ISTALG - LEZIONE 17

Γ gruppo, $\mathbb{K}$ campo. Consideriamo la categoria avente come oggetti i Γ-$\mathbb{K}$-moduli, cioè i $\mathbb{K}$-sp. vettoriali V su cui Γ agisce in modo lineare (le rappresentazioni)

$$M \longmapsto M^{\Gamma} \quad \text{è esatto a sx.}$$

cioè $F(\varphi+\psi) = F(\varphi)+F(\psi)$, $F(X\oplus Y) = F(X)\oplus F(Y)$

Vogliamo ora, dato un funtore $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo esatto a sx tra tra categorie abeliane, definire una teoria coomologica

$\mathcal{A}$ abeliana

Def In $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ definisco la coomologia di un complesso $M^\bullet$

$$\dots \longrightarrow M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \xrightarrow{d^1} M^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

esiste il sollevamento per propr. universale del Ker

come $$H^i(M^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(d^i)}{\mathrm{Im}(d^{i-1})} = \mathrm{Coker}\left(M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathrm{Ker}\, d^i\right)$$

OSS. Dato un morfismo di complessi $\varphi: M^\bullet \to N^\bullet$, si ha che

$d_N^i \varphi^i(\mathrm{Ker}\, d_M^i) = 0 \Rightarrow \varphi^i(\mathrm{Ker}\, d_M^i) \subseteq \mathrm{Ker}\, d_N^i$ ($\exists$ monomorfismo)

Analogamente $\varphi^i(\mathrm{Im}\, d_M^{i-1}) \subseteq \mathrm{Im}\, d_N^{i-1}$ ($\exists$ monomorfismo)

φ induce quindi una mappa $H^i(\varphi): H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet)$

Def φ è un quasi isomorfismo se $H^i(\varphi)$ è un isomorfismo (in $\mathcal{A}$) $\forall i$.

Def $\varphi: M^\bullet \to N^\bullet$ di complessi. $\varphi \sim 0$ (φ è omotopo a 0) se $\exists\, h^i: M^i \to N^{i-1}$ $\forall i$ tali che $\varphi^i = h^{i+1}\circ d_M^i + d_N^{i-1}\circ h^i$.

$\varphi \sim \psi$ (φ e ψ sono omotope) se $\varphi - \psi \sim 0$.

LEMMA: $\varphi \sim \psi \Rightarrow H^i(\varphi) = H^i(\psi)$ $\forall i$.

DIM: È sufficiente mostrarlo nel caso $\varphi = 0$.

Preso $z \in \mathrm{Ker}\, d_M^i$, $\varphi^i(z) = d_N^{i-1}(h^i(z)) \in \mathrm{Im}\, d_N^{i-1}$

Quindi $H^i(\varphi)[z] = 0$.

Esempio:

$$M^\bullet = N^\bullet: \dots \to 0 \to 0 \to \overset{M^0}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to 0 \to \dots$$

Ha coomologia banale: $H^i(M^\bullet) = 0$ $\forall i \neq 0,1,2$

$$H^0(M^\bullet) = \mathrm{Ker}\, d^0 = 0$$

$$H^1(M^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\, d^1}{\mathrm{Im}\, d^0} = \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = 0$$

$$H^2(M^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\, d^2}{\mathrm{Im}\, d^1} = \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = 0$$

Quindi ogni mappa che prendo da $M^\bullet$ in $M^\bullet$ induce la mappa nulla in coomologia. Non sono però tutte omotope. Ad esempio, $id_{M^\bullet} \not\sim 0$. (quindi le classi di omotopia non caratterizzano le mappe in coomologia)

OSS. Se un complesso è esatto la sua coomologia è nulla.

PROPOSIZIONE: $\mathcal{A}$ cat. abel.

$$0 \to M^\bullet \xrightarrow{\varphi} N^\bullet \xrightarrow{\psi} P^\bullet \to 0$$ tale che φ, ψ di complessi e la succ. è esatta (cioè è esatta in ogni grado).

Allora induce

$$\dots \to H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet) \to H^i(P^\bullet) \xrightarrow{\omega^i} H^{i+1}(M^\bullet) \to H^{i+1}(N^\bullet) \to \dots$$

esatta.

Def Dato $M^\bullet$, i cocicli sono $Z^i(M^\bullet) = Z^i_M = \operatorname{Ker} d^i_M$ e i cobordi sono $B^i(M^\bullet) = B^i_M = \operatorname{Im} d^{i-1}_M$

OSS. La succ. seguente è esatta.

$$0 \to H^{i-1}(M) = \frac{Z^{i-1}}{B^{i-1}} \hookrightarrow \frac{M^{i-1}}{B^{i-1}} \xrightarrow{d^{i-1}_M} Z^i \twoheadrightarrow H^i(M) \to 0$$

DIM:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^i_M \arrow[r] \arrow[d] & Z^i_N \arrow[r] \arrow[d] & Z^i_P \arrow[d] \arrow[dddll, "\omega"] & \\
0 \arrow[r] & M^i \arrow[r, "\varphi^i"] \arrow[d] & N^i \arrow[r, "\psi^i"] \arrow[d] & P^i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \frac{M^{i+1}}{B^{i+1}} \arrow[r] & \frac{N^{i+1}}{B^{i+1}} \arrow[r] & \frac{P^{i+1}}{B^{i+1}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

è esatto per Snake lemma.

(in realtà serve meno, la ω non si usa)

Quindi sono esatte $\frac{M^{i-1}}{B^{i-1}} \to \frac{N^{i-1}}{B^{i-1}} \to \frac{P^{i-1}}{B^{i-1}} \to 0$ e

$0 \to Z^i_M \to Z^i_N \to Z^i_P$. Applico ancora lo Snake lemma su queste.

$$\begin{tikzcd}
 & H^{i-1}_M \arrow[r] \arrow[d] & H^{i-1}_N \arrow[r] \arrow[d] & H^{i-1}_P \arrow[d] \arrow[dddll, "\omega^{i-1}"'] & \\
 & \frac{M^{i-1}}{B^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N^{i-1}}{B^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{P^{i-1}}{B^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^i_M \arrow[r] \arrow[d] & Z^i_N \arrow[r] \arrow[d] & Z^i_P \arrow[d] & \\
 & H^i_M \arrow[r] & H^i_N \arrow[r] & H^i_P &
\end{tikzcd}$$

La succ. creata è esatta (ed $\exists\, \omega^{i-1}$).

OSS. Come è fatta ω^{i-1} ?

$$H^{i-1}_P \xrightarrow{\ \omega^{i-1}\ } H^i_M$$

Come nella descrizione per lo snake lemma, faccio diagram chasing usando l'esattezza di righe e colonne.

<u>Funtorialità</u>

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^\bullet \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "G"] & N^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "G"] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U^\bullet \arrow[r] & V^\bullet \arrow[r] & W^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

esatte con morfismi di complessi induce

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^i_N \arrow[r] \arrow[d, "H^i(\beta)"] \arrow[dr, phantom, "G"] & H^i_P \arrow[r, "\omega^i"] \arrow[d, "H^i(\gamma)"] & H^{i+1}_M \arrow[r] \arrow[d, "H^{i+1}(\alpha)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H^i_V \arrow[r] & H^i_W \arrow[r, "(\omega^i)'"] & H^{i+1}_U \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Anche il quadrato con le ω^i e $(\omega^i)'$ commuta, grazie al diagramma (in 3D) dello snake lemma per entrambe le succ. esatte corte.

basta additivo per le successioni che spezzano

$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo (esatto a sx.) In generale non è esatto.
Se però ho un proiettivo a dx la successione spezza, ~~perché~~ cioè $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, ~~per la propr.~~

~~universalità~~ $(X \oplus Z = X \sqcup Z = X \prod Z)$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & & & Z \arrow[ul, dashed] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(per dimostrarlo si passa ai mod.)

Si ha che $Y \cong X \oplus Z$. A questo punto, essendo F additivo, si ha che $0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$ è esatta.

<u>TEOREMA:</u> A unitario associativo (non comm.).

1) $\forall M$ A-modulo $\exists P$ proiettivo e $P \twoheadrightarrow M$ $\left(P = \bigoplus_{m \in M} A e_m\right)$

2) $\forall M$ A-modulo $\exists I$ iniettivo e $M \hookrightarrow I$

<u>Def</u> P è proiettivo se $\forall X \to Y \to 0$ $\forall \psi: P \to Y$ $\exists \tilde{\psi}: P \dashrightarrow X$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[ul, dashed] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

. È equivalente a dire che il funtore $\mathrm{Hom}(P, -)$ è esatto.

<u>Def</u> I è iniettivo se $\forall 0 \to X \to Y$ $\forall \psi: X \to I$ $\exists \tilde{\psi}: Y \dashrightarrow I$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[dl, dashed, "?"] \\
 & I
\end{tikzcd}$$

. È equivalente a dire che il funtore $\mathrm{Hom}(-, I)$ è esatto. (controvariante)

OSS. Proiettivo su PID $\iff$ libero

Def Un A-modulo M si dice divisibile se $\forall\, m \in M$ e $\forall\, a \in A,\ a \neq 0,\ \exists\, \tilde{m} \in M$ tale che $a\tilde{m} = m$. (in generale chiediamo $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(m)$)

Esempio: $\mathbb{Q}$ è divisibile come $\mathbb{Z}$-modulo

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è divisibile come $\mathbb{Z}$-modulo

PROPOSIZIONE: Se A è dominio commutativo PID.

M è iniettivo $\Longleftrightarrow$ M è divisibile.

DIM: ($\Rightarrow$) $m \in M$, $a \in A$ $a \neq 0$

Considero

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "x \mapsto ax"] \arrow[d, "1 \mapsto m"'] & A \arrow[dl, dashed] \\ & M & \end{tikzcd}$$

è iniettiva perché A dominio

M iniettivo $\Rightarrow$ $\exists\, A \dashrightarrow M$.

$1 \longmapsto \tilde{m}$

Allora

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a = a\cdot 1 \arrow[dl, mapsto] \\ m = a\varphi(1) = a\tilde{m} & \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) M divisibile

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \\ M & \end{tikzcd}$$

Consideriamo $\mathcal{F} = \{(Z, \psi) : X \subseteq Z \subseteq Y,\ \psi : Z \to M,\ \psi|_X = \varphi\} \neq \emptyset$ $((X, \varphi) \in \mathcal{F})$

con l'ordine

$(Z, \psi) \preceq (W, \chi)$ se $Z \subseteq W$ e $\chi|_Z = \psi$

Prendo (Z_α, ψ_α) catena di $\mathcal{F}$; $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$ con ψ naturale è un maggiorante. $\Rightarrow$ Per Zorn esiste un massimale (Z, ψ)

Se per assurdo $Z \neq Y$, $\exists\, y \in Y \setminus Z$

Caso 1: $Ay \cap Z = 0$: Estendo ψ a $\langle Z, y \rangle \cong Z \oplus Ay$

$Z \oplus Ay \longrightarrow M$

$z \longmapsto \psi(z)$

$Ay \longmapsto 0$

Assurdo

Caso 2: $Ay \cap Z \neq 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & Ay \arrow[r] & Y/Z \\ a \arrow[r, mapsto] & ay \arrow[r, mapsto] & \overline{ay} \end{tikzcd}$$

$\ker \alpha = \{b \in A : by \in Z\} = Ac$ (A è PID).

Estendo ψ a χ: $\langle Z, y \rangle = Z + Ay \subseteq Y$ mandando

Z in $\psi(Z)$ e tale che $\chi(cy) = \psi(cy)$

M è divisibile, quindi $\exists$ $m \in M$ tale che $cm = \psi(cy)$

Pongo quindi $\chi(y) = m$. È ben definito su $Z + Ay$,

Assurdo.

OSS. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è iniettivo. Inoltre, se I_α iniettivi, allora anche $\prod I_\alpha$ è iniettivo.

<u>PROPOSIZIONE:</u> A unitario associativo (non comm.)

1) $\forall M$ A-modulo $\exists P$ proiettivo e $P \twoheadrightarrow M$

2) $\forall M$ A-modulo $\exists I$ iniettivo e $M \hookrightarrow I$

DIM: $\boxed{1}$ $P = \bigoplus_{m \in M} A_{e_m}$.

$\boxed{2}$ $I = \prod_{0 \neq m \in M} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [Caso particolare: $A = \mathbb{Z}$]

Voglio definire $\varphi : M \to I$ iniettiva.

$\forall m \neq 0$, $m \in M$ definisco $\varphi_m : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tale che $\varphi_m(m) \neq 0$

Considero $\mathbb{Z} \cdot m = \langle m \rangle$ sottomodulo di M

→ Se $\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}$ definisco $\varphi_m(m) = \frac{1}{2}$ o qualsiasi altra cosa $\neq 0$

→ Se $\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ definisco $\varphi_m(m) = \frac{1}{t}$

$$\begin{tikzcd} \langle m \rangle \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "\varphi_m"] \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Essendo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ iniettivo estendo la definizione a tutto M.

Considerando quindi $\varphi = (\varphi_m)$ si ha che $\varphi(m) \neq 0$ $\forall m \neq 0$

ovvero φ è iniettiva.

[...]

ISTALG - LEZIONE 18

[...] Dobbiamo dimostrare ora la proposizione $\boxed{2}$ nel caso di A anello unitario associativo (non comm.) [...]

Sia I uno $\mathbb{Z}$-modulo.

Sia $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I) =: I_A$

I_A ha una struttura di A-modulo tramite

$$(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(xa)$$

$b \cdot (a \cdot \varphi)(x) =$
$(a \cdot \varphi)(xb) =$
$\varphi(xba) = (ba \cdot \varphi)(x)$

Se M è A-modulo sinistro si ha

$$\mathrm{Hom}_A(M, I_A) \xrightarrow[\text{di gr. ab.}]{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I)$$

A è unitario

$$\Phi \xrightarrow{T} (\varphi : m \longmapsto \Phi(m)(1))$$

$$(\Phi : m \mapsto (\Phi(m) : a \mapsto \varphi(am))) \xleftarrow{S} \varphi$$

SPOILER: lezione 29: $\mathbb{Z} \to A$ omo di grp
$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{coInd}_{\mathbb{Z}}^A(I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}}^A(M), I)$

$$T(\Phi + \Psi) = T(\Phi) + T(\Psi)$$
$$S(\varphi + \psi) = S(\varphi) + S(\psi)$$

T e S sono ben definite ($S(\varphi) = \Phi$ è di A-moduli): infatti

$$(\Phi(bm))(a) = \varphi(abm)$$
$$\overset{?}{\shortparallel}$$
$$(b\Phi(m))(a) = \Phi(m)(ab) = \varphi(abm)$$

($T(\Phi)$ è ovviamente $\mathbb{Z}$-lineare)

Sono una l'inversa dell'altra:

$$\Phi \xrightarrow{S} \varphi \qquad \xleftarrow{T} \quad m \longmapsto \Phi(m)(1) = \varphi(m)$$

$$\Phi \xrightarrow{T} \varphi \qquad \Psi \xleftarrow{S}$$

con $\Psi(m)(a) = \varphi(am) = \Phi(am)(1) =$
$= (a \cdot \Phi(m))(1) =$
$= \Phi(m)(a)$

$\Psi = \Phi$ ◎

Considero M, N A-moduli sinistri,

$f : M \to N$ mappa di A-moduli. Si ha

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M, I_A) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I) \\
\mathrm{Hom}_A(N, I_A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "-\circ f"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I) \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

COROLLARIO: I iniettivo $\Rightarrow I_A$ iniettivo

DIM:
$$0 \to M \xrightarrow{f} N$$
$$\downarrow$$
$$I_A$$

$$\begin{array}{ccccc} Hom_A(N, I_A) & \longrightarrow & Hom_A(M, I_A) & \longrightarrow & 0 \\ \| & \circlearrowleft & \| & & \\ Hom_{\mathbb{Z}}(N, I) & \twoheadrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(M, I) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

suriettiva Quindi ci posso mettere

surgettiva + diagr. che commuta (I iniettivo)

OSS. Nel caso di $\mathbb{Z}$ moduli $I = \prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Prendiamo quindi il A-modulo iniettivo

$$I_A = Hom_{\mathbb{Z}}(A, \prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \prod Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \prod (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_A$$

Siamo pronti quindi a dimostrare:

[...] $\boxed{2}$ Vedo M come $\mathbb{Z}$-modulo. $\exists \varphi$ di $\mathbb{Z}$-moduli

$$M \xhookrightarrow{\varphi} I = \prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{(lo avevamo già dimostrato)}$$

$\Phi = S(\varphi)$ Vogliamo dimostrare che $\Phi: M \to I_A$ è iniettiva.

Se $\Phi(m) = 0$ allora $\Phi(m)(1) = \varphi(m) = 0 \Rightarrow m = 0$

I_A è iniettivo e Φ è iniettiva. Tesi.

Def Se $M^\cdot$ complesso di A-moduli, una risoluzione iniettiva di $M^\cdot$ è una mappa di complessi $\varphi: M^\cdot \to I^\cdot$ tale che:

- I^h sono iniettivi $\forall h$
- φ è un quasi isomorfismo

OSS. Se ho una succ. esatta

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots \quad \text{con } I^h \text{ iniettivi}$$

allora $\dots \to 0 \to I^0 \to I^1 \to \dots$ è risoluzione iniettiva di

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & 0 & \to & I^0 & \to & I^1 & \to & \dots \\ & & & \uparrow & & & & \\ \dots \to & 0 & \to & M & \to & 0 & \to & 0 \to \dots \end{array}$$

(Vale anche il viceversa)

Def Una risoluzione proiettiva di $M^\cdot$ è $\varphi: P^\cdot \to M^\cdot$ di complessi tali che

- P^h proiettivo $\forall h$

− φ è quasi isomorfismo

OSS. $\dots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^{0} \to M \to 0$ è esatta con P^n proiettivi

se e solo se

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

è risoluzione proiettiva per $\dots 0 \to M \to 0 \dots$

TEOREMA: $\mathcal{A}$ = A-moduli

1) $M^\bullet \in Com^+(\mathcal{A})$ allora $M^\bullet$ ha una ris. iniettiva.

2) $M^\bullet \in Com^-(\mathcal{A})$ allora $M^\bullet$ ha una ris. proiettiva

DIM: $\boxed{1}$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r, "d_M^0"] \arrow[d, "\varphi^0"] & M^1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"] & M^2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^2"] & \dots \\
 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"] & I^1 \arrow[r, "d_I^1"] & I^2 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Costruisco $\varphi^n : M^n \to I^n$ con I^n iniettivo $\forall n$

e $d_I^i : I^i \to I^{i+1}$ $\forall i$

Lo faccio per induzione. Il passo base è dato da

$d_I^h = 0$ $I^h = 0$ $\varphi^h = 0$ $\forall h < 0$

$n \Rightarrow n+1$

Devo definire I^{n+1}, d_I^n, φ^{n+1}, dire che $H^n(\varphi)$ è isom. che $\overline{\varphi^{n+1}}$ è inj. e che $d_I^{n+1} \circ d_I^n = 0$

Supponiamo $H^k(\varphi)$ isom. $\forall k \leq n-1$, che $d_I^{k+1} \circ d_I^k = 0$ $\forall k < n-1$ e che $\overline{\varphi^n} : \frac{M^n}{B_M^n} \to \frac{I^n}{B_I^n}$ è iniettiva

(non ho ancora definito d_I^n)

$$\begin{tikzcd}
M^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^{n+1} \arrow[d] \\
I^{n-1} \arrow[r] & I^n \arrow[r] & \left(I^n/B_I^n \oplus M^{n+1} \right)/\sim
\end{tikzcd}$$

Commuta per la costruzione del quoziente

dove $\sim$: $(\pi\varphi^n(x), 0) \sim \dots$
$\dots \sim (0, d_M^n(x))$

Posso immergere $\left(I^n/B_I^n \oplus M^{n+1} \right)/\sim \hookrightarrow I^{n+1}$ modulo iniettivo (per thm. prec.)

$$\begin{tikzcd}
M^{n+1} \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi^{n+1}"] & \\
\left(I^n/B_I^n \oplus M^{n+1} \right)/\sim \arrow[r, hook] & I^{n+1}
\end{tikzcd}$$

commuta per come definisco φ^{n+1}

Definisco d_I^n come $I^n \to \left(I^n/B_I^n \oplus M^{n+1} \right)/\sim \subseteq I^{n+1}$

• $H^n(\varphi)$ è isomorfismo: $\frac{Z_M^n}{B_M^n} \to \frac{Z_I^n}{B_I^n}$ è iniettiva per ip. indutt. ed è surj. ⊛

⊛: Infatti dato $z \in Z_I^n$ $\exists x \in Z_M^n$ che finisce su $z+b$

$\exists b \in B_I^n$

d_I^n = composizione, la seconda è inj, quindi è 0 in $I^n \oplus M^{n+1}/\sim$

se $d_I^n(z) = 0$ allora $[z, 0] = [\pi\varphi^n(x), -d_M^n(x)]$

$\Rightarrow \exists x \in M^n : \pi\varphi^n(x) = z$ e $d_M^n(x) = 0$ $\Rightarrow x \in Z_M^n$

cioè $\exists b \in B_I^n : \varphi^n(x) = z + b$

• $\overline{\varphi^{n+1}}$ è iniettiva:

$$\bar{\varphi}^{m+1} : \frac{M^{m+1}}{B_M^{m+1}} \longrightarrow \frac{\left(I^m/B_I^m \oplus M^{m+1}\right)/\sim}{B_I^{m+1}} \hookrightarrow \frac{I^{m+1}}{B_I^{m+1}}$$

$\subseteq$ ← lo vedo proprio come inclusione

Sia $x \in \mathrm{Ker}\,\bar{\varphi}^{m+1}$

$$x \longmapsto [0, x]$$

Allora si ha che $[0,x] \in B_I^{m+1}$

Ovvero $[0,x] \sim [Y, 0]$. perché gli elementi di B_I^{m+1} sono del tipo $[Y,0]$

$\Rightarrow [-Y, x] \sim 0$, cioè $(-Y, x) = (\varphi^m(w), d_M^m(w))$ per un certo $w \in M^m$

cioè $d_M^m(w) = x \Rightarrow x \in B_M^{m+1}$

$(\varphi^m(w) = -Y + b)$ con $b \in B_I^m$

- $d_I^{m+1} \circ d_I^m = 0$ per costruzione

OSS. Quello che abbiamo usato davvero dell'iniettività degli I^m è:

$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ famiglia tale che $\forall M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \; \exists X \in \mathcal{J}$ t.c. $M \hookrightarrow X$

$\boxed{2}$ La dimostrazione è analoga (tutto duale).

Def Omomorfismi di complessi a meno di omotopia:

$$\mathrm{Hom}_{Kom}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet)/\sim \quad \leftarrow \text{omotopia}$$

OSS. $\left.\begin{array}{l}\varphi \sim \psi \\ \varphi' \sim \psi'\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi + \varphi' \sim \psi + \psi'$; Inoltre $V^\bullet \xrightarrow{\alpha} X^\bullet \xrightarrow{\varphi,\psi} Y^\bullet \xrightarrow{\beta} W^\bullet$

$\varphi \sim \psi \Rightarrow \varphi \circ \alpha \sim \psi \circ \alpha$, $\beta \circ \varphi \sim \beta \circ \psi$

Ha senso quindi la mappa

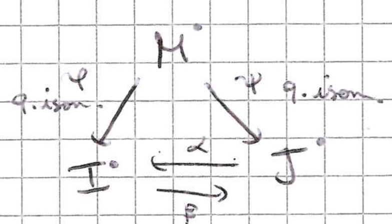
$$\mathrm{Hom}_{Kom}(Y^\bullet, Z^\bullet) \times \mathrm{Hom}_{Kom}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Kom}(X^\bullet, Z^\bullet)$$

Posso definire quindi la categoria dei complessi a meno di omotopia. $Kom(\mathcal{A})$ (è additiva ma non abeliana)

Vedremo che se $\varphi : M^\bullet \to N^\bullet$ quasi isom. e $I^\bullet$ iniettivo, con $M^\bullet, N^\bullet, I^\bullet \in Com^+(\mathcal{A})$ allora

$$\mathrm{Hom}_{Kom^+}(N^\bullet, I^\bullet) \xrightarrow[-\circ\varphi]{\cong} \mathrm{Hom}_{Kom^+}(M^\bullet, I^\bullet)$$

Quindi, se $M^\bullet \in Com^+(\mathcal{A})$ e $I^\bullet, J^\bullet$ con φ, ψ sono ris. iniettive allora



usando l'isomorfismo sopra con $N^\bullet = J^\bullet$ e $N^\bullet = I^\bullet$

ottenendo $\alpha \circ \psi \sim \varphi$ e $\psi \sim \beta \circ \varphi$

$\left.\begin{array}{l}(\beta \circ \alpha) \circ \psi \sim \psi \\ id \circ \psi \sim \psi\end{array}\right\}$ è isom. $\Rightarrow \beta \circ \alpha \sim id$

Quindi le risoluzioni iniettive sono uniche a meno di omotopia.
(sono uniche nella cat. dei complessi a meno di omotopia).

- Se $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto a sx (additivo)

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \text{ esatta} \Rightarrow 0 \to FX \to FY \to FZ \text{ esatta}$$

Def $RF: K_{om}^{+}(\mathcal{A}) \to K_{om}^{+}(\mathcal{B})$ (Funtore derivato destro)

Se $M^\bullet \xrightarrow{\varphi} I^\bullet$ ris. iniettiva di $M^\bullet$. Considero il complesso

$$0 \to 0 \to \dots \to FI^{-1} \to FI^{0} \to FI^{1} \to \dots$$ e lo pongo $RF(M^\bullet)$

Dico che è ben definito nella cat. dei compl. a meno di omotopia

Ho

$$\begin{tikzcd} & M^\bullet \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ I^\bullet \arrow[rr, shift left, "\alpha"] & & J^\bullet \arrow[ll, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

$\alpha \circ \varphi \sim \psi$ $\qquad$ $\alpha \circ \beta \sim id_J$

$\varphi \sim \beta \circ \psi$ $\qquad$ $\beta \circ \alpha \sim id_I$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & FI^{-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "F\alpha^{-1}"'] & FI^{0} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "F\alpha^{0}"'] & FI^{1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "F\alpha^{1}"'] & \dots \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & FJ^{-1} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "F\beta^{-1}"'] & FJ^{0} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "F\beta^{0}"'] & FJ^{1} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "F\beta^{1}"'] & \dots \end{tikzcd}$$

Componendo si ha:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & FI^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "F(\beta^{-1}\circ\alpha^{-1})"] & FI^{0} \arrow[r] \arrow[d, "F(\beta^{0}\circ\alpha^{0})"] & FI^{1} \arrow[r] \arrow[d, "F(\beta^{1}\circ\alpha^{1})"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & FI^{-1} \arrow[r] & FI^{0} \arrow[r] & FI^{1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Vogliamo dire che è omotopa all'identità, cioè (più in generale) che se ho $\gamma: X^\bullet \to X^\bullet$ t.c. $\gamma \sim id$ allora $F(\gamma) \sim id$

So che $\exists\, h$ tale che $\gamma^i - id_{X^i} = h^{i+1} \circ d^i + d^{i-1} \circ h^i$

Funtorializzando: (F è additivo)

$$F(\gamma^i) - id_{X^i} = F(h^{i+1}) \circ F(d^i) + F(d^{i-1}) \circ F(h^i)$$

è relazione per omotopia per le mappe $F\gamma$ tramite le mappe Fh

Def $R^i F(M^\bullet) := H^i(RF(M^\bullet))$

Funtori additivi mandano mappe omotope in mappe omotope

ISTALG - LEZIONE 19

$M^\bullet \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Com}^+(A\text{-moduli}))$

$\varphi^\bullet : M^\bullet \to I^\bullet$ risoluzione iniettiva

OSS. Posso costruire una ris. iniettiva tale che $\forall k$ $\varphi^k : M^k \to I^k$ è iniettiva.

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[d, "\varphi^n"] \arrow[rrr, "d_M^n"] & & & M^{n+1} \arrow[d, "\psi"] \arrow[drr, "\varphi^{n+1}"] & & \\
I^n \arrow[r] & I^n/B_I^n \arrow[rr] & & \underset{\sim}{\underline{I^n/B_I^n \oplus M^{n+1}}} \arrow[rr, hook] & & I^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Per ip. induttiva ~~ipotesi~~ no $\bar{\varphi}^n : \dfrac{M^n}{B_M^n} \to \dfrac{I^n}{B_I^n}$ iniettiva e

φ^k iniettiva per $k \leq n-1$

ψ è iniettiva:

$$0 = \psi(x) = [0, x] = [\bar{\varphi}^n(y), -d_M^n(y)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^n(y) \in B_I^n \\ -d_M^n(y) = x \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\bar{\varphi}^n \text{ iniettiva})}{y \in B_M^n} \text{ da cui } d_M^n y = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtore tra cat. abeliane esatto a sinistra e $\mathcal{A}$ con abbastanza iniettivi, cioè $\forall a \in \mathcal{A}$ $\exists i \in \mathcal{A}$ iniettivo e φ assi monomorfismo.

se F covariante, proiettivi se controvariante

FUNTORE DERIVATO

se F controvariante — categoria omotopica

$$RF : K^+(\mathcal{A}) \to K^+(\mathcal{B})$$

$RF(M^\bullet)$ è il complesso $\ldots \to F(I_M^j) \xrightarrow{F(d_{I_M}^j)} F(I_M^{j+1}) \to \ldots$

dove $\ldots \to I_M^j \xrightarrow{d_{I_M}^j} I_M^{j+1} \to \ldots$ è ris. ~~iniettiva~~ iniettiva di $M^\bullet$ con mappe ~~tale che~~

$\varphi_M^\bullet : M^\bullet \to I_M^\bullet$ (quasi isom.)

~~[illegible]~~

Data $\varphi : M^\bullet \to N^\bullet$, ~~essendo φ_N q. isom.~~ Per composizione $\exists \tilde{\varphi} : M^\bullet \to I_N^\bullet$

$\Rightarrow \exists \bar{\varphi} : I_M^\bullet \to I_N^\bullet$ in modo unico a meno di omotopia

Perché φ_M è quasi isom. e $\qquad (\tilde{\varphi} = \varphi_N \circ \varphi)$

$\mathrm{Hom}_{K^+}(M^\bullet, I^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K^+}(I^\bullet, I^\bullet)$

$$\begin{tikzcd} M^\bullet \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_M"'] \arrow[dr, "\tilde{\psi}"] & N^\bullet \arrow[d, "\varphi_N"] \\ I_M^\bullet \arrow[r, "\overline{\psi}"'] & I_N^\bullet \end{tikzcd}$$

Il diagramma commuta a meno di omotopia.

$RF(\psi) := F(\overline{\psi})$

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & F(I_M^j) \arrow[r, "F(d^j_{I_M})"] \arrow[d, "F(\overline{\psi}^j)"] & F(I_M^{j+1}) \arrow[r] \arrow[d, "F(\overline{\psi}^{j+1})"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & F(I_N^j) \arrow[r, "F(d^j_{I_N})"'] & F(I_N^{j+1}) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

<u>Def</u> $R^jF(M^\bullet) = H^j(RF(M^\bullet))$

OSS. Considerando $\to 0 \to 0 \to M^0 \to 0 \to \dots$

$R^0F(M) \cong F(M)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & {} \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

ris. iniettive

ovvero $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \dots$ è esatta

allora (F è esatto a sinistra)

$0 \to FM \to FI^0 \xrightarrow{d_I} FI^1$ ~~…~~ esatta

$RF(M) = F(I^\bullet) = \left[0 \to FI^0 \xrightarrow{d_I} FI^1 \to \dots \right]$

$\Rightarrow H^0(FI^\bullet) = \ker F(d_I^0) \cong FM.$

<u>Def</u> $M \in Obj\,\mathcal{A}$. $F = Hom(M, -)$

$RF(N^\bullet) =: RHom(M, N^\bullet)$

Poniamo $Ext^i(M, N^\bullet) = R^iF(N^\bullet)$

<u>Esempio</u>: $\mathcal{A}$ cat. degli $\mathbb{Z}$-moduli $M = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ $N = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Calcolo $Ext^i(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})$. $FN = Hom(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \longrightarrow \underset{\text{grado } 0}{\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}} \xrightarrow[\partial]{\cdot n} \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$ è ris. iniettiva

$1 \longmapsto 1/n$

$RF(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})$: $0 \longrightarrow \underset{\text{in grado } 0}{F(\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}})} \longrightarrow F(\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow 0$

Quindi sicuramente $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}) = 0$ per $i<0$ e $i>1$

$$\left[\ \mathrm{Ext}^0(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}})\ \right]$$

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}) = H^1(RF(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}))$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}) \arrow[r, "\partial\circ -"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}) \arrow[r] & 0 \\
& (1 \mapsto i/m) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (1 \mapsto \frac{mi}{m}) \arrow[d, "\wr"] & \\
& \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \arrow[r, "\cdot m"] & \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} &
\end{tikzcd}$$

Abbiamo quindi

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

$n = d\nu$
$m = d\mu$ con $(\nu,\mu)=1$

$$\left[\begin{array}{lll} \text{se} & nx \equiv 0 & (m) \\ & d\nu x \equiv 0 & (d\mu) \\ & \nu x \equiv 0 & (\mu) \\ & \Rightarrow x \equiv 0 & (\mu) \end{array}\right]$$

$\mathrm{Im}(\cdot n) = d\,\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$

$\mathrm{Ker}(\cdot n) = \mu\,\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ $\Rightarrow$ $H^0(RF(M)) = \mu\,\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}$

$H^1(RFM) = \mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow \mathrm{Ext}^0(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}$$

- Consideriamo F : A-moduli destri $\longrightarrow$ gruppi abeliani, M un A-modulo sinistro

$$X \longmapsto X \otimes_A M$$

F è esatto a destra. se F è covariante, mettiamo se controvariante

<u>Def</u> Sia F funtore <u>esatto a destra</u> tra categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abeliane con $\mathcal{A}$ con abbastanza proiettivi, cioè $\forall a \in \mathcal{A}\ \exists p \in \mathcal{A}$ proiettivo e $P \twoheadrightarrow a$ epimorfismo. Si definisce il funtore derivato sinistro $LF : \mathrm{Kom}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Kom}^-(\mathcal{B})$ nel modo seguente:

+ se F controvariante

Se $M^\bullet$ è complesso limitato dall'alto, $\varphi_M : P^\bullet \to M^\bullet$ ris. proiettiva ($\varphi_M^\bullet$ quasi isomorfismo)

$$LF(M^\bullet) = \dots \to FP^j \xrightarrow{Fd^j_{P^\bullet}} FP^{j+1} \to \dots$$

per le frecce si definisce tutto allo stesso modo

Vale in modo duale a prima che, se $M^\bullet \to N^\bullet$ q. isom. e $P^\bullet$ proiettiva (con $M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet \in Com^-(A)$) allora $\mathrm{Hom}_{Kom^-}(P^\bullet, M^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{Kom^-}(P^\bullet, N$

<u>Def</u> $L^iF(M^\bullet) := H^{-i}(LF(M^\bullet))$

<u>OSS.</u> Se N è modulo, $L^0F(N) \cong FN$
(usando esattezza a destra)

<u>Def</u> Fissato M, $F(N) = N \otimes M$ $\quad (F = \_ \otimes M)$

$$LF(N^\bullet) =: N^\bullet \overset{L}{\otimes} M$$
$$L^iF(N^\bullet) =: \mathrm{Tor}^i(N^\bullet, M)$$

<u>Esempio</u>: Se considero $F = \mathrm{Hom}(\_, M)$ è esatto a sinistra,
cioè $X \to Y \to Z \to 0$ esatta $\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(Z, M) \to \mathrm{Hom}(Y, M) \to \mathrm{Hom}(X, M)$
(è controvariante) usiamo comunque risoluzioni proiettive e il funtore derivato destro $RF : Kom^- \to Kom^+$

Se N è A-modulo, definisco
$$\underline{\mathrm{Ext}}^i(N, M) := R^iF(N)$$

Facciamo il calcolo come prima, con $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$0 \to \underset{\text{grado } -1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow[\partial]{\cdot m} \underset{\text{grado } 0}{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$ è risoluz. proiettiva di $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$0 \to \underset{\text{grado } 0}{F(\mathbb{Z})} \xrightarrow{F(\partial)} \underset{\text{grado } 1}{F(\mathbb{Z})} \to 0$$ è $RF(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Quindi si ha $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ per $i < 0$ o $i > 1$

$\underline{\mathrm{Ext}}^0 = \underline{\mathrm{Ext}}^1 = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$: infatti

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \to 0 \\ & \wr\| & & \wr\| & \\ & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot m} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \end{array}$$

Con un conto analogo a prima si conclude.

TEOREMA (1ª SUCC. ESATTA LUNGA) (caso F covariante)

$0 \to X^{\cdot} \xrightarrow{\alpha} Y^{\cdot} \xrightarrow{\beta} Z^{\cdot} \to 0$ succ. esatta di complessi limitati dal basso, F funtore esatto a sinistra. Allora $\exists$ dei morfismi $\omega_i : R^iF(Z) \to R^{i+1}F(X)$ naturali che rendono esatta la successione

$$\dots \to R^iF(X) \xrightarrow{R^iF(\alpha)} R^iF(Y) \xrightarrow{R^iF(\beta)} R^iF(Z) \xrightarrow{\omega_i} R^{i+1}F(X) \to \dots$$

Se la succ. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ è esatta di oggetti di $\mathcal{A}$, si ha esatta

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \xrightarrow{\omega_0} R^1F(X) \to R^1F(Y) \to \dots$$

OSS. Naturale significa che se ho

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutativo allora ne ho uno sulla successione esatta lunga che fa commutare anche i quadrati

$$\begin{tikzcd} R^iF(Z') \arrow[r, "\omega_i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^{i+1}F(X') \arrow[d] \\ R^iF(W') \arrow[r, "\omega_i"] & R^{i+1}F(U') \end{tikzcd}$$

DIM: Prendo $\varphi_X : X^{\cdot} \to I_X^{\cdot}$ ris. iniettiva quasi isomorfismo
$\varphi_Z : Z^{\cdot} \to I_Z^{\cdot}$ ris. iniettiva quasi isomorfismo

Allora si ha succ. esatta

$$0 \to I_X^{\cdot} \to I_X^{\cdot} \oplus I_Z^{\cdot} \to I_Z^{\cdot} \to 0$$

Dico che Grazie alle propr. dei moduli iniettivi riesco a definire φ_Y^n

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^n \arrow[r, "\alpha^n"] \arrow[d, "\varphi_X^n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y^n \arrow[r, "\beta^n"] \arrow[d, dashed, "\varphi_Y^n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_Z^n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_X^n \arrow[r] & I_X^n \oplus I_Z^n \arrow[r] & I_Z^n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\varphi_Y^n = \tilde{\varphi}_Y^n \oplus \varphi_Z^n \beta^n$

dove $\tilde{\varphi}_Y^n$ è definito da

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[dr] & Y^n \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}_Y^n"] \\ & & I_X^n \oplus I_Z^n \end{tikzcd}$$

Voglio dimostrare che

$$\begin{tikzcd} Y^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[d, "\varphi_Y^{n+1}"] \\ I_X^n \oplus I_Z^n \arrow[r] & I_X^{n+1} \oplus I_Z^{n+1} \end{tikzcd}$$

commuta.

Faccio vedere che commuta componente per componente

Per la seconda:

$$\begin{tikzcd}
Y^n \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right, "\pi_Z^n"'] & & Y^{n+1} \arrow[dr] \arrow[dd, bend left, "\pi_Z^{n+1}"] & \\
& Z^n \arrow[rr] \arrow[d] & & Z^{n+1} \arrow[d] \\
I_Z^n \arrow[rr] & & I_Z^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

Commuta

Per la prima ci sono problemi (rifatto la prossima lezione) [...].

↑ RIFATTA DIVERSA

Diamo per buono che $I_X^\bullet \oplus I_Z^\bullet$ con $\varphi_Y^\bullet$ faccia commutare (ovvero che $\varphi_Y^\bullet$ sia morfismo di complessi).

Sicuramente ho una successione in coomologia

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "(*)"] & H^n(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H^n(I_X) \arrow[r] & H^n(I_X \oplus I_Z) \arrow[r] & H^n(I_Z) \arrow[r] & H^{n+1}(I_X) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Per il lemma dei **5** anche $(*)$ è isomorfismo.

Essendo $I_X^n \oplus I_Z^n$ iniettivo $\forall n$, si ha che $\varphi_Y^\bullet : Y^\bullet \to I_X^\bullet \oplus I_Z^\bullet$ è risoluzione iniettiva.

Applico F: $\quad 0 \to F(I_X^\bullet) \to F(I_X^\bullet \oplus I_Z^\bullet) \to F(I_Z^\bullet) \to 0$

$$F(I_X^\bullet \oplus I_Z^\bullet) = F(I_X^\bullet) \oplus F(I_Z^\bullet)$$

resta esatta perché spezza.

Passando allora alla successione esatta lunga in coomologia si ha

$$\dots \to R^iF(X) \to R^iF(Y) \to R^iF(Z) \to R^{i+1}F(X) \to \dots$$

come voluto.

ISTALG LEZIONE 20

ANELLI e MODULI SEMISEMPLICI

A anello con 1

Def M un A-modulo si dice semplice se non ha sottomoduli propri. M si dice semisemplice se $M=\sum_{i\in I} S_i$ con I anche infinito e S_i semplici.

(DI SCHUR)
LEMMA: M semplice, $\varphi: M \to M$ non banale. Allora è isomorfismo

DIM: $\operatorname{Ker}\varphi \subsetneq M \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0$

$\operatorname{Im}\varphi \subseteq M \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = M \quad \Rightarrow \varphi$ iso.

PROPOSIZIONE: TFAE:

gli S_i possono intersecarsi

1) M semisemplice, $M=\sum_{i\in I} S_i$ $\quad S_i$ semplici

2) $M=\bigoplus_{i\in I} T_i$ $\quad T_i$ semplici

3) $\forall N \subseteq M \ \exists P \subseteq M : M = N \oplus P$

DIM: $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ ovvio

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{2}$ ~~NEE~~

$\{0\}\in\mathcal{F}$

$\mathcal{F} = \left\{ \{T_\alpha\}_{\alpha\in I} \;\middle|\; \text{i } T_\alpha \text{ sono in somma diretta (semplici e)} \right\}$ con l'inclusione

Data (catena) $\left(\{T_\alpha\}=\mathcal{T}_i\right)_{i\in J}$ un maggiorante è $\mathcal{T}=\bigcup_{i\in J}\mathcal{T}_i$

Se non fosse in somma diretta, un sottoinsieme finito non sarebbe in somma diretta e quindi un certo $\mathcal{T}_i$ non starebbe in $\mathcal{F}$

Sia $\mathcal{T}_m$ massimale in $\mathcal{F}$. Pongo $N=\bigoplus_{T\in\mathcal{T}_m} T$

$\Rightarrow M = N \oplus P$ $\left(M=\bigoplus T_i\right)$ [...]

LEMMA: Se vale $\boxed{3}$, $Q \subseteq M$, $R \subseteq Q \Rightarrow \exists S : Q = R \oplus S$

DIM: $R \subseteq M \Rightarrow M = R \oplus \tilde{S}$

Dico che $S = \tilde{S} \cap Q$ va bene.

$\tilde{S} \cap R = 0 \Rightarrow S \cap R = 0$

Prendo $r\in R$, $s \in \tilde{S}$, $q \in Q$ $(q\in M) \Rightarrow q = r+s \Rightarrow s = q-r \in Q \cap \tilde{S} = S$

[...] $M = N \oplus P$ se, $P \neq \emptyset \Rightarrow \exists \, x \overset{\neq 0}{} \in P$

$\underset{\neq 0}{Ax} \subseteq P \qquad Ax = A/_{\mathrm{Ann}\, x}$ (perché per lemma dei 5 $\begin{matrix} 0 \to \mathrm{Ann}\,x \to A \to A/_{\mathrm{Ann}\,x} \to 0 \\ \| \quad \| \quad \downarrow \\ 0 \to \mathrm{Ann}\,x \to A \to A_x \to 0 \end{matrix}$)

$Q = \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathrm{Ann}\,x} \leq Ax$ con $\mathfrak{m} \supseteq \mathrm{Ann}\,x$ max

per il lemma e $S \cong A/\mathfrak{m}$ perché

$Ax = Q \oplus S$ ~~perché~~ $0 \to Q \hookrightarrow Ax \to A/_{\mathfrak{m}} \to 0$

$A/_{\mathfrak{m}}$ è proiettivo

Ma $A/_{\mathfrak{m}}$ è semplice $\Rightarrow \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_m \cup \{S\} \in \mathcal{F}$ Assurdo

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{3}$ Preso $N \leq M$, $(M = \sum S_i)$, pongo

$\mathcal{G} = \{ J \subseteq I : (\sum_{j \in J} S_j) \cap N = 0 \} \qquad \emptyset \in \mathcal{G}$

$\mathcal{G}$ è induttivo ... Sia J_m max in $\mathcal{G}$

Sia $P = \sum_{j \in J_m} S_j$ Voglio dire che $M = N \oplus P$

$N \cap P = 0$ perché $J_m \in \mathcal{G}$

$\forall i \in I \; S_i \leq N + P \Leftrightarrow M = \sum S_i \subseteq N + P$

Se per assurdo $\exists i$: $S_i \cap (N+P) \neq S_i$, ~~...~~ Allora $J_m \cup \{i\} \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow S_i \cap (N+P) = 0$ perché S_i è semplice

Corollario: M semisemplice, $N \leq M \Rightarrow N$ semisemplice, $M/_N$ semisemplice

Non vale l'altra freccia

Esempio: $A = \mathbb{F}_2[x]/_{(x^2-1)} \qquad M = \mathbb{F}_2^2 \qquad \begin{matrix} A \longrightarrow M \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$ dà struttura di A-mod. su M

$N = \mathbb{F}_2 e_1$, $M/_N$ semplice, N semplice (quindi sono semisemplici)

ma M non lo è perché ~~...~~ $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ non è addendo diretto

(essendo $x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{F}_2^2$, per cui $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è l'unico sottomodulo non banale

Proposizione: TFAE (A anello)

1) Ogni A-mod. è semisemplice
2) A come A-mod sx è semisemplice
3) Ogni A-modulo è proiettivo

DIM: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ ovvio

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ M un A-modulo, $N \leq M$ sottomodulo

$0 \to N \longrightarrow M \longrightarrow M/_N \to 0$

$M/_N$ proiettivo $\Rightarrow M = N \oplus M/_N$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Sia M un A-modulo

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\alpha} A^{\oplus I} \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

$\operatorname{Ker}\varphi \subseteq A^{\oplus I}$ semisemplice $\Rightarrow A^{\oplus I} = \operatorname{Ker}\varphi \oplus P$ con

$P = \operatorname{Coker}(\alpha) \cong M$ (perché lo è nella succ. esatta) $\Rightarrow M$ addendo diretto di un libero

$\Rightarrow M$ proiettivo

Esempio: D corpo (ho gli inversi) $\Rightarrow A = \mathcal{M}(n, n, D)$ è semisemplice. (come anello)

D^n è semplice (come A-mod.) (è semplice), perché $\forall v \neq 0 \in D^n$, $Av = D^n$

$$\Rightarrow A = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq n} D^n$$

i-esima colonna

TEOREMA (WEDDERBURN):

A semisemplice (anello) $\Rightarrow A \cong \bigoplus_{i \in I} \left(\mathcal{M}(n_i, n_i, D_i^{op}) \right)$ come anello, con $D_i = \operatorname{End}_A(S_i, S_i)$

DIM: $A = \bigoplus_{i \in I} S_i$ S_i semplice

$1 \in A \Rightarrow 1 = \sum_{j \in J} s_j$ con $|J| < +\infty$

$\Rightarrow A = \bigoplus_{j \in J} S_j^{\oplus p_j}$ ← raggruppati a meno di isomorfismi di A-moduli

isomorfismo di anelli

$$A \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \operatorname{End}_A(A, A)^{op}$$
$$\varphi(1) \longleftrightarrow \varphi$$
$$a \longmapsto (x \mapsto x \cdot a)$$

Preso $\varphi \in \operatorname{End}_A(A, A)^{op}$ $S_j \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} A \twoheadrightarrow S_k$

se $j \neq k$ è 0

Quindi $\operatorname{End}_A(A, A)^{op} \cong \bigoplus_{j \in J} \operatorname{End}_A\left(S_j^{\oplus p_j}, S_j^{\oplus p_j}\right)^{op}$

cioè

$$\operatorname{End}_A(A, A)^{op} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathcal{M}(p_j, p_j, \operatorname{End}_A(S_j, S_j)^{op})$$

tramite $\left(\varphi : S_j^{\oplus p_j} \to S_j^{\oplus p_j}\right) \longleftrightarrow \left\{ \psi_{ik} : \underset{\text{i-esima copia}}{S_j} \hookrightarrow S_j^{\oplus p_j} \xrightarrow{\varphi} S_j^{\oplus p_j} \twoheadrightarrow \underset{\text{k-esima copia}}{S_j} \right\}_{1 \leq i \leq p_j,\ 1 \leq k \leq p_j}$

Ho quindi la matrice (ψ_{ik})

Ma per il lemma di Schur ogni mappa non nulla è invertibile (perché è isomorfismo) $\Rightarrow \mathrm{End}_A(S_j, S_j)$ è un corpo.

OSS. È un isomorfismo di anelli se non metto "op"?

NO: $$A \longleftrightarrow \mathrm{End}_A(A, A)$$
$$ab \longleftrightarrow m_{ba} = m_a \circ m_b$$

Def A anello. $\underbrace{A^{op}}_{\text{L'anello opposto}}$ è definito come A come insieme e con operazioni $+$ e $\cdot_{op}$, dove $a \cdot_{op} b := b \cdot a$

In questo modo abbiamo che l'isomorfismo sopra è di anelli tra
$$A \cong \mathrm{End}_A(A, A)^{op}$$

Per Wedderburn, (guardo solo l'operazione prodotto)
$$A \cong \mathrm{End}_A(A,A)^{op} \cong \Big(\prod_{j \in J} \mathrm{End}_A(S_j^{\oplus p_j}, S_j^{\oplus p_j})\Big)^{op} \cong \prod_{j \in J} \mathcal{M}(p_j, p_j, \mathrm{End}_A(S_j, S_j)^{op}) \cong$$
$$\cong \prod_{j \in J} \mathcal{M}(p_j, p_j, D_j^{op})$$

Esercizio: $\ldots \to M_{j-1} \to M_j \to M_{j+1} \to \ldots$ compl. di A-mod. semplici

Allora $\exists\, I_\cdot, K_\cdot$ tali che $M_j = I_j \oplus K_j \oplus I_{j+1}$ $\forall j$

e $M_j \to M_{j+1}$ è $I_j \oplus K_j \oplus I_{j+1} \longrightarrow I_{j+1} \oplus K_{j+1} \oplus I_{j+2}$
$$I_j \longmapsto 0$$
$$K_j \longmapsto 0$$
$$I_{j+1} \longmapsto I_{j+1}$$

CASO PARTICOLARE: ANELLI DI GRUPPO

Def A anello, G gruppo. L'anello di gruppo è l'insieme
$$A[G] = \Big\{ \sum_{g \in G} a_g\, g \Big\}$$ con operazioni

$$+ : \Big(\sum a_g\, g + \sum b_g\, g \Big) := \sum (a_g + b_g)\, g$$
$$\cdot : (a_g\, g) \cdot (b_h\, h) := (a_g b_h)(gh)$$

OSS. Nel sottocaso in cui A campo e G finito
$$A[G]\text{-moduli} \longleftrightarrow G\text{-rappresentazioni su } A$$

Sia ora $A = K$ campo, $\#G < +\infty$.

~~$K[G]$ è semisemplice~~

TEOREMA (MASCHKE): Sia $m = \#G$. $\mathrm{Char} K \nmid m \Rightarrow K[G]$ semisemplice

DIM: Sia $M \leq K[G]$

$M \hookrightarrow K[G]$ $\quad \exists \pi : K[G] \to M$ come K-sp. vett. proiezione (cioè $\pi|_M = id_M$)

Sia $\varphi(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g\,\pi(g^{-1}x)$

$\varphi : K[G] \to M$ come $K[G]$-modul è ancora proiezione

Considero $0 \to M \xrightarrow{i} K[G] \to \mathrm{Coker}\, i \to 0$ la succ. spezza

$\Rightarrow K[G] = M \oplus \mathrm{Coker}\, i$ $\quad \Rightarrow K[G]$ semisemplice

OSS.

$K[G]$-modulo semplice $\longleftrightarrow$ G-rappr. irriducibili

Data la

Scomposizione iniziale $K[G] \cong \bigoplus V_i^{a_i}$ (che significa che i V_i sono gli S_i semplici di Wedderburn)

TEOREMA: $a_i = \dim V_i$ (se $K = \overline{K}$)

DIM: Guardando la decomposizione sui corpi

$$K[G] = \bigoplus \mathcal{M}(a_i, a_i, \mathrm{End}(V_i, V_i)^{op})$$ vedremo poi che $\mathrm{End}(V_i) \cong K$.

Def Un campo di numeri è una estensione finita di $\mathbb{Q}$

OSS. Se K campo di numeri, G abeliano

$$K[G] = \prod K(\Phi), \quad \Phi \in \frac{G^*}{\mathrm{Gal}(F/K)}, \quad G^* = \mathrm{Hom}(G, \overline{K}^*)$$

IST ALG _ LEZIONE 21

[...] [TEOREMA 1ª SUCC. ESATTA]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & Y^\bullet \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dotted] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^\bullet \arrow[r] & \underbrace{I^\bullet \oplus J^\bullet}_{= H^\bullet} \arrow[r] & J^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ris. iniettive con $\begin{cases} X^\bullet \hookrightarrow I^\bullet \\ Z^\bullet \hookrightarrow J^\bullet \end{cases}$ monomorf.

In modo naturale $d_H = (d_I, d_J)$. Noi però considereremo un altro differenziale per definire il complesso $H^\bullet$

(per notazione identifico $Z^\bullet \hookrightarrow J^\bullet$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^n \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[d] & Y^n \arrow[dl, "\exists\, \alpha^n"] \\
& I^n &
\end{tikzcd}$$

Pongo $\xi : Y^\bullet \to I^\bullet \oplus J^\bullet = H^\bullet$

$\xi = (\alpha^n, \psi^n)$

Definisco su $H^\bullet$ il differenziale $d_H^n = \begin{pmatrix} d_I^n & \beta^n \\ 0 & d_J^n \end{pmatrix}$

Costruiamo $\beta^n : J^n \to I^{n+1}$ per induz.

P. Base OK ($X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet \in Com^+(A)$) (pongo tutto zero)

P. indutt. $n-1 \Rightarrow n$

Voglio che: 1) $d_H^n \circ d_H^{n-1} = 0$

2)
$$\begin{tikzcd}
Y^n \arrow[r, "d_Y"] \arrow[d, "(\alpha^n, \psi^n)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y^{n+1} \arrow[d, "(\alpha^{n+1}, \psi^{n+1})"] \\
I^n \oplus J^n \arrow[r, "d_H^n"'] & I^{n+1} \oplus J^{n+1}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{1}$ Voglio che $0 = \begin{pmatrix} 0 & d\beta + \beta d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $\beta^n d_J^{n-1} + d_I^n \beta^{n-1} = 0$

$\boxed{2}$ $d_H \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_I & \beta \\ 0 & d_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_I \alpha + \beta \psi \\ d_J \psi \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \alpha\, d_Y \\ \psi\, d_Y \end{pmatrix}$

Cioè

$\alpha^{n+1} d_Y^n = d_I^n \alpha^n + \beta^n \psi^n$

(la seconda è automaticamente verificata perché ψ è di complessi)

$\beta^n \psi^n = -d_I^n \alpha^n + \alpha^{n+1} d_Y^n =: F$

$$\begin{tikzcd}
Y^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "F"'] & Z^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "b^n"] & J^n \arrow[dl, dashed, "\beta^n"] \\
& I^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dr, "F"] & Z^n \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\
& I^n & & I^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

Voglio cercare b^n che fattorizza F.

$F\varphi^n = (\alpha^{n+1} d_Y^n - d_I^n \alpha^n)\varphi^n = (\alpha\varphi d_X^n - d_I \circ (X^n \hookrightarrow I^n)) =$ Perché $X \hookrightarrow I^\cdot$ di complessi

$= ((X^{n+1} \hookrightarrow I^{n+1}) \circ d_X^n - d_I \circ (X^n \hookrightarrow I^n)) = 0$

Quindi applico la proprietà di Coker: (Z^n è coker φ^n) $\exists b^n : Z^n \to I^{n+1}$

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "\varphi^n"] & Y^n \arrow[r, "\psi^n"] \arrow[dr, "F"'] & Z^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "b^n"] & J^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "\circledast"] & \mathrm{Coker}(Z^n \hookrightarrow J^n) \arrow[r] \arrow[dll, "\chi"] & 0 \\ & & I^{n+1} & & & \end{tikzcd}$$

Consideriamo
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "b^n"'] & J^n \arrow[dl, "\gamma^n"] \\ & I^{n+1} & \end{tikzcd}$$
con γ^n che esiste per iniettività

Cerchiamo adesso una $\chi : \mathrm{Coker}(Z^n \hookrightarrow J^n) \to I^{n+1}$ tale che $\gamma^n + \chi\pi$ rispetti le condizioni 1) e 2):

$\circledast$ $\gamma^n + \chi\pi =: \beta^n$ dove γ^n è la mappa unica sollevata per iniettività

In questo modo ~~Dimostro che~~ la β^n è quella che cercavo

Tale χ deve essere tale che

$\boxed{1}$ $\beta_n d_J^{n-1} + d_I^n \beta^{n-1} = (\gamma^n + \chi\pi) d_J^{n-1} + d_I^n \beta^{n-1} = 0$

ovvero tale che $\Leftrightarrow$ $\chi\pi d_J^{n-1} = \underbrace{-\gamma^n d_J^{n-1} - d_I^n \beta^{n-1}}_{=G}$

La $\boxed{2}$ vale $\forall \chi$ $\to$ $\boxed{2}$ $\beta^n\varphi^n = \gamma^n\varphi^n + \chi\underbrace{\pi\varphi^n}_{0} = F + 0 = F$.

β^{n-1} ce la abbiamo per ipotesi induttiva

Ma π è di complessi

$\Rightarrow$ $\chi\pi d_J^{n-1} = \chi d_W^{n-1}\pi$ $\qquad$ ($W^n = \mathrm{Coker}(Z^n \hookrightarrow J^n)$)

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "G"'] & W^{n-1} \arrow[r, "d_W"] \arrow[d, "\tilde{\chi}"] & W^n \arrow[dl, dashed, "\chi"] \\ & I^{n+1} & \end{tikzcd}$$

Per trovare χ prima trovo $\tilde{\chi}$

Voglio usare la proprietà di Coker per l'esistenza di $\tilde{\chi}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z^{n-1} \arrow[r, hook] & J^{n-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "G"'] & W^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\exists\tilde{\chi}"] & 0 \\ & & I^{n+1} & & \end{tikzcd}$$

(Poi ~~Dico~~ trovo χ tale che $\tilde{\chi} = \chi d_W^{n-1}$)

Dimostro che $Z^{n-1} \hookrightarrow J^{n-1} \xrightarrow{G} I^{n+1}$ è zero.

Per vedere $G|_{Z^{n-1}} = 0$ dico che $G \circ \psi^{n-1} = 0$ $\leftarrow \psi$ epi. $\qquad$ ($\gamma^n \equiv b^n$ su Z^n)

$-b^n d_J^{n-1}\psi^{n-1} - d_I^n \beta^{n-1}\psi^{n-1} = -b^n\psi^n d_Y^{n-1} - d_I^n \beta^{n-1}\psi^{n-1} =$

$= -F d_Y^{n-1} - d_I^n \beta^{n-1}\psi^{n-1} = d_I^n(\alpha^n d_Y^{n-1} - \beta^{n-1}\psi^{n-1}) = d_I^n d_I^{n-1}\alpha^{n-1} = 0$

per ip. induttiva (propr. $\boxed{2}$ di β^{n-1})

$\Downarrow$ $\exists\tilde{\chi}$ per proprietà di Coker

Dico ora che $\exists\chi$:

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r] \arrow[dr, "G"'] & W^{n-1} \arrow[r, "d_W"] \arrow[d, "\tilde{\chi}"] & W^n \arrow[dl, dashed, "\chi"] \\ & I^{n+1} & \end{tikzcd}$$

Ho $0 \to Z^\cdot \hookrightarrow J^\cdot \to W^\cdot \to 0$ esatta.

$\hookrightarrow$ è quasi isom.

$\Rightarrow$ Passando alla succ. esatta lunga in coomologia

Si ottiene che $H^i(W)=0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \operatorname{Im} d_W = \operatorname{Ker} d_W$

Dimostriamo che $\tilde{\chi}\, d_W = 0$

π è epimorfismo $\Rightarrow$ Mi basta dimostrare che $\tilde{\chi}\, d_W \pi = 0$

$$\tilde{\chi}\, d_W \pi = \underbrace{\tilde{\chi}\, \pi}_{= G} d_J = - d_I^n \beta^{n-1} d_J^{n-2} = d_I^n d_I^{n-1} \beta^{n-2} = 0$$

β^{n-1} risolve la condiz. $\boxed{1}$ per ip. indutt.

Quindi $\tilde{\chi}$ fattorizza tramite $\operatorname{Im} d_W$ $(= \operatorname{Ker} d_W)$

monomorfismo perché $\operatorname{Im} d_W = \operatorname{Ker} d_W$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \dfrac{W^{n-1}}{\operatorname{Im} d_W} \arrow[r, "d_W"] \arrow[d, "\tilde{\chi}"'] & W^n \arrow[dl, dashed, "\exists \chi"] \\
& I^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

per iniettività di I^{n+1}

TEOREMA (2ª SUCCESSIONE ESATTA LUNGA)

Siano F, G, H funtori tra $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ cat. abeliane esatti a sx.
$\mathcal{A}$ con abbastanza inj.

Siano α, β trasf. naturali di funtori $\alpha: F \to G$, $\beta: G \to H$

Supponiamo che $\forall i$ iniettivo

$$0 \to F(i) \to G(i) \to H(i) \to 0 \quad \text{è esatta.}$$

Allora se $M \in Kom^+(\mathcal{A})$

$$\dots \to R^i F(M^\cdot) \to R^i G(M^\cdot) \to R^i H(M^\cdot) \xrightarrow{\omega} R^{i+1} F(M^\cdot) \to \dots$$

è esatta.

DIM. Sia $\varphi: M^\cdot \to I^\cdot$ ris. inj.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & FI^0 \arrow[rr, "\alpha_{I^0}"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & GI^0 \arrow[rr, "\beta_{I^0}"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & HI^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & FI^1 \arrow[rr, "\alpha_{I^1}"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & GI^1 \arrow[rr, "\beta_{I^1}"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & HI^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & FI^2 \arrow[rr, "\alpha_{I^2}"] \arrow[d] & & GI^2 \arrow[rr, "\beta_{I^2}"] \arrow[d] & & HI^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Si ha quindi una succ. esatta corta di complessi

$$0 \to F(I^\cdot) \xrightarrow{\alpha_{I^\cdot}} G(I^\cdot) \xrightarrow{\beta_{I^\cdot}} H(I^\cdot) \to 0$$

Passando in coomologia si ha la succ. esatta lunga

$$\cdots \to \underset{R^iF(M)}{\underset{\parallel}{H^i(F(I^\cdot))}} \to \underset{R^iG(M)}{\underset{\parallel}{H^i(G(I^\cdot))}} \to \underset{R^iH(M)}{\underset{\parallel}{H^i(H(I^\cdot))}} \xrightarrow{\omega} \underset{R^{i+1}F(M)}{\underset{\parallel}{H^{i+1}(F(I^\cdot))}} \to \cdots$$

$\mathrm{Hom}(M,\_) \overset{N}{\rightsquigarrow} \mathrm{Ext}^i(M,N)$ ris. inj.

$\mathrm{Hom}(\_,N) \overset{M}{\rightsquigarrow} \underline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$ ris. proj.

Vogliamo dimostrare che sono uguali.

<u>$i=0$</u>: $\mathrm{Ext}^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}(M,N) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^0(M,N)$ ok.

<u>$i>0$</u>: Prendo $N \hookrightarrow I^0$ e $N' = \mathrm{Coker}(N \hookrightarrow I^0)$

$\Rightarrow 0 \to N \xrightarrow{\alpha} I^0 \xrightarrow{\beta} N' \to 0$ esatta

Passando alla 1ª succ. esatta lunga si ha

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\alpha_\circ} \mathrm{Hom}(M,I^0) \xrightarrow{\beta_\circ} \mathrm{Hom}(M,N') \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,I^0) \to \mathrm{Ext}^1(M,N') \to$$

Ma $\mathrm{Ext}^i(M,I) = 0 \ \forall i>0$ perché $0 \to I^0 \to 0 \rightsquigarrow 0 \to FI^0 \to 0$

Quindi $\mathrm{Ext}^{i-1}(M,N') \cong \mathrm{Ext}^i(M,N) \quad \forall i \geq 2$.

Considero

$$\mathrm{Hom}(\_,N) \xrightarrow{\alpha_\circ} \mathrm{Hom}(\_,I) \xrightarrow{\beta_\circ} \mathrm{Hom}(\_,N')$$

Vale che per ogni proiettivo la succ. è esatta.

Applico la 2ª succ. esatta lunga. Ottengo (con funtore derivato sinistro)

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,I^0) \to \mathrm{Hom}(M,N') \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(M,N) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(M,I^0) \to \cdots$$

Dico che $\underline{\mathrm{Ext}}^i(M,I^0) = 0 \quad \forall i>0$

Infatti, considerando ris. proiettiva $\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$

~~Sia~~ Ma che $\mathrm{Hom}(\_,I^0)$ è esatto (I^0 iniettivo), quindi

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}(P^{-2},I^0) \leftarrow \mathrm{Hom}(P^{-1},I^0) \leftarrow \mathrm{Hom}(P^0,I^0) \leftarrow \mathrm{Hom}(M,I^0) \leftarrow 0$$

esatto, da cui passando in coomologia si ha $\underline{\mathrm{Ext}}^i(M,I^0) = 0$

Quindi $\forall i \geq 2$ $\underline{Ext}^{i-1}(M,N') \cong \underline{Ext}^i(M,N)$

Ma si ha allora

$$0 \to Hom(M,N) \xrightarrow{\alpha_0} Hom(M,I^0) \xrightarrow{\beta_0} Hom(M,N') \to Ext^1(M,N) \to 0$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel \qquad\qquad \parallel \qquad\qquad \vdots$$
$$0 \to Hom(M,N) \xrightarrow{\alpha_0} Hom(M,I^0) \xrightarrow{\beta_0} Hom(M,N') \to \underline{Ext}^1(M,N) \to 0$$

$\Rightarrow Ext^1(M,N) \cong \underline{Ext}^1(M,N)$

A cascata allora si dimostra che $Ext^i(M,N) \cong \underline{Ext}^i(M,N)$ $\forall i$

$\forall N$ $Ext^1(M,N) = \underline{Ext}^1(M,N)$ $\Rightarrow Ext^2(M,N) = Ext^1(M,N') = \underline{Ext}^1(M,N') = \underline{Ext}^2(M,N)$

per tutti coincidono

Analogamente, usando i funtori $-\otimes N$ e $M\otimes -$ si ottiene che $\underline{Tor}^i(M,N) \cong Tor^i(M,N)$

OSS. Se M è piatto, $Tor^i(M,N) = 0$ $\forall N$. $(\forall i > 0)$

Questo perché $M\otimes -$ è un funtore esatto, quindi la coomologia fatta sul complesso immagine è banale.

Quindi, se M piatto, prendendo $0 \to X \to Y \to M \to 0$ esatta applicando $-\otimes N$ (per qualsiasi N), si ha

$$\underline{Tor}^1(M,N) \to X\otimes N \to Y \otimes N \to M\otimes N \to 0 \quad \text{esatta}$$
$$\parallel$$
$$Tor^1(M,N)$$
$$\parallel$$
$$0$$

Quindi la succ. resta esatta.

<u>PROPOSIZIONE</u>: A anello comm. con 1 noetheriano. M fin. gen.

A locale. M piatto $\Rightarrow M$ libero.

DIM: Prendo $0 \to X \to A^n \to M \to 0$. Posso perché

$$M/_{mM} = (A/_m)^n$$

$\leftarrow A/_m$ sp. vett. fin. gen. (dim $< \infty$) Per Nakayama $\exists A^n \twoheadrightarrow M$

Dimostro che $X = 0$, ovvero (ancora per Nakayama) che $X = mX$

Cioè che $X \otimes A/_m = 0$ $\quad X/_{mX} = 0$ $\quad (A/_m)^n \cong (A/_m)^n$, $M/_{mM}$

Applico allora $-\otimes A/_m$: ottengo $0 \to X\otimes A/_m \to A^n \otimes A/_m \to M\otimes A/_m \to 0$

M piatto

Def $F : A \to B$ esatto a sinistra con A che ha abbastanza iniettivi (A, B abeliane)

M si dice adatto se $R^iF(M) = 0 \quad \forall i > 0$.

- Se $X^\cdot \in Obj(Kom^+(A))$ e X^i sono adatti, allora
$$R^iF(X^\cdot) = H^i(F(X^\cdot))$$

LEMMA:
1) Se $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta con X, Y adatti allora Z adatto.
2) Se $X^\cdot$ complesso lim. dal basso con X^i adatti e esatto (aciclico), allora $FX^\cdot$ è esatto

DIM: $\boxed{1}$ Applico 1ª succ. esatta lunga:

$$0 \to FX \to FY \to FZ \to \underset{R^1F(X)}{0} \to \underset{R^1F(Y)}{0} \to R^1F(Z) \to 0 \to 0 \to \dots$$

esatta $\Rightarrow R^iF(Z) = 0 \quad \forall i > 0$

$\boxed{2}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & X^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X^1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X^2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X^3 \arrow[r] & \dots \\
& & Y^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y^3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \quad 0 \arrow[ur] & & 0 \quad 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

con $Y^{i+1} = Im\, d_X^i = Ker\, d_X^{i+1}$

$(Y^1 = X^0)$

Gli Y^i sono tutti adatti, poiché

$$0 \to \underbrace{Y^n \to X^n}_{\text{adatti}} \to \underbrace{Y^{n+1}}_{\text{adatto}} \to 0$$

per induz.

$(Y^0 = 0)$

Considero
$$0 \to \overset{FY^1}{FX^0} \to FX^1 \to FY^2 \to 0$$
$$0 \to FY^n \to FX^n \to FY^{n+1} \to 0$$

tutte esatte (perché $\overset{R^iY^i}{\text{sono adatti}}$) (le succ. continuerebbero con $R^1F(Y^n)$)

$$\Rightarrow \quad 0 \to FX^0 \to FX^1 \to FX^2 \to FX^3 \to \dots \quad \text{esatto}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
FX^1 \arrow[dr] & & FX^2 \\
& FY^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

TEOREMA:
Se $X^\cdot \in Com^+(A)$ e X^i sono adatti, allora
$$R^iF(X^\cdot) = H^i(F(X^\cdot))$$

ISTALG _ LEZIONE 22

$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto a sx tra cat. abel. con $\mathcal{A}$ con abb. iniettivi.

TEOREMA: Nelle ipotesi sopra, se $Y^\cdot \in Com^+(\mathcal{A})$, $Y^\cdot \xrightarrow{\alpha} X^\cdot$ q.isom. e X^i adatto $\forall i$, allora

$$R^i F(Y^\cdot) = H^i(FX^\cdot)$$

DIM: Essendo $Y^\cdot \xrightarrow{\alpha} X^\cdot$ q.isom., $RFY^\cdot \cong RFX^\cdot$

Infatti, se scelgo ris. iniettive di $X^\cdot$, componendo con α ho ris. iniettiva di $Y^\cdot$.

Quindi basta dimostrare che $R^i F(X^\cdot) = H^i(FX^\cdot)$.

Scelgo $I^\cdot$ in modo che $X^i \hookrightarrow I^i$ monomorfismo $\forall i$.

Osserviamo che I iniettivo $\Rightarrow I$ adatto

Infatti Una sua risoluzione iniettiva è data da $0 \to I \to 0$, quindi $RF(I) = \dots 0 \to FI \to 0 \dots \Rightarrow R^i F(I) = 0 \quad \forall i > 0$

Considero $0 \to X^\cdot \to I^\cdot \to \underset{\text{Coker}(X \hookrightarrow I)}{\overset{\|}{W^\cdot}} \to 0$ esatta

Per il lemma

$\Rightarrow W^i$ adatto $\forall i$ ~~Quindi~~ applicando F e passando alla succ. esatta lunga in coomologia ($0 \to FX^\cdot \to FI^\cdot \to FW^\cdot \to 0$ resta esatta) ← ad ogni livello ci sarebbe $R^1F(X)$

$$\dots \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^{i-1}(FW^\cdot)} \to H^i(FX^\cdot) \to H^i(FI^\cdot) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^i(FW^\cdot)} \to \dots$$

sono zero perché ← lemma precedente

~~Inoltre~~, $W^\cdot$ esatto $\Rightarrow FW^\cdot$ esatto, quindi $H^i(FX^\cdot) = H^i(FI^\cdot) \quad \forall i$

← $W^\cdot$ esatto essendo $X^\cdot \to I^\cdot$ quasi isomorfismo

- Considero $F_M = M \otimes \_$

Cerco i moduli N adatti a F_M $\forall M$. Vale che essi sono i moduli piatti.

Piatto $\Rightarrow$ adatto: Se N è piatto, $\mathrm{Tor}_i(M,N) = 0 \quad \forall M \; \forall i > 0$

Infatti: Invece di vederlo come derivato di F_M lo vedo come derivato di $\_ \otimes N$, che è esatto se N piatto $\Rightarrow \mathrm{Tor}_i(M,N) = 0 \quad \forall M \; \forall i > 0$

Adatto $\Rightarrow$ Piatto: N adatto $\Rightarrow \mathrm{Tor}_i(M,N) = 0 \quad \forall M \; \forall i > 0$.

Considero $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta. Passando alla 1ª succ. esatta

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\mathrm{Tor}_1(Z,N)} \to X \otimes N \to Y \otimes N \to Z \otimes N \to 0 \text{ esatta}$$

$\Rightarrow N$ piatto.

Per calcolare $\mathrm{Tor}(X, Y)$ posso prendere quindi una risoluzione piatta (invece che proiettiva) di Y.

- Siano M, N moduli. Voglio calcolare $\mathrm{Ext}^1(M,N)$.

Prendo ris. proiettiva di M: dato che mi interessa solo l'Ext^1, considero $0 \to X \to P \to M \to 0$ (P proiettivo, esatta)

Per 1ª succ. esatta lunga si ha

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(P,N) \to \underset{\varphi}{\overset{\in}{\mathrm{Hom}(X,N)}} \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to \underset{\mathrm{Ext}^1(P,N)}{\overset{\|}{0}}$$

Consideriamo ora il diagr.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[r, "p \mapsto \bar{p}"] \arrow[d, "{[p,0]}"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "m \mapsto {[0,m]}"'] & \frac{P \oplus N}{\sim} \arrow[r, "{[p,m]} \mapsto \bar{p}"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $(x,0) \sim (0, \varphi(x))\ \forall x \in X$

Dico che $\mathrm{Ext}^1(M,N) \longleftrightarrow \{0 \to N \to Y \to M \to 0\}/\sim$

dove $Y \sim Z$ se

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & Z \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con ψ isomorfismo che fa commutare i quadrati

Chiamo $\mathcal{E}_\varphi = \{0 \to N \to \frac{P \oplus N}{\sim} \to M \to 0\}$

$N \to \frac{P\oplus N}{\sim}$ è iniettiva perché $(0,m) = (x, -\varphi(x))_{x \in X} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow m = 0$
(cioè $(0,m) \sim 0$)

$\frac{P\oplus N}{\sim} \to M$ è surgettiva perché $P \to M$ lo era.

$\mathrm{Im}\ \frac{P\oplus N}{\sim}$: $(x, -\varphi(x))_{x\in X} \longrightarrow \bar{x} = 0$ perché $x \in X$. (è ben def.)

è esatta:

$m \longmapsto [0,m] \longmapsto 0$ ($\mathrm{Ker} \supseteq \mathrm{Im}$)

$[p,m] \longmapsto 0$ $\bar{p} = 0 \Rightarrow p \in X$ ($\mathrm{Ker} \subseteq \mathrm{Im}$)

$[p,m] = [p,0] + [0,m] = [0, \varphi(p) + m]_{p \in X}$

Ho quindi costruito una mappa

$$\mathrm{Hom}(X,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,N) = \{0 \to N \to Y \to M \to 0\}/\sim$$
$$\varphi \longmapsto \mathcal{E}_\varphi$$

Sia $\chi : P \to N$. Pongo $\psi = \varphi + \chi|_X \Rightarrow \mathcal{E}_\varphi \sim \mathcal{E}_\psi$

Infatti:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \frac{P \oplus N}{\sim\varphi} \arrow[r] \arrow[d, "F"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \frac{P \oplus N}{\sim\psi} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

F è ben definito e fa commutare i quadrati ponendo

$$F([p,n]) = [p, n - \chi(p)] :$$

$$F([x, -\varphi(x)]) = [x, -\varphi(x) - \chi(x)] = [x, -\psi(x)] = [0,0]$$

Quindi è isomorfismo (lemma dei 5)

Si può verificare che $Ext^1(M,N) \to \mathcal{E}xt^1(M,N)$ è bigettiva (passando in coomologia su $Hom(M,N)$)

Lo stesso ragionamento si può generalizzare per $Ext^n(M,N)$

$$Ext^n(M,N) \longleftrightarrow \{0 \to N \to Y_n \to \dots \to Y_1 \to M \to 0 \text{ esatte}\}/\sim$$

dove $\{Y_i\} \sim \{Z_i\}$ se

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y_n \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "G"] & \dots \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "G"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dalla struttura ~~bilineare~~ bilineare della composizione su Hom se ne definisce una indotta sugli Ext:

$$Hom(M,N) \times Hom(L,M) \longrightarrow Hom(L,N)$$

$$Ext^i(M,N) \times Ext^j(L,M) \longrightarrow Ext^{i+j}(L,N)$$

$$\{0 \to N \to Z_i \to \dots \to Z_1 \xrightarrow{\beta} M \to 0\} \; \{0 \to M \xrightarrow{\alpha} Y_j \to \dots \to Y_1 \to L \to 0\} \longmapsto \{0 \to N \to Z_i \to \dots \to Z_1 \xrightarrow{\alpha\beta} Y_j \to \dots \to Y_1 \to L \to 0\}$$

COMPLESSI DOPPI

Def $(X^{i,j})$ è complesso doppio se $d_O^{i,j} : X^{i,j} \to X^{i+1,j}$ e $d_V^{i,j} : X^{i,j} \to X^{i,j+1}$ differenziali e

$\forall i,j$ il quadrato

$$\begin{tikzcd}
X^{i,j+1} \arrow[r] & X^{i+1,j+1} \\
X^{i,j} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X^{i+1,j} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

commuta.

Esempio: Definiamo (complesso totale)

$$T^n = \bigoplus_{i+j=n} X^{i,j}$$ con differenziale $d_T^n : T^n \to T^{n+1}$

definito da $\quad d_T^n(\underset{X^{i,j}}{\overset{\psi}{x}}) = d_0^{(i,j)} x + (-1)^j d_V^{(i,j)}(x)$

Si verifica facile che $d_T^{n+1} \circ d_T^n = 0$, quindi $T^\bullet$ è complesso

Preso il complesso $(T^\bullet, d_T)$ vogliamo calcolare $H^n(T^\bullet)$

Consideriamo il caso particolare $X^{i,j} = 0$ per $i<0$ o $j<0$ e le righe e colonne sono esatte tranne in 0 (ovvero, le righe sono esatte da $X^{1,j}$ in poi $\forall j$ e le colonne stessa cosa).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] & X^{02} \arrow[r] & X^{12} \arrow[r] & X^{22} \\
0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] \arrow[u] & X^{01} \arrow[r] \arrow[u] & X^{11} \arrow[r] \arrow[u] & X^{21} \arrow[u] \\
0 \arrow[r] & Y^0 \arrow[r] \arrow[u] & X^{00} \arrow[r] \arrow[u] & X^{10} \arrow[r] \arrow[u] & X^{20} \arrow[u] \\
 & & Z^0 \arrow[r] \arrow[u] & Z^1 \arrow[r] \arrow[u] & Z^2 \arrow[u] \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$Y^i = \ker d_0^{0,i}$

$Z^i = \ker d_V^{i,0}$

sono complessi perché ker di morfismi tra complessi

sono nuclei

LEMMA: Se le righe di $(X^{i,j})$ sono esatte, cioè

$$\ker d_0^{(i,j)} = \operatorname{Im} d_0^{(i-1,j)} \quad \text{per } i \geq 1$$

e le colonne sono esatte, cioè $\ker d_V^{i,j} = \operatorname{Im} d_V^{i,j-1} \quad \forall i \geq 1$,

posti $Y^i = \ker d_0^{0,i}$ e $Z^i = \ker d_V^{i,0}$ allora

$$H^n(Y^\bullet) \cong H^n(T^\bullet) \cong H^n(Z^\bullet)$$

DIM: Sia $\alpha_n : Y^n \hookrightarrow X^{0,n}$ (dimostriamo per le righe, è analogo per colonne)

Definisco $Y^n \longrightarrow T^n$

$$y \longmapsto \alpha_n(y) \in X^{0,n} \subseteq T^n$$

Vale che

$$d_T(\alpha_n(y)) = (\pm d_V(\alpha_n(y)) \pm d_0(\alpha_n(y))) = \pm d_V(\alpha_n(y)) = \alpha_{n+1}(d_Y^n(y))$$

quindi è ben definita la mappa $H^n(Y) \xrightarrow{\alpha} H^n(T)$ è iniettiva: Supponiamo $\overline{\alpha(y)} = 0$, cioè

$\overline{y}$

$y \in Z_B^n(Y) \qquad \alpha(y) \in X^{0,n} \subseteq T^n$

$\alpha(y) = d_T z \qquad z \in T^{n-1}$

$z = \sum z_i \; ; \; z_i \in X^{i, n-1-i}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & \\
 & \uparrow & & & \\
Y^n \ni & y & \longrightarrow & \alpha(y) & \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \boxed{z_0} \; z' & \longrightarrow * \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & z_1 \longrightarrow * \\
 & & & & \quad\uparrow \\
 & & & & \quad z_2 \longrightarrow *
\end{array}$$

$d_V(z_0) = \alpha(y)$

$d_0(z_0) = \pm d_V(z_1)$

$d_0(z_1) = \mp d_V(z_2)$

$\vdots$

$\vdots$

$d_0(z_{n-2}) = \pm d_V(z_{n-1})$

$d_0(z_{n-1}) = 0 \Rightarrow \exists w_{n-1}$

tale che $d_0(w_{n-1}) = z_{n-1}$

$$\begin{array}{ccccc}
w_{n-2} & \longrightarrow & z_{n-2} - d_V(w_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \\
 & & w_{n-1} \longrightarrow z_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Considero $z_{n-2} - d_V(w_{n-1})$

$d_0(z_{n-2} - d_V(w_{n-1})) = 0 \Rightarrow \exists\, w_{n-2} \ldots$

$d_V(z_{n-2} - d_V(w_{n-1})) = d_V(z_{n-2}) = \pm d_0(z_{n-3})$

Rimontando tutto posso allora trovare uno z_i' tale che

$d_T(z') = \alpha(y)$

$z' \in X^{0,n-1}$ $\quad d_0(z') = 0 \rightsquigarrow \exists\, w' \in Y^{n-1} : \alpha_{n-1}(w') = z'$

$d_V(z') = \alpha(y) \quad d_Y^{n-1}(w') = y \quad \Rightarrow \bar{y} = 0$.

(in coomologia è un bordo)

La surgettività si fa allo stesso modo.

Dato $z = \sum z_i$ (cociclo), $d_0 z_n = 0 \Rightarrow \exists\, w_n$ t.c. $d_0 w_n = z_n$

$d_0(z_{n-1} - d_V(w_n)) = 0 \Rightarrow \exists\, w_{n-1}$ t.c. $d_0 w_{n-1} = z_{n-1} - d_V w_n$

E così via. Infine consideriamo

$d_0(z_0 - d_V w_1) = 0 \Rightarrow \exists!\, w_0 \in Y^n$ t.c. $d_0 w_0 = z_0 - d_V w_1$

per esattezza

Allora $\alpha(w_0) + d_T(w_i)_{i>0} = (z_i)_{i \geq 0}$

da cui la surgettività

(probabilmente i segni da prendere in $z_k \pm d_V(w_{k+1})$ si devono alternare)

ISTALG - LEZIONE 23

Siano L, M, N moduli

Per calcolare $Ext^i(M,N)$ prendo ris. iniettiva di N.

$$N \xrightarrow{q.i.} I^{\bullet} \qquad I^{\bullet} \text{ iniettivo}$$

Per calcolare $Ext^j(L,M)$ prendo ris. proiettiva di L,

$$P^{\bullet} \xrightarrow{q.i.} L \qquad P^{\bullet} \text{ proiettivo}$$

$\forall \alpha, \beta$ si ha l'appl. bilineare

$$Hom(M, I^{\alpha}) \times Hom(P^{\beta}, M) \longrightarrow Hom(P^{\beta}, I^{\alpha})$$

Costruisco complesso doppio:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \\ Hom(P^0, I^1) & \longrightarrow & Hom(P^{-1}, I^1) & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow & & \uparrow d_I \circ - & & \\ Hom(P^0, I^0) & \xrightarrow{-\circ d_P} & Hom(P^{-1}, I^0) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

I quadrati commutano.

Chiamo $X^{i,j} = Hom(P^{i}, I^{j})$ e considero $T := Tot(X^{\bullet,\bullet})$ il complesso totale associato a $X^{\bullet,\bullet}$.

Siamo nelle ipotesi del lemma, ovvero righe e colonne sono esatte, per cui, essendo $Y^n = Hom(L, I^n)$ $(Z^n = Hom(P^{-n}, N))$

$$H^n(T) = H^n(Hom(L, I^{\bullet})) \cong Ext^n(L,N)$$

$$Ext^i(M,N) \times Ext^j(L,M)$$

$$[\psi] \times [\varphi]$$

cioè $d \circ \psi = 0$ e $\psi \in Hom(M, I^i)$

cioè $\varphi \circ d = 0$ e $\varphi \in Hom(P^{-j}, M)$ (il bordo è controvariante)

$\Rightarrow \psi \circ \varphi \in Hom(P^{-j}, I^i) = X^{-j,i} \subseteq T^{i+j}$

$$d_T(\psi \circ \varphi) = d_0(\psi\circ\varphi) \pm d_V(\psi\circ\varphi) = \underline{d\psi}\varphi \pm \psi\underline{\varphi d} = 0$$

Quindi dati $[\psi], [\varphi]$ abbiamo definito

$$[\psi \circ \varphi] \in Ext^{i+j}(L,N)$$

Resta da verificare che se $\psi = d_I \circ \chi$ allora $[\psi\circ\varphi] = 0$

$$\psi \circ \varphi = d_I \circ \chi \circ \varphi = d_T(\chi \circ \varphi)$$

(Analogamente per φ)

perché $\varphi \circ d_P = 0$, quindi $d_I \chi \varphi = d_I \chi \varphi + \chi \varphi d_P = d_T(\chi\varphi)$

• Sia G un gruppo, R anello comm.[con 1] (di solito $R=\mathbb{Z}$)

Def Un R-G-modulo è un R-mod. M su cui agisce G in modo R-lineare.

Def $\varphi: M \to N$ è di R-G-mod. se è di R-mod. e se

$$\varphi(g\cdot m) = g\cdot\varphi(m) \qquad \forall g\in G \ \ \forall m\in M$$

OSS. La categoria che costituiscono è abeliana con abb. inj e proj.

Consideriamo i seguenti funtori:

F_1, F_2 : R-G-moduli $\longrightarrow$ R-moduli

$$F_1(M) = M^G = \{m\in M \mid gm = m \ \ \forall g\in G\} \qquad \text{è esatto a sinistra}$$

$$F_2(M) = M_G = \frac{M}{\langle m - gm \mid m\in M, g\in G\rangle} \qquad \text{è esatto a destra}$$

$$R^n F_1(M) =: H^n(G;M)$$
$$L^n F_2(M) =: H_n(G;M)$$

Si definiscono così omologia e coomologia di gruppi a coefficienti in R-G-moduli

Infatti:
Gli R-G-moduli e gli $R[G]$-moduli sono la stessa cosa

$R[G] := \bigoplus_{g\in G} R_g$ con $(a\cdot g)\cdot(b\cdot h) = (ab)\cdot(gh)$ $\quad a,b\in R$, $g,h\in G$

Poiché $R \subseteq$ Centro$(R[G])$, $R[G]$ (come anello) ($R[G]$-modulo) è anche una R-algebra.

L'identificazione è ovvia ($R[G]$-mod $\longleftrightarrow$ R-G-mod)

Stessa cosa per i morfismi.

Quindi la categoria ha abbastanza inj. e proj.

$$M^G \cong \operatorname{Hom}_{R[G]}(R, M) \qquad \text{(dove } G \text{ agisce banalmente su } R\text{)}$$

$$m \longmapsto (\varphi_m : r \mapsto rm)$$
$$\varphi(1) \longleftarrow\!\!\!| \ \varphi$$

Quindi il funtore F_1 è uguale al funtore $\operatorname{Hom}_{R[G]}(R, -)$

Il che significa che $\boxed{H^n(G;M) = \mathrm{Ext}^n_{R[G]}(R,M)}$ (considero R come $R[G]$-mod sx)

Inoltre $\underbrace{\dfrac{R[G]}{\langle 1-g \mid g\in G\rangle}}_{I_G} \cong R$

quindi $0 \to I_G \hookrightarrow R[G] \to R \to 0$ esatta
$g \longmapsto 1$

$\Rightarrow M_G = \dfrac{M}{I_G M} = R \otimes_{R[G]} M$

Quindi $F_2 = R \otimes_{R[G]} -$

da cui $\boxed{H_n(G;M) = \mathrm{Tor}_n^{R[G]}(R,M)}$ (considero R come $R[G]$-mod destro, G agisce banalm.)

Per calcolare $H^n(G;M)$

Prendo una risoluzione proiettiva costruita così:

$$\dots \to P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0$$

dove $P^{-n} := R[G^{n+1}]$ con azione diagonal sx (o destra)

$g\cdot(g_0,\dots,g_n) = (gg_0,\dots,gg_n)$

$\varepsilon : R[G] \to R$
$g \longmapsto 1$

$d^{-n} : R[G^{n+1}] \to R[G^n]$
$(g_0,\dots,g_n) \longmapsto \sum^n (-1)^i (g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,g_n)$

→ P^{-n} è libero (come $R[G]$-mod) (e dunque proiettivo)

→ $d^{-n+1} \circ d^{-n} = 0$

→ $\varepsilon \circ d^{-1} = 0$

→ La succ. è esatta

Infatti: → P^{-n} ha come $\mathbb{Z}$-base ~~[illegible]~~ G^{n+1}.

Come $R[G]$-mod. ha base $(1,g_1,\dots,g_n)$ $(\cong G^n)$
(uso l'azione diagonale)

→ $d^{-n+1} \circ d^{-n}(g_0,\dots,g_n) = d^{-n+1}\left(\sum_i^n (-1)^i (g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,g_n)\right) =$

$= \sum^n (-1)^i d^{-n+1}(g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0} (-1)^j (g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,\check{g}_j,\dots,g_n)$

$= 0$ perché $\forall (i,j)$ ho 2 addendi con coeffic. $(-1)^i(-1)^{j+1}$ e $(-1)^j(-1)^i$.

→ $\varepsilon \circ d^{-1}(g_0,g_1) = \varepsilon(g_1 - g_0) = 1-1 = 0$

→ Per dimostrare che è esatta vogliamo dire che ha coomologia nulla. Per dire ciò diciamo che

$id \sim 0$, da cui $H^n(id) = id_{H^n(P)} = 0_{H^n(P)} = H^n(0)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h^{-1}"'] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h^{0}"'] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h^{1}"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^{0} \arrow[r] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$h^1 : R \to R[G]$ $\qquad\qquad$ $h^{-n} : P^{-n} \to P^{-n-1}$ $\qquad$ ← Sono R-lineari e non $R[G]$-lineari, ma ci basta perché l'essere esatto non dipende dalla linearità che voglio considerare

$1 \mapsto 1_G$ $\qquad\qquad$ $(g_0,\dots,g_n) \mapsto (1,g_0,\dots,g_n)$

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl] \arrow[d, equal] \\
P^0 \arrow[r] & R
\end{tikzcd}$$

commuta perché $\varepsilon h^1(r) = \varepsilon(r 1_G) = r = id_R(r)$.

Per gli altri: $(d^{-n-1}h^{-n} + h^{-n+1}d^{-n})(g_0,\dots,g_n) =$

$= d^{-n-1}h^{-n}(g_0,\dots,g_n) + h^{-n+1}d^{-n}(g_0,\dots,g_n) =$

$= d^{-n-1}(1,g_0,\dots,g_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1,g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,g_n) =$

$= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j(\underset{j=0}{1},\underset{j=1}{g_0},\dots,\check{g}_{j-1},\dots,\underset{j=n+1}{g_n}) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1,g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,g_n) =$

$= (g_0,\dots,g_n)$. Si cancellano tutti tranne il primo addendo della 1ª somma

Applicando il funtore $\mathrm{Hom}_{R[G]}(-,M)$ otteniamo

$$0 \to \mathrm{Hom}_{R[G]}(P^0,M) \xrightarrow{-\circ d^{-1}} \mathrm{Hom}_{R[G]}(P^{-1},M) \to \mathrm{Hom}_{R[G]}(P^{-2},M) \to \cdots$$

$\mathrm{Hom}_{R[G]}(P^{-n},M) \cong \{f : G^n \to M\} =: C^n(G;M)$ (perché P^{-n} ha base $\cong G^n$ come $R[G]$-mod)

Pongo $\delta^n : C^n(G,M) \to C^{n+1}(G;M)$ dove

$$(\delta^n f)(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1}) +$$
$$+ (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n)$$

Applicando invece il funtore ~~$R\otimes_{R[G]}$~~ $(-\otimes_{R[G]} M)$

$$\cdots \to P^{-2}\otimes_{R[G]} M \to P^{-1}\otimes_{R[G]} M \to P^{0}\otimes_{R[G]} M \to 0$$

Poniamo $C_{-n}(G,M) = \{f : G^n \to M \text{ a supp. finito}\}$

e definisco

$\partial^n : C_{-n}(G,M) \to C_{-n+1}(G,M)$ come

$$(\partial^n f)(g_1,\dots,g_{n-1}) = \sum_{g\in G}\Big(g^{-1}f(g,g_1,\dots,g_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(g,g_1,\dots,g_ig^{-1},\dots,g_{n-1}) +$$
$$+ (-1)^n f(g_1,\dots,g_{n-1},g^{-1})\Big)$$

Forse! Si basa su speculazioni date da $(\partial^2 f)(g) = \sum_{h\in G}(h^{-1}f(h,g) - f(h,h^{-1}g) + f(g,h))$

estese poi per linearità a $R[G^{m+1}]$

$$\mathrm{Hom}_{R[G]}(P^{-m}, M) = \{ \alpha : G^{m+1} \to M \mid \alpha(gg_0, \dots, gg_m) = g\,\alpha(g_0, \dots, g_m) \}$$

$$\alpha(g_0, \dots, g_m) = g_0 f(g_0^{-1} g_1, \dots, g_{m-1}^{-1} g_m)$$

$$\{ f : G^m \to M \}$$

$$f(g_1, \dots, g_m) = \alpha(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_m)$$

le applicazioni di bordo commutano, cioè

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{d} & d\alpha \\ \updownarrow & \circlearrowright & \updownarrow \\ f & \xrightarrow{\delta} & \delta f \end{array}$$

$$(d\alpha)(g_0, \dots, g_{m+1}) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \alpha(g_0, \dots, \check{g_i}, \dots, g_m)$$

$$(\delta^m f)(g_1, \dots, g_{m+1}) = (d\alpha)(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_{m+1}) =$$

$$= \alpha(g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \alpha(1, g_1, \dots, \check{g_1 \cdots g_i}, \dots, g_1 \cdots g_{m+1}) =$$

$$= \underbrace{g_1 \alpha(1, g_2, \dots, g_2 \cdots g_{m+1})}_{g_1 f(g_2, \dots, g_m)} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{m+1}) +$$

$$+ (-1)^{m+1} f(g_1, \dots, g_m)$$

Quindi ha senso la definizione del cobordo $\delta : C^m(G;M) \to C^{m+1}(G;M)$

Analogamente si mostra l'equivalenza tra $P^i \otimes_{R[G]} M$ e $C_i(G;M)$ e delle relative mappe di bordo.

ISTALG - LEZIONE 24

OSS. Abbiamo

$$0 \to C^0(G;M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G;M) \xrightarrow{\delta^1} C^2(G;M) \to \dots$$

quindi $$H^1(G;M) = H^1(C^\cdot) = Z^1/B^1$$

Esplicitamente:

$$Z^1 = \{ f : G \to M \mid \delta^1 f = 0 \} =$$
$$= \{ f : G \to M \mid \forall g,h \in G \ \ g \cdot f(h) - f(gh) + f(g) = 0 \} =$$
$$= \{ f : G \to M \mid f(gh) = g \cdot f(h) + f(g) \ \ \forall g,h \in G \}.$$

$$B^1 = \{ \underbrace{\delta^0 f}_{g \mapsto gm - m} \mid f : \underbrace{\{\cdot\} \to M}_{\cdot \mapsto m} \} = \{ f : G \to M \mid \exists m \in M : f(g) = g \cdot m - m \ \ \forall g \in G \}$$

per cui

$$H^1(G;M) = \{ f : G \to M \mid f(gh) = f(g) + g \cdot f(h) \} \Big/ \langle g \mapsto gm - m \mid m \in M \rangle$$

D'altronde ~~sappiamo che~~ avevamo già definito per Γ, A gruppi

$$H^1(\Gamma, A) = \{ \varphi : \Gamma \to A \mid \varphi_{\gamma\delta} = \varphi_\gamma\, {}^\gamma(\varphi_\delta) \} \Big/ \sim$$

con $\varphi \sim \psi$ se $\exists a \in A$ t.c. $\varphi_\gamma = a \psi_\gamma\, {}^\gamma(a^{-1})$. Nel caso in cui A è abeliano, ha la struttura ovvia di $\mathbb{Z}$-modulo.

- $\varphi_{\gamma\delta} = \varphi_\gamma\, {}^\gamma(\varphi_\delta)$ diventa $\varphi_{\gamma\delta} = \varphi_\gamma + \gamma \cdot \varphi_\delta$
- $\varphi \sim \psi$ diventa $\exists a \in A$ t.c. $\varphi_\gamma = \psi_\gamma + a - \gamma \cdot a$

Quindi la costruzione fatta sopra è compatibile con quella fatta in precedenza nel caso particolare in cui $A = M$ uno $\mathbb{Z}$-modulo.

ESERCIZI

Esercizio 6.1: Γ, G gruppi. Γ agisce su G e $H^1(\Gamma, G) = 0$

X insieme su cui agiscono G e Γ compatibilmente

$S = \mathrm{Stab}_G(x_0)$ con $x_0 \in X^\Gamma$ $\Rightarrow$ S è stabile sotto Γ.

G agisce su X transitivamente.

Dimostra che $X^\Gamma / G^\Gamma \longleftrightarrow H^1(\Gamma, S)$

DIM: • $g \in S$, $\gamma \in \Gamma$ Dico che ${}^\gamma g \in S$ (cioè ${}^\gamma g \cdot x_0 = x_0$)

$${}^\gamma g \cdot x_0 = {}^\gamma g \cdot {}^\gamma x_0 = {}^\gamma (g \cdot x_0) = {}^\gamma x_0 = x_0$$

• G agisce su X transitiv. $\Rightarrow$ $X^\Gamma / G^\Gamma = \{[g \cdot x_0]\}_{g \in R}$

$\Rightarrow X/G = \{[x_0]\} \longleftrightarrow \{d_0^{(0)}\} = H^1(\Gamma, G)$

dove $d_0^{(0)} : \gamma \longmapsto 1_G$ il cociclo banale (l'unico che c'è)

$$X^\Gamma / G^\Gamma \longleftrightarrow H^1(\Gamma, S)$$

$$[g \cdot x_0] \xmapsto{\ \Phi\ } [g^{-1}\, {}^\bullet g]$$

$$\gamma \longmapsto g^{-1}\, {}^\gamma g$$

Verifiche:

1) È ben definita: se $g \cdot x_0 \in X^\Gamma$, allora $g^{-1}\, {}^\gamma g \in S$ $\forall \gamma \in \Gamma$

2) Se $g \cdot x_0 \in X^\Gamma$ allora $g^{-1}\, {}^\bullet g$ è un cociclo

3) Se $g \cdot x_0 = h \cdot x_0 \in X^\Gamma$, allora $g^{-1}\, {}^\bullet g \sim h^{-1}\, {}^\bullet h$

4) Se $[g \cdot x_0] = [h \cdot x_0]$ allora $\Phi([g \cdot x_0]) = \Phi([h \cdot x_0])$

$\boxed{1}$ $(g^{-1}\, {}^\gamma g) \cdot x_0 \underset{x_0 \in X^\Gamma}{=} g^{-1}\, {}^\gamma (g \cdot x_0) = g^{-1} g \cdot x_0 = x_0$

$\boxed{2}$ $(g^{-1}\, {}^\gamma g)\, {}^\gamma (g^{-1}\, {}^\delta g) = g^{-1}\, \cancel{{}^\gamma g}\, \cancel{{}^\gamma g^{-1}}\, {}^{\gamma\delta} g = g^{-1}\, {}^{\gamma\delta} g$

$\boxed{3}$ Ponendo $k = g^{-1} h$ si ha

$$g^{-1}\, {}^\gamma g = g^{-1} h\, h^{-1}\, {}^\gamma h\, {}^\gamma h^{-1}\, {}^\gamma g = k (h^{-1}\, {}^\gamma h)\, {}^\gamma k^{-1}$$

$k \in S$ perché $g \cdot x_0 = h \cdot x_0 \Rightarrow g^{-1} h \cdot x_0 = x_0$

$\boxed{4}$ $[g \cdot x_0] = [h \cdot x_0] \Rightarrow \exists k \in G^\Gamma$ t.c. $h \cdot x_0 = k g \cdot x_0$

Allora $(kg)^{-1}\, {}^\gamma (kg) = g^{-1} k^{-1} \underbrace{{}^\gamma k}_{k}\, {}^\gamma g = g^{-1}\, {}^\gamma g$.

Resta da verificare che Φ è surgettiva e iniettiva.

- Φ surg.: $\forall d_0 \in H^1(\Gamma, S)$ $\exists h \in G$ t.c. $h \cdot x_0 \in X^\Gamma$ e $\phi([h \cdot x_0]) \sim d_0$

$S < G \Rightarrow Z^1(\Gamma, S) \hookrightarrow Z^1(\Gamma, G)$. d_0 lo vedo in $Z^1(\Gamma, G)$:

$H^1(\Gamma, G) = \{d^{(0)}_0\} \Rightarrow \exists g \in G$ t.c. $\forall \gamma \in \Gamma$ $d_\gamma = g \cdot d^{(0)}_\gamma \, {}^\gamma g^{-1} = g \, {}^\gamma g^{-1} \in S$.

Prendendo allora $h = g^{-1}$ funziona.

- Φ iniettiva: sono verifiche tranquille, si fa...

Esercizio 6.5: $K \subseteq L$ estensione di Galois e sia $\Gamma = Gal(L/K)$. Assumiamo char $K \neq 2$. Il gruppo simplettico $Sp(2n, L)$ è il seguente sottogruppo simplettico stabile per l'azione di Γ (che agisce sui coefficienti):

$$Sp(2n, L) = \left\{ g \in GL(2n, L) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g^t = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si dimostri che $H^1(\Gamma, Sp(2n, L)) = \{1\}$.

DIM: Sia $X = \{A \in M(2n, 2n, L) \mid A^t = -A$ e A di rango $2n\}$

$G = GL(2n, L)$ agisce transitivamente su X

(l'azione è $g \cdot A = g A g^t$). Anche Γ agisce su X:

${}^\gamma(a_{ij}) = ({}^\gamma a_{ij})$. Le azioni sono compatibili:

$${}^\gamma(g A g^t) = ({}^\gamma g \, {}^\gamma A \, {}^\gamma g^t)$$

Allora $S = Stab_G \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = Sp(2n, L)$

Per l'esercizio precedente, $H^1(\Gamma, S) \longleftrightarrow X^\Gamma / G^\Gamma$,

ma $X^\Gamma = \{A \in M(2n, 2n, K) \mid A^t = -A, \; rk A = 2n\}$

$G^\Gamma = GL(2n, K) \Rightarrow X^\Gamma / G^\Gamma = \{1\}$ per motivi di algebra lineare

Esercizio 6.6: Sia $\Gamma = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Si calcoli la cardinalità di $H^1(\Gamma, O(n, \mathbb{C}))$

$\{x \in M(n, n, \mathbb{C}) : x^t x = id\}$

DIM: Γ agisce come prima.

$X := \{A \in M(n, n, \mathbb{C}) \mid A^t = A, \; rk A = n\}$

$G := GL(n, \mathbb{C})$ con $g \cdot A = g A g^t$ $\curvearrowright X$

G agisce transitivamente su X e $S = Stab_G(I_n) = O(n, \mathbb{C})$

per cui, per l'esercizio 6.1,

$$H^1(\Gamma, \mathcal{O}(n,\mathbb{C})) \longleftrightarrow X^\Gamma / G^\Gamma$$

Ma: $\cdot\ X^\Gamma = \{A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{R}) \mid A^t = A,\ \mathrm{rk}\,A = n\}$

$\cdot\ G^\Gamma = GL(n,\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \left| X^\Gamma / G^\Gamma \right| = \left| \{ \text{possibili segnature non degeneri} \} \right| = n+1$$

OSS [Riguardo all'esercizio 7.1, Lemma di Yoneda]

Di solito si considera

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{CONTROVARIANTE}} & \mathrm{Funtori}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}) \\ x & \longmapsto & h_x \\ (x \to z) & \longmapsto & \left(h_z \to h_x, \text{ ovvero } \begin{array}{ccc} h_z(y) & \longrightarrow & h_x(y) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}(z,y) & \xrightarrow{\circ f} & \mathrm{Hom}(x,y) \end{array} \right) \end{array}$$

Vale che
$$\mathrm{Nat}(h_x, h_y) \cong h_y(x) = \mathrm{Hom}(y,x)$$

Talvolta, anziché usare un oggetto x, si costruisce un funtore e si mostra che è "rappresentabile" come h_{QUALCOSA}.

Esercizio 7.5: Si dimostri che nella categoria degli anelli con 1 comm. esistono prodotti e coprodotti arbitrari e si descrivano.

DIM: Il prodotto è proprio il prodotto cartesiano.

Il coprodotto nel caso finito è il prodotto tensore, mentre in generale:

$$A_{i_1} \subseteq A_{i_1} \otimes_{\mathbb{Z}} A_{i_2} \subseteq A_{i_1} \otimes_{\mathbb{Z}} A_{i_2} \otimes_{\mathbb{Z}} A_{i_3} \subseteq \dots$$

per cui:

$$\coprod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ i_1, \dots, i_n \in I}} \mathbb{Z}(a_{i_1} \otimes \dots \otimes a_{i_n})$$

Vale distributiva e
$a_{i_1} \otimes \dots \otimes a_{i_n} = a_{i_1} \otimes \dots \otimes a_{i_n} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$

con + usuale e moltiplicazione:

$$\begin{cases} x = a_I \otimes 1 \dots = a_{I \cup J} \otimes 1 \dots \\ y = a'_J \otimes 1 \dots = a'_{I \cup J} \otimes 1 \dots \end{cases} \Rightarrow xy = (a_{I \cup J} \cdot a'_{I \cup J}) \otimes 1 \dots$$

OSS. La categoria degli anelli commutativi con 1 non è quindi una categoria additiva: la somma di due frecce non è una freccia (perché manda l'1 in 2).

OSS. Dall'esercizio 6.4, posto $\Gamma = Gal(L/K)$, si ha:

$$1 \longrightarrow SL(n,L) \longrightarrow GL(n,L) \xrightarrow{\det} L^* \longrightarrow 1 \quad \text{esatta}$$

$$\Downarrow$$

$$1 \longrightarrow SL(n,K) \longrightarrow GL(n,K) \longrightarrow K^* \longrightarrow H^1(\Gamma, SL(n,L)) = \{0\}$$

che è ancora una successione esatta corta.

ISTALG_ LEZIONE 25

OSS. Se $1 \to C \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \to 1$ esatta di Γ-gruppi, abbiamo:

$$1 \to C^\Gamma \to G^\Gamma \to H^\Gamma \to H^1(\Gamma, C) \to H^1(\Gamma, G) \to H^1(\Gamma, H) \quad \text{esatta}$$

ovvero sono $\mathbb{Z}[\Gamma]$-mod.

Se i gruppi sono abeliani, la successione prosegue con gli H^2 ecc... In realtà, basta che si abbia C centrale in G perché esista

$C \leq Z(G)$

$$H^1(\Gamma, H) \xrightarrow{\delta} H^2(\Gamma, C) \quad \text{, dato da:}$$

Non basta C abeliano, è troppo restrittivo chiedere C e G abeliani, basta C centrale in G.

- Se $c_\sigma \in Z^1(\Gamma, H)$, cioè $c: \Gamma \to H$ con $c_{\sigma\tau} = c_\sigma\, {}^\sigma(c_\tau)$, allora possiamo scrivere $c_\sigma = \beta(g_\sigma)$ (per esattezza in H).
- Non vale $g_{\sigma\tau} = g_\sigma\, {}^\sigma(g_\tau)$, ma è definito:

$$\psi_{\sigma,\tau} = g_\sigma\, {}^\sigma(g_\tau)\, g_{\sigma\tau}^{-1}$$

$$\psi: \Gamma \times \Gamma \to C \quad \text{perché } \beta(\psi_{\sigma,\tau}) = 1_H \text{ e}$$

sto identificando C con $\alpha(C) \leq G$

- Vale $\partial\psi(\sigma, \tau, \rho) = {}^\sigma\psi_{\tau,\rho}\,(\psi_{\sigma\tau,\rho})^{-1}\,\psi_{\sigma,\tau\rho}\,(\psi_{\sigma,\tau})^{-1} =$

C abeliano, quindi è $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modulo, quindi abbiamo definito questo bordo

$$= {}^\sigma(g_\tau\, {}^\tau g_\rho\, g_{\tau\rho}^{-1})\,(g_{\sigma\tau\rho}\, {}^{\sigma\tau}g_\rho^{-1}\, g_{\sigma\tau}^{-1})\,(g_\sigma\, {}^\sigma g_{\tau\rho}\, g_{\sigma\tau\rho}^{-1})\,(g_{\sigma\tau}\, {}^\sigma g_\tau^{-1}\, g_\sigma^{-1})$$

- C centrale in $G \Rightarrow C$ abeliano, per cui i fattori commutano: (scambio i 2 fattori centrali)

$$\partial\psi(\sigma,\tau,\rho) = {}^\sigma g_\tau\, {}^{\sigma\tau}g_\rho\, {}^\sigma g_{\tau\rho}^{-1}\, g_\sigma\, {}^\sigma g_{\tau\rho}\, \cancel{g_{\sigma\tau\rho}^{-1}}\, \cancel{g_{\sigma\tau\rho}}\, {}^{\sigma\tau}g_\rho^{-1}\, \cancel{g_{\sigma\tau}^{-1}}\, \cancel{g_{\sigma\tau}}\, {}^\sigma g_\tau^{-1}\, g_\sigma^{-1} =$$

$$= \underbrace{({}^\sigma g_\tau\, {}^{\sigma\tau}g_\rho\, {}^\sigma g_{\tau\rho}^{-1})}_{A}\, g_\sigma\, ({}^\sigma g_{\tau\rho}\, {}^{\sigma\tau}g_\rho^{-1}\, {}^\sigma g_\tau^{-1})\, g_\sigma^{-1} =$$

$$= A\, g_\sigma\, A^{-1}\, g_\sigma^{-1} \qquad (A \in C)$$

- Essendo C centrale in G (ecco perché non basta soltanto C abeliano):

$$\partial\psi(\sigma,\tau,\rho) = A g_\sigma A^{-1} g_\sigma^{-1} = A A^{-1} g_\sigma g_\sigma^{-1} = 1_C .$$

- Se $\tilde{g}_\sigma = g_\sigma\, d_\sigma$ (e $\beta(g_\sigma) = \beta(\tilde{g}_\sigma)$), allora $\psi_{\sigma,\tau} \sim \tilde{\psi}_{\sigma,\tau} = \tilde{g}_\sigma\, {}^\sigma(\tilde{g}_\tau)\, \tilde{g}_{\sigma\tau}^{-1}$. Infatti:

$$\tilde{\psi}_{\sigma,\tau} = g_\sigma d_\sigma\, {}^\sigma g_\tau\, {}^\sigma d_\tau\, g_{\sigma\tau}^{-1} d_{\sigma\tau}^{-1} \underset{\uparrow}{=} \psi_{\sigma\tau} \cdot \underbrace{(d_\sigma\, {}^\sigma d_\tau\, d_{\sigma\tau}^{-1})}_{({}^\sigma d_\tau d_{\sigma\tau}^{-1} d_\sigma)}$$

Sto ancora in C

$d_\sigma \in \mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Im}\,\alpha \subset Z(G)$ $(d_\cdot : \Gamma \to C)$

$\in B^2(\Gamma, C)$ (è $= a\ \partial d_{(\sigma,\tau)}$)

(Bisogna sempre stare attenti a far commutare elementi di C)

Abbiamo quindi una $\Delta : Z^1(\Gamma, H) \longrightarrow H^2(\Gamma, C)$.

Vediamo che Δ passa a $H^1(\Gamma, H)$ e che la successione ottenuta è esatta:

- Se $c \sim c'$, allora $\Delta(c) = \Delta(c')$ [sono verifiche, si fa...]
- Se $\Delta([c]) = [1]$, allora $[c] = [\beta(g)]$ per qualche $g \in Z^1(\Gamma, G)$ [anche qui, si fa...]

COOMOLOGIA PER GRUPPI CICLICI

PROPOSIZIONE:
Se $\Gamma = \mathbb{Z}/_{m}\mathbb{Z}$ e A è un $R[\Gamma]$-modulo, allora:

1) $H^1(\Gamma, A) \cong \mathrm{Ker}\, N /_{\mathrm{Im}\, D}$

2) $H^2(\Gamma, A) \cong A^{\Gamma}/_{\mathrm{Im}\, N} \cong \mathrm{Ker}\, D/_{\mathrm{Im}\, N}$

dove

$$N : A \longrightarrow A \qquad , \qquad D : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto \sum_{i=0}^{m-1} {}^{\bar{i}}a \qquad\qquad a \longmapsto {}^{\bar{1}}a - a$$

N si dice norma. Si intende $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$

DIM: $\boxed{1}$
$$H^1(\Gamma, A) = \frac{\{ f : \mathbb{Z}/_{m}\mathbb{Z} \to A \mid f(\bar{i} + \bar{j}) = f(\bar{i}) + {}^{\bar{i}}f(\bar{j}) \}}{\{ f : \mathbb{Z}/_{m}\mathbb{Z} \to A \mid f(\bar{i}) = {}^{\bar{i}}b - b \text{ per un certo } b \in A \}}$$

Se $f \in Z^1(\Gamma, A)$, allora:

- $f(\bar{0}) = 0$, perché $f(\bar{j}) = f(\bar{0}) + f(\bar{j})$.
- $f(\bar{1}) = a \Rightarrow f(2) = a + {}^{\bar{1}}a$

$$f(3) = a + {}^{\bar{1}}a + {}^{\bar{2}}a$$
$$\vdots$$
$$f(m-1) = a + {}^{\bar{1}}a + \dots + {}^{\overline{m-2}}a$$

Quindi $0 = f(\bar{0}) = f(\bar{m}) = a + {}^{\bar{1}}a + \dots + {}^{\overline{m-1}}a$.

Definendo
$$f_a : \mathbb{Z}/_{m}\mathbb{Z} \to A, \qquad \bar{i} \longmapsto a + \dots + {}^{\overline{i-1}}a$$
abbiamo che

$f_a \in Z^1(\Gamma, A) \Leftrightarrow a \in \mathrm{Ker}\, N$ (la freccia $\Leftarrow$ si fa)

e inoltre si ha anche che (per quanto visto sopra) ogni cociclo è un f_a per un certo a.

Quindi $Z^1(\Gamma, A) \cong \operatorname{Ker} N$.

Invece, più banalmente, $f \in B^1(\Gamma, A) \iff f(\bar{\imath}) = {}^{i}b - b$ per un certo $b \in A$, da cui $B^1(\Gamma, A) \cong \operatorname{Im} D$.

$\boxed{2}$ Definiamo

$$\varphi : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(\bar{\imath}, \bar{\jmath}) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } i+j < n \\ 1 & \text{se } i+j \geq n \end{cases}$$

e poniamo $\Psi : A^{\Gamma} \longrightarrow H^2(\Gamma, A)$
$$a \longmapsto \Psi_a(\bar{\imath}, \bar{\jmath}) = \varphi(\bar{\imath}, \bar{\jmath}) \cdot a$$

Questo è ben definita perché:

- $\varphi(i, j) \cdot a \in A^{\Gamma} \subseteq A$
- $\partial \Psi_a(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}) = \Psi_a(\bar{\jmath}, \bar{k}) - \Psi_a(\overline{i+j}, \bar{k}) + \Psi_a(\bar{\imath}, \overline{j+k}) - \Psi_a(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$

  Dico che è $= 0$:

  $\to$ se $i+j+k < n$, $\partial \Psi_a = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$

  $\to$ se $i+j+k \geq n$, $i+j < n$, $j+k < n$: $\partial \Psi_a = 0 - a + a - 0 = 0$

  $\to$ se $i+j+k \geq n$, $i+j \geq n$, $j+k < n$: $\partial \Psi_a = 0 - 0 + a - a = 0$

  $\to$ se $i+j+k \geq n$, $i+j < n$, $j+k \geq n$: $\qquad \Psi_a(\overline{i+j}, \bar{k}) = \Psi_a(i+j-n, \bar{k})$ e $i+j+k-n < n$

  $$\partial \Psi_a = a - a + \underset{\text{come sopra}}{0} - 0 = 0.$$

  $\to$ se $i+j+k \geq n$, $i+j \geq n$, $j+k \geq n$: $\partial \Psi_a = a - * + * - a = 0$ $\qquad$ o entrambi 0 o entrambi a

  Quindi $\Psi_a \in Z^2(\Gamma, A)$.

- $\Psi_{a+b} = \Psi_a + \Psi_b$. (quindi Ψ è omomorfismo)
- Se $\Psi_a \in B^2(\Gamma, A)$, allora $\Psi_a(\bar{\imath}, \bar{\jmath}) = \ell(i) + {}^{i}\ell(j) - \ell(i+j)$ per qualche $\ell : \Gamma \to A$. $\Rightarrow \Psi_a(\bar{0}, \bar{0}) = \ell(0) \Rightarrow \ell(0) = 0$.

  Ponendo $b = \ell(1)$, vale:

  $$\ell(i+1) = \ell(i) + {}^{i}\ell(1) - \underbrace{\Psi_a(\bar{\imath}, 1)}_{0 \text{ per } i < n-1} \quad \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \ell(i) = b + {}^{1}b + \dots + {}^{i-1}b \quad \forall i < n-1, \text{ e } \ell(n-1) = \ell(n-2) + {}^{n-2}b$$

  Quindi $\ell(i) = b + {}^{1}b + \dots + {}^{i-1}b$ $\forall i < n$, da cui

  $$0 = \ell(0) = \ell(n) = b + \dots + {}^{n-1}b - \underset{\Psi_a(n-1, 1)}{a} \Rightarrow a \in \operatorname{Im} N$$

Tutte le frecce si girano tranquillamente, cioè $\ker\varphi = \mathrm{Im}\, N$

Resta da vedere la surgettività: se $\psi \in Z^2(\Gamma, A)$, vogliamo che esista $a \in A^\Gamma$ per cui $\Phi_a \in \psi + B^2(\Gamma, A)$. Ma:

$$\Phi_a : \quad \begin{array}{c|cccccc}
\overline{n-1} & 0 & a & a & a & \cdots & a \;\; a \\
\overline{n-2} & 0 & 0 & a & a & \cdots & \vdots \;\; \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & a \;\; a \\
\overline{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & & a \;\; a \\
\overline{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \;\; a \\
\overline{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \;\; 0 \\
\hline
 & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \cdots & & \overline{n-2} \;\; \overline{n-1}
\end{array}$$

Ponendo
$$\ell : \begin{cases} \ell(0) = -\psi(0,0) \\ \ell(i+1) = \psi(1,i) + \ell(1) + {}^1\ell(i) \end{cases}$$

Allora $\psi \sim \tilde\psi$, con $\tilde\psi(i,j) = \psi(i,j) \underbrace{- \ell(i+j) + \ell(i) + {}^i\ell(j)}_{\partial \ell}$.

Vale che:

- $\tilde\psi(0,0) = \psi(0,0) - \ell(0) + \ell(0) + \ell(0) = \psi(0,0) - \psi(0,0) = 0$
- $\tilde\psi(1,i) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n-2$, essendo
$$\tilde\psi(1,i) = \psi(1,i) \underbrace{- \ell(i+1)}_{-\psi(1,i) - \ell(1) - {}^1\ell(i)} + \ell(1) + {}^1\ell(i) = 0$$
- Essendo $\tilde\psi \in Z^2(\Gamma, A)$; $\forall u, v, w$:
$${}^u\tilde\psi(v,w) = \tilde\psi(u+v, w) - \tilde\psi(u, v+w) + \tilde\psi(u,v)$$
da cui:

  $\rightarrow$ $u = v = 0$: $\tilde\psi(0,w) = 0 \quad \forall w$

  $\rightarrow$ $v = w = 0$: $\tilde\psi(u,0) = 0 \quad \forall u$

  $\rightarrow$ $u = 1$: $\tilde\psi(v+1, w) = {}^1\tilde\psi(v,w) + \tilde\psi(1, v+w) - \tilde\psi(1,v)$

  da cui per induzione
$$\begin{cases} \tilde\psi(u,v) = 0 & \text{se } u+v < n \\ \tilde\psi(u,v) = {}^{u+v}a & \text{se } u+v \geq n \text{ e } u < n-1 \end{cases}$$
  per un certo "a" definito come

  $a := \psi(1, n-1)$. Va dimostrato che $a \in A^\Gamma$ e

  che $\tilde\psi(\overline{n-1}, w)$ fa ciò che deve fare.

- $\tilde\psi(n-1, w) = {}^1\tilde\psi(n-2, w) + \underbrace{\tilde\psi(1, w+n-2)}_{\tilde\psi(1, w-2)} - \underbrace{\tilde\psi(1, n-2)}_{0} =$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } w = 0 \\ a & \text{se } w = 1 \\ {}^{w-1}a & \text{se } w \geq 2 \end{cases}$$

perché ${}^1\tilde\psi(n-2, w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w \leq 1 \\ {}^{w-1}a & \text{se } w \geq 2 \end{cases}$ e $\tilde\psi(1, w-2) = \begin{cases} 0 & \text{se } w = 0 \\ a & \text{se } w = 1 \\ 0 & \text{se } w \geq 2 \end{cases}$

Infine vale che: ($\forall w \geq 1$)

$$0 = \tilde{\psi}(0,w) = \tilde{\psi}((n-1)+1,w) = {}^{1}\tilde{\psi}(n-1,w) + \tilde{\psi}(1,w-1) - \tilde{\psi}(1,n-1) =$$

$$= {}^{w}a - a \quad \Rightarrow a \in A^{\Gamma}. \quad \Rightarrow \tilde{\psi} = \Psi_a$$

Dato E campo, vogliamo ora classificare i corpi D tali che:

- $Z(D) = E$ (D è E-centrale)
  centro
- $\dim_E D < +\infty$. (D è E-spazio vettoriale di dimensione finita)

In realtà, classificheremo più in generale le E-algebre A tali che:

- $\dim_E A < +\infty$
- $Z(A) = E$
- A semplice (cioè senza ideali biloteri propri).

ATTENZIONE: definizione diversa rispetto ai moduli

Per risultati di qualche lezione fa, vale:

A algebra semplice di dim su E finita $\Rightarrow A = M(n,n,D)$ per qualche D corpo con $\dim_E D < +\infty$, e $Z(A) = Z(D) I_n$.

Dunque classificare gli uni o gli altri è la stessa cosa.

OSS. Se $E = \bar{E}$, allora l'unico D corpo tale che $\dim_E D < +\infty$ e $Z(D) = E$ è proprio E. (Basta $Z(D) \supseteq E$)

Infatti: preso $\alpha \in D$, consideriamo $E(\alpha)$ il sotto-corpo generato da E e da α. $E \subseteq E(\alpha)$ è estensione finita perché $\dim_E D < \infty$.

Inoltre $E(\alpha)$ è commutativo (perché $Z(D) = E$), quindi è campo.

$\Rightarrow E \subseteq E(\alpha)$ è algebrica, ma $E = \bar{E} \Rightarrow \alpha \in E$.

OSS. Vedremo in seguito che $\bar{E} \otimes_E D$ è una $\bar{E}$-algebra $\bar{E}$-centrale semplice. Quindi $\bar{E} \otimes_E D = M(n,n,D')$ per un corpo D' $\bar{E}$-centrale finito $\Rightarrow D' = \bar{E}$, ovvero $\bar{E} \otimes_E D = M(n,n,\bar{E}) \Rightarrow D$ è una E-forma di $M(n,n,\bar{E})$.

<u>LEMMA</u>: Sia A E-algebra e $\dim_E A < +\infty$. TFAE:

1) A è semplice (non ha biloteri propri)
2) $A = M(n,n,D)$ per qualche D corpo con $Z(D) \supseteq E$
3) $A \neq 0$ ed è semisemplice come modulo con un unico (a meno di isom.) A-modulo irriducibile.

ATTENZIONE: le definizioni di algebra semplice e di modulo semplice NON sono equivalenti!

Sono finiti perché $\dim_E A < \infty$ e $\dim_E A_i = n_i^2 \dim_E(D_i)$

DIM: $\boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{3}$

Osserviamo che se A è semisemplice allora

$$A = \overbrace{\mathcal{M}(n_1, n_1, D_1)}^{A_1} \times \dots \times \overbrace{\mathcal{M}(n_h, n_h, D_h)}^{A_h}$$ e i suoi moduli irriducibili sono $D_1^{n_1}, \dots, D_h^{n_h}$.

Se si ha $D_1 = D_2$ e $n_1 = n_2$, $D_1^{n_1} \not\cong D_2^{n_2}$. Questo perché li vediamo come A-moduli

Infatti, se M è A-modulo semplice, sia $m \in M$, $m \neq 0$.

Allora $\begin{matrix} A \to M \\ a \mapsto a\cdot m \end{matrix}$ è surgettiva (M è semplice) $\Rightarrow A \cong M \oplus \underset{\mathrm{Ker}(A \to M)}{N}$

(è diverso da 0, essendo $1 \cdot m = m$)

$\Rightarrow M \subseteq A \Rightarrow M = A_1 M \oplus \dots \oplus A_h M$, ma M semplice $\Rightarrow$

$\Rightarrow M = A_i M$ per un certo i

Vale l'uguaglianza ~~La somma è diretta~~ perché
- $A_i M \subseteq A_i$ (quindi $\oplus$)
- $m = 1 \cdot m = (1_{A_1} + \dots + 1_{A_h}) m$ (quindi vale $\subseteq$)

$\Rightarrow M \subseteq \mathcal{M}(n_i, n_i, D_i)$

$$\overset{\shortparallel}{\underbrace{D_i^{n_i} \oplus \dots \oplus D_i^{n_i}}_{n_i \text{ volte}}}$$ con $D_i^{n_i}$ semplici $\Rightarrow M = D_i^{n_i}$

lo vedo come somma delle colonne della matrice

uno dei fattori

poiché almeno una delle proiezioni deve essere non nulla, ed essendo tra moduli semplici è isomorfismo

Data questa osservazione è banale che $\boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{3}$.

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ $A = \mathcal{M}(n, n, D)$. Basta che $\forall X \in A$, $X \neq 0$, valga $AXA = A$.

l'ideale bilatero generato è A

Se $X \neq 0$, allora $X_{ij} \neq 0$ per certi i, j. Vale:

$$x_{ij}^{-1} E_{hi} X E_{jk} = E_{hk}, \quad \text{dove } (E_{hk})_{ij} = \delta_{hi}\delta_{kj}$$

Quindi $\forall h, k$ $E_{h,k} \in AXA \Rightarrow A \subseteq AXA$

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Sia $S \subseteq A$ sottomodulo sinistro non nullo di dimensione minima (quindi semplice). Allora $I = SA$ è ideale bilatero

$\dim_E A < \infty \Rightarrow \dim_E S < \infty$

non nullo $\Rightarrow I = A \Rightarrow A = \sum_{a \in A} Sa$, ma Sa è A-modulo sinistro, (vale $\dim_E Sa \leq \dim_E S$)

quindi $Sa = 0 \vee Sa \cong S$ (perché S è di dim minima ~~semplice~~)

come mod. sx

o anche perché S semplice, avendo $S \to Sa$ surgettiva

serve per provare l'esistenza di un sottomodulo semplice.

$\Rightarrow A = \sum_{a \in A} Sa$ ← semplici $\Rightarrow A$ semisemplice.

Quindi $A = \mathcal{M}(n_1, n_1, D_1) \times \dots \times \mathcal{M}(n_h, n_h, D_h) \Rightarrow A = \mathcal{M}(n, n, D)$

sono tutti sottomoduli (ideali) bilateri

Inoltre $Z(D) \supseteq E$.

A è E-algebra, quindi valgono

(Perché $E \subseteq A$ e $E \subseteq Z(A) = Z(\mathcal{M}(n, n, D)) = Z(D) \cdot I_n$)

ISTALG - LEZIONE 26

perché vale $(\lambda a)\cdot(\mu b) = (\lambda\mu)(ab)$

Def A E-algebra semplice fin. gen. (come E-alg.) si dice E-centrale (o centrale su E) se $Z(A) = E$. (vale sempre che $A \supseteq E \cdot 1_A \cong E$ e che $Z(A) \supseteq E$)

Indichiamo con M_A il D^n tale che $A = \mathcal{M}(n, n, D)$, ovvero, l'unico A-modulo semplice. ($\dim_E A < +\infty$)

Allora $\mathrm{End}_A(M_A) \cong D^{op}$.

DIM:

Se M è un D-modulo sinistro, allora è un D^{op}-modulo destro.

Definiamo:

$$\begin{aligned} \delta: D &\longrightarrow \mathrm{End}_A(M_A) \\ x &\longmapsto (y \longmapsto yx) \end{aligned}$$

δ è un morfismo di anelli se visto da D^{op} a $\mathrm{End}_A(M_A)$; è bigettivo.

Infatti, se $\varphi \in \mathrm{End}_A(M_A)$, essendo $\begin{cases} E_{11} e_1 = e_1 \\ E_{ii} e_1 = 0 \quad \forall i > 1 \end{cases}$, deve essere

$\varphi(E_{ii} e_1) = E_{ii}\varphi(e_1)$ $(E_{ii} \in A)$

$E_{ii}\varphi(e_1) = 0 \quad \forall i > 1$, quindi $\varphi(e_1) = e_1 \cdot \lambda$. Quindi

$\varphi = \delta(\lambda)$, essendo: $m \in M_A \Rightarrow m = X \cdot e_1 \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(X \cdot e_1) = X\varphi(e_1) = (X \cdot e_1)\lambda$

Quindi δ è surgettivo. È banalmente iniettivo perché D è semplice.

Indichiamo quindi con D_A il corpo determinato da A:

$$D_A = (\mathrm{End}_A(M_A))^{op}$$

Quindi se conosco M_A posso ricavare D_A, se conosco D_A posso ovviamente ricavare M_A ($M_A \cong D^n$)

TEOREMA: ($\dim_E A < \infty$)

Se A è E-centrale semplice e $F \supseteq E$ è un'estensione di campi, allora $F \otimes_E A$ è F-centrale semplice.

Esempio: $A = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$. A non è E-centrale (essendo commutativo)

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]/_{x^2+1} \cong \mathbb{C}[x]/_{x^2+1} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$ che non è semplice

(controesempio: non basta la semplicità sotto per far sì che il tensore sia semplice)

Serve anche la centralità! (che di conseguenza si porta dietro la centralità sopra)

LEMMA: Se V è un E-sp. vettoriale e D è un corpo tale che $Z(D)=E$, posto $V_D = V \otimes_E D$ e dato un $W \subseteq V_D$ sottospazio stabile per la moltiplicazione a sinistra e a destra per elementi di D, allora

$$W = D \cdot (W \cap V)$$ ← identifico $W \cap (V \otimes 1) = W \cap V$

DIM: <u>Step 1:</u> Se $W \neq 0$, allora $W \cap V \neq 0$.

Sia $w \in W$, $w \neq 0$, tale che $w = \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes \lambda_i$ e m sia minimo possibile tra tutti i $w \in W$ non nulli.

WLOG $\lambda_1 = 1$ (altrimenti basta moltiplicare per λ_1^{-1} a destra).

Se dimostriamo che $m=1$, allora $w = v_1 \in V \cap W$.

(identificando sempre $V \otimes 1 = V$).

Dato $d \in D$, vale:

$$dw - wd = \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes (d\lambda_i - \lambda_i d) = \sum_{i=2}^{m} v_i \otimes (d\lambda_i - \lambda_i d).$$

$d\lambda_1 - \lambda_1 d = d - d = 0$

V è E sp. vett. $V = \bigoplus E$ ↓ i v_i sono indip. e $V \otimes D = \bigoplus D$

Per minimalità di m, deve essere $d\lambda_i - \lambda_i d = 0$, quindi λ_i centrale $\forall i \Rightarrow \lambda_i \in E \ \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes \lambda_i = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \lambda_i\right) \otimes 1$,

da cui $w \in (V \otimes 1) \cap W$ "$=$" $W \cap V$.

<u>Step 2:</u> Se $W \subseteq V \otimes_E D$ e $\overset{\text{come nelle ipotesi}}{W \cap V} =: V' \subseteq V \subseteq V_D$, abbiamo già che

$$V'_D = \underbrace{V' \otimes_E D}_{\subseteq W} \subseteq V \otimes_E D = V_D$$

Vale però che $V'_D = W$.

Se per assurdo fosse $V'_D \neq W$, allora:

$$0 \neq \frac{W}{V' \otimes_E D} \subseteq \left(\frac{V}{V'}\right) \otimes_E D = \frac{V \otimes_E D}{V' \otimes_E D}$$

dunque esisterebbe per lo Step 1 (V/V' è E-sp. vett. e $\frac{W}{V' \otimes_E D}$ è sottosp. stabile a sx e dx) $w \in W$ t.c. $\overline{w}$ è non nullo (in $\frac{W}{V' \otimes_E D}$) e $\overline{w} \in \left(\frac{V}{V'}\right) \otimes 1$

$\Rightarrow w \in V \otimes 1 \Rightarrow w \in V \cap W = V'$. Assurdo.

<u>Step 3:</u> Conclusione del lemma:

la molt. agisce sempre sul 2° fattore

$$W = V'_D = (V' \otimes_E D) \cdot D = D \cdot (V' \otimes 1) = D \cdot (W \cap V)$$

↳ DIM: F è E-spazio vettoriale (gioca il ruolo di V del lemma).

Si ha che $Z(D_A)=E$, $A=\mathcal{M}(n,n,D_A)$ e
$F\otimes_E A \cong \mathcal{M}(n,n,F\otimes_E D_A)$.

Vediamo che $F\otimes_E D_A$ è una F-algebra centrale semplice.
Quindi:
$F\otimes_E D_A = \mathcal{M}(m,m,D')$ con $Z(D')=F$.

Da questo segue la tesi, poiché:
$F\otimes_E A = \mathcal{M}(n,n,\mathcal{M}(m,m,D')) = \mathcal{M}(nm,nm,D')$ e $Z(D')=F$.

[Mostriamo in pratica prima che una proprietà vale per corpi, e poi estendiamo a tutte le algebre]

D_A gioca il ruolo di D del lemma.

$F\otimes_E D_A$ è F-algebra fin. gen. su F con $\dim_F(F\otimes_E D_A)=\dim_E(D_A)$

Vale per il lemma

$F\otimes_E D_A$ non ha ideali bilateri propri. Se $I\subseteq F\otimes_E D_A$ ideale bilatero, allora $I=D_A J$ per qualche $J\subseteq F$, dove $J=I\cap(F\otimes 1)$.
Ma J è anche un F-sottospazio vettoriale di F $\Rightarrow$
$\Rightarrow J=0 \vee J=F \Rightarrow I=0 \vee I=F\otimes_E D_A$.
I è ideale bilatero contenente $F\otimes_E 1$.

Quindi $F\otimes_E D_A$ è semplice.

Vediamo infine che $Z(F\otimes_E D_A)=F$. Sia $\{f_i\}$ base di F su E.
(Ovviamente $F\subseteq Z(F\otimes_E D_A)$)

$$Z(F\otimes_E D_A)\ni z=\sum_{i=1}^m f_i\otimes d_i \Rightarrow \forall d\in D_A \quad 0=dz-zd=\sum_{i=1}^m f_i\otimes(dd_i-d_id) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dd_i=d_id \ \forall i\ (\forall d) \Rightarrow d_i\in Z(D_A)=E \ \forall i \Rightarrow z\in F\otimes_E E=F.$$

Esercizio:
OSS. Vale la seguente generalizzazione: se A, A' sono algebre E-centrali semplici, allora $A\otimes_E A'$ è E-centrale semplice su E.

OSS. Se A è E-centrale semplice, allora
$\bar{A} := \mathcal{M}(n,n,\bar{E}) = \bar{E}\otimes_E A$ è $\bar{E}$-centrale semplice.
Inoltre
$$\dim_E A = \dim_{\bar{E}}\bar{A} = n^2$$

Dunque ogni E-centrale semplice ha dimensione che è un quadrato perfetto.

Vale anche:

$$\mathcal{M}(n,n,\overline{E}) = \overline{E} \otimes_E \mathcal{M}(n,n,E).$$

<u>TEOREMA</u>: Esiste sempre un $F \supseteq E$ estensione di Galois finita tale che $F \otimes_E A \cong \mathcal{M}(n,n,F)$. (data A E-centrale semplice fin. gen.)

Un tale F si dice di "splitting" per A.

Praticamente non serve a niente. Dimostriamo dopo direttamente l'esistenza di una estensione finita e separabile

DIM: Usando l'isomorfismo

$$\mathcal{M}(n,n,\overline{E}) \cong \overline{E} \otimes_E A \quad \text{si ha}$$

$$\{E_{ij}\} \longleftrightarrow \text{Roba dentro ad un } F \otimes_E A \text{ con } F \supseteq E \text{ finito}$$

Quindi: $\mathcal{M}(n,n,F) \cong F \otimes_E A$.

Moralmente ogni element di $\overline{E} \otimes_E A$ sta in qualche $F \otimes_E A$ con $F \supseteq E$ finito. Basta prendere un F abbastanza grande che contenga tutte le E_{ij}.

Se E è campo finito, $\underbrace{\text{ogni}}_{\text{o } E = \mathbb{R}}$ estensione finita è di Galois.

Se $\operatorname{char} E = 0$, ogni estensione finita è contenuta in un'estensione di Galois finita.

Per la dimostrazione completa aspetta la prossima lezione [...]

OSS. Sia $F \supseteq E$ di Galois finita e sia

$$\mathcal{A}_{n,F} := \{E\text{-algebre centrali semplici } A \text{ tali che } F \otimes_E A \cong \mathcal{M}(n,n,F)\} /_{\text{isom}}$$

Sappiamo da tempo che (Hilbert 90 per K-strutture)

$$\mathcal{A}_{n,F} \longleftrightarrow H^1(\operatorname{Gal}(F/E), \operatorname{Aut}_F(\mathcal{M}(n,n,F)))$$

Vogliamo quindi calcolare $\operatorname{Aut}_F(\mathcal{M}(n,n,F))$.

<u>LEMMA</u>: Come F-algebre, vale:

$$\operatorname{Aut}_F(\mathcal{M}(n,n,F)) \cong \mathbb{P}GL(n,F) = GL(n,F) / F^* Id$$

DIM: Consideriamo la successione

$$1 \to F^* \to GL(n,F) \longrightarrow \mathrm{Aut}_F(M(n,n,F))$$
$$g \longmapsto (X \mapsto gXg^{-1})$$

Esercizio: la mappa è surgettiva.

A questo punto si chiude.

Si ha quindi:
$$A_{n,F} \longleftrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(F/E), PGL(n,F))$$

$1 \to F^* \to GL(n,F) \to PGL(n,F) \to 1$ che induce in coomologia

$$\dots \to \underbrace{H^1(\mathrm{Gal}(F/E), GL(n,F))}_{\overset{\text{Hilbert 90}}{=1}} \to H^1(\mathrm{Gal}(F/E), PGL(n,F)) \to H^2(\mathrm{Gal}(F/E), F^*)$$

(F^* centrale in $GL(n,F)$)

da cui
$$H^1(\mathrm{Gal}(F/E), PGL(n,F)) \subseteq H^2(\mathrm{Gal}(F/E), F^*).$$

COROLLARIO: Vale:

1) Se D è un corpo finito, allora è un campo.
2) Se D è un corpo finito su $\mathbb{R}$, con $Z(D) = \mathbb{R}$, allora $D = \mathbb{R}$ o $D = \mathbb{H}$, con $\mathbb{H}$ corpo dei quaternioni.

DIM: $\boxed{1}$ Sia $E := Z(D)$. Allora $D \in A_{n,F}$ per qualche n, $F \supseteq E$ finito. (E campo finito).

$\Gamma := \mathrm{Gal}(F/E)$. Vediamo che $H^2(\Gamma, F^*) = 0$ per ottenere la tesi. Se $E = \mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q^m} = F$ per qualche q, m, allora:

$\mathrm{Gal}(F/E) = \Gamma = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle 1, \phi, \dots, \phi^{m-1} \rangle$, con

$\phi : x \mapsto x^q$ (automorfismo di Frobenius). (q può essere un p^k)

Sappiamo già che $H^2(\Gamma, F^*) = (F^*)^\Gamma / N(F^*)$, con

(F^* è Γ-modulo grazie all'azione di Galois)

$N : x \mapsto x\phi(x)\phi^2(x) \dots \phi^{m-1}(x)$.

Vale che $(F^*)^\Gamma = E^*$. Vediamo che anche $N(F^*) = E^*$.
$$N(x) = x \cdot x^q \cdot x^{q^2} \cdots x^{q^{m-1}} = x^{\frac{q^m-1}{q-1}}$$

Poiché F^* è ciclico di ordine $q^m - 1$, e in generale in $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$ vale $a\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} = \{x \mid bx = 0\}$, si ha $\cong \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$

che $N(F^*) = \{x \in F^* \mid x^{q-1} = 1\} = E^*$

Quindi $H^2(\Gamma, F^*) = 0$, ovvero $A_{n,F}$ ha un solo elemento, che è $\mathcal{M}(n,n,E)$. Quindi $D = \mathcal{M}(n,n,E)$ è corpo, e questo vale solo se $n=1$, da cui $D = E$.

$\boxed{2}$ Sia $n^2 = \dim_{\mathbb{R}} D$. Essendo $\overline{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}$ (di Galois finito), vale:

$$D \in A_{n,\mathbb{C}} \cong H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*) = {}^{(\mathbb{C}^*)^\Gamma}/_{N(\mathbb{C}^*)}$$

$$\Gamma = \mathbb{Z}/_{2}\mathbb{Z} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{id, \text{coniugio}\}$$

$$N(z) = z \cdot \overline{z} = \|z\|^2$$

$$(\mathbb{C}^*)^\Gamma = \mathbb{R}^*, \quad N(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{R}^*/_{\mathbb{R}_+} \cong \mathbb{Z}/_{2}\mathbb{Z}$$

Quindi $A_{n,\mathbb{C}}$ ha al più 2 elementi, tra cui $\mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ e D. Tuttavia, sfruttando

$$\delta_n : A_{n,\mathbb{C}} \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*)$$

posso mettere su $A_{n,\mathbb{C}}$ una struttura data da

$$A_{n,\mathbb{C}} \times A_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow A_{nm,\mathbb{C}}$$

$$(A, A') \longmapsto A \otimes_{\mathbb{R}} A'$$

e questa struttura è compatibile con δ, ovvero

$$\delta_{nm}(A \otimes_{\mathbb{R}} A') = \delta_n(A)\, \delta_m(A').$$

Fai finta di niente_

Dando per buono questo, abbiamo:

- $n=1 \rightsquigarrow A_{1,\mathbb{C}} = \{\mathbb{R}\}$
- $n=2 \rightsquigarrow A_{2,\mathbb{C}} = \{\mathcal{M}(2,2,\mathbb{R}), \mathbb{H}\}$ (sicuramente loro 2 ci sono, non sono isom. e più di 2 elem. non possono esserci)

non è un corpo

Vogliamo dimostrare che non ci sono altri corpi in dimensioni più alte, ovvero che (al variare di n) le uniche $\mathbb{R}$-algebre $\mathbb{R}$-centrali semplici sono $\mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}(n,n,\mathbb{H})$.

- $n = 2k \rightsquigarrow A_{2k,\mathbb{C}} = \{\mathcal{M}(2k,2k,\mathbb{R}), \mathcal{M}(k,k,\mathbb{H})\}$

$$A = \underset{\parallel}{\mathcal{M}(k,k,\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R}) \qquad \underset{\parallel}{\mathcal{M}(k,k,\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = B$$

(gli isomorfismi valgono perché
$\mathcal{M}(n,n,E) \otimes_E A \cong \mathcal{M}(n,n,A)$ e $\mathcal{M}(n,n,\mathcal{M}(m,m,E)) = \mathcal{M}(nm,nm,E)$)

Un modo per dire che quei due (A e B) non sono isomorfi è usare δ:

$$\delta_{2k}(A) = \delta_k(\mathcal{M}(k,k,\mathbb{R}))\,\delta_2(\mathcal{M}(2,2,\mathbb{R})) = 1\cdot 1 = 1$$

$$\delta_{2k}(B) = \delta_k(\mathcal{M}(k,k,\mathbb{R}))\,\delta_2(\mathbb{H}) = \delta_2(\mathbb{H}) \neq 1$$ perché δ iniettiva e $\mathbb{H} \not\cong \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R})$

Alternativamente, $A \not\cong B$ perché hanno moduli irriducibili rispettivamente $\mathbb{R}^{2k}$ e $\mathbb{H}^k$, che non sono isomorfi perché hanno dimensioni diverse su $\mathbb{R}$.

Nel primo modo, dobbiamo mostrare che $\delta_2(\mathbb{H}) \neq 1$.

- $n = 2k+1 \rightsquigarrow A_{n,\mathbb{C}} = \{\mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})\}$.

Questo perché:

$$A_{n,\mathbb{C}} \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R})} A_{2n,\mathbb{C}}$$ è iniettiva perché

$$\begin{array}{ccc} A_{n,\mathbb{C}} & \xhookrightarrow{\delta_n} & \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \\ \downarrow & \circlearrowright & \| \\ A_{2n,\mathbb{C}} & \xhookrightarrow{\delta_{2n}} & \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \end{array}$$

Se $D \in A_{n,\mathbb{C}}$ è diverso da $\mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ ~~corpo~~, allora $D \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R}) = \mathcal{M}(n,n,\mathbb{H})$ (per iniettività) ⊛

$$D \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R}) = \mathcal{M}(2,2,D)$$

$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{D = \mathbb{H}} \\ n = 2 \end{cases}$ assurdo (n dispari ...)

[Tutto molto incasinato, rifatto meglio la prossima lezione [...]]

Perché: I moduli irriducibili sono isomorfi, quindi $D^2 \cong \mathbb{H}^n$ (come $D \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R})$ moduli)

Visti come $\mathbb{R}$-sp. vett: $\dim_{\mathbb{R}} D^2 = 2 \dim_{\mathbb{R}} D = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^n = 4n$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} D = 2n$.

Consideriamo allora $\mathcal{M}(2,2,D) \cong \mathcal{M}(n,n,\mathbb{H})$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(2,2,D) = 4 \dim_{\mathbb{R}} D = 8n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}(n,n,\mathbb{H})) = 4n^2 \Rightarrow n = 2. \text{ Assurdo.}$$

ISTALG – LEZIONE 27

[...]

PROPOSIZIONE: I corpi $\mathbb{R}$-centrali semplici sono $\mathbb{R}$ e $\mathbb{H}$.

DIM: Se D corpo $\mathbb{R}$-centrale semplice, D si spezza su $\mathbb{C}$.

$$A_{n,\mathbb{C}} \longleftrightarrow H^1(\Gamma, PGL(n,\mathbb{C})) \subseteq H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*) = \mathbb{R}^* / \mathbb{R}^+ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\| $$

$$\{A \mid \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A \cong \mathcal{M}(n,n,\mathbb{C})\}$$

$$\|$$

$$\{A \ \mathbb{R}\text{-centrale semplice}, \dim_{\mathbb{R}} A = n^2\}$$

← motivazione di prima: $\mathbb{R}^{2n} \not\cong \mathbb{H}^n$

$$A_{2n,\mathbb{C}} = \{\mathcal{M}(2n,2n,\mathbb{R}), \mathcal{M}(n,n,\mathbb{H})\}$$

I moduli irriducibili sono $\mathbb{R}^{2n}$ e D^2. Vedendo la $\dim_{\mathbb{R}}$ si ha $n = n^2 \Rightarrow n = 1$

$Z(D) = \mathbb{R}$, D corpo $\dim_{\mathbb{R}} D = n^2$ ← (cioè $D \otimes \mathbb{C} \in A_{n,\mathbb{C}}$)

$$D \otimes \mathcal{M}(2,2,\mathbb{R}) \cong \underset{\substack{\uparrow \\ A_{2n,\mathbb{C}}}}{\mathcal{M}(2,2,D)} \cong \begin{cases} \mathcal{M}(2n,2n,\mathbb{R}) & \Rightarrow D \cong \mathbb{R},\ n=1 \\ \mathcal{M}(n,n,\mathbb{H}) & \Rightarrow D \cong \mathbb{H},\ n=2 \end{cases}$$

visto prima ⊛

• $F \supseteq E$ di Galois finito.

equivalenza di Brauer

$$A_F := \left\{ A \ E\text{-centrali semplici che splittano su } F \right\} / \sim \quad \text{dove } A = \mathcal{M}(n,n,D) \sim A' = \mathcal{M}(n',n',D') \text{ se } D \cong D'.$$

(a meno di isom.)

Quindi $A_F \longleftrightarrow \{\text{corpi } E\text{-centrali semplici che splittano su } F\} / \text{isom}$

$A_{n,F} \hookrightarrow A_F$ (n è fissato, quindi solo cose isomorfe vanno in $\sim$)

$$A_{n,F} \longleftrightarrow H^1(\Gamma, PGL(n,F))$$

$$\mathcal{M}(n,n,E) \longleftrightarrow C_\gamma = id \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

(ho bisogno di scegliere il cociclo banale)

Voglio estendere a tutto A_F $\quad \delta_n : A_{n,F} \longrightarrow H^2(\Gamma, F^*)$ (con l'identificazione sopra)

Riesco a farlo se, dati

$$A_{an,F} \ni \mathcal{M}(n,n,D) = A, \quad \dim D = a^2,$$

$$A_{am,F} \ni \mathcal{M}(m,m,D) = B, \quad \text{si ha } \delta_{an}(A) = \delta_{am}(B).$$

⊛

LEMMA: $A \in A_{n,F}$, $B \in A_{m,F}$. Allora

$$\delta_{nm}(A \otimes_E B) = \delta_n(A)\,\delta_m(B).$$

Il lemma implica ⊛, infatti

$$\delta_{am}(\mathcal{M}(m,m,D)) = \delta_{am}(\mathcal{M}(m,m,E) \otimes D) = \delta_m(\mathcal{M}(m,m,E)) \cdot \delta_a(D)$$

$$= 1 \cdot \delta_a(D) = \delta_a(D) \quad \forall m$$

perché $\delta_m(\mathcal{M}(m,m,E)) \longleftrightarrow \delta_m(c_\gamma = id) = 1$

OSS. In A_F è definito un prodotto, $\otimes$, che lo rende un gruppo.

Esercizio: Descrivi $\mathcal{M}(n,n,D)^{-1}$. (dovrebbe essere $\mathcal{M}(n,n,D)^{op}$)

DIM: Prendiamo A e B tali che

$$F \otimes_E A \cong \mathcal{M}(n,n,F)$$
$$F \otimes_E B \cong \mathcal{M}(m,m,F)$$

$$A_{n,F} \longleftrightarrow H^1(\Gamma, PGL(n,F)) \xrightarrow{\delta_n} H^2(\Gamma, F^*)$$

Γ agisce su $\underbrace{\mathcal{M}(n,n,E) \otimes F}_{\mathcal{M}(n,n,F)}$ (e su $\mathcal{M}(m,m,F)$) con l'azione γ_0 (rivediti la parte sulle K-strutt.) azione sui coefficienti

Siano $c_\gamma = \gamma_A \gamma_0^{-1} \in Aut(\mathcal{M}(n,n,F))$

$d_\gamma = \gamma_B \gamma_0^{-1} \in Aut(\mathcal{M}(m,m,F))$ (dove γ_A e γ_B sono le azioni date dallo split di A e B)

($c_\gamma, d_\gamma \in PGL(n,F)$) tramite l'identificazione $PGL(n,F) \leftrightarrow Aut(\mathcal{M}(n,n,F))$, $g \longleftrightarrow (X \mapsto gXg^{-1})$

Considero:

$$F \otimes_E (A \otimes_E B) = (F \otimes_E A) \otimes_F (F \otimes_E B) \cong$$
$$\cong \mathcal{M}(n,n,F) \otimes_F \mathcal{M}(m,m,F) \cong \mathcal{M}(nm, nm, F)$$ da cui $A \otimes_E B \in A_{nm,F}$

Il cociclo associato a $A \otimes_E B$ in $H^1(\Gamma, Aut(\mathcal{M}(n,n,F) \otimes_F \mathcal{M}(m,m,F)))$ è

$$e_\gamma = (\gamma_A \otimes \gamma_B) \circ (\gamma_0 \otimes \gamma_0)^{-1} = c_\gamma \otimes d_\gamma$$

in dim n in dim m

$$F^* \to GL(n,F) \longrightarrow PGL(n,F)$$

$$g_\gamma \longrightarrow c_\gamma \quad \text{al variare di } \gamma \in \Gamma$$

Il cociclo $\tilde{c}_{\gamma,\delta} = \underbrace{g_\gamma {}^\gamma g_\delta g_{\gamma\delta}^{-1}}_{\in F^*}$ è l'immagine di c in $H^2(\Gamma, F^*)$

$\forall \gamma$ $GL(n,F)$

$$g_\gamma \longrightarrow c_\gamma \overset{\delta_n}{\longmapsto} \tilde{c}_{\gamma,\delta} = g_\gamma {}^\gamma g_\delta g_{\gamma\delta}^{-1}$$

$$GL(m,F) \ni h_\gamma \longrightarrow d_\gamma \overset{\delta_m}{\longmapsto} \tilde{d}_{\gamma,\delta} = h_\gamma {}^\gamma h_\delta h_{\gamma\delta}^{-1}$$

$$k_\gamma = g_\gamma \otimes h_\gamma \qquad \tilde{e}_{\gamma,\delta} = k_\gamma {}^\gamma k_\delta k_{\gamma\delta}^{-1} = (g_\gamma \otimes h_\gamma) \cdot ({}^\gamma g_\delta \otimes {}^\gamma h_\delta) \cdot (g_{\gamma\delta} \otimes h_{\gamma\delta})^{-1} =$$

$$e_\gamma \overset{\delta_{nm}}{\longmapsto} \tilde{e}_{\gamma,\delta} \qquad = \tilde{c}_{\gamma,\delta} \otimes \tilde{d}_{\gamma,\delta} \qquad = \tilde{c}_{\gamma,\delta} \cdot \tilde{d}_{\gamma,\delta}$$

In realtà è $\tilde{c}_{\gamma,\delta} \cdot \tilde{d}_{\gamma,\delta}$, essendo $\tilde{e}_{\gamma\delta} \in F^* \otimes_F F^* \cong F^*$, $a \otimes b \mapsto ab$

$$\Rightarrow [\tilde{e}] = [\tilde{c}] \cdot [\tilde{d}]$$

Quindi $\delta_{nm}(e) = \delta_n(c)\,\delta_m(d)$

TEOREMA: $\delta : A_F \longrightarrow H^2(\Gamma, F^*)$ è un isomorfismo.

(per il lemma è omomorfismo di gruppi) ($F \supseteq E$ di Galois finita)

DIM: δ iniettiva:

Siano D, D' di dimensioni a^2, b^2 che splittano su F

Considero $\mathcal{M}(b,b,D) = A$

$\mathcal{M}(a,a,D') = B$

$$A, B \in A_{ab,F} \quad e \quad \delta(D) = \delta_a(D) = \delta_{ab}(A)$$
$$\delta(D') = \delta_b(D') = \delta_{ab}(B)$$

Ma $\delta_{ab} : H^1(\Gamma, PGL(ab,F)) \hookrightarrow H^2(\Gamma, F^*)$. isomorfi

Quindi, se $\delta(D) = \delta(D') \Rightarrow \delta_{ab}(A) = \delta_{ab}(B) \Rightarrow A \sim B$ in $A_{ab,F}$

$\Downarrow$

$D \cong D' \Leftarrow A \sim B$ in A_F

δ surgettiva:

LEMMA: $\dim_E F = n$. Allora $A_{n,F} \longrightarrow H^2(\Gamma, F^*)$ è surgettiva.

DIM:

Dimostro che $H^1(\Gamma, PGL(n,F)) \xrightarrow{\delta} H^2(\Gamma, F^*)$ è surgettiva

$g_\cdot \longmapsto c_{\cdot,\cdot}$

Considero $V = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} F\varepsilon_\sigma$. Preso $c_{\cdot,\cdot} \in H^2(\Gamma, F^*)$, definiamo

$\forall \gamma \in \Gamma$ l'automorfismo ~~con azione~~ dato da $g_\gamma(\varepsilon_\delta) = c_{\gamma,\delta}\, \varepsilon_{\gamma\delta}$

Vale che ~~con~~ $g_\gamma \in GL(n,F)$, perché $V \cong F^n$ e $\mathrm{Aut}_F(V) \cong GL(n,F)$

Sia inoltre $\overline{g_\gamma} \in PGL(n,F)$ la sua proiezione.

Dico che $\overline{g_\gamma}$ è un cociclo e che $\delta(\overline{g_\cdot}) = c_{\cdot,\cdot}$.

$$g_{\gamma\delta}(\varepsilon_\rho) = c_{\gamma\delta,\rho}\, \varepsilon_{\gamma\delta\rho}$$

l'azione è data sui coefficienti

$$g_\gamma\, {}^\gamma(g_\delta)(\varepsilon_\rho) = g_\gamma({}^\gamma c_{\delta,\rho}\, \varepsilon_{\delta\rho}) = c_{\gamma,\delta\rho}\, {}^\gamma c_{\delta,\rho}\, \varepsilon_{\gamma\delta\rho}$$

Ma $c_{\cdot,\cdot}$ ~~$g_\cdot$~~ è cociclo, ovvero

applicazione di cobordo per la coomologia di Γ in F^*

$$\delta^2(c_{\cdot,\cdot}) = {}^\gamma c_{\delta,\rho}\, (c_{\gamma\delta,\rho})^{-1}\, c_{\gamma,\delta\rho}\, c_{\gamma,\delta}^{-1} = 1$$

$c_{\gamma,\delta}, c_{\gamma\delta,\rho} \in F^*$ che è commutativo

Quindi

$$g_\gamma\, {}^\gamma(g_\delta)(\varepsilon_\rho) = c_{\gamma\delta,\rho}\, c_{\gamma,\delta}\, \varepsilon_{\gamma\delta\rho} = c_{\gamma,\delta}\, c_{\gamma\delta,\rho}\, \varepsilon_{\gamma\delta\rho} = c_{\gamma,\delta}\, g_{\gamma\delta}(\varepsilon_\rho)$$

Passando in $PGL(n,F)$, essendo $c_{\gamma,\delta}$ scalare, vale

$$\overline{g_{\gamma\delta}} = \overline{g_\gamma}\, {}^\gamma\overline{g_\delta}$$ Quindi $\overline{g_\cdot} \in H^1(\Gamma, PGL(n,F))$.

Inoltre

$$\delta(\overline{g_\cdot})(\gamma,\delta)(\varepsilon_\rho) = (g_\gamma\, {}^\gamma g_\delta\, g_{\gamma\delta}^{-1})(\varepsilon_\rho) = \cancel{c^{-1}_{\gamma\delta,\delta^{-1}\gamma^{-1}\rho}} \cdot \cancel{c_{\gamma\delta,\delta^{-1}\gamma^{-1}\rho}} \cdot c_{\gamma,\delta} \cdot \varepsilon_\rho$$

$\Rightarrow \delta(\overline{g_\cdot}) = c_{\cdot,\cdot}$ come voluto.

Def E campo. $p(t) \in E[t]$ si dice separabile se non ha radici multiple.

Def $E \subseteq F$ estensione di campi. $\alpha \in F$ si dice separabile se μ_α (il polinomio minimo di α su E) è separabile.

Def $E \subseteq F$ si dice separabile se $\forall \alpha \in F$ α è separabile su E.

OSS. Se E ha caratteristica 0, tutto è separabile (stessa cosa per estensioni algebriche di campi finiti).

Esempio: $E = \mathbb{F}_p(x^p) \subseteq \mathbb{F}_p(x) = F$

$t^p - x^p = (t-x)^p$ non è separabile.

- Siano $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$, $[F:E] < +\infty$.

F è separabile $\Rightarrow$ $\#\{\varphi : F \to \overline{E} \mid \varphi|_E = id\} = [F:E] = n$

DIM: $F = E[\alpha] = E[t]/\mu_\alpha \longrightarrow \overline{E}$ ho le "valutazioni" in radici di μ_α ($\deg \mu_\alpha = n$).

OSS. $E \subseteq F$ è separabile e finita, allora $F = E[\alpha]$. (thm. Elemento primitivo)

OSS. $F \supseteq E$ separabile.

$\langle \varphi(F) \mid \varphi$ come prima$\rangle$ è normale e separabile (è di Galois)

← ogni $\psi : L \to \overline{K}$ t.c. $\psi|_K = id$ fissa L (cioè $\psi(L) = L$)

OSS. $F \supseteq E$ finita e separabile.

1) $\exists\, L \supseteq F \supseteq E$, $L \supseteq E$ finita e di Galois.

2) Se $F \supseteq E$ è anche normale, $\#Gal(F/E) = [F:E]$ (F è di Galois)

OSS. $E \subseteq F = E[\alpha_i \mid i \in I]$.

F separabile $\Leftrightarrow$ gli α_i sono separabili

Def α si dice puramente inseparabile se μ_α è puramente inseparabile, ovvero ha una unica radice, cioè è della forma $t^q - a$ con $q = p^n$ per un certo n e $\operatorname{char} E = p$.

$$\begin{array}{ccc} & & F^{ins} = \{\alpha \in F \mid \alpha \text{ puramente ins}\} \\ & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \text{ estens. sep.} \\ E & & F \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} \text{ estens. pur. insep.} \\ F^{sep} = \{\alpha \in F \mid \alpha \text{ sep.}\} & & \end{array}$$

OSS. $F = F^{ins} \cdot F^{sep}$ (è il più piccolo campo che contiene quei 2)

(*)

TEOREMA: A E-algebra centrale semplice. Allora esiste $F \supseteq E$ di Galois finita e F di spezzamento per A.

DIM: Avevamo dimostrato che ne esiste una finita. (MA NON SERVIVA)

Dimostriamo che esiste $F \supseteq E$ separabile finita con

$$F \otimes_E A = M(n,n,F)$$

Per l'osservazione della pagina precedente

A questo punto si trova $L \supseteq F \supseteq E$ tale che $L \supseteq E$ di Galois finita

$$L \otimes_E A = L \otimes_F (F \otimes_E A) = L \otimes_F M(n,n,F) = M(n,n,L). \ [\dots]$$

LEMMA: Sia D corpo con $Z(D) = E$, $D \neq E$. Allora $\exists\, d \in D \setminus E$ che sia separabile. ($\dim_E D < +\infty$)

DIM: Se per assurdo non esiste $d \in D \setminus E$ separabile, allora $\forall d \in D \setminus E$

$E \subseteq E[d]$ è puramente inseparabile

Perché $E[d] = E[d]^{sep} E[d]^{ins}$ per l'osservazione in fondo alla pagina precedente

per ip. di assurdo $\operatorname{Char} E \neq 0$ (altrimenti tutto è separabile)

$$d^q - a = 0, \quad a \in E, \quad p = \operatorname{Char} E, \quad q = p^l$$

$\dim_E D < +\infty$, quindi esiste q: $d^q \in E$ $\forall d \in D$.

Sicuramente abbiamo $\#(E) = +\infty$ (per ip. di assurdo)

ogni est. algebrica di campo finito è separabile (oppure perché corpo finito è campo)

Sia $\dim_E D = n$

Siano $a_1, \dots, a_n$ una base di D su E.

INUTILE

Consideriamo $D = E^n \longrightarrow D = E^n$ (come sp. vett.)

$$d \longmapsto d^q$$

$$\Big(\sum x_i a_i\Big)^q = \sum_{i=1}^n f_i(x_1,\dots,x_n)\, a_i \qquad d^q \in E \Rightarrow f_i(x_1,\dots,x_n) = 0$$

$f_i \in E[x_1,\dots,x_n]$ $\qquad \forall x_1,\dots,x_n \in E \quad \forall i = 2,\dots,n$

$\Rightarrow f_i \equiv 0$ per $i = 2,\dots,n$. (E infinito)

Sia $\overline{E} \otimes_E D = A \cong \overline{E}^n$ (come $\overline{E}$-sp. vett.) $\quad a \in A \Rightarrow a^q \in \overline{E} \otimes 1$ (perché $d^q \in E$ $\forall d \in D$)

Con prodotto $(a \otimes b)\cdot(c \otimes d) = ac \otimes bd$

Consideriamo
$$\left[\begin{array}{l} \overline{E}^n \longrightarrow \overline{E}^n \\ d \longmapsto d^q \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \sum f_i(x_1,\dots,x_n)\, a_i = f_1(x_1,\dots,x_n)\, 1 \end{array}\right]$$

Secondo me inutile anche questa

Se $n = m^2$, $\overline{E} \otimes_E D \cong M(m,m,\overline{E})$ (isomorfismo di algebre)

Ma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \overline{E}\cdot \mathrm{Id} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow D = E$ Assurdo

$(n = 1)$

D è E-centrale semplice finita su E quindi $\overline{E} \otimes_E D$ è $\overline{E}$-centrale semplice.

Sulle matrici ho prodotto usuale (per Wedderburn)

Cerchiamo F tale che

$[\dots]$ $F \otimes_E A = \mathcal{M}(n, n, F)$ con F separabile. (e finito su E)

A semplice, quindi $A = \mathcal{M}(m, m, D)$

$$\Rightarrow F \otimes_E A = \mathcal{M}(m, m, F \otimes_E D)$$ Quindi $F \otimes_E A = \mathcal{M}(n, n, F) \Leftrightarrow F \otimes_E D = \mathcal{M}(n_0, n_0, F)$

~~Allora~~ Basta il caso A corpo. Per induzione su $\dim_E A$.

Passo base: $A = E$. Basta prendere $F = E$.

Passo induttivo:

Per il lemma $\exists d \in A \setminus E$ separabile su E. Sia $F_1 = E[d]$. (F_1 è finito su E)

Osserviamo che $F_1 \otimes_E A$ non è un corpo: infatti

$$F_1 \otimes_E A \supseteq F_1 \otimes_E F_1, \qquad \underset{\displaystyle \| \atop \displaystyle F_1 \otimes F_1}{F_1 \otimes \frac{E[t]}{\mu_d}} \longrightarrow F_1 \times \dots \times F_h$$

dove $F_i = E[d_i]$ con d_i radici di μ_d

$\deg \mu_d = h$

$$\| \qquad \frac{F_1[t]}{\mu_d}$$

$$p(t) \longmapsto (p(d_1), \dots, p(d_h))$$

La mappa è iniettiva e hanno la stessa dimensione su E (h^2), quindi è isomorfismo. Ma $F_1 \times \dots \times F_h$ non è un dominio.

Quindi $F_1 \otimes A$ è semplice non corpo, ovvero $\underline{m \geq 1}$:

$$F_1 \otimes_E A = \mathcal{M}(m, m, D) \quad \text{con} \quad \dim_{F_1} D < \dim_E A = m^2 \dim_{F_1} D$$

Per ip. indutt. esiste $F \supseteq F_1$ finito e separabile tale che

$$F \otimes_{F_1} D \cong \mathcal{M}(\ell, \ell, F) \qquad \underset{\text{sep finito}}{F \supseteq} \underset{\text{sep finito}}{F_1 \supseteq} E \quad \Rightarrow \underset{\text{sep finito}}{F \supseteq E}$$

e inoltre $F \otimes_E A \cong \mathcal{M}(\ell m, \ell m, F)$

$$\| \quad F \otimes_{F_1} (F_1 \otimes_E A) = F \otimes_{F_1} \mathcal{M}(m, m, D) = \mathcal{M}(m, m, F \otimes_{F_1} D) = \mathcal{M}(m\ell, m\ell, F)$$

$$\dim_E (F_1 \otimes_E F_1) = (\dim_E F_1)^2 = h^2$$

$$\dim_E F_i = h = \deg \mu_d$$

$$\dim_E (F_1 \times \dots \times F_h) = \underbrace{h + \dots + h}_{h \text{ volte}} = h^2$$

ISTALG - LEZIONE 28

ed esiste unica $\varphi_{ij}: i \to j$ se $j \geq i$

OSS. Se J è ordinato$^{(\geq)}$ e $\forall i \forall j \; \exists k : k \geq i, k \geq j$, allora il limite proiettivo è

$$\varprojlim G_i = \left\{ (g_i) \in \prod G_i \;\middle|\; \varphi_{ij}(g_i) = g_j \quad \forall i \forall j \; \forall \varphi_{ij} \right\}$$

OSS. Dato G gruppo, se $\forall i \; G_i < G$ e tramite $\{G_i\}_{i \in J}$ poniamo l'ordinamento su J: $i \geq j$ se $G_i \supseteq G_j$ e si ha unica freccia $j \to i$ che induce $G_j \hookrightarrow G_i$ l'inclusione.
Supponiamo $\forall i \forall j \; \exists h$ t.c. $G_i, G_j \subseteq G_h$
Allora $\varinjlim G_i = \bigcup G_i$ che è un sottogruppo di G.

- Sia $E \subseteq F$ algebrica di Galois (normale e separabile, non per forza finita). Vale che:

$$F = \varinjlim_{\substack{E \subseteq L \subseteq F \\ \text{finita di Galois}}} L = \bigcup_L L \qquad Gal(F/E) = \varprojlim_L Gal(L/E)$$

con mappe le restrizioni su L.

Sicuramente la mappa
$$Gal(F/E) \longrightarrow \varprojlim_L Gal(L/E)$$
$$\varphi \longmapsto (\varphi|_L)_L$$
al variare degli L è una "successione"

è iniettiva ~~e~~ anche surgettiva perché $F = \bigcup_L L$, quindi la definizione sulle restrizioni dà definizione su F

· Vale inoltre che

$$Gal(L/E) \cong \frac{Gal(F/E)}{Gal(F/L)}$$. Infatti si ha $Gal(F/E) \to Gal(L/E)$, $\sigma \longmapsto \sigma|_L$

che è surgettiva perché gli automorfismi si estendono sempre:

$$\begin{array}{ccccccc} E & \subseteq & L & \subseteq & F & \subseteq & \overline{E} \\ \| & & \downarrow\sigma & & \vdots & & \downarrow\tilde{\sigma} \\ E & \subseteq & L & \subseteq & F & \subseteq & \overline{E} \end{array}$$

dato $\sigma: L \to L$, lo estendo a $\tilde{\sigma}: \overline{E} \to \overline{E}$ e poiché F è normale, viene preservato da $\tilde{\sigma}$, cioè $\tilde{\sigma}|_F : F \to F$. Il nucleo infine è banalmente $Gal(F/L)$.

OSS. $Gal(F/E) \subseteq \prod_L Gal(L/E)$

hanno topologia discreta e sono finiti

← prodotto infinito di spazi topologici compatti e T_2 quindi compatto e T_2

$Gal(F/E)$ è chiuso perché intersezione di chiusi:

$$\mathrm{Gal}(F/E) = \bigcap_{M \supseteq L} \left\{ (\sigma_K) \in \prod_K \mathrm{Gal}(K/E) \;\middle|\; \sigma_L = \sigma_M|_L \right\}$$

Chiuso perché $\mathrm{Gal}(L/E)$ è T_2, e in generale date $f, g : X \to Y$ $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso se Y è T_2

Quindi $\mathrm{Gal}(F/E)$ è chiuso, T_2, cpt.

Def Posto $\Gamma = \mathrm{Gal}(F/E)$, M è un Γ-modulo continuo se l'azione vista come

$$\Gamma \times M \longrightarrow M$$
$$(\gamma, m) \longmapsto {}^{\gamma}m$$

è continua.

in pratica metto la topologia discreta su M e quella di sottospazio su Γ

ovvero $\forall m \in M$ $S = \mathrm{Stab}_M m$ è un sottogruppo chiuso di indice finito, ovvero $S \supseteq \mathrm{Gal}(F/L)$ per qualche L come prima.

OSS - $M = \bigcup_{L \text{ come prima}} M^{\mathrm{Gal}(F/L)}$ oppure equivalentemente $M = \varinjlim M^{\mathrm{Gal}(F/L)}$ (con M un Γ-modulo continuo)

- $\Gamma = \Gamma_E = \mathrm{Gal}(F/E)$, X un Γ-modulo continuo, $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(F/L)$

$\Gamma = \varprojlim \Gamma/\Gamma_L$, $X = \bigcup_L X^{\Gamma_L}$. Osserviamo che Γ/Γ_L agisce su X^{Γ_L}. Inoltre $L \subseteq M \rightsquigarrow \Gamma_L \supseteq \Gamma_M \rightsquigarrow X^{\Gamma_L} \subseteq X^{\Gamma_M}$.

e si hanno le mappe $\Gamma/\Gamma_L \xleftarrow{\pi} \Gamma/\Gamma_M$ (la restrizione)

Voglio definire una mappa ($L \subseteq M$)

$$H^q(\Gamma/\Gamma_L, X^{\Gamma_L}) \xrightarrow{\mathrm{Inf}_L^M} H^q(\Gamma/\Gamma_M, X^{\Gamma_M})$$

"inflazione"

in pratica precomponiamo con π e postcomponiamo con l'inclusione

e a questo punto passare al limite induttivo $\varinjlim_L H^q(\Gamma/\Gamma_L, X^{\Gamma_L})$.

Definiamo la mappa di inflazione:

dato $c : (\Gamma/\Gamma_L)^q \longrightarrow X^{\Gamma_L}$ cociclo, lo mando in

$d : (\Gamma/\Gamma_M)^q \xrightarrow{\pi} (\Gamma/\Gamma_L)^q \xrightarrow{c} X^{\Gamma_L} \hookrightarrow X^{\Gamma_M}$. Questa costruzione preserva cocicli e cobordi, quindi tutto ok. Passo al limite e ottengo

$$H^q_{\mathrm{cont}}(\Gamma, X) := \varinjlim H^q(\Gamma/\Gamma_L, X^{\Gamma_L}) \quad \left(= H^q_{\mathrm{cont}}\left(\varprojlim_L \Gamma/\Gamma_L, \varinjlim_L X^{\Gamma_L}\right) \right)$$

Quindi lo studio per estensioni di Galois non finite si riduce a quello su estensioni finite.

(per ottenere informazioni sulle estensioni di Galois infinite analoghe a quelle finite occorre considerare la coomologia continua)

TEOREMA: $\Gamma = Gal(F/E)$,

$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ succ. esatta di Γ-moduli continui, allora esiste una succ. esatta lunga in coomologia

$$\dots \to H^q_{cont}(\Gamma, X) \to H^q_{cont}(\Gamma, Y) \to H^q_{cont}(\Gamma, Z) \to H^{q+1}_{cont}(\Gamma, X) \to \dots$$

Abbiamo visto che, se $F \supseteq E$ finita di Galois, allora

$$A_F = \left\{ \begin{array}{c} E\text{-alg. centrali semplici} \\ \text{che splittano su } F \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \cong H^2(\Gamma, F^*)$$

$A \sim B$ se $D_A \cong D_B$ — il corpo dei coefficienti delle matrici di B

Def $\mathcal{A}(E) = \{ E\text{-alg. centrali semplici} \} / \sim$ — stessa relazione di equivalenza

detto gruppo di Brauer.

Vale $\mathcal{A}(E) \longleftrightarrow \{ D \text{ corpi } E\text{-centrali finiti su } E \}$

Se $A, A' \in \mathcal{A}(E)$ allora anche $A \otimes A' \in \mathcal{A}(E)$. ($\otimes$ dà struttura di gruppo)

Definiamo $\overline{E}^{sep} = F = \{ x \in \overline{E} \mid x \text{ separabile su } E \}$. Vale allora che

$\overline{E}^{sep} \supseteq E$ è separabile e normale, quindi è di Galois.

normale: automorfismi di $\overline{E}$ mandano separabili in separabili per via dei polinomi minimi

Sia $\Gamma = Gal(\overline{E}^{sep}/E)$.

TEOREMA: $\mathcal{A}(E) \cong H^2_{cont}(\Gamma, F^*)$

DIM: $\forall L \supseteq E$ finita di Galois

$$A_L \cong H^2(\underbrace{\Gamma/\Gamma_L}_{Gal(L/E)}, L^* = (F^*)^{\Gamma_L})$$

Se $L \subseteq M$:

$$\begin{array}{ccc} A_L & \longleftrightarrow & H^2(\Gamma/\Gamma_L, L^*) \\ \cap & & \downarrow Inf_L^M \\ A_M & \longleftrightarrow & H^2(\Gamma/\Gamma_M, M^*) \end{array}$$

Se $A \in A_L$
$A \otimes_E M = A \otimes_E L \otimes_L M =$
$= \mathcal{M}(n,n,L) \otimes_L M = \mathcal{M}(n,n,M)$
$\Rightarrow A \in A_M$

Verifichiamo che il quadrato commuta. A quel punto vogliamo passare al limite da entrambe le parti per ottenere

$$\mathcal{A}(E) = \varinjlim_L A_L \quad \text{e} \quad H^2_{cont}(\Gamma, F^*) = \varinjlim_L H^2(\Gamma/\Gamma_L, L^*)$$

Sia $A \in A_L$. $\quad L \otimes_E A \cong \mathcal{M}(n,n,L) \to H^1(\Gamma/\Gamma_L, PGL(n,L)) \to H^2(\Gamma/\Gamma_L, L^*)$

perché $\mathcal{A}(E) = \bigcup_L A_L$

e $L \subseteq M \Rightarrow A_L \subseteq A_M$ (osservazione su gruppi e sottogruppi di inizio lezione)

$\forall \gamma \in \Gamma/\Gamma_L \qquad a_\gamma = \gamma_A \gamma_0^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(n,n,L))$

$$a_\gamma \cdot X = g_\gamma X g_\gamma^{-1} \quad \text{con } g_\gamma \in Gl(n, L)$$

$A_L \longrightarrow H^1(\Gamma/\Gamma_L, \mathrm{Aut}(n,n,L)) \longrightarrow H^1(\Gamma/\Gamma_L, PGl(n,L)) \longrightarrow H^2(\Gamma/\Gamma_L, L^*)$

$A \rightsquigarrow (\gamma \mapsto a_\gamma) \rightsquigarrow (\gamma \longmapsto \overline{g_\gamma}) \rightsquigarrow c_{\gamma,\delta}$

$$g_\gamma\, {}^{\gamma}g_\delta\, g_{\gamma\delta}^{-1} = c_{\gamma,\delta}\cdot Id$$

a meno dell'isomorfismo $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}(n,n,M)) \cong \mathrm{Aut}(M\otimes \mathcal{M}(n,n,L))$ indotto da Ψ

Preso $M \geq L$ si ha $A \in A_M$, ($A \in A_L$) essendo

$$M\otimes_E A \cong M\otimes_L (L\otimes_E A) \underset{I_L}{\cong} M\otimes_L \mathcal{M}(n,n,L) \underset{\Psi}{\cong} \mathcal{M}(n,n,M)$$

$\forall \delta \in \Gamma/\Gamma_M$ considero $\delta_A \delta_0^{-1}$. Vale che $\delta_A\circ\delta_0^{-1} = \mathrm{id}_M \otimes (\delta|_L \circ \delta_0|_L^{-1})$

Infatti:

$\delta_A(\delta_0^{-1}(m\otimes x)) = \quad \leftarrow m\otimes x \in M\otimes_L \mathcal{M}(n,n,L)$ (stiamo già vedendo a meno dell'isomorfismo Ψ)

$$= \delta_A(\delta^{-1}(m)\otimes \underbrace{\delta_0^{-1}|_L(x)}) = I_L(\delta(I_L^{-1}(\delta^{-1}(m)\otimes \delta_0^{-1}|_L(x)))) =$$

agisce anche su questo pezzo perché l'azione vera sarebbe su $M\otimes_E \mathcal{M}(n,n,E)$

per fare δ_A passo via isomorfismo $I_L : L\otimes_E A \to \mathcal{M}(n,n,L)$ (in realtà I_L "=" $Id_M \otimes I_L$)

$$= m \otimes I_L \circ \delta|_L(I_L^{-1}(\delta_0^{-1}|_L(x)))$$

agisco su $L\otimes_E A$, quindi qui $\delta = \delta|_L$

cioè $\delta_A\circ\delta_0^{-1} = \mathrm{id}_M \otimes \delta_A|_L \circ \delta_0|_L^{-1}$ ← a meno degli isomorfismi vari che servirebbero...

$= \delta_A|_L \circ \delta_0|_L^{-1}$

Quindi $\tilde g_\delta = g_{\delta|_L}$, da cui $d_{\delta_1,\delta_2} = \tilde g_{\delta_1}\, {}^{\delta_1}\tilde g_{\delta_2}\, \tilde g_{\delta_1\delta_2}^{-1} = \inf_L^M(c)$, cioè il quadrato commuta.

Considereremo $A(\underset{E}{\mathbb{F}_q((t))})$, $\overline{\mathbb{F}_q((t))}^{sep} = \overline{E}^{sep}$.

$\mathbb{F}_q((t)) \subseteq \overline{\mathbb{F}_q}((t)) \subseteq \overline{E}$. Vedremo che

$$H^2(\Gamma_0, \overline{E}^{sep *}) \cong H^2(\Gamma, F^*) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad \left(\begin{array}{l}\Gamma_0 = Gal(\overline{E}^{sep}/\overline{E}) \\ \Gamma = Gal(F/E)\end{array}\right)$$

oss. $\mathbb{F}_q((t)) = \{\sum_{i\geq m} a_i t^i \mid a_i \in \mathbb{F}_q,\ m\in\mathbb{Z}\}$

COOMOLOGIA DI GRUPPI

Def Data $\varphi : H \to G$ di gruppi, si può definire la restrizione

$$\varphi^* = Res_H^G : \{G\text{-moduli}\} \longrightarrow \{H\text{-moduli}\}$$

$$M \longmapsto Res\, M = M \text{ come gruppo abeliano e } h\cdot m = \varphi(h)\cdot m$$

Costruiamo due mappe: $H^q(G,M) \xrightarrow{Res^q} H^q(H, \operatorname{Res} M)$

$$H_q(H, \operatorname{Res} M) \xrightarrow{Cor_q} H_q(G,M)$$

Prendendo $R=\mathbb{Z}$ (coeff. in $\mathbb{Z}$),

ricordiamo che $H^q(G,M) = \operatorname{Ext}^q_G(\mathbb{Z}, M)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{G\times G\times G} \arrow[r] & A_{G\times G} \arrow[r] & A_G \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A_{H\times H\times H} \arrow[r] \arrow[u, "\varphi\times\varphi\times\varphi"] & A_{H\times H} \arrow[r] \arrow[u, "\varphi\times\varphi"] & A_H \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

$A_{G\times G\times G} = \mathbb{Z}[G^3]$, $A_{G\times G} = \mathbb{Z}[G^2]$, $A_G = \mathbb{Z}[G]$

risoluz. libera (proiettive)

risoluz. libera

Applico $\operatorname{Hom}(-, M)$ e ottengo i complessi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_G(A_G, M) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_G(A_{G\times G}, M) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_H(A_H, M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_H(A_{H\times H}, M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sono mappe di moduli

Posso semplicemente definire $H^q(G,M) \longrightarrow H^q(H,M)$

usando $\operatorname{Res} M$ per avere un $\mathbb{Z}[H]$-modulo

$$[f] \longmapsto [f\circ\varphi^q]$$

$\varphi^q = \underbrace{\varphi\times\varphi\times\cdots\times\varphi}_{q \text{ volte}}$

Per l'analogia: $H_q(H,M) \longrightarrow H_q(G,M)$

$$H_q(H,M) = \{f: A^q \to M \text{ a supp. fin. t.c. } \partial f = 0\}/\sim \qquad \{\partial g \mid g: H^{q+1}\to M \text{ a supp. finito}\}$$

Data $f: H^q \to M$, poniamo $\underbrace{Cor_q(f)}_{=\tilde f}(g_1,\dots,g_q) = \sum_{\substack{h_1,\dots,h_q \\ \varphi(h_i)=g_i}} f(h_1,\dots,h_q)$

ISTALG - LEZIONE 29 -

Data $\varphi: H \to G$ di gruppi (in particolare ci interessa φ l'inclusione di H in G), abbiamo fornito un funtore $Res^G_H: \{G\text{-mod}\} \to \{H\text{-mod}\}$ dato dalla composizione per φ ($h \cdot m = \varphi(h) \cdot m$). Questo fornisce mappe in coomologia ($Res^q: H^q(G;M) \to H^q(H;\underset{Res M}{\cancel{M}})$) e in omologia ($Cor_q: H_q(H;\underset{Res M}{\cancel{M}}) \to H_q(G;M)$).

Def Si definisce l'induzione / indotto

$$\mathrm{Ind}^G_H: \{H\text{-mod}\} \to \{G\text{-mod}\}$$
$$N \longmapsto \underset{\substack{\uparrow \\ g \cdot h = g\varphi(h) \text{ (azione destra)}}}{R[G]} \otimes_{R[H]} N$$

In $R[G] \otimes_{R[H]} N$ vale:

$$g \cdot (x \otimes m) = gx \otimes m \quad \text{(cioè è un } R[G]\text{-modulo}_{sx})$$

Per i morfismi, dato $L: N_1 \to N_2$ si definisce

$$\mathrm{Ind}^G_H(L): \mathrm{Ind}^G_H(N_1) \to \mathrm{Ind}^G_H(N_2) \qquad \left(\mathrm{Ind}^G_H(L) = id_{R[G]} \otimes L\right)$$
$$x \otimes m \longmapsto x \otimes L(m)$$

Def Si definisce la coinduzione / coindotto

$$\mathrm{coInd}^G_H: \{H\text{-mod}\} \to \{G\text{-mod}\}$$
$$N \longmapsto \mathrm{Hom}_H(R[G], N)$$

Vedendo $R[G]$ come $f: G \to R$ a supp. finito con azione $(h \cdot f)(g) = f(g\varphi(h))$ viene questa qua

dove $R[G]$ è H-modulo sinistro con $h \cdot g = g\varphi(h^{-1})$.

Se $f: R[G] \to N$, si definisce $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$ e questo rende $\mathrm{Hom}_H(R[G], N)$ un G-modulo.

in pratica considero N come G-mod. banale e ci metto l'azione di rappr.

Per i morfismi, se $L: N_1 \to N_2$ si definisce

$$\mathrm{coInd}^G_H(L): \mathrm{coInd}^G_H(N_1) \to \mathrm{coInd}^G_H(N_2)$$
$$f \longmapsto L \circ f$$

LEMMA: Se M è un G-modulo e N è H-modulo, allora:

1) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}^G_H(N), M) \cong \mathrm{Hom}_H(N, Res^G_H(M))$

2) $\mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{coInd}^G_H(N)) \cong \mathrm{Hom}_H(Res^G_H(M), N)$

Inoltre questi isomorfismi sono naturali in N e M.
cioè, fissato N, esiste equival. naturale tra i funtori $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}^G_H(N), -)$ e $\mathrm{Hom}_H(N, Res^G_H(-))$ e analogamente fissato M e anche per gli altri funtori

Def Se $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtori, si dice che F è l'aggiunto sinistro di G (analogamente in modo simmetrico per l'aggiunto destro) se:
$$\forall x \in \mathcal{C},\ \forall y \in \mathcal{D}\ \exists \alpha_{x,y}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$
isomorfismo tale che il diagramma seguente commuta:

in pratica i funtori $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-))$ sono naturalmente equivalenti

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \arrow[r, "\alpha_{x,y}"] \arrow[d, "f\circ -"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(y)) \arrow[d, "G(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y') \arrow[r, "\alpha_{x,y'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(y'))
\end{tikzcd}$$

$\forall f: y \to y'$ e analogamente deve commutare il diagramma corrispondente a ogni $f: x \to x'$ (le frecce verticali si girano)

OSS Ind è aggiunto sinistro di Res, mentre coInd è aggiunto destro di Res.

DIM: (Parziale)

$\boxed{1}$ Se $L: R[G] \otimes_{R[H]} N \to M$ è di G-moduli vale $L(g \otimes m) = g L(1 \otimes m)$.

Poniamo allora $\ell: N \to M$, $m \mapsto L(1 \otimes m)$. È di H-moduli perché
$$\ell(hm) = L(1 \otimes hm) = L(h \otimes m) = h L(1 \otimes m) = h\ell(m).$$

Viceversa, dato $\ell: N \to M$, definiamo
$$L: R[G] \otimes_{R[H]} N \to M, \quad g \otimes m \mapsto g\ell(m)$$
È di G-moduli e ben definita poiché
$$gh\ell(m) = L(gh \otimes m)$$
$$\shortparallel$$
$$g\ell(hm) = L(g \otimes hm)$$

$\boxed{2}$ Se $L: M \to \mathrm{coInd}_H^G(N)$ poniamo $\ell: M \to N$, $m \mapsto L(m)(1)$, $L(m) \in \mathrm{Hom}_H(R[G], N)$

Viceversa, se $\ell: M \to N$, poniamo
$$L: M \to \mathrm{coInd}_H^G(N)$$
$$m \mapsto (g \mapsto \ell(g^{-1}m))$$
È ben definita poiché
$$L(m)(gh^{-1}) = \ell(hg^{-1}m) = h\ell(g^{-1}m) = h(L(m)(g))$$

COROLLARIO: Vale che:

1) Ind_H^G e coInd_H^G sono funtori additivi

2) Ind_H^G è esatto a destra, porta proiettivi in proiettivi e conserva i limiti diretti

3) coInd_H^G è esatto a sinistra, porta iniettivi in iniettivi e conserva i limiti proiettivi.

DIM: Ind_H^G è esatto a destra perché lo è $R[G] \otimes_{R[H]} -$

coInd_H^G è esatto a sinistra perché lo è $\mathrm{Hom}_H(R[G], -)$

[...]

OSS. Il funtore Res_H^G è esatto. (non cambia né oggetti né mappe, solo la linearità)

[...] Vediamo che Ind_H^G manda proiettivi in proiettivi:

se P è H-modulo proiettivo, chiamando $\alpha_\bullet$ l'isomorfismo del lemma precedente si ha

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ind}_H^G(P) \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \overset{(\mathrm{Res}_H^G \text{ è esatto})\ (\alpha \text{ è isom.})}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\alpha_Y(f)"] & \\ X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{(Come } H\text{-moduli)} \quad \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\alpha_Y(f)"] & \\ X \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, phantom, "G"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \overset{(g \text{ esiste perché } P \text{ proiettivo})}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathrm{Ind}(P) \arrow[dl, "\alpha_X^{-1}(g)"'] \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, phantom, "G"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L'ultimo diagramma commuta perché

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(P), X) \arrow[r, "\cong", "\alpha_X"'] \arrow[d, "h\circ -"'] & \mathrm{Hom}_H(P, \underbrace{X}_{\mathrm{Res}_H^G X}) \arrow[d, "h\circ -"] \\ \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(P), Y) \arrow[r, "\cong", "\alpha_Y"'] & \mathrm{Hom}_H(P, \underbrace{Y}_{\mathrm{Res}_H^G Y}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \alpha_X^{-1}(g) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, phantom, "G"] & g \arrow[d, mapsto] \\ f \arrow[r, mapsto] & \alpha_Y(f) \end{tikzcd}$$

questo è quello che serve per il diagramma sopra

Commuta per naturalità.

- Lavoriamo ora nel caso particolare in cui $H \leq G$ e φ è l'inclusione.

Vale: $$R[G] = \bigoplus_{x \in R} xR[H]$$ ($x \in$ insieme di rappresentanti delle classi laterali)

$$G = \coprod_{x \in R} xH = \coprod_{x \in R} Hx$$

$$R[G] = \bigoplus_{x \in R} R[H]x$$ (cioè $R[G]$ è $R[H]$-modulo libero)

Dunque i funtori $\mathrm{Ind}_H^G = R[G] \otimes_{R[H]} -$ e

Tutto grazie all'esattezza di Ind e coInd dall'altra parte (si fa come l'altro)

$\mathrm{coInd}_H^G = \mathrm{Hom}_H(R[G], -)$ sono esatti. (libero ⇒ piatto e libero ⇒ proiettivo)

Allora Res_H^G, che è l'aggiunto sinistro di coInd_H^G, manda proiettivi in proiettivi. Inoltre, essendo anche aggiunto destro di Ind_H^G, porta anche iniettivi in iniettivi.

<u>LEMMA</u>: Se $H \leq G$ e N è H-modulo, allora:

$$H^i(G; \mathrm{coInd}_H^G(N)) \cong H^i(H; N)$$
$$H_i(G; \mathrm{Ind}_H^G(N)) \cong H_i(H; N)$$

Dim:

$\boxed{1}$ $H^i(H; N)$ è il derivato di $N \mapsto N^H$. Preso $0 \to N \to I^\bullet$ risoluzione iniettiva di N, applicando il funtore coInd_H^G (che è esatto), si ha

$$0 \to \mathrm{coInd}_H^G(N) \to \mathrm{coInd}_H^G(I^\bullet) \quad \text{ris. inj.}$$

Quindi

- $H^i(H, N) = H^i((I^\bullet)^H)$ per definizione
- $H^i(G, \mathrm{coInd}_H^G(N)) = H^i((\mathrm{coInd}_H^G(I^\bullet))^G)$ per def.

$(P^\bullet)_H \cong R \otimes_{R[H]} P^\bullet \cong R \otimes_{R[G]} R[G] \otimes_{R[H]} P^\bullet \cong R \otimes_{R[G]} \mathrm{Ind}_H^G(P^\bullet) \cong (\mathrm{Ind}_H^G(P^\bullet))_G$

Basta quindi vedere che

$$(I^\bullet)^H = (\mathrm{coInd}_H^G(I^\bullet))^G.$$

(X un H-modulo)

Ma $X^H \cong \mathrm{Hom}_H(R, X) \cong \mathrm{Hom}_G(R, \mathrm{coInd}_H^G(X)) \cong (\mathrm{coInd}_H^G(X))^G$

visto in passato

R è H-modulo che può essere visto come $\mathrm{Res}_H^G(R)$, tanto l'azione è banale

$\boxed{2}$ Per l'omologia è analoga.

OSS. Caso interessante: se $H = \{id_G\}$, allora $H_i(H, N) = H^i(H, N) = 0 \ \forall i > 0$.

Dunque per il lemma tutti i $\mathrm{coInd}_H^G(N)$ hanno coomologia nulla in grado > 0, e gli $\mathrm{Ind}_H^G(N)$ hanno omologia nulla in grado positivo. (perché $(I^\bullet)^H = I^\bullet$, che è esatto. Stessa cosa per $(I^\bullet)_H = R \otimes_{R[H]} I^\bullet = I^\bullet$)

<u>Def</u> ~~Somme~~ Addendi diretti ~~(finite)~~ di $\mathrm{coInd}_{1_G}^G(N)$ ~~(al variare di N)~~ si dicono "relativamente iniettivi". ~~Somme~~ Addendi diretti ~~(finite)~~ di $\mathrm{Ind}_{1_G}^G(N)$ ~~(variando gli N)~~ si dicono "relativamente proiettivi".

<u>LEMMA</u>: Se $H \leq G$ e N è un H-modulo, allora:

$$\mathrm{coInd}_H^G(N) = \{f : G \to N \mid f(gh^{-1}) = hf(g) \quad \forall g \in G \quad \forall h \in H\}$$

In pratica le f di H-mod

$$\mathrm{Ind}_H^G(N) = \{f \in \mathrm{coInd}_H^G(N) \mid f \text{ ha supporto finito in } G/H\}$$

Ha senso parlare di supporto su G/H, ovvero dell'insieme
$\{\bar{g} \in G/H \mid f(\bar{g}) \neq 0\}$ perché $\forall f \in \mathrm{CoInd}_H^G(N)$ $f(gh^{-1}) = 0$
se e solo se $h \cdot f(g) = 0$, cioè se e solo se $f(g) = 0$
perché $f(g) = f(gh^{-1}h) = h^{-1} \cdot f(gh^{-1}) = h^{-1} \cdot 0 = 0$ (altra freccia ovvia)

DIM:

- $$\mathrm{Hom}_H(R[G], N) \longleftrightarrow \{f : G \to N \mid f(gh^{-1}) = hf(g)\}$$
$$F \longmapsto F|_G$$
$$f \text{ estesa per linearità} \longleftarrow f$$

- $$R[G] \otimes_{R[H]} N \longleftrightarrow \{f : G \to N \mid \underbrace{f(gh^{-1}) = hf(g)}, \underbrace{\mathrm{supp}_{G/H} f < +\infty}\}$$
serve per l'iniettività: se $f(x_i) = g(x_i)$ $\forall i$, allora $f = g$

serve per definire bene l'elemento
$$\sum_i x_i \otimes f(x_i) \longleftarrow f$$
con $\{x_i\}$ insieme di rappresentanti delle classi di H in G
$$g \otimes m \longmapsto \Big(x \mapsto \sum_{h \in H} (\delta_{gh^{-1},x} \cdot hm)\Big)$$
è a supp. finito in G/H perché fuori dalla classe gH è nulla.

$xK^{-1} \longmapsto Khm = K(hm)$

COROLLARIO: Se G è finito (o più in generale se $[G:H] < +\infty$):
1) $\mathrm{Ind}_H^G = \mathrm{CoInd}_H^G$
2) Relativamente iniettivi e relativamente proiettivi coincidono

- Se $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è gruppo ciclico finito, sappiamo già che
$$H^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, X) = X^G / N(X), \quad \text{con } N : X \to X^G, \; x \mapsto \sum_{i=0}^{m-1} g^i \cdot x \quad \text{con } g \text{ generatore}$$
di G e X un G-modulo. Inoltre, avevamo $S : X \to X$, $x \mapsto x - g \cdot x$.
Una risoluzione proiettiva (libera) di R è:
$$\cdots \xrightarrow{S} R[G] \xrightarrow{N} R[G] \xrightarrow{S} R[G] \xrightarrow{\Sigma} R \longrightarrow 0$$
$$g^i \longmapsto 1 \quad \forall i$$
Dunque $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Im}\, N$ e $\mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Im}\, S$.

danno tutta l'imm. perché $N(\sum a_i g^i) = N(\sum a_i)$

Infatti:
$$\mathrm{Ker}\, S = \Big\{\sum_{i=0}^{m-1} a_i g^i \;\Big|\; a_i = a_{i+1}, \; a_{m-1} = a_0\Big\} = \Big\{a \cdot \sum_{i=0}^{m-1} g^i\Big\} = \{N(a)1 \mid a \in R\} = \mathrm{Im}\, N$$
$$\mathrm{Ker}\, N = \Big\{\sum_{i=0}^{m-1} a_i g^i \;\Big|\; \Big(\sum_{i=0}^{m-1} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m-1} g^j\Big) = 0\Big\} =$$
$$= \Big\{\sum_{i=0}^{m-1} a_i g^i \;\Big|\; \sum_{i=0}^{m-1} a_i = 0\Big\} = \Big\{\sum_{i=0} b_i g^i - \sum_{i=0} b_i g^{i+1}\Big\} = \mathrm{Im}\, S$$
In pratica $\sum a_i g^i = a_0(1-g) + (a_0+a_1)(g-g^2) + \ldots + (a_0 + \ldots + a_{m-2})(g^{m-2} - g^{m-1})$

dove $b_i = a_0 + \ldots + a_i$

TEOREMA: Se $G = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ e g è un generatore, X è un G-mod allora:

$$H^q(X) = \begin{cases} X^G/_{N(X)} & \text{se } q \text{ è pari e } q>0 \\ \mathrm{Ker}N/_{\mathrm{Im}S} & \text{se } q \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\hat{H}^q(G;X)$

$$H_q(X) = \begin{cases} X^G/_{N(X)} & \text{se } q \text{ è dispari} \\ \mathrm{Ker}N/_{\mathrm{Im}S} & \text{se } q \text{ è pari e } q>0 \end{cases}$$

$H_q(G;X)$

DIM: Usiamo la risoluzione (libera) proiettiva di R (perché $H^q(G;X) \cong \mathrm{Ext}^q_{R[G]}(R,M)$)

$$\ldots \xrightarrow{S} R[G] \xrightarrow{N} R[G] \xrightarrow{S} R[G] \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0$$

Passando al funtore $\mathrm{Hom}_G(-,X)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(R[G],X) \xrightarrow{-\circ S} \mathrm{Hom}_G(R[G],X) \xrightarrow{-\circ N} \mathrm{Hom}_G(R[G],X) \xrightarrow{-\circ S} \ldots$$

Ma $\mathrm{Hom}_G(R[G],X) \cong X$ (l'isomorfismo è dato da $\varphi \mapsto \varphi(1)$)

Dunque:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_G(R[G],X) & \xrightarrow{-\circ S} & \mathrm{Hom}_G(R[G],X) & \xrightarrow{-\circ N} & \mathrm{Hom}_G(R[G],X) & \xrightarrow{-\circ S} & \ldots \\ & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \\ 0 \to & X & \xrightarrow{S} & X & \xrightarrow{N} & X & \xrightarrow{S} & \ldots \end{array}$$

da cui segue la tesi sulla coomologia.

Per l'omologia segue allo stesso modo prendendo la stessa risoluzione proiettiva di R e applicando il funtore $- \otimes_{R[G]} X$

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \xrightarrow{S\otimes id_X} & R[G]\otimes_{R[G]} X & \xrightarrow{N\otimes id_X} & R[G]\otimes_{R[G]} X & \xrightarrow{S\otimes id_X} & R[G]\otimes_{R[G]} X & \to 0 \\ & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & \\ \xrightarrow{S} & X & \xrightarrow{N} & X & \xrightarrow{S} & X & \to 0 \end{array}$$

da cui
$$H_q(G;X) = \begin{cases} \mathrm{Ker}S/_{\mathrm{Im}N} & \text{se } q \text{ dispari} \\ \mathrm{Ker}N/_{\mathrm{Im}S} & \text{se } q \text{ pari}, q>0 \end{cases}$$

ISTALG. LEZIONE 30.

in realtà li abbiamo definiti per G qualunque

OSS. Se $H < G$ e G finito, abbiamo già Res^G_H in coomologia e Cor in omologia. Vogliamo definirli anche al contrario.

Def Se M è G-modulo (con G finito), si definisce

Più in generale dovrebbe bastare $[G:H] < \infty$ per definire $N_{G/H}$

norma

$$N_{G/H} : M^H \longrightarrow M^G$$
$$m \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m$$

dove gli x_i sono rappresentanti delle classi di G/H. Questa è ben definita grazie al fatto che $m \in M^H$. ($g x_i = x_j h^{(i)}$ per un certo j e un certo $h^{(i)} \in H$)

Se $f: M_1 \to M_2$ morfismo di G-moduli, allora

$$\begin{array}{ccc} M_1^H & \xrightarrow{N_{G/H}} & M_1^G \\ {\scriptstyle f|_{M_1^H}}\downarrow & G & \downarrow {\scriptstyle f|_{M_1^G}} \\ M_2^H & \xrightarrow[N_{G/H}]{} & M_2^G \end{array}$$

commuta.

Possiamo definire

$Cor^q : H^q(H,M) \to H^q(G,M)$ nel modo seguente: abbiamo visto che Res manda iniettivi in iniettivi e proiettivi in proiettivi (perché aggiunto dx e sx di un funtore esatto, risp. Ind e coInd). Se $0 \to M \to I^\bullet$ è risoluzione iniettiva di G-moduli, allora è anche ris. iniettiva di H-moduli.

Si ha:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & (I^0)^H & \longrightarrow & (I^1)^H & \longrightarrow & (I^2)^H & \longrightarrow \dots \\ & \cup\!\!| & & \cup\!\!| & & \cup\!\!| & \\ 0 \to & (I^0)^G & \longrightarrow & (I^1)^G & \longrightarrow & (I^2)^G & \longrightarrow \dots \end{array}$$

ma anche

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & (I^0)^H & \longrightarrow & (I^1)^H & \longrightarrow & (I^2)^H & \longrightarrow \dots \\ & \downarrow {\scriptstyle N_{G/H}} & G & \downarrow {\scriptstyle N_{G/H}} & G & \downarrow {\scriptstyle N_{G/H}} & \\ 0 \to & (I^0)^G & \longrightarrow & (I^1)^G & \longrightarrow & (I^2)^G & \longrightarrow \dots \end{array}$$

e passando alla coomologia si ottiene $Cor^q : H^q(H,M) \to H^q(G,M)$

(Alternativamente)

Più esplicitamente, essendo $H^q(G,M) = \mathrm{Ext}^q_G(R,M)$, si ha

$$\dots \to A_{G\times G\times G} \to A_{G\times G} \to A_G \to R \to 0$$ ris. libera di R.

$$\dots \to A_{H\times H\times H} \to A_{H\times H} \to A_H \to R \to 0$$

da cui, applicando $\mathrm{Hom}_\cdot(\cdot, M)$ si ottiene

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(A_G, M) \to \mathrm{Hom}_G(A_{G\times G}, M) \to \dots$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_H(A_H, M) \to \mathrm{Hom}_H(A_{H\times H}, M) \to \dots$$

Su $\mathrm{Hom}(A_G, M)$ possiamo pensare all'azione di G data da
senza richieste di linearità oltre a R

$$(g\cdot\varphi)(a) = g(\varphi(g^{-1}a))$$ e vale:

$$\mathrm{Hom}_G(A_G, M) = (\mathrm{Hom}(A_G, M))^G$$

L'azione standard su V^* è $(g\cdot\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$, quella su $V\otimes W$ è $g\cdot(v\otimes w) = g\cdot v \otimes g\cdot w$ e mettendo tutto con $\mathrm{Hom}(V,W) = V^*\otimes W$ si ottiene questa azione

Inoltre:

$$\mathrm{Hom}_H(A_H, M) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G A_H, M) = \mathrm{Hom}_G(A_G \otimes_{A_H} A_H, M) = \mathrm{Hom}_G(A_G, M).$$

Però forse così non arriviamo in fondo....

Ripartiamo da lassù: quella è ris. di G-moduli liberi, quindi anche di H-moduli liberi (in particolare A_G è un H-modulo libero) quindi usiamo questa stessa risoluzione per entrambe.

Come sopra, vale $\mathrm{Hom}_G(X,Y) = (\mathrm{Hom}(X,Y))^G$

$\mathrm{Hom}_H(X,Y) = (\mathrm{Hom}(X,Y))^H$

da cui

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{Hom}(A_G, M))^G \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\mathrm{Hom}(A_{G\times G}, M))^G \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{Hom}(A_G, M))^H \arrow[r] \arrow[u, "N_{G/H}"] & (\mathrm{Hom}(A_{G\times G}, M))^H \arrow[r] \arrow[u, "N_{G/H}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

da cui si ottiene la mappa $\mathrm{Cor}^q : H^q(H,M) \to H^q(G,M)$.

LEMMA: Se G finito vale (o più in generale $[G:H]<\infty$)

$$\mathrm{Cor}^q \circ \mathrm{Res}^q : H^q(G,M) \longrightarrow H^q(G,M)$$
$$\varphi \longmapsto |G/H| \cdot \varphi$$

DIM: $\underline{q=0}$:
$$M^G \xrightarrow{\mathrm{Res}} M^H \xrightarrow[\mathrm{Cor}]{N_{G/H} \atop \parallel} M^G$$
$$m \longmapsto m \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i \cdot m}_{\substack{\parallel \\ m \\ (m \in M^G)}} = \sum_{i=1}^{n} m = \underset{\substack{\parallel \\ |G/H|}}{n} \cdot m$$

In generale:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & 0 \longrightarrow & (I^0)^G & \longrightarrow & (I^1)^G & \longrightarrow & (I^2)^G & \longrightarrow \dots \\
\mathrm{Res} \to & & \cap & & \cap & & \cap & \\
 & 0 \longrightarrow & (I^0)^H & \longrightarrow & (I^1)^H & \longrightarrow & (I^2)^H & \longrightarrow \dots \\
\mathrm{Cor} \to & & \downarrow N_{G/H} & & \downarrow N_{G/H} & & \downarrow N_{G/H} & \\
 & 0 \longrightarrow & (I^0)^G & \longrightarrow & (I^1)^G & \longrightarrow & (I^2)^G & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Su ciascuna colonna la composizione è la moltiplicazione per $|G/H|$ come nel caso $q=0$, quindi

$$\text{“} \; H^q(\_) \circ H^q(\_) = H^q(\_ \circ \_) = |G/H| \cdot \_ \; \text{”}$$

COROLLARIO: Se G è finito, allora
$$|G| \cdot H^q(G,M) = 0 \quad \forall q>0 \quad \forall M \text{ } G\text{-modulo}$$
ossia $H^q(G,M)$ è di torsione

DIM: Nel lemma, con $H = \{1_G\}$
$$H^q(G,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^q(H,M) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^q(G,M)$$
$$\varphi \longmapsto |G| \cdot \varphi$$
ma $M \to M^H = M$ è esatto, quindi $H^q(H,M) = 0$
$$\Rightarrow |G| \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H^q(G,M)$$

OSS. La stessa cosa vale in omologia. (sempre con $[G:H] < +\infty$)

La norma diventa $N'_{G/H} : M_G \longrightarrow M_H$ $\left(M_G = M / \langle m - gm \mid g \in G, m \in M \rangle \right)$
$$\overline{m} \longmapsto \sum \overline{x_i \cdot m}$$
(è detta traccia)

con x_i rappresentanti di G/H

$M^G \subseteq M^H$ diventa

$M_H \twoheadrightarrow M_G$.

LEMMA: Se $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$, $\{Z_n\}$ successioni di R-moduli ($n \in \mathbb{N}$) con mappe $\forall n$ $X_{n+1} \to X_n$, $Y_{n+1} \to Y_n$, $Z_{n+1} \to Z_n$ e successioni esatte corte date da

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"'] \arrow[u] & Y_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"'] \arrow[u] & Z_{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

allora vale che la successione

$$0 \to \varprojlim X_n \xrightarrow{\alpha} \varprojlim Y_n \xrightarrow{\beta} \underbrace{\varprojlim Z_n \to 0}_{}$$ è esatta

per questo serve che le $X_{n+1} \to X_n$ siano surgettive

DIM: Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim X_n \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_{n-1} \arrow[d] \\
\varprojlim Y_n \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & Y_{n-1}
\end{tikzcd}$$

dice che $\forall n$

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim X_n \arrow[dr, bend left] \arrow[drr, bend left] & & \\
\varprojlim Y_n \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & Y_{n-1}
\end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd}
\varprojlim X_n \arrow[d, "\exists \alpha"] \\
\varprojlim Y_n
\end{tikzcd}$$

Analogamente si mostra che $\exists \beta$.

Ne segue inoltre che $\beta\alpha = 0$ (per via dell'unicità della mappa che fa commutare)

In più: $\alpha((x_n)) = 0 \Rightarrow \alpha_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n = 0 \ \forall n$

da cui l'esattezza in $\varprojlim X_n$.

Se $0 = \beta((y_n))$ da cui $\beta_n(y_n) = 0$, allora $y_n \in X_n \subseteq Y_n$, $y_n = \alpha_n(x_n)$

Per via della commutatività dei quadrati $\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d] & Y_{n+1} \arrow[d] \\ X_n \arrow[r, "\alpha_n"] & Y_n \end{tikzcd}$ e per iniettività di α.

da cui $(y_n) = \alpha((x_n))$

(e (x_n) è "coerente"). Quindi si ha l'esattezza in $\varprojlim Y_n$

Infine, se $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $z_{n+1} \to z_n$, costruisco (y_n) tale che $\beta((y_n)) = (z_n)$

$y_0 \xrightarrow{\beta_0} z_0$

$y_1 \xrightarrow{\beta_1} z_1$

Vorrei $y_1 \to y_0$. A priori abbiamo però

$$\begin{tikzcd}
y_0 \arrow[r] & z_0 \\
\tilde{y}_1 \arrow[ur] & \arrow[u] \\
y_1 & z_1
\end{tikzcd}$$

$(\alpha_0(x_0))$ $\qquad$ $\alpha_0(x_0)$

Pongo allora $x_0 := \bar{y}_1 - y_0 \in X_0$. Usando l'ipotesi di surgettività di $X_{n+1} \to X_n$, trovo $x_1 \in X_1$ tale che $x_1 \mapsto x_0$, da cui:

$$\begin{array}{ccc} \bar{y}_1 - x_0 = y_0 & \longrightarrow & z_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underbrace{y_1 - x_1} & \longrightarrow & z_1 - 0 = z_1 \end{array}$$

sarebbe $y_1 - \alpha_1(x_1)$

Scelgo lui come "y_1" e vado avanti per induzione.

<u>COROLLARIO</u>: Se G gruppo e $M_n \twoheadrightarrow M_{n+1}$, allora

$$H^q(G, \varprojlim M_n) = \varprojlim H^q(G, M_n)$$

ATTENZIONE PUÒ ESSERE FALSO

DIM: Poniamo

$$\begin{array}{lccccc} C_n^\bullet : & \mathrm{Hom}_G(A_G, M_n) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(A_{G\times G}, M_n) & \longrightarrow & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ C_{n-1}^\bullet : & \mathrm{Hom}_G(A_G, M_{n-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(A_{G\times G}, M_{n-1}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Abbiamo allora:

$$\dots \twoheadrightarrow C_3^\bullet \twoheadrightarrow C_2^\bullet \twoheadrightarrow C_1^\bullet \twoheadrightarrow C_0^\bullet$$

Da cui

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z_n^q & \to & C_n^q & \twoheadrightarrow & B_n^{q+1} & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & Z_{n-1}^q & \to & C_{n-1}^q & \twoheadrightarrow & B_{n-1}^{q+1} & \to & 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ è surgettiva anche questa

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B_n^q & \to & Z_n^q & \to & H_n^q & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B_{n-1}^q & \to & Z_{n-1}^q & \to & H_{n-1}^q & \to & 0 \end{array}$$

Per il lemma precedente:

$$0 \to \varprojlim B_n^q \to \varprojlim Z_n^q \to \underset{\displaystyle \varprojlim H^q(G, M_n)}{\underset{\parallel}{\varprojlim H_n^q}} \to 0 \quad \text{è esatta}$$

D'altronde:

$$H^q(G, \varprojlim M_n) \to \mathrm{Hom}_G(A_{G^{q+1}}, \varprojlim M_n) \to \mathrm{Hom}_G(A_{G^{q+2}}, \varprojlim M_n)$$

LEMMA: $\mathrm{Hom}(X, \varprojlim Y_n) = \varprojlim \mathrm{Hom}(X, Y_n)$.

DIM: Segue dalla definizione di $\varprojlim$ in maniera diretta.

$$\Rightarrow H^q(G, \varprojlim M_n) \to \varprojlim(\mathrm{Hom}(A_{q+1}, M_n)) \to \varprojlim(\mathrm{Hom}(A_{q+2}, M_n))$$

.... La dimostrazione non chiude. Vedi prossima lezione (*).

Esempio: Se $E = \mathbb{F}_q((t))$, chi è $A(E)$?

$A(E) = H^2_{cont}(\Gamma_0, (E^s)^*)$, con $E^s := \{a \in \overline{E} \mid a \text{ separabile su } E\}$

$\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(E^s, E)$

Vale che $H^2_{cont}(\Gamma_0, (E^s)^*) \underset{\text{STEP 2}}{=} H^2(\Gamma, E_{nr}^*) \underset{\text{STEP 1}}{=} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Con $\Gamma = \mathrm{Gal}(E_{nr}, E)$ e $E_{nr} = \overline{\mathbb{F}}_q((t))$

LEMMA: Se F/E estensione di Galois con gruppo di Galois Γ, in particolare F è un Γ-modulo e valgono:

$$H^q_{cont}(\Gamma, F) = 0 \quad \forall q > 0$$
$$H_q^{cont}(\Gamma, F) = 0 \quad \forall q > 0$$

DIM: Essendo $H^q_{cont}(\Gamma, F) := \varinjlim_{\substack{E \subseteq L \subseteq F \\ E \subseteq L \text{ di Galois} \\ \text{finito}}} H^q(\Gamma/\Gamma_L, F^{\Gamma_L}) = \varinjlim H^q(\mathrm{Gal}(L/E), L)$

$(\Gamma_L = \mathrm{Gal}(F/L))$

Relativamente iniettivi hanno coomologia nulla
Relativamente proiettivi hanno omologia nulla
(*)

Ci basta fare il caso di F finito su E (in generale, sarà limite di questi, e $\varinjlim 0 = 0$).

Vediamo che F, come Γ-modulo, è relativamente ~~iniettivo~~ proiettivo $(R = \mathbb{Z})$ (e relativamente ~~proiettivo~~ iniettivo, tanto Γ è finito). Per semplicità, facciamo il caso F $\mathbb{Z}$-modulo (cioè gruppo abeliano). Allora:

$$\mathrm{Ind}_{\{\cdot\}}^{\Gamma}(F) = \overbrace{\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} F}^{F[\Gamma]} \xrightarrow{\pi} F \quad \text{morfismo di } \Gamma\text{-moduli}$$

$$\gamma \otimes \lambda \longmapsto \gamma(\lambda)$$

Dimostriamo che $F[\Gamma] \xrightarrow{\pi} F$ spezza. Vale:

$$\mathrm{Tr}_{F/E} : F \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(f)$$

(che poi è $N_{F/E}$, solo che per i campi si usa "traccia" invece che norma)

La traccia è E-lineare e non nulla (altrimenti avremmo $\sum \gamma(f) = 0 \ \forall f \Rightarrow \sum \gamma = 0 \Rightarrow \gamma$ dipendenti. Assurdo), quindi è surgettiva.

Sia $a \in F$ tale che $\mathrm{Tr}_{F/E}(a) = 1$. Allora:

$$\sigma : F \longrightarrow F[\Gamma]$$
$$1 \longmapsto a \otimes \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} a\gamma$$
$$f \longmapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} (\gamma^{-1}(f)\cdot a)\cdot \gamma$$

- è di Γ-moduli
- spezza.

$$\delta(f) \xmapsto{\sigma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(\delta(f))\, a\gamma = \sum_{\eta\in\Gamma} \eta^{-1}(f)\, a\, \delta\eta = \delta\cdot \sum_{\eta\in\Gamma} \eta^{-1}(f) a \eta = \delta\cdot\sigma(f)$$

$\gamma = \delta\eta$
$(\eta^{-1} = \gamma^{-1}\delta)$

$$f \xmapsto{\sigma} \sum \gamma \otimes \gamma^{-1}(f) a \xmapsto{\pi} \sum \gamma(\gamma^{-1}(f) a) = \sum f\gamma(a) = f \underbrace{\sum \gamma(a)}_{=1} = f$$

$\Rightarrow \sigma$ è sezione per π.

Questo chiude la dimostrazione, perché F è addendo diretto di $\mathrm{Ind}_{\{1_\Gamma\}}^{\Gamma}(F)$, da cui $H^q(\Gamma, F) = H_q(\Gamma, F) = 0$

Quindi $H^q_{cont}(\Gamma, F) = \varinjlim H^q(\Gamma/_{\Gamma_i}, F^{\Gamma_i}) = \varinjlim 0 = 0$

In omologia è uguale essendo (pur non avendolo mai definito)

$$H_q^{cont}(\Gamma, F) = \varinjlim H_q(\Gamma/_{\Gamma_i}, F^{\Gamma_i}) = \varinjlim 0 = 0$$

ISTALG - LEZIONE 31

In realtà vale il seguente lemma: (*)

ATTENZIONE PUÒ ESSERE FALSO

(COROLLARIO)
LEMMA: Dato $\forall n$ $M_n \twoheadrightarrow M_{n-1}$, vale

$$H^1(G, \varprojlim M_n) \twoheadleftarrow \varprojlim H^1(G, M_n)$$

DIM: Abbiamo

$$\dots \to P^1 \to P^0 \to R \to 0$$

$$C^q_n = \mathrm{Hom}_G(P^q, M_n)$$

$$\begin{array}{ccc} C^q_n & \twoheadrightarrow & C^q_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^{q+1}_n & \twoheadrightarrow & C^{q+1}_{n-1} \end{array} \qquad H^q_n = H^q(G, M_n) = \frac{Z^q_n}{B^q_n}$$

$$\varprojlim H^q_n = \frac{\varprojlim Z^q_n}{\varprojlim B^q_n}$$

Definiamo

$C^q := \mathrm{Hom}_G(R, \varprojlim M_n)$. Si ha $H^q(G, \varprojlim M_n) = \frac{Z^q}{B^q}$.

Avevamo già osservato che

$$C^q = \varprojlim C^q_n$$

Si ha:

$$\prod C^q_n \supseteq C^q \longrightarrow C^{q+1}$$

$$(c^q_n) \longmapsto (\partial^q_n(c^q_n))$$

Dunque $Z^q = \varprojlim Z^q_n$. Per quanto riguarda i bordi invece

$\varprojlim B^q_n \supseteq B^q \subseteq C^q$, perché

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim B^q_n & & B^q \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\partial^q_n(c^{q-1}_n)) & & (\partial^{q-1}_n(c^{q-1}_n)) \\ \text{con } \partial^{q-1}_n(c^{q-1}_n) \text{ coerenti} & & \text{con } c^{q-1}_n \text{ coerenti} \end{array}$$

dove per coerenti si intende che $c_n \mapsto c_{n-1}$

È l'inclusione sbagliata, noi volevamo l'altra ... [...]

- Sappiamo che, se $M \supseteq L$ di Galois, $\Gamma = \mathrm{Gal}(M/L)$ allora

$$H^i(\Gamma, M) = 0 \quad \forall i > 0.$$ (ultimo lemma della lezione scorsa)

LEMMA: $E = \mathbb{F}_q((t)) \subseteq F \subseteq E_{nr} = \overline{\mathbb{F}_q}((t))$. ($F$ è di Galois).

Allora, posto $U_F = \{ f(t) \in F \mid f \in \overline{\mathbb{F}_q}[[t]] \text{ e } f(0) \neq 0 \}$, e

$\Gamma = \mathrm{Gal}(F/E)$, vale

$$H^i_{cont}(\Gamma, U_F) = 0 \quad \forall i > 0$$

DIM: Basta dimostrarlo nel caso $F \supseteq E$ finito (poi passando al limite resta 0). U_F è ovviamente un gruppo (moltiplicativo)

F dati che sono tutte così $\rightarrow F = \mathbb{F}_{q^m}((t))$. $\Gamma = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} = \langle x \mapsto x^q \rangle$

Poniamo (vediamo gli U_F^i come Γ-moduli moltiplicativi)

$$U_F = U_F^0 \supseteq U_F^1 = \{ f \in U_F^0 \mid f(0) = 1 \} = 1 + t\,\mathbb{F}_{q^m}[[t]] \supseteq U_F^2 = 1 + t^2 \mathbb{F}_{q^m}[[t]] \supseteq \dots$$

$$U_F/U_F^1 \underset{\text{moltiplicativo}}{\cong} \mathbb{F}_{q^m}^* \qquad U_F^i/U_F^{i+1} \underset{\text{additivo}}{\cong} \mathbb{F}_{q^m}$$

Hilbert 90 — calcolo della norma, fatto nella dim della non esistenza di corpi centrali su campi finiti — perché coomologie pari sono tutte uguali (stessa cosa per le dispari)

$$H^1(\Gamma, \mathbb{F}_{q^m}^*) = 0 = H^2(\Gamma, \mathbb{F}_{q^m}^*) \Rightarrow H^i(\Gamma, \mathbb{F}_{q^m}^*) = 0 \quad \forall i > 0$$

$$H^i(\Gamma, \mathbb{F}_{q^m}) = 0 \quad \forall i > 0$$

(visto prima) — gruppo ciclico a coeff. in Γ-mod.

$$U_F = \varprojlim U_F/U_F^i$$

Guarda il vero lemma alla prossima lezione

Vediamo per induzione che $H^m(\Gamma, U_F/U_F^i) = 0 \quad \forall m > 0 \;\; \forall i > 0$

Passo base ($i = 1$): fatto sopra

Passo induttivo: considero la succ. esatta

$$0 \to U_F^i/U_F^{i+1} \hookrightarrow U_F/U_F^{i+1} \twoheadrightarrow U_F/U_F^i \to 0$$

e passando alla succ. esatta lunga in coomologia ottengo ciò che voglio. A questo punto si chiude

⚠ grazie al lemma che abbiamo provato a dimostrare 2 volte.

TEOREMA: $\mathbb{F}_q((t)) = E \subseteq E_{nr} = \overline{\mathbb{F}}_q((t))$, $R = \mathbb{Z}$.

Allora
$$H^2_{cont}(\Gamma, E_{nr}^*) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

DIM: Considero

$$0 \to U_{E_{nr}} \to E_{nr}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$$

$$t^m g(t) \longmapsto m$$

con $g \in \overline{\mathbb{F}}_q[[t]]$, $g(0) \neq 0$

Passando in coomologia:

$$H^1_{cont}(\Gamma, E_{nr}^*) \to H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \underbrace{H^2_{cont}(\Gamma, U_{E_{nr}})}_{= 0} \to H^2_{cont}(\Gamma, E_{nr}^*) \to H^2_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \underbrace{H^3_{cont}(\Gamma, U_{E_{nr}})}_{= 0}$$

Quindi $H^2_{cont}(\Gamma, E_{nr}^*) \cong H^2_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z})$

Calcoliamo $H^2_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z})$: preso $0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ esatta di Γ-moduli (Γ agisce banalm.)

da cui passando in coomologia

$$H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Q}) \to H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \underbrace{H^2_{cont}(\Gamma, \mathbb{Q})}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\varinjlim_{\substack{L \supseteq E \\ \text{finita}}} H^1(\Gamma/\Gamma_L, \mathbb{Q}^{\Gamma_L}) \qquad \varinjlim H^2(\Gamma/\Gamma_L, \mathbb{Q}^{\Gamma_L})$$

$\mathbb{Q}^{\Gamma_L} = \mathbb{Q}$ ← Γ agisce banalmente

dico che sono nulli:

Vale anche per G infinito usando che $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo e la definizione di coomologia di gruppi

Se G è finito, allora $H^i(G, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall i > 0$

Avevamo dimostrato che $\#(G) \cdot H^i(G, \mathbb{Q}) = 0$

$\mathbb{Q} \xrightarrow{\#(G)} \mathbb{Q}$ è isomorfismo $\Rightarrow$ $H^i(G,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\#(G)} H^i(G,\mathbb{Q})$ è isomorfismo, ma ha immagine nulla.

$\Rightarrow H^i(G, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall i > 0$.

Quindi $H^2_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_{\substack{L \supseteq E \\ \text{finita}}} H^1(\Gamma/\Gamma_L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim \mathrm{Hom}(\Gamma/\Gamma_L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

azione banale $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}/\mathrm{Inn}$ in $+$, gruppo abeliano $\Rightarrow$ $\mathrm{Inn} = \{id\}$

$$= \underbrace{\{ f : \Gamma \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid f(\gamma\delta) = f(\gamma) + f(\delta) \}}$$

sarebbe $f(\gamma)^{\gamma} f(\delta)$

$\{\gamma \mapsto 0\} = \{\gamma \mapsto \gamma a - a\}_{a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ ← sarebbe (gruppo abeliano) $\gamma \mapsto a\,\gamma(a^{-1})$ ← gruppo non abeliano non ha senso, non sarebbe un sottogruppo ma solo relazione di equivalenza

Ma $\mathbb{F}_q((t)) \subseteq \mathbb{F}_{q^m}((t)) \subseteq \overline{\mathbb{F}}_q((t))$, quindi

$E \subseteq L$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_m \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_m \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

$\bigcup_m \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ $\|$

OSS. Quindi $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong H^2_{cont}(\Gamma, E^*_{mr}) = A_{E_{mr}} = \{$corpi E-centrali e finiti su E che si spezzano su $E_{mr}\}$

TEOREMA: D centrale su E, allora D spezza su E_{mr}.

COROLLARIO: $H^2(\Gamma, E^*_{mr}) = $ Gruppo di Brauer $= H^2(\Gamma_0, (E^{sep})^*)$ dove E^{sep} è la chiusura separabile di E.

OSS.

$E \xrightarrow{v} \mathbb{Z}$ "$(v(0) = +\infty)$"

$\cup$

$A = \{x \mid v(x) \geq 0\} = \mathbb{F}_q[[t]]$

$\cup$

$m = tA$

La valutazione è la stessa della pagina precedente

$\left(t^m g(t) \mapsto m \text{ con } g(0) \neq 0 \text{ e } g(t) \in \mathbb{F}_q[[t]] \right)$

Si ha che: $\|x\| = p^{-v(x)}$ definisce una norma in E e che lo rende completo.

TEOREMA: $E \subseteq D$ finito ($\dim_E D = n$), D corpo, $E \subseteq Z(D)$. Allora esiste un'unica valutazione $w: D \to \mathbb{Q}$ che estende v e ha le seguenti proprietà:

1) w è discreta, cioè $\operatorname{Im} w = \frac{1}{d}\mathbb{Z}$
2) $\|x\|_D = p^{-w(x)}$ è completo, e somma e prodotto sono continui
3) $B = \{x \mid w(x) \geq 0\} = \{x \in D \mid x \text{ intero su } A\}$, con
   $A = \{x \in E \mid v(x) \geq 0\} = \mathbb{F}_q[[t]]$ $(m_A = tA)$
4) $B \supseteq m_B := \{x \in D \mid w(x) > 0\}$, $m_B \cap A = m_A$
   Se B è campo, $\frac{n}{d} = \left[\frac{B}{m_B} : \frac{A}{m_A}\right] = \left[\frac{B}{m_B} : \mathbb{F}_q\right]$

DIM: (Idea)

Sia $D \neq E$.

1ª OSS: Basta dimostrare che $\exists x \in D \setminus E$ tale che
$$L := E[x] \subseteq E_{nr}$$
A questo punto $L \otimes_E D \supseteq L \otimes_E L$ che non è dominio, quindi non è corpo, quindi è uguale a un certo spazio di matrici. Si chiude per induzione sulle dim del corpo.

Guarda su www.jmilne.org/math/CourseNotes/CFT.pdf per dimostrazioni rigorose (p. 131 e p. 137)

Consideriamo $w: D \to \mathbb{Q}$ come nel Teorema precedente e prendiamo un π tale che $w(\pi) = \frac{1}{d}$. Supponiamo per assurdo $\nexists x$ come richiesto

$x \in \overline{E}((\pi)) \Rightarrow D \subseteq \overline{E}((\pi)) \leftarrow$ campo

allora $\forall x \in D$ $x = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots \Rightarrow x \in \overline{E}[\pi] \Rightarrow D$ commutativo $\Rightarrow D = E$

Infatti: WLOG $x \in B$ (altrimenti $x^{-1} \in B$)
$\overline{\mathbb{F}}_q \supseteq \frac{B}{m_B} \supseteq \mathbb{F}_q$. ($B$ è estensione integrale algebrica; $\frac{B}{m_B} \ni \overline{x}$). Se $\overline{x} \notin \mathbb{F}_q$, contraddice l'ip. di ass. [non bauda]

Se $\overline{x} \in \mathbb{F}_q$: sia $a_0 \in \overline{E} = \mathbb{F}_q((t))$, $a_0 \in \mathbb{F}_q$. Allora $\overline{x - a_0} = 0$

Prendo $x_1 = x - a_0 = \pi y_1$.

Si continua a cascata, usando y_1 al posto di x...

In pratica
Rec: $E^* \to \Gamma^{ab}$
$t^m g(t) \mapsto \phi^m$
(ϕ = Frobenius)

OSS. Se $K \subseteq K^{ab}$ estensione di Galois con gr. di Galois abeliano, che sia la massima estensione possibile di questo tipo, allora:
$$K \subseteq K^{sep}, \quad \Gamma/_{[\Gamma,\Gamma]}, \quad K^{ab} = K^{[\Gamma,\Gamma]} \qquad (\Gamma = \operatorname{Gal}(K^{sep}, K))$$
quindi tale massima estensione esiste. $\operatorname{Gal}(E^{ab}, E) = \operatorname{Gal}(E^{sep}, E)^{ab}$

OSS. Se $E = \mathbb{F}_q((t))$, allora: $\boxed{\text{Rec}: E^* \to \Gamma^{ab}}$ di gruppi t.c., se $f(t)$ è tale che $v(f) = 1$ allora $\text{Rec}(f)|_{E_{nr}}$ = Frobenius (agisce sui coefficienti $(E_{nr} = \overline{\mathbb{F}}_q((t)))$)

Se $L \supseteq E$ abeliano finito, $E^*/N_{L/E}(L^*) \overset{\text{Rec}}{\cong} \operatorname{Gal}(L/E)$ [LEGGE DI RECIPROCITÀ DI ARTIN]

ISTALG - LEZIONE 32.

Torniamo al Lemma: detti $U_i = 1 + t^i A$, $U_0 = \{ f \in A \mid f(0) \neq 0 \}$, (con $A = \mathbb{F}_{q^n}[[t]]$) abbiamo visto che:

$$U_0 = \varprojlim U_0/U_i \quad , \quad H^q(U_i/U_{i+1}) = 0 \quad \forall q > 0 \ \forall i$$

Riprendiamo il corollario provato a dimostrare alle lezione 30 e 31

(*) **COROLLARIO**: Se $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots$ e $M = \varprojlim M/M_n$,

e se $H^q(M_i/M_{i+1}) = 0 \ \forall i$, allora $H^q(M) = 0$

(con M un $R[G]$-modulo) $= H^q(G, M_i/M_{i+1})$; $H^q(G;M)$

DIM: Se $P^\bullet$ risoluzione proiettiva di R, $C^q = \mathrm{Hom}(P^q, M)$,

$C^q_n = \mathrm{Hom}(P^q, M/M_n)$, mostriamo che $\forall q$

se $\varphi \in \mathrm{Hom}(P^q, M)$ e $\partial\varphi = 0$, allora $\varphi = \partial\psi$ (da cui la tesi)

Si ha

$$\mathrm{Hom}(P^q, \varprojlim M/M_n) = \varprojlim \mathrm{Hom}(P^q, M/M_n)$$

identificando tramite l'uguaglianza sopra

Vogliamo vedere che, se $(\varphi_n) \in \mathrm{Hom}(P^q, \varprojlim M/M_n)$ con

operatore di bordo per coomologia a valori in M/M_n — $\partial_n \varphi_n = 0 \ \forall n$, allora $(\varphi_n) = \partial(\psi_n)$ per qualche (ψ_n).

Costruiamo:

$$\psi_n : P^{q-1} \longrightarrow M/M_n \quad \text{tale che} \quad \partial\psi_n = \varphi_n \quad \text{e}$$

$$\left(M/M_n \xrightarrow{\pi_n} M/M_{n-1} \right) \quad \text{che} \quad \psi_{n-1} = \pi_n \psi_n$$

Così avremo $\psi : P^{q-1} \to M$ con $\partial\psi = \varphi$. Per induzione

- $\psi_0 : P^{q-1} \longrightarrow M/M_0 = 0 \rightsquigarrow \psi_0 = 0$
- $\psi_n \Rightarrow \psi_{n+1}$:

$$\begin{tikzcd} P^{q-1} \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[dr, dashed, "g_{n+1}"'] & M/M_n \\ & M/M_{n+1} \arrow[u, two heads] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \psi_n \arrow[r, "\partial_n"] & \varphi_n \\ g_{n+1} \arrow[u, "\pi_{n+1}"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \varphi_{n+1} \arrow[u, "\pi_{n+1}"'] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\ C^{q-1}_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C^q_{n+1} \end{tikzcd}$$

$\exists$ perché P^{q-1} proiettivo

$\leftarrow (\varphi_n)$ è succ. coerente

$\overset{C_{n+1}}{\Downarrow}$

$\Rightarrow z_{n+1} := \partial_{n+1} y_{n+1} - \varphi_{n+1}$ è tale che $\partial_{n+1} z_{n+1} = 0$

Inoltre ~~[illegible]~~ la composizione $P^q \xrightarrow{z_{n+1}} M/M_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}} M/M_n$ $= 0$

(π è banalmente morfismo di complessi)

Quindi, ciò significa che

$$\operatorname{Im} z_{n+1} \subseteq M_n/M_{n+1} \Rightarrow z_{n+1} \in \operatorname{Hom}(P^q, M_n/M_{n+1})$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = \partial w_{n+1} \quad \text{con} \quad w_{n+1} : P^{q-1} \to M_n/M_{n+1} \quad \text{(per ipotesi)}$$

Allora considero $y_{n+1} - w_{n+1}$:

$$\begin{array}{ccc} \psi_n - 0 & \xrightarrow{\partial} & \varphi_n \\ \uparrow \pi_{n+1} & \circlearrowleft & \uparrow \pi_{n+1} \\ y_{n+1} - w_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & \varphi_{n+1} \end{array}$$

($\pi_{n+1} w_{n+1} = 0$ perché $\operatorname{Im} w_{n+1} \subseteq M$

Definisco allora $\psi_{n+1} := y_{n+1} - w_{n+1}$.

<u>TEOREMA</u>: Se $A^\bullet, B^\bullet \in Com^+$, $\varphi : A^\bullet \to B^\bullet$ quasi isomorfismo, $I^\bullet \in Com^+$ con I^j iniettivi, allora:

$$\varphi^* = \_ \circ \varphi : \operatorname{Hom}_{Kom}(B^\bullet, I^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{Kom}(A^\bullet, I^\bullet) \text{ è isomorfismo.}$$

<u>LEMMA</u>: Se $A^\bullet \in Com^+$, $I^\bullet \in Com^+$ con I^j iniettivi, e se $A^\bullet$ è esatto allora $\operatorname{Hom}_{Kom}(A^\bullet, I^\bullet) = 0$

A posteriori, è un caso particolare del teorema.

DIM:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & A^0 \arrow[r] \arrow[dl, "h_0"'] \arrow[d, "\varphi^0"] & A^1 \arrow[r] \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[d, "\varphi^1"] & A^2 \arrow[r] \arrow[dl, "h_2"'] \arrow[d, "\varphi^2"] & A^3 \arrow[r] \arrow[dl, "h_3"'] \arrow[d, "\varphi^3"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & I^{-1} \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & I^3 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Poniamo $h_0 = 0$. (Vogliamo dimostrare che $\varphi \sim 0$)

Essendo I^0 iniettivo $\exists h_1 : A^1 \to I^0$ che fa commutare il triangolo. Inoltre $\varphi^0 = h_1 \partial = h_1 \partial + \underbrace{\partial h_0}_{0}$

Quindi vale la condizione di omotopia.

Induttivamente:

avendo già costruito
$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & A^{n} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n}"] \arrow[dl, "h^{n}"'] & A^{n+1} \\
I^{n-1} \arrow[r] & I^{n} &
\end{tikzcd}$$

Cerchiamo h_{n+1} t.c. $\varphi^n = h_{n+1}\partial + \partial h_n$, ovvero $\varphi^n - \partial h_n = h_{n+1}\partial$

Osserviamo che vale $\left.\varphi^n - \partial h_n\right|_{\operatorname{Im}\partial} = 0$. Infatti:

$$\varphi^n\partial - \partial \underbrace{h_n\partial} = \underbrace{\varphi^n\partial - \partial\varphi^{n-1}}_{=0} + \underbrace{\partial\partial h_{n-1}}_{=0}$$

$\varphi^{n-1} = h_n\partial + \partial h_{n-1}$ perché φ è di complessi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n/_{\operatorname{Im}\partial} \arrow[r, hook, "\partial"] \arrow[d, "\varphi^n - \partial h_n"'] & A^{n+1} \arrow[dl, dashed, "h_{n+1}"] \\
& I^n &
\end{tikzcd}$$

Allora: iniettiva per esattezza di A; h_{n+1} esiste per iniettività di I^n.
Quindi $\varphi \sim 0$. Tesi.

Introduciamo brevemente delle costruzioni utili a dimostrare il teorema:

<u>Def</u> Se $\varphi : X^\cdot \to Y^\cdot$ morfismo di complessi, si definisce $C := \operatorname{Cono}(\varphi)$ il complesso dato da:

$$C^n := X^{n+1} \oplus Y^n$$

$$\partial_C^n := \begin{pmatrix} -\partial_X^{n+1} & 0 \\ \varphi^{n+1} & \partial_Y^n \end{pmatrix}$$

<u>Def</u> Si definisce lo shift destro di un complesso $X^\cdot$ come:

$$(X^\cdot[1])^n := X^{n+1}$$
$$\partial^n_{X[1]} := -\partial_X^{n+1}$$

In generale si definisce lo shift ripetuto

$$(X^\cdot[K])^n := X^{n+K}$$
$$\partial^n_{X[K]} := (-1)^K \partial_X^{n+K}$$

Def Un triangolo è una successione esatta

$$X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v} Z^\cdot \xrightarrow{w} X^\cdot[1]$$

con u, v, w morfismi di complessi.

Def Un triangolo distinto è una succ. esatta del tipo

$$X^\cdot \xrightarrow{\varphi} Y^\cdot \longrightarrow \mathrm{Cono}(\varphi) \longrightarrow X^\cdot[1]$$

$$y \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x$$

o in generale è un $A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to A^\cdot[1]$ triangolo per cui esistono isomorfismi (in Kom) che fanno commutare i quadrati a meno di omotopia

ciò commutano in Kom

$$\begin{tikzcd}
A^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "f", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "g", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "h", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A^\cdot[1] \arrow[d, "f[1]", "\wr"'] \\
X^\cdot \arrow[r, "\varphi"] & Y^\cdot \arrow[r] & \mathrm{Cono}(\varphi) \arrow[r] & X^\cdot[1]
\end{tikzcd}$$

LEMMA: Valgono:

① $X^\cdot \xrightarrow{=} X^\cdot \longrightarrow 0 \longrightarrow X^\cdot[1]$ è triangolo distinto

② $X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v} Z^\cdot \xrightarrow{w} X^\cdot[1]$ distinto $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y^\cdot \xrightarrow{v} Z^\cdot \xrightarrow{w} X^\cdot[1] \xrightarrow{-u[1]} Y^\cdot[1]$ distinto

③ Se $X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v} Z^\cdot \xrightarrow{w} X^\cdot[1]$ e $X'^\cdot \xrightarrow{u'} Y'^\cdot \xrightarrow{v'} Z'^\cdot \xrightarrow{w'} X'^\cdot[1]$ sono distinti tali che

$$\begin{tikzcd}
X^\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y^\cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z^\cdot \arrow[r, "w"] & X^\cdot[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X'^\cdot \arrow[r, "u'"] & Y'^\cdot \arrow[r, "v'"] & Z'^\cdot \arrow[r, "w'"] & X'^\cdot[1]
\end{tikzcd}$$

Allora $\exists h : Z^\cdot \to Z'^\cdot$ che fa commutare gli altri 2 quadrati

commutare davvero, non in Kom

④ Se $X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v} Z^\cdot \xrightarrow{w} X^\cdot[1]$ distinto, allora

$$\dots \to H^i(X) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(Y) \xrightarrow{H^i(v)} H^i(Z) \xrightarrow{H^i(w)} H^{i+1}(X) \longrightarrow \dots \text{ è esatta.}$$

↳ DIM: [TEOREMA]

Consideriamo $A^\cdot \xrightarrow{\varphi} B^\cdot \to \mathrm{Cono}(\varphi) \to A^\cdot[1]$.

È distinto, quindi per il lemma la successione

$$\dots \to H^i(A) \xrightarrow{H^i(\varphi)} H^i(B) \to H^i(\mathrm{Cono}(\varphi)) \to H^{i+1}(A) \to \dots$$

è esatta. φ è un quasi isomorfismo, quindi

$H^i(\mathrm{Cono}(\varphi)) = 0 \ \forall i$.

Dal lemma si dimostra che dato un triangolo distinto

$$X^\cdot \to Y^\cdot \to Z^\cdot \to X^\cdot[1],$$

$\forall$ complesso $W^\cdot$ la successione

$$\mathrm{Hom}_{Kom}(X^\cdot[1], W^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{Kom}(Z^\cdot, W^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{Kom}(Y^\cdot, W^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{Kom}(X^\cdot, W^\cdot)$$

è esatta. Infatti:

per il secondo punto del lemma basta mostrare l'esattezza in un punto, poi si shifta. Verifichiamolo in $\mathrm{Hom}_{Kom}(Y^\cdot, W^\cdot)$.

Data $f: Z^\cdot \to W^\cdot$

Prendiamo

$$\begin{tikzcd}
Z^\cdot[-1] \arrow[r] \arrow[d, "{f[-1]}"'] & X^\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed] & Y^\cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f \circ v"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z^\cdot \arrow[d, "f"] \\
W^\cdot[-1] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & W^\cdot \arrow[r, "="] & W^\cdot
\end{tikzcd}$$

è distinto per il lemma

esiste che fa commutare per il lemma

$\Rightarrow f \circ v \circ u = 0$. Quindi $\mathrm{Hom}_{Kom}(Z^\cdot, W^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{Kom}(Y^\cdot, W^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{Kom}(X^\cdot, W^\cdot)$, composizione $= 0$

Sia ora $f: Y \to W$ tale che ristretta a $X^\cdot$ sia nulla.

(cioè $f \circ u = 0$). Consideriamo

$$\begin{tikzcd}
X^\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y^\cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & Z^\cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "g"] & X^\cdot[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & W^\cdot \arrow[r, "="] & W^\cdot \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

distinto

$\Rightarrow$ Per il lemma $\exists g$ tale che $f = g \circ v$.

È dimostrato quindi l'esattezza in $\mathrm{Hom}_{Kom}(Y^\bullet, W^\bullet)$ e quindi ovunque. (cioè anche in $\mathrm{Hom}_{Kom}(Z^\bullet, W^\bullet)$)

Applichiamo adesso il risultato con $W^\bullet = I^\bullet$ e il triangolo distinto di partenza shiftato di -1:

Si ottiene:

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Hom}_{Kom}(\mathrm{Cono}(\varphi)_{-1}, I^\bullet)} \to \mathrm{Hom}_{Kom}(B^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{Kom}(A^\bullet, I^\bullet) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Hom}_{Kom}(\mathrm{Cono}(\varphi)[-1], I^\bullet)}$$

Per il lemma preliminare dimostrato prima essendo $\mathrm{Cono}(\varphi)$ esatto

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{Kom}(B^\bullet, I^\bullet) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_{Kom}(A^\bullet, I^\bullet) \quad \text{isomorfismo}$$

→ DIM: [LEMMA]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "="] \arrow[d, "\|"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "0"] & X[1] \arrow[d, "\|"] \\ X \arrow[r, "="] & X \arrow[r] & \mathrm{Cono}(id) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "0"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Bisogna controllare 4 commutazioni e che $\mathrm{Cono}(id) \xrightarrow{0} \mathrm{Cono}(id)$ sia omotopa all'identità.

2 commutatività sono gratis. Vediamone una terza:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \arrow[r] & X[1] \arrow[d, "\|"] \\ X \arrow[r] & \mathrm{Cono}(id) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, bend left, "0"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare che $\mathrm{Cono}(id) \to X[1]$ è omotopa a 0.

Al grado n:

$$\begin{tikzcd} X^{n+1} \oplus X^n \arrow[rr, "\partial_C"] \arrow[d] \arrow[dr] & & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \arrow[dl] \\ X^n \arrow[r, "-\partial"] & X^{n+1} = X^n[1] & \end{tikzcd}$$

$(x, y) \mapsto (-\partial x, x + \partial y)$

$y \mapsto -\partial y$, $\quad x + \partial y$

$$\Rightarrow x = \underbrace{x + \partial y}_{} \underbrace{- \partial y}_{} \quad \Rightarrow \text{La mappa è omotopa a } 0.$$

L'altra commutatività si fa in modo analogo.

Verifichiamo ora che $id_{Cono(id)} \sim 0_{Cono(id)}$:

Costruiamo l'omotopia cercata definendo

$$h_n : X^{n+1} \oplus X^n \longrightarrow X^n \oplus X^{n-1}$$
$$(x, y) \longmapsto (y, 0)$$

In questo modo

$$\partial_c h_n(x,y) + h_{n+1} \partial_c (x,y) = (-\partial y, y) + (x + \partial y, 0) = (x, y)$$

Quindi $id_{Cono(id)} \sim 0$.

$\boxed{2}$ È sufficiente fare il caso in cui $Z = Cono(u)$. (Shift di isomorfismi resta isomorfismo e fa ancora commutare.)

Dimostriamo che $Y \xrightarrow{\alpha} Cono(u) \longrightarrow X[1] \longrightarrow Y[1]$ e

$Y \xrightarrow{\alpha} Cono(u) \longrightarrow Cono(\alpha) \longrightarrow Y[1]$ sono isomorfi a meno di omotopia:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Cono(u) \arrow[r] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift right, "\phi"'] & Y[1] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "\alpha"] & Cono(u) \arrow[r] & Cono(\alpha) \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift right, "\psi"'] & Y[1] \end{tikzcd}$$

Definisco ϕ, ψ che fanno commutare (a meno di omotopia) e tali che $\phi\psi \sim id_{Cono(\alpha)}$ e $\psi\phi \sim id_{X[1]}$

Definiamo

$$\begin{array}{ccc} x & X^{n+1} & x \\ \phi \downarrow & \phi \downarrow \; \uparrow \psi & \uparrow \psi \\ (-u(x), x, 0) & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n & (y, x, y_0) \end{array}$$

Bisogna verificare che:

- ϕ e ψ sono di complessi
- ϕ e ψ fanno commutare (a meno di omotopia) i quadrati
- $\psi\phi \sim id_{X[1]}$ e $\phi\psi \sim id_{Cono(\alpha)}$

$\boxed{3}$ WLOG $Z = Cono(u)$, $Z' = Cono(u')$ $\quad (Z^n = X^{n+1} \oplus Y^n$ e analogo $Z')$

Per ottenere la tesi basta porre:

$$h_n : X^{n+1} \oplus Y^n \longrightarrow X'^{n+1} \oplus Y'^n$$
$$(x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

$\boxed{4}$ Grazie al punto 2, è sufficiente mostrare l'esattezza in un solo punto. Dimostriamolo in $H^i(Z^\cdot)$:

WLOG $Z^\cdot = \mathrm{Cono}(u)$.

Poiché
$$\begin{tikzcd} X^\cdot \arrow[r, "u"] & Y^\cdot \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\equiv 0"] & \mathrm{Cono}(u) \arrow[r, "\pi"] & X^\cdot[1] \end{tikzcd},$$
$$y \longmapsto (0,y)$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

allora anche
$$\begin{tikzcd} H^i(Y^\cdot) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\equiv 0"'] & H^i(\mathrm{Cono}(u)) \arrow[r, "\pi"] & H^{i+1}(X^\cdot) \end{tikzcd}$$

Sia ora $\alpha = (x,y) \in Z^i(\mathrm{Cono}(u))$, ovvero tale che $\partial_c(x,y) = 0$.

Ma poiché $\partial_c(x,y) = (-\partial x, u(x) + \partial y)$

vale allora $\begin{cases} \partial_x x = 0 \\ \partial_Y y + u(x) = 0 \end{cases}$

Se $\pi(\alpha) = 0$, allora $x = \partial_x x'$. (x è zero in coomologia, quindi bordo)

Allora $0 = \partial_Y y + u(x) = \partial_Y y + u(\partial_x x') = \partial_Y(\underbrace{y + u(x')}_{y'}) = \partial_Y(y')$

Consideriamo quindi $\beta = \alpha + \partial_c(x',0) = (x,y) + (-\partial_x x', u(x')) =$
$$= (0, \underbrace{y + u(x')}_{y'})$$

Poiché $\partial_Y(y') = 0$, β è un cociclo e $\beta \sim \alpha$ in coomologia

cioè $(x,y) \sim (0,y')$.

Quindi $H^i(Y^\cdot) \longrightarrow H^i(\mathrm{Cono}(u))$, cioè abbiamo risollevato α.
$$\overline{y'} \longmapsto \overline{(0,y')} = \overline{\alpha}$$

L'esattezza è quindi dimostrata.