali

OSS. se L ha top. discreta allora l'azione di Γ su L è continua se $\forall \lambda \in L$ $\mathrm{Stab}_\Gamma \lambda$ ha indice finito.

OSS. Dare K-strutture su V è equivalente a dare una azione di Γ su V K-lineare tale che $\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda)\gamma(v)$ e tale che sia continua quando V ha la top. discreta, ovvero $\mathrm{Stab}_\Gamma v$ ha indice finito.

OSS. Caso in cui l'azione di Γ su G sia banale, ovvero

$\quad {}^\gamma g = g \quad \forall \gamma \; \forall g$

La relazione tra i cocicli si traduce in $C_{\sigma\tau} = C_\sigma C_\tau$

e quella per la coomologia è $d_\sigma = g C_\sigma g^{-1}$

Quindi $\quad H^1(\Gamma; G) = \mathrm{Hom}_{\text{Gruppi}}(\Gamma; G) \big/ \text{Coniugio}$

PROPOSIZIONE: $K \subseteq L$ di Galois, $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ A_0 una K-algebra t.c. $A = L \otimes_K A_0$. Allora

$$\{K\text{-strutture su } A\} \big/ \text{isom} \longleftrightarrow H^1(\Gamma; \underset{\overset{\shortparallel}{G}}{\mathrm{Aut}_L(A)})$$

con azione di Γ su G data da:

$\forall \varphi \in G \; \forall \gamma \in \Gamma \qquad {}^\gamma\varphi = \gamma_0 \circ \varphi \circ \gamma_0^{-1}$

dove $\gamma_0(\lambda \otimes a_0) = \gamma(\lambda) a_0$

DIM: ${}^\gamma\varphi \in \mathrm{Aut}_L(A)$ perché

$$\begin{aligned} {}^\gamma\varphi(\lambda a) &= \gamma_0(\varphi(\gamma_0^{-1}(\lambda a))) = \\ &= \gamma_0(\varphi(\gamma_0^{-1}(\lambda)\gamma_0^{-1}(a))) = \gamma_0(\gamma_0^{-1}(\lambda)\varphi(\gamma_0^{-1}(a))) = \\ &= \gamma_0(\gamma_0^{-1}(\lambda))\gamma_0(\varphi(\gamma_0^{-1}(a))) = \lambda \, {}^\gamma\varphi(a) \end{aligned}$$

[quindi $\underline{\underline{\text{è}}}$ un'azione di Γ su G]

Se $A_0 \otimes_K L = A_1 \otimes_K L = A$ [Per ogni K-struttura definisco un cociclo]

definisce un'altra azione di Γ su A che indico con γ_1.

Prendo $c_\gamma = \gamma_1 \gamma_0^{-1}$. È un cociclo: (è ovviamente L-lineare)

$$c_{\gamma\delta} = \gamma_1 \delta_1 (\gamma_0 \delta_0)^{-1} = \gamma_1 \delta_1 \delta_0^{-1} \gamma_0^{-1} = \gamma_1 \gamma_0^{-1} (\gamma_0 \delta_1 \delta_0^{-1} \gamma_0^{-1}) = c_\gamma \, {}^{\gamma}(c_\delta)$$

Dimostriamo che K-strutture isomorfe danno cocicli omologhi:

Se $A_1 \otimes_K L = A_2 \otimes_K L = A$ e $A_1 \xrightarrow[\cong]{\varphi} A_2$,

con azioni γ_1 e γ_2

φ induce isomorfismo $A_1 \otimes_K L = A \xrightarrow[\cong]{\Phi = \varphi \otimes id} A_2 \otimes_K L = A$

$$a \otimes \lambda \longmapsto \varphi(a) \otimes \lambda$$

$$\begin{tikzcd} a \otimes \lambda \arrow[r, mapsto, "\Phi = \varphi\otimes id"] \arrow[d, "\gamma_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \varphi(a) \otimes \lambda \arrow[d, "\gamma_2"] \\ a \otimes \gamma(\lambda) \arrow[r, mapsto, "\varphi\otimes id"] & \varphi(a) \otimes \gamma(\lambda) \end{tikzcd}$$

Quindi $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1 \circ \Phi^{-1}$

Se prendo $c_\gamma = \gamma_1 \gamma_0^{-1}$,

$$d_\gamma = \gamma_2 \gamma_0^{-1} = \Phi \circ \gamma_1 \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_0^{-1} = \Phi \circ \gamma_1 \circ \gamma_0^{-1} \circ \gamma_0 \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_0^{-1} =$$
$$= \Phi \circ c_\gamma \circ {}^{\gamma}(\Phi^{-1})$$

Quindi $c_\gamma \sim d_\gamma$. ($\Phi \in Aut_L(A)$)

Abbiamo mostrato che ad ogni K-struttura abbiamo associato un cociclo. $(A_1 \longmapsto (\gamma \mapsto c_\gamma = \gamma_1 \gamma_0^{-1}))$

Al contrario, $H^1 \longrightarrow$ K-forme

$c_\gamma \longmapsto$ K-struttura data da $\gamma \cdot a = c_\gamma(\gamma_0(a))$

Bisogna dimostrare che omologhi vanno in K-strutture isomorfe

COROLLARIO: $L \supseteq K$ di Galois, $\Gamma = Gal(L/K)$, $G = GL_n(L)$

Allora $H^1(\Gamma; G) = 0$ [Hilbert 90]

DIM: $A = L^n$ con $\mu \cdot \lambda = 0$ $\forall \mu \; \forall \lambda$ (è L-algebra)

Allora $Aut_L(A) = GL_n(L)$ ($\subseteq$ vale sempre)

Quindi $H^1(\Gamma; G) \longleftrightarrow \{K\text{-forme di } L^n\} / K\text{-isomorfismi}$

Ma ~~ogni~~ uno K-forma di L^n è K-sottosp. vett. di dimensione n, che sono tutti isomorfi tra di loro, quindi

$$\{K\text{-forme di } L^n\} / K\text{-isom} = \{*\}.$$

- Sia V_0 un K-sp. vett. di dim finita, considero $V_0^{\otimes p} \otimes (V_0^*)^{\otimes q} \ni \phi_0$

$V = V_0 \otimes_K L$. ~~Allora~~ (Si ha che $\phi_0 \in V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} =: V_{p,q}$)

Sia $G = \{g \in GL_L(V) : g\phi_0 = \phi_0\} = \mathrm{Stab}_{GL_L(V)}(\phi_0)$

Allora $\{\phi_1 \in V_0^{\otimes p} \otimes (V_0^*)^{\otimes q} \mid \phi_1 \sim \phi_0 \text{ su } GL_L(V)\} / GL_K(V_0)$

$$\updownarrow$$

$$H^1(\Gamma; G) \qquad (\Gamma = Gal(L/K))$$

Con azione ${}^{\gamma}g = \gamma \circ g \circ \gamma^{-1}$

Sia $1 \to K \to G \to H \to 1$ esatta di gruppi e supponiamo che Γ un gruppo agisce su tutti allora si ha

$$1 \to K^\Gamma \to G^\Gamma \to H^\Gamma \to [\ldots]$$

$$[\ldots] \to H^1(\Gamma; K) \to H^1(\Gamma; G) \to H^1(\Gamma, H)$$

(non sono gruppi in generale ma insiemi puntati. Vale più lo stesso concetto della succ. esatta)

(*) CATEGORIA ADDITIVA e ABELIANA

__Def__ Una categoria $\mathcal{C}$ è additiva se: ① $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sono $\mathbb{Z}$-moduli e la composizione $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ è bilineare, $\exists\, 0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ t.c. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,X) = \mathrm{Hom}(X,0) = 0$

② $\forall X\ \forall Y\ \exists$ coprodotto $X \sqcup Y =: X \oplus Y$

È abeliana se in più valgono:

③ $\forall X\ \forall Y\ \ \forall \varphi : X \to Y\ \ \exists K, \alpha$ tali che $\forall W, \chi$ t.c. $\underbrace{\varphi\chi = 0}$ il diagr. commuta

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ & W \arrow[ul, dashed, "\exists!\psi"] \arrow[u, "\chi"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\ \psi$ t.c.

(il nucleo)

Analogamente $\exists$ conucleo (richiedo $\beta\varphi = 0$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\chi"] & Q \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

④ $\exists$ l'immagine, cioè $\forall \varphi: X \to Y$, presi K, q nucleo e conucleo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y \arrow[r] & q \\ & a \arrow[r, "\cong"'] & b \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

a conucleo di $K \to X$
b nucleo di $Y \to q$
} voglio che $a \to b$ sia isomorfismo.

<u>Esempi:</u> 1) A anello, $\mathcal{C} = \{A\text{-moduli}\}$ è categoria abeliana

2) Se G è gruppo e K un campo, un G-modulo è K-sp. vett. V con una azione di G K-lineare

Danno una categoria abeliana

$$\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$$
$$g \longmapsto (g \cdot v = \rho(g)(v))$$

notazione

$[\rho$ è rappresentazione di G su $V]$

Una mappa $\varphi : V \to W$ tra rappresentazioni di G K-lineare e di G-moduli

se $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$ (se commuta con le rappresentazioni)

3) Definisco $\mathcal{C}$ come:

$Obj(\mathcal{C}) = \{$sp. di Banach reali$\}$ sp. normato completo

Le $\varphi: V \to W$ $\mathbb{R}$-lineari e continue danno $Hom_{\mathcal{C}}(V,W)$

$V \oplus W$ è ben definito

$Ker\, \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$

$Coker\, \varphi = W / \overline{\varphi(V)}$

(ci sono problemi perché ad esempio $C^0(S^1) \hookrightarrow L^2(S^1)$ è denso in $L^2(S^1)$ e quindi non chiuso)

Questa def di $Coker\varphi$ però rende falso ④: infatti

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^0(S^1) \arrow[r] \arrow[d] & L^2(S^1) \arrow[r] & 0 \\ & C^0(S^1) \arrow[r, "\ncong"'] & L^2(S^1) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è categoria preabeliana

Def Sia $\mathcal{A}$ cat. abeliana. Si definiscono i cocomplessi in $\mathcal{A}$

$$Com(\mathcal{A}) = \{ \ldots \to M^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \xrightarrow{d^1} M^2 \xrightarrow{d^2} \ldots \}$$
con $M^i \in Obj(\mathcal{A})$ e $d^{i+1} \circ d^i = 0$

$Com^+(\mathcal{A})$ = complessi limitati dal basso $M^i = 0$ se $i \ll 0$

$Com^-(\mathcal{A})$ = complessi limitati dall'alto

Un complesso è limitato se lo è dal basso e dall'alto

Def Morfismi di complessi

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & M^{-1} \arrow[r, "d_M^{-1}"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] & M^0 \arrow[r, "d_M^0"] \arrow[d, "\varphi^0"] & M^1 \arrow[r, "d_M^1"] \arrow[d, "\varphi^1"] & M^2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^2"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & N^{-1} \arrow[r, "d_N^{-1}"'] & N^0 \arrow[r, "d_N^0"'] & N^1 \arrow[r, "d_N^1"'] & N^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$G \quad G \quad G \quad G \quad G$

$\{\varphi^i\}$ è morfismo di complessi se fa commutare i quadrati come sopra.

Se $M^\bullet$ e $N^\bullet$ sono complessi allora, essendo $\mathcal{A}$ cat. abeliana, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M^\bullet, N^\bullet)$ è gruppo abeliano e la composizione è bilineare, $\exists$ complesso nullo, esistono il coprodotto $(\{M^i \oplus N^i, d_M^i \times d_N^i\})$, il nucleo $(\{\mathrm{Ker}\, d^i\}_i)$, il conucleo $(\{\mathrm{Coker}\, d^i\}_i)$ e l'immagine. Quindi formano una categoria abeliana.

OSS. In una categoria abeliana (additiva) il prodotto e il coprodotto coincidono.

(*) Se vale ① la categoria si dice preadditiva
Se vale ①, ② la categoria si dice additiva
Se vale ①, ②, ③ la categoria si dice preabeliana
Se vale ①, ②, ③, ④ la categoria si dice abeliana

OSS. In una categoria preadditiva i prodotti (quando esistono) coincidono con i coprodotti.

OSS. Quindi in una categoria additiva esistono sempre i coprodotti (per assioma ②) e i prodotti (perché sono le stesse cosa).

ISTALG - LEZIONE 16

OSS. X, Y categorie additive. $\exists\, X \Pi Y$ $(= X \sqcup Y)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "id"'] & X \sqcup Y \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "0"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "0"'] & X \sqcup Y \arrow[d, "p_Y"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "id"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Dico che $X \sqcup Y, p_X, p_Y$ definiscono un prodotto

Le mappe i_X, i_Y esistono per coprodotto.

Vale $i_X p_X + i_Y p_Y = id_{X \sqcup Y}$. Per dire questo dimostro

che $\begin{cases} (i_X p_X + i_Y p_Y)\, i_X = i_X \\ (i_X p_X + i_Y p_Y)\, i_Y = i_Y \end{cases}$ Infatti: $i_X p_X i_X + i_Y p_Y i_X = i_X \circ id_X + 0$

$i_X p_X i_Y + i_Y p_Y i_Y = 0 + i_Y \circ id_Y$

(uso la proprietà universale del coprodotto)

Vale la proprietà universale del prodotto: $\forall Z\ \forall \alpha\ \forall \beta$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ X & X \sqcup Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Unicità: $\gamma = id \circ \gamma = (i_X p_X + i_Y p_Y)\gamma =$
$= i_X p_X \gamma + i_Y p_Y \gamma = i_X \alpha + i_Y \beta$
"indipendente da γ"

Esistenza: Definisco $\gamma = i_X \alpha + i_Y \beta$.

$p_X \gamma = \underbrace{p_X i_X}_{id_X} \alpha + \underbrace{p_X i_Y}_{0} \beta = \alpha$

$p_Y \gamma = \underbrace{p_Y i_X}_{0} \alpha + \underbrace{p_Y i_Y}_{id_Y} \beta = \beta$

Def $\varphi : X \to Y$ è un monomorfismo se $\forall Z, \forall \alpha\ \forall \beta$ tali che

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$ commuta, cioè $\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \beta$

allora $\alpha = \beta$.

Def $\varphi : X \to Y$ è un epimorfismo se $\forall Z, \forall \alpha\ \forall \beta$ tali che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & Z \end{tikzcd}$$ commuta, cioè $\alpha \circ \varphi = \beta \circ \varphi$, allora

$\alpha = \beta$.

OSS. Per insiemi monomorfismo = mappa iniettiva, epimorfismo =
= mappa surgettiva. In generale non è vero.

Ad esempio nella cat. **Top** gli epimorfismi sono le appl. continue con immagine densa.

PROPOSIZIONE: In una categoria additiva, se esiste il nucleo di $\varphi : X \to Y$ si ha che φ è monomorfismo $\Leftrightarrow K = 0$.

DIM: $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ K \arrow[u, "id"] \arrow[u, bend right, "0"'] \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

$\varphi \circ 0 = \varphi \circ \alpha$

$\Downarrow$

$\alpha = 0$

id e 0 sollevano entrambe $\Rightarrow$ id $= 0$ $\Rightarrow K = 0$

$(Hom(K,K) = 0)$

$\Leftarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ & Z \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha-\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Per dimostrare $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ considero $\alpha - \beta$.

la cat. è additiva

Se $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \varphi(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \exists ! \gamma$ che solleva

$\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \circ \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

OSS. Nelle categorie abeliane (additive non basta) isomorfismo è equivalente a monomorfismo + epimorfismo.

Lavoriamo adesso con categorie abeliane.

Def Una successione esatta in una categoria abeliana è una $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ (con $\psi\varphi = 0$) in cui $Im\, \varphi = Ker\, \psi$ (o equivalentemente $Im\, \psi = Coker\, \varphi$).

Esercizio: $Im\, \varphi = Ker\, \psi \Leftrightarrow Im\, \psi = Coker\, \varphi$.

LEMMA DEI 5: In una categoria abeliana, se ho 2 successioni esatte (messe in riga) e $X_i \cong Y_i$ per $i = 1,2,4,5$ allora anche $\varphi : X_3 \to Y_3$ è isomorfismo

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & X_5 \arrow[d, "\cong"] & \text{esatta} \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 & \text{esatta} \end{tikzcd}$$

LEMMA DEL SERPENTE: In una categoria abeliana, se $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2 \to X_3 \to 0$ esatta e $0 \to Y_1 \to Y_2 \xrightarrow{\psi} Y_3$ esatta e i quadrati commutano, allora $K_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} K_2 \to K_3 \xrightarrow{\omega} Q_1 \to Q_2 \xrightarrow{\tilde{\psi}} Q_3$ è esatta. Inoltre φ mono $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ mono, e ψ epi $\Rightarrow \tilde{\psi}$ epi.

$$
\begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[d] & K_2 \arrow[r] \arrow[d] & K_3 \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\omega"'] & \\
 & X_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Y_3 \arrow[d] & \\
 & q_1 \arrow[r] & q_2 \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & q_3 &
\end{tikzcd}
$$

<u>Def</u> Date 2 categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore se

- $\forall X \in Obj(\mathcal{C}) \quad F(X) \in Obj(\mathcal{D})$,
- $\forall x \in Obj(\mathcal{C}) \quad F(id_x) = id_{F(x)}$
- $\forall \varphi, \psi \in Mor(\ldots,\ldots) \quad F(\varphi \circ \psi) = \begin{cases} F(\varphi) \circ F(\psi) & \text{covariante} \\ F(\psi) \circ F(\varphi) & \text{controvariante} \end{cases}$

per tutte le mappe uno solo

<u>Def</u> Un funtore tra $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ additive si dice additivo se

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi abeliani $\forall X \, \forall Y$ ↩ o scambiati...

<u>Def</u> Un funtore tra $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ abeliane si dice esatto se è additivo e

$$X \to Y \to Z \text{ esatta} \Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \text{ esatta}$$

(nel caso controvariante è analogo)

<u>Def</u> Un funtore tra $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ abeliane è esatto a dx / sx se è additivo e

(oppure $Z \to Y \to X \to 0$ esatta per F controvariante)

sx: $0 \to X \to Y \to Z$ esatta $\Rightarrow 0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ esatta

(risp. $0 \to Z \to Y \to X$ esatta se F controvariante)

dx: $X \to Y \to Z \to 0$ esatta $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ esatta

<u>TEOREMA:</u> $\mathcal{A}$ cat. abeliana. Allora esiste un anello A (non comm. e non unitario) ed un funtore $F : \mathcal{A} \to \{A\text{-mod. sx}\}$ tale che F è esatto e pienamente fedele (cioè si ha $F : Hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{\cong} Hom_{\{A\text{-mod sx}\}}(F(X), F(Y))$ è isomorfismo).

↳ DIM [LEMMA DEL SERPENTE]:

Dando per buono che valga per gli A-moduli, usiamo il funtore F del Teorema precedente per dedurre che vale il lemma del serpente su $\mathcal{C}$ (abeliana).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & FK_1 \arrow[r] \arrow[d] & FK_2 \arrow[r] \arrow[d] & FK_3 \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] & \\
 & FX_1 \arrow[r] \arrow[d] & FX_2 \arrow[r] \arrow[d] & FX_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & FY_1 \arrow[r] \arrow[d] & FY_2 \arrow[r] \arrow[d] & FY_3 \arrow[d] & \\
 & Fq_1 \arrow[r] \arrow[d] & Fq_2 \arrow[r] \arrow[d] & Fq_3 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Mi basta dimostrare che $FX \xrightarrow{F\varphi} FY \xrightarrow{F\psi} FZ$ esatta $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ esatta.

Si ha:

- $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi) = 0 \Rightarrow \psi \circ \varphi = 0$ (perché F è isomorfismo sulle frecce)
- Se ho

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "\psi"] & Z \\
 & & \mathrm{Im}\,\varphi \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

, allora applicando F

$$\begin{tikzcd}
F\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[r, "F\alpha"] & FX \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d] & FY \arrow[r, "F\psi"] & FZ \\
 & F\mathrm{Im}\,\varphi \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Ma:

perché $\mathrm{Coker}\,\alpha \cong \mathrm{Im}\,\varphi$ (per def. di $\mathrm{Im}\,\varphi$) e $\mathrm{Coker}\,0 = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\alpha$

(*) $0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\varphi} Y$ esatta $\Rightarrow 0 \to F\mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{F(\alpha)} FX \xrightarrow{F(\varphi)} FY$ esatta

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,F\varphi = F(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ (perché
$$\begin{matrix} 0 \to 0 \to F\mathrm{Ker}\,\varphi \to FX \to FY \\ \| \quad\;\; \| \qquad\qquad\quad\;\; \| \quad\;\; \| \\ 0 \to 0 \to \mathrm{Ker}\,F\varphi \to FX \to FY \end{matrix}$$
e lemma dei 5)

Inoltre $\mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} \mathrm{Im}\,\varphi \to 0$ esatta $\Rightarrow F\mathrm{Ker}\,\varphi \to FX \to F\mathrm{Im}\,\varphi \to 0$

Esatta per def. di Im: $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Coker}\,\alpha$ e $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Coker}\,\alpha \\
\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$\overset{\mathrm{Ker}\,F\varphi}{\|}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,F\varphi = F\,\mathrm{Im}\,\varphi$ (per lemma dei 5:
$$\begin{matrix} F\mathrm{Ker}\,\varphi \to FX \to F\mathrm{Im}\,\varphi \to 0 \to 0 \\ \| \qquad\quad \| \qquad\qquad\qquad\; \| \quad\; \| \\ \mathrm{Ker}\,F\varphi \to FX \to \mathrm{Im}\,F\varphi \to 0 \to 0 \end{matrix}$$
)

Quindi F manda nuclei in nuclei e immagini in immagini.

$\mathrm{Ker}\,F\psi = F\mathrm{Ker}\,\psi$

$\overset{\|}{\mathrm{Im}\,F\varphi}$ per esattezza di $FX \xrightarrow{F\varphi} FY \xrightarrow{F\psi} FZ$ e per (*)

Ora, anche $0 \to \overset{\|}{F\mathrm{Im}\,\varphi} \to FY \xrightarrow{F\psi} FZ$ esatta $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Im}\,\varphi \to Y \to Z$ esatta, cioè $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$.

Infatti, ~~se~~ $\cancel{\mathrm{Im}\,\varphi \neq \mathrm{Ker}\,\psi}$, ~~allora~~ $\cancel{0 \to \mathrm{Im}\,\varphi \to Y \xrightarrow{\psi} Z}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F\,\mathrm{Im}\,\varphi \arrow[r] \arrow[d, bend left, "F\beta"] & FY \arrow[r] & FZ \\ & F\,\mathrm{Ker}\,\psi \arrow[u, bend left, "F\alpha"] \arrow[ur] & & \\ & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

, qui vale che ogni freccia tra $F(-)$ e $F(-)$ è immagine di freccia in A perché F è isomorfismo ($\mathrm{Hom}_A(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(FX,FY)$)

$$\begin{cases} F\alpha \circ F\beta = id_{F\mathrm{Im}\varphi} \\ F\beta \circ F\alpha = id_{F\mathrm{Ker}\psi} \end{cases}$$

per cui $F\alpha = F\beta^{-1}$ da cui, essendo F isomorfismo tra $\mathrm{Hom}(-,-)$ e $\mathrm{Hom}(F-,F-)$, anche

$\alpha \circ \beta = id_{\mathrm{Im}\varphi}$
$\beta \circ \alpha = id_{\mathrm{Ker}\psi}$ $\Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathrm{Ker}\,\psi$ e

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y \\ \mathrm{Im}\varphi \cong \mathrm{Ker}\psi \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commuta (lo fa sulle F)

<u>Def</u> Trasformazioni naturali di funtori. Se $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtori, una trasf. naturale è una famiglia $\{\alpha_X : FX \to GX\}_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ tale che $\forall X\ \forall Y\ \forall \varphi : X \to Y$ il diagramma sotto commuta.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GX \arrow[d, "G\varphi"] \\ FY \arrow[r, "\alpha_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

F e G si dicono naturalmente equivalenti se α_X è isom $\forall X$, cioè $\exists\ \beta_\bullet : G_\bullet \to F_\bullet$ trasf. nat. tale che $\forall X$ $\beta_X \alpha_X = id_{FX}$, $\alpha_X \beta_X = id_{GX}$

<u>Esempio</u> $\mathcal{C}$ = sp. vett. di dim $< \infty$,

I, D, B funtori identità, duale, biduale $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

$IV = V \qquad I\varphi = \varphi$

$DV = V^* \qquad D\varphi = \varphi^t$

$B = D \circ D$

Definisco $\alpha : I \to B$. È trasf. nat. (equivalenza nat.)

$V \longmapsto (V^*)^*$

$v \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$ $\quad v \longmapsto \{\varphi \mapsto \varphi(v)\}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "T"'] & (V^*)^* \arrow[d, "(T^t)^t"] \\ W \arrow[r, "\alpha_W"'] & (W^*)^* \end{tikzcd}$$

$T(v) \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(T(v)))$

Commuta: inoltre α_V è isomorfismo $\forall V$ quindi B è naturalmente equiv. al funtore identità I.

Def Due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si dicono isomorfe se $\exists F, G$

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D} \quad \text{tali che} \quad \begin{cases} F \circ G \overset{\text{nat.eq}}{\sim} I_{\mathcal{D}} \\ G \circ F \overset{\text{nat.eq}}{\sim} I_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

Def Dato $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ $\quad$ $\mathcal{J}$ categoria di insiemi e frecce sono insiemi si definiscono il limite induttivo (diretto) $L_i = \varinjlim F\mathcal{J}$ e limite proiettivo $L_p = \varprojlim F\mathcal{J}$ così:

→ $L_i, \{\varphi_X : F(X) \to L_i\}_{X \in Ob_j(\mathcal{J})}$ è limite induttivo se

$\forall X, Y \in Ob_j(\mathcal{J})$: $\exists X \xrightarrow{\varphi} Y$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "F\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_X"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & FY \arrow[dl, "\varphi_Y"] \\ & L_i & \end{tikzcd}$$

commuta e $\forall Z, \{\psi_X : FX \to Z\}$ ~~$\forall \varphi_X\ \forall \varphi_Y$~~ tali che $\forall X, Y\ \forall \varphi$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "F\varphi"] \arrow[dr, "\psi_X"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & FY \arrow[dl, "\psi_Y"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

commuta, allora $\exists! \chi : L_i \to Z$ tale che $\psi_\circ = \chi \circ \varphi_\circ$

→ $L_p, \{\varphi_X : L_p \to FX\}_{X \in Ob_j(\mathcal{C})}$ è limite proiettivo se

$\forall X, Y$: $\exists X \xrightarrow{\varphi} Y$ il diagr.

$$\begin{tikzcd} & L_p \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_Y"] & \\ FX \arrow[rr, "F\varphi"] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & FY \end{tikzcd}$$

commuta e $\forall Z, \{\psi_X : Z \to FX\}$ tali che $\forall X, Y$ $\forall \varphi : X \to Y$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\ FX \arrow[rr, "F\varphi"] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & FY \end{tikzcd}$$

commuta, allora $\exists! \chi : Z \to L_p$ tale che $\psi_\circ = \varphi_\circ \circ \chi$.

Oss. $F : A \to B$ funtore tra categorie additive è additivo se e solo se preserva i prodotti (=coprodotti), cioè $\forall X, Y \in Ob_j(A)$

$$F(X \oplus Y) = FX \oplus FY$$