

VARIETÀ LISCE

$$\mathcal{C}^{\infty} = \mathcal{C}^{\infty}$$

Def X sp. top.

ovvero esistono
TUTTE le derivate
parziali

→ X è di Hausdorff se $\forall x, y \in X, x \neq y \exists U(x), U(y)$ intorni aperti di x e y disgiunti.

→ X è a base numerabile se ha una base numerabile di aperti.

Def X sp. top. è una varietà topologica se è di Hausdorff ed è a base numerabile e inoltre $\forall x \in X \exists U(x)$ omeomorfo a \mathbb{R}^m .

Esempio: • $U \subseteq \mathbb{R}^m$ è varietà topologica.
aperto

• Retta doppia: $Y = \{(x, y) \mid y = \pm 1\} / \sim$ dove $(x, y) \sim (x', y')$ se

(Esercizio:) Non è uno spazio T_2 , ma ogni punto $(x = x') \wedge (y \neq y')$ ha un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{R} .

• $\bigsqcup_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ non è a base numerabile (ha + che num. comp. connesse)

• Retta lunga: Scelta un ordinale ω , consideriamo $X = \omega \times [0, 1)$ con ordinamento lessicografico diventa totalmente ordinato. Consideriamo la topologia dell'ordine su X , ovvero la top. con base i segmenti $(a, b) = \{a < x < b \mid x \in X\}$ $a, b \in X$. $\dot{X} = X \setminus \{\text{minimo}\}$

(Esercizio:) Ogni punto $x \in \dot{X}$ ha un $U(x) \cong \mathbb{R}$.

Se prendi $\omega := \omega_1$ (primo ordinale non numerabile), \dot{X} viene connesso per archi e non è a base numerabile.

Def X varietà topologica. Una carta per X è un omeomorfismo $X \supseteq U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^n$
 $\begin{matrix} \text{aperto} & \text{aperto} \end{matrix}$

Def Un atlante liscio per una varietà topologica X è una collezione $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ di carte tale che $\forall i, j$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la mappa di transizione $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ sia liscia e inoltre $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Def Due atlanti sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante. (È relazione di equivalenza: Esercizio)

Def Una varietà liscia è una varietà topologica dotata di una classe di compatibilità di atlanti lisci.

Esercizio: Ogni varietà liscia ha un atlante numerabile.

Def Un atlante massimale per una varietà topologica X è un atlante che contiene tutte le carte compatibili.

Def equivalente Una varietà liscia è una varietà top. X con un atlante massimale.

Esempio: $U \subset \mathbb{R}^m$ aperto. $\mathcal{A} = \{i: U \hookrightarrow \mathbb{R}^m\}$ è varietà liscia.

Esempio: $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$ è varietà liscia con atlante dato da
 $\forall i=1, \dots, m+1 \quad \varphi_i^+: U_i^+ \rightarrow B^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$ dove $U_i^+ = S^m \cap \{x_i > 0\}$
 $(x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_{m+1})$

e $\varphi_i^-: U_i^- \rightarrow B^m$ allo stesso modo. Sono carte perché scrivo l'inversa
 $(\varphi_i^+)^{-1}: B^m \rightarrow U_i^+$ che è continua (analoga $(\varphi_i^-)^{-1}$)
 $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \|x\|^2}, x_{i+1}, \dots, x_m)$

Quindi $\{\varphi_i^\pm: U_i^\pm \rightarrow B^m\}_{i=1, \dots, m+1}$ è atlante liscio (composizione di funzioni lisce)

Alternativamente, un altro atlante è dato dalle proiezioni stereografiche

dai poli: $N = (0, \dots, 0, 1) \quad U_N = S^m \setminus \{N\}$
 $S = (0, \dots, 0, -1) \quad U_S = S^m \setminus \{S\}$

$\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}^m$ proiez. stereo

$\varphi_S: U_S \rightarrow \mathbb{R}^m$ proiez. stereo

da cui $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ è atlante

Esercizio: $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ è liscio e compatibile con $\{\varphi_i^\pm\}_{i=1, \dots, m+1}$.

Esempio: $\mathbb{RP}^m = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m+1}) = (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim$ dove $v \sim \lambda v$ con $\lambda \neq 0, v \neq 0$.

È compatto e connesso ($S^m \rightarrow \mathbb{RP}^m$). \mathbb{RP}^m è varietà topologica.

$\forall i \quad U_i = \{x_i \neq 0\} \quad \varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ è ben definita.

$$[x_1, \dots, x_{m+1}] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right)$$

(senza la i-esima)

$\mathcal{A} = \{\varphi_i\}_{i=1, \dots, m+1}$ è atlante liscio

L'inversa di φ_i è $\varphi_i^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow U_i$

$$(y_1, \dots, y_m) \mapsto [y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_m]$$

Esempio: $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ dove $v \sim \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*, v \neq 0$.

(anche qui è cpt. conns.)

$\forall i \quad U_i = \{x_i \neq 0\}$ e come prima $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ omeomorfismo

$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, quindi in realtà posso vedere $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

Le mappe di transizione sono $\varphi_{ij}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ e sono lisce in senso reale.

Def Se A è un atlante in \mathbb{R}^n , allora n è la dimensione della varietà.

PRODOTTO CARTESIANO

Se M^m e N^n sono varietà lisce, posso definire su $M \times N$ (sp. top.) una struttura di varietà liscia. Se \mathcal{A} atlante per M , $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ e \mathcal{A}' atlante per N , $\mathcal{A}' = \{\varphi'_j: U'_j \rightarrow V'_j\}_{j \in J}$, allora considero l'atlante $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' = \{\varphi_i \times \varphi'_j: U_i \times U'_j \rightarrow V_i \times V'_j \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}\}_{(i,j) \in I \times J}$

Si verifica che questo è un atlante liscio.

Esempio: $S^1 \times S^1$ è varietà liscia.

Esercizio: M^n varietà liscia, U aperto $\subseteq M \Rightarrow U$ ha naturale struttura di var. liscia.
(Data un atlante, basta restringerlo a U)

COSTRUZIONE ALTERNATIVA

Def X insieme. Un atlante liscio su X è una collezione $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ con φ_i bigettive, $U_i \subseteq X$ sottosieme, $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti tale che $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ e $V_{i,j}$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ sono aperti e $\varphi_{ij}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\text{biiezione}} \varphi_j(U_i \cap U_j)$ è liscia.

Esercizio: Esiste un'unica topologia su X tale che i φ_i siano omeomorfismi.
Con questa topologia (X, \mathcal{A}) è varietà liscia.

(Si fa ponendo $U \subseteq X$ aperto $\Leftrightarrow \varphi_i(U \cap U_i) \text{ è aperto } \forall i$)

Attenzione che va poi verificato a mano che X con tale top. sia T_2 e a base numerabile.

ISTGEO. LEZIONE 2

Def. Siano M^m, N^n varietà lisce. Una funzione $f: M \rightarrow N$ è liscia se $\forall x \in M$
 $\exists U(x)$ e $\exists \varphi: U(x) \rightarrow V$ carta (compatibile con l'atlante dato) per M e
 inoltre $\exists \psi: W(f(x)) \rightarrow Z$ carta per N tale che $f(U) \subseteq W$ e
 $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è liscia

Oss. Se f è liscia, allora per ogni scelta di
 $R^m \supseteq U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{f} W \subseteq R^n$
 carta come $(f(U) \subseteq W)$ vale che $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è liscia.

Def. Una curva è $f: I \rightarrow N$ liscia con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto

Def. Una mappa $f: M \rightarrow N$ liscia è un diffeomorfismo se f è omeomorfismo
 tale che l'inversa sia liscia.

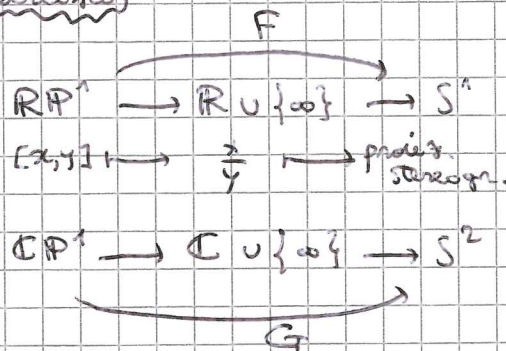
Due varietà M, N sono diffeomorfe se \exists diffeo $f: M \rightarrow N$.

Def. $\text{Diffeo}(M) = \{f: M \rightarrow M \text{ diffeo}\} \subset \text{Omeo}(M) = \{f: M \rightarrow M \text{ omeo}\}$
 sgr.

Esempio: $f: B^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$ è diffeo perché l'inversa è $g: \mathbb{R}^m \rightarrow B^m$
 $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$
 \uparrow
 palla
 aperta

Esempio: $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$
 diffeo
 $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$

(Esercizio)



F e G sono diffeo (Esercizio)

G è liscia. fuori da $[1,0]$ tutto ok. Considera

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$z \mapsto [1, z] \mapsto \frac{1}{z} \mapsto \frac{1}{1+4|z|^2} (\text{Re } z, -4\text{Im } z, \dots)$$

SPAZIO TANGENTE

Def. Data M e $p \in M$, si definisce $T_p(M)$ lo spazio tangente di M in p come:

considero curve $\gamma: I \rightarrow M$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $0 \in I$, $\gamma(0) = p$.

Se $M = \mathbb{R}^n$ dico che γ_1 e γ_2 sono tangenti in p (o in p) se $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$

Nel caso generale, date γ_1 e γ_2 , e presa carta $\varphi: U(p) \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, le curve
 si dicono tangenti se lo sono $\varphi \circ \gamma_1$ e $\varphi \circ \gamma_2$.

Si dimostra che la nozione non dipende dalla scelta, che è una relazione di equivalenza tra curve.

Pensiamo allora $T_p M := \{ \gamma: I \rightarrow M \mid 0 \in I, \gamma(0) = p, I \text{ intervallo} \}$

In questo modo però $T_p M$ non ha una struttura canonica di sp. vett. (tangent space in zero)

Si può dare allora una def. equivalente.

Def Una derivazione in $p \in M$ è un'operazione v che associa un numero reale $v(f)$ ad ogni funzione ^{liscia} $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un qualsiasi $U = U(p)$.

tale che: 1) Se f e g coincidono in un intorno di p allora $v(f) = v(g)$

$$2) v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$3) v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

Esempio: $M = \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in M = \mathbb{R}^n$. Definiamo la derivata direzionale

$$\partial_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{è una derivazione.}$$

Proposizione:

Ogni derivazione di \mathbb{R}^n è una ∂_v per qualche $v \in \mathbb{R}^n$.

Dim: WLOG $p=0$. Usa Taylor su $f: U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} x_i + \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x) x_i x_j \quad \text{con } h_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ liscie} \\ \text{(Taylor-Remainder)}$$

Prendi una derivazione v , calcoli

$$v(f) = v(f(0)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} v(x_i) + \sum_{i,j=1}^n \left[v(h_{ij}) x_i(0) x_j(0) + h_{ij}(0) v(x_i) x_j(0) + h_{ij}(0) x_i(0) v(x_j) \right] \\ = f(0) v(1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} v(x_i)$$

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0$$

$$\Rightarrow v(f) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} \Rightarrow v \text{ è derivata direzionale lungo il vettore } (v(x_1), \dots, v(x_n)).$$

Def $T_p M := \{ v \text{ derivazione in } p \}$.

Corollario: $T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ canonicamente.

Proposizione: le due definizioni sono equivalenti.

Dim: $p \in M$. $[\gamma] \in T_p M$ $\gamma: I \rightarrow M$ $\gamma(0) = p$.

$$\text{Poi } v(f) := (f \circ \gamma)'(0) \quad (\text{restringendo opportunamente } I)$$

(Esercizio) v è derivazione, non dipende dal rappresentante e l'applicazione

γ in curve? \rightarrow derivazione? è biviaria (usa corte).

Oss. Se $v, w \in T_p M$ derivazioni, allora $\lambda v + \mu w$ è derivazione ($\lambda v + \mu w \in T_p M$)

Quindi $T_p M$ è sp. vett.

DIFFERENZIALE

Def. Se $f: M \rightarrow N$ liscia, $\forall p \in M$ definisce $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ il differenziale di f in p come l'app. lineare così definita:

se v derivazione $df_p(v)(g) := v(g \circ f)$ con $g \in C^\infty(U(f(p)))$

se $v = [\gamma]$ curva $df_p([\gamma]) = [f \circ \gamma]$

(Esercizio) le due definizioni sono equivalenti

Notazione: $C^\infty(M, N) := \{f: M \rightarrow N \text{ liscia}\}$

$C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ (è un'algebra).

FUNTORIALITÀ: Hb un funtore dalla cat. delle varietà liscie puntate e la cat. degli sp. vett.

Ovvero

$p \in M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

$$d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$$

Dunque se $f: M \rightarrow N$ liscia allora $\forall p \in M$ $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è isomorfismo

Un'altra conseguenza è che, data $f: M^m \rightarrow N^n$ liscia, $p \in M$

$$U(p) \xrightarrow{f} W(f(p))$$

$$\begin{array}{ccc} \text{in } U & \hookrightarrow & \text{in } W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{F} & Z \end{array}$$

\rightsquigarrow

$$T_p M \xrightarrow{df_p} T_{f(p)} N$$

$$\begin{array}{ccc} \text{in } T_p M & \hookrightarrow & \text{in } T_{f(p)} N \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{p(p)} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{dF_{f(p)}} & T_{f(p)} \mathbb{R}^n \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{dF_{f(p)}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$dF_{f(p)}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare (quindi una matrice)

Esempio: Maple di Veronese: $\mathbb{RP}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{RP}^2$

$$[x_0, x_1] \mapsto [x_0^2, x_0 x_1, x_1^2]$$

(Esercizio) Dimostrare che è liscia e che df_p è iniettivo $\forall p \in \mathbb{RP}^1$

$$\begin{array}{ccc} U = \{x_0 \neq 0\} & \xrightarrow{f} & W = \{y_0 \neq 0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1, x] & & [1, x, x^2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ x & & (x, x^2) \end{array}$$

$$F(x) = (x, x^2)$$

$$dF_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow dF_x$ iniettivo $\forall x \in U$

\downarrow
 df_p iniettivo $\forall p \in U$

facendo le stesse cose con l'altra carta è analogo.

PRODOTTO: $(p, q) \in M \times N \Rightarrow$ canonicamente $T_{(p,q)} M \times N = T_p M \times T_q N$

Una curva in $M \times N$ passante per (p, q) è $\alpha: I \rightarrow M \times N$
 $t \mapsto (\beta(t), \gamma(t))$

Oss. $f: M \rightarrow N$ diffea $\Rightarrow df_p: T_p M \rightarrow T_p N$ isom. $\forall p \in M$.

Def $f: M \rightarrow N$ liscia è un differenziale locale in $p \in M$ se $\exists U(p), W(f(p))$ aperti tali che $f(U) = W$ e $f|_U: U \rightarrow W$ diffea

TEOREMA: $f: M \rightarrow N$ è diffea locale in $p \Leftrightarrow df_p$ è invertibile

DIM: Pseudo corte

$$\begin{array}{ccc} U(p) & \xrightarrow{f} & W(f(p)) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \mathbb{R}^m \cong V & \xrightarrow{F} & Z \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Se \mathbb{R}^n il teorema vale, quindi F diffea locale $\Leftrightarrow dF_p$ invertibile

Per tornare a f basta riportare sopra gli intorni su cui è diffea
 $(dF_p \text{ invertibile} \Leftrightarrow df_p \text{ invertibile})$ e si ottiene che f è diffea locale in p .

Def $f: M \rightarrow N$ liscia è un rivestimento liscio se è un rivestimento + diffea locale.

Oss. Rivestimento liscio \Rightarrow diffea locale

Esempio: $S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento liscio
 $v \mapsto [v]$

entrambi gli spazi connessi (surgettivo) ~~diffea~~

PROPOSIZIONE: $p: \tilde{M} \rightarrow M$ rivestimento di spazi topologici, M varietà liscia. Allora $\exists!$ struttura di varietà liscia su \tilde{M} tale che p sia rivestimento liscio (ovvero che p sia diffea loc).

DIM: Costruiamo l'atlante liscio di \tilde{M} :

$\forall q \in \tilde{M}$ considero $U(q)$ aperto banalizzante, interseco con domini di corte l'immagine $p(U(q))$ e considero come corte le composizioni di p con le corte di M . L'essere diffea loc dà l'unicità. \tilde{M} è di Hausdorff perché M lo è. È a base numerabile, delimito...

FATTO: X loc. connessi $x_0 \in X$. $\forall H < \pi_1(X, x_0) \exists!$ rivestimento

$p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tale che $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$.

AZIONI DI GRUPPI

$G \curvearrowright X$ insieme G gruppo $\xrightarrow{p} S(X)$ automorfismo

Se X sp. top. l'azione è continua se $G \rightarrow \text{Omeo}(X)$ ~~è continua~~

Se M varietà liscia $G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ è un'azione liscia.

Un'azione continua è:

- 1) LIBERA se $g(x) \neq x \quad \forall g \neq e$

- 2) PROPRIAMENTE DISCONTINUA se $\forall x, y \in X \exists U(x), U(y)$ tali che

$\{g \in G \mid g(U(x)) \cap U(y) \neq \emptyset\}$ è finito

Def $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ rivestimento. Se $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ è normale in $\pi_1(X, x_0)$ allora il rivestimento si dice regolare.

Def $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ rivestimento. Un automorfismo è un omeomorfismo $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tale che $p = p \circ f$. $\text{Aut}(p)$ è un gruppo.

PROPOSIZIONE: G agisce in modo continuo su X sp. top. Hausdorff e connesso per archi. Sono equivalenti:

- 1) G è libera e propriamente discontinua

- 2) $X \rightarrow X/G$ è rivestimento e X/G è di Hausdorff e connesso per archi

Tutti i rivestimenti regolari fra spazi Hausdorff e c.p.a. sono ottenuti così.
 Questo perché $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ regolare $\Rightarrow G = \text{Aut}(p) \Rightarrow \tilde{X}/G = X$.

COROLLARIO: Ogni X loc. contrattile, Hausdorff, c.p.a. è quoziente di un \tilde{X} per uno gruppo G , dove \tilde{X} è semplicemente connesso e $G = \text{Aut}(\tilde{X} \rightarrow X)$

PROPOSIZIONE: M varietà liscia. $G \curvearrowright M$ liscia, libera e propriamente discontinua

Allora M/G ha una unica struttura liscia e $M \xrightarrow{p} M/G$ è rivestimento liscio

D.M.: Per il teorema precedente $M \xrightarrow{p} M/G$ è rivestimento, M/G è Hausdorff

e a base numerabile (perché quoziente). Inoltre M/G è varietà topologica

Come corte pseudo $\{U \xrightarrow{p \circ p^{-1}} \mathbb{R}^m\}$. G agisce liscia $\Rightarrow \varphi_i$ liscie

e mi dice anche che la definizione delle corte non dipende dalla sezione p^{-1} che scegliamo (tutto differisce solo per un automorfismo di rivestimenti).

COROLLARIO: Ogni varietà liscia connessa è diffeomorfa a M/G dove M è varietà liscia sempl. conn. e $G \curvearrowright M$ liscia, libera, prop. discontinua.

Esempio: $\mathbb{R}P^n = S^n/G$ con $G = \{\text{id}, -\text{id}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

È libero perché $-\text{id}$ non ha punti fissi. È propr. discontinuo perché G è gruppo finito.

Esempio: $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ $G = \mathbb{Z}^n = \{\text{traslazioni intere}\}$

Traslazioni non hanno punti fissi \Rightarrow libere.

Propr. discontinuo perché basta prendere come intorno una palla di raggio $\frac{1}{4}$ e si ha che le immagini sono tutte disgiunte.

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$$

Esempio: $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$

Scelgo $(p, q) = 1$ e prendo $w = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ $w^q = e^{\frac{2\pi i q}{p}}$ sono entrambe radici primitive p -esime di 1.

$$g: S^3 \rightarrow S^3$$

$$(z, w) \mapsto (zw, w w^q)$$

$$G = \langle g \rangle = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

G agisce in modo libero (su ogni componente si ha sempre rotaz. non banale)

Spazio lenticolare: $L(p, q) := S^3/G$ è var. liscia connessa cpt con $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Esempio: \mathbb{R}^2 $G = \langle f, g \rangle$

$$\text{con } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+1, y)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (-x, y+1)$$

G agisce libero e propr. discontin.

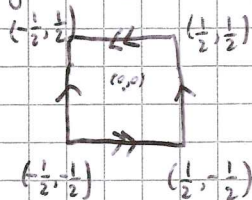
Def Un chiuso $D \subseteq M$ è un dominio fondamentale per un'azione $G \curvearrowright M$

- se:
- 1) D interseca ogni orbita in almeno un punto
 - 2) \bar{D} interseca ogni orbita in al più un punto

Esempio: $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ ha come dominio fondamentale un qualsiasi $[x, x+1]^n$

Esercizio: Trova un dominio fondamentale per \mathbb{R}^2 con azione $G < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$

$G = \langle f, g \rangle$ con f, g definite a fine lezione scorsa.



$\mathbb{R}^2 / G = \text{Bottiglia di Klein}$.

ORIENTAZIONE

Def

Sia M^m varietà liscia. Prendiamo di corte per M intendendo un qualsiasi diffeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ con $U \subseteq M, V \subseteq \mathbb{R}^m$.

Un atlante A per M (compatibile) è orientato se $(d\varphi_{ij})_p$ è positivo $\forall i, j, p$ cioè $\det(d\varphi_{ij})_p > 0 \forall i, j \forall p \in M$.

Def Due atlanti orientati A e A' sono ^{invariantemente} compatibili se $A \cup A'$ è orientato.

Def ^① Una orientazione per M è un atlante orientato a meno di compatibilità di orientazioni.

Def Se A è atlante orientato, $A = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}$, allora si definisce l'atlante opposto $-A = \{r \circ \varphi_i: U_i \rightarrow r(V_i)\}$ con r riflessione lungo un iperpiano fissato.

oss. $-A$ è orientato. Inoltre A e $-A$ sono compatibili ma non ori. comp.

Def M è orientabile se ammette un'orientazione, ovvero un atlante orientato.

Esercizio: S^m è orientabile.

PROPOSIZIONE: Se M ha $A = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $U_1 \cap U_2$ è connesso, allora M è orientabile.

DIM: Uno tra A e $A' = \{\varphi_1, r \circ \varphi_2\}$ è atlante orientato.

Def Alternative: V un \mathbb{R} -sp. vett. Una orientazione su V è la scelta di uno degli insiemi di basi (positivo) $b \sim b' \iff \det M_b^b(\text{id}) > 0$

Def ② Una orientazione per M è il dato di una orientazione per ciascun $T_p M$ $\forall p \in M$ che siano localmente coerenti, cioè $\forall p \in M$
 $\exists \varphi: U(p) \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ che preservi le orientazioni, vale a dire
 $\forall x \in U(p) \quad d\varphi_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ manda basi positive in basi positive

\uparrow orientato \uparrow orient. canonica

Oss. Non è ben definito $\det(d\varphi_x)$, essendo $T_x M$ uno sp. vett. astratto.

Proposizione: le due precedenti sono def. equiv.

DIM: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}$ orientato, $\forall p \in M, p \in U_i$,
 $(d\varphi_i)_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Assegniamo a $T_p M$ l'orientazione
 indotta da $(d\varphi_i)_p$.

Se prendo altra carta $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$, $p \in U_j$, si ottiene
 la stessa orientazione su $T_p M$ perché

$$d\varphi_j = d\varphi \circ d\varphi_i^{-1}$$

\uparrow è positivo \uparrow devono quindi dare stesso orient.

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ Esercizio

Proposizione: Se M è connessa, ha 0 o 2 orientazioni.

DIM: Se A è l'unico orientato $\Rightarrow -A$ orientato.

Se $\exists A'$ orientato pongo $S := \{p \in M \mid \text{l'orientazione su } T_p M \text{ indotta da } A' \text{ coincide con quella indotta da } A\}$

$$S' := \{p \in M \mid \text{l'orientazione su } T_p M \text{ indotta da } A' \text{ coincide con quella indotta da } -A\}$$

Vale che $M = S \cup S'$.

Esercizio: S e S' sono aperti.

Def $f: M \rightarrow N$ tra varietà orientate, diffeo locale ^{inverte} preserva l'orientazione se
 $\forall p \in M \quad df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ^{inverte} preserva basi positive.
 (è invertibile)

Esercizio: Se M connessa f o preserva o inverte le orientazioni.

Def M orientata è specchiabile se $\exists \varphi: M \rightarrow M$ diffeo che inverte l'orientazione

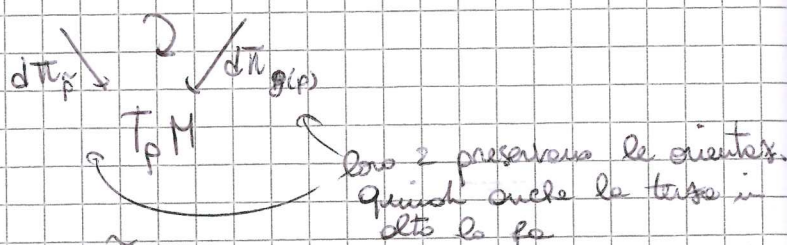
Proposizione: $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ rivestimento liscio regolare (cioè $M = \tilde{M}/\text{Aut}(\tilde{M})$).

Esercizio: M orientabile, $\varphi: M \rightarrow M$ diffeom. se preserva una orientazione la preserva tutte. Quindi il preservare l'orientazione non dipende dall'orientazione.

→ D.M.: \Leftrightarrow Usando $d\pi_p: T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$ (che è isomorfismo) per dare a $T_p \tilde{M}$ una orientazione (quella indotta). Viene facile che sia localmente coerente.

G agisce preservando le orientazioni:

$$\forall g \in G, \pi \circ g = \pi \Rightarrow T_p \tilde{M} \xrightarrow{dg_p} T_{g(p)} \tilde{M} \quad \text{tutti isomorfismi.}$$



\Leftrightarrow Usando $\forall p \in M$ $d\pi_p: T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$ per definire su $T_p M$ orientazione. Grazie all'ip. su G l'orientazione indotta non dipende dalla scelta della controimmagine.

COROLLARIO: Klein non è orientabile.

D.M.: g è glissoriflessione, non preserva l'orientazione.

COROLLARIO: Möbius $= \mathbb{R}^2 / G$, $G = \langle g \rangle$ non è orientabile.

COROLLARIO: $\mathbb{R}P^n = S^n / G$, $G = \{id, -id\}$ è orientabile $\Leftrightarrow n$ dispari.

PROPOSIZIONE: M connessa non orientabile. Allora \exists rivestimento doppio $\tilde{M} \xrightarrow{2} M$ con \tilde{M} orientabile.

$$\text{D.M.: } \tilde{M} := \{(p, o) \mid p \in M, o = \text{orientazione di } T_p M\} \xrightarrow{\pi} M$$

1ST GEO - LEZIONE 5

PROPOSIZIONE: M non orientabile connessa $\Rightarrow \exists \tilde{M} \rightarrow M$ doppio coperto, con \tilde{M} orientabile

COLLAPIO: Se M è semplicemente connesso $\Rightarrow M$ orientabile.

ESEMPIO: \mathbb{CP}^n è semplicemente connesso \Rightarrow orientabile

ESERCIZIO: le carte date per \mathbb{CP}^n sono orientate.

ESEMPIO: $L(p, q) = S^3/G$, con $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $G < SO(4)$ è orientabile

Def $f: M \rightarrow N$ liscia è un'immersione in $p \in M$ se df_p è iniettivo

Def $f: M \rightarrow N$ liscia è una sommersione in $p \in M$ se df_p è suriettivo

OSS. f immersione e sommersione \Rightarrow differenziale locale.

PROPOSIZIONE: Se f è immersione in p , allora \exists carte $\varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi: V(f(p)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che, $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

PROPOSIZIONE: Se f è sommersione in p , allora \exists carte $\varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi: V(f(p)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che, $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m)$.

OSS. I punti in cui f è immersione / sommersione sono un aperto di M .

Si dimostra in corte, avere rango max è condizione aperta.

Def $f: M \rightarrow N$ liscia è embedding se è un'immersione e anche un omeomorfismo con l'immagine, cioè $f: M \rightarrow f(M)$ è omeo.

OSS. f embedding $\Rightarrow f$ immersione iniettivo

\nwarrow controesempio . ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$)

ESERCIZIO: f immersione iniettivo propria $\Rightarrow f$ embedding.

Def M^m varietà liscia. $S \subseteq M$ sottosieme è sottovarietà liscia se $\forall p \in S$

$\exists \varphi: U(p) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$ carta di M tale che $\varphi(U \cap S) = L \subseteq \mathbb{R}^m$ sottospazio vet.

S ha dim n se $\dim L = n$.

OSS. Una m -sottovarietà $S \subseteq M$ è naturalmente una m -varietà liscia.

PROPOSIZIONE: $f: M \rightarrow N$ embedding $\Rightarrow f(M)$ sottovarietà liscia di N .

Dim. $\forall p \in M$ considera U, V intorni di $p, f(p)$ tali che $f|_U: U \rightarrow V \cap f(M)$

sia (ovviamente) omeomorfismo e la relativa mappa in corte sia

La forma normale delle immersioni.

Ma allora $\psi(f(M) \cap V) = L = \{x_{m+1} = \dots = x_m = 0\}$, da cui $f(M)$ è sottovarietà.

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ retta di coeff. angolare λ .

$$\begin{array}{c} \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

(Esercizio:) g immettibile $\Leftrightarrow \lambda$ irrazionale $\Leftrightarrow g(\mathbb{R})$ è denso in T .

Osserviamo che se λ è irrazionale g è immersione immettibile, ma ovviamente non può essere embedding (l'immagine densa fa smuovere tutto).

COROLLARIO: $f: M \rightarrow N$ con M compatta, f immers. inj \Rightarrow ~~embedding~~ embedding.

Esercizio: Se $M \subseteq N$ sottovarietà, $i: M \hookrightarrow N$ è embedding.

Se $M \subseteq N$ sottovarietà, $\forall p \quad T_p M \subseteq T_p N$ canonicamente.

Def $f: M^m \rightarrow N^n$ ($m \geq n$), un punto $p \in M$ si dice regolare se df_p surg., altrimenti si dice singolare. Un punto $q \in N$ si dice valore regolare se $f^{-1}(q)$ contiene solo punti regolari, valore critico altrimenti.

PROPOSIZIONE: Se $q \in N$ è valore regolare, $S = f^{-1}(q) \subseteq M$ è sottovarietà di dim $m-n$ e inoltre $\forall p \in S \quad T_p S = \ker df_p$.

Dim: Si usa forma normale delle immersioni.

Esempio: $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ sottovarietà. $S^m = f^{-1}(1)$ con $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \|x\|^2$$

Def Un gruppo di Lie è una varietà liscia G che è anche gruppo tale che

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & gh \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array} \quad \text{siano lisce.}$$

Esempio: $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, +)$, $(M(n, n, \mathbb{R}), +)$, ... sono gruppi di Lie (sono sp. vettoriali).

$$(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$$

↪ aperto in $M(n, n, \mathbb{R})$
di dim n^2

$GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{det} \mathbb{R}$ 1 è val. reg. $\Rightarrow det^{-1}(1) \subseteq SL(n, \mathbb{R})$ è sottovarietà.

$$T_e SL(n, \mathbb{R}) \subset T_e M(n, n, \mathbb{R}) = M(n, n, \mathbb{R})$$

$$\{X \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid T_e X = 0\} = se(n, \mathbb{R})$$

$f: M(n, n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n) \quad I$ è valore regolare $\Rightarrow O(n) = f^{-1}(I)$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n).$$

$O(n)$ ha 2 comp. connesse, una è $SO(n)$.

$GL(n)$ ha 2 comp. connesse.

$$GL(n, \mathbb{R}) \cong O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ diffeomorfismo}$$

Proposizione: $M_K(m, n, \mathbb{R}) \subseteq M(m, n, \mathbb{R})$ le matrici di rango K . È sottovarietà di codimensione $(m-K)(n-K)$.

Dim: Sia P_0 di rango K . A meno di permutare righe e colonne

$$P_0 = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array} \right) \text{ con } \det A_0 \neq 0. \text{ Prendiamo } Q = \left(\begin{array}{c|c} A_0^{-1} & -A_0^{-1}B_0 \\ \hline 0 & I_{n-K} \end{array} \right) \in M(m, n, \mathbb{R}).$$

$$P_0 Q = \left(\begin{array}{c|c} I_K & 0 \\ \hline C_0 A_0^{-1} & D_0 - C_0 A_0^{-1} B_0 \end{array} \right)$$

Dato una qualsiasi $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, in un intorno c'è P' tale che $\det A' \neq 0$, quindi posso supporre come fatto all'inizio.

$$RKP = K \Leftrightarrow RKPQ = K \Leftrightarrow D = C A^{-1} B \text{ quindi è sottovarietà (è grafico...)}$$

Esempio: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia. $\text{graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è sottovarietà.

Infatti: considerando $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, si ha che $L \mapsto \text{graf}(f)$.
 $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ $\{y=0\}$

Corollario: Ogni sottovarietà $SS \mathbb{R}^n$ che sia localmente il grafico di funzione è una sottovarietà liscia.

ISTGEO. LEZIONE 6

PROPOSIZIONE: Se X sp. top. localmente compatto, T_2 , a base num., allora:

- 1) $\forall p \exists U(p)$ aperto tale che $\overline{U(p)}$ è cpt.
- 2) \exists base numerabile $\{U_i\}$ tale che $\forall i \overline{U_i}$ cpt.
- 3) X ha una esaurizione in cpt, ovvero $\exists \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di compatti tale che $\forall i K_i \subseteq K_{i+1}$ e $\bigcup_N K_i = X$.

Dim: 1) $\forall p \exists V(p)$ compatto. Essendo un intorno $\exists U \subseteq V, p \in U$,
 $\overline{U} \subseteq \overline{V} = V$. \overline{U} chiuso in cpt $\Rightarrow \overline{U}$ cpt.
 $\leftarrow x \in T_2$

2) Sia $\{U_i\}$ base numerabile. $\forall p \in X \exists U(p)$ nel. cpt.
 $\overline{U(p)}$ cpt. Essendo $\{U_i\}$ base, $\exists i$ tale che $p \in U_i \subseteq U(p)$.
 Prendendo questi particolari U_i (che sono nel. cpt), sono ancora base (ovviamente numerabile).

3) Sia $\{U_i\}$ base num. di relativamente cpt. Pongo
 $K_1 = \overline{U_1}$. $K_i = \overline{U_1 \cup \dots \cup U_k}$ con $k = \min\{i \mid K_{i-1} \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_i\}$.

Def X sp. top. è paracompatto se \forall ricoprimento aperto $\{U_i\}$ esiste un raffinamento $\{W_j\}$ localmente finito.

ric. aperto e $\forall j \exists i : W_j \subseteq U_i$ $\leftarrow \forall p \in X \exists U(p)$ che ne interseca solo un num. finito.

PROPOSIZIONE: X sp. top. loc. cpt., T_2 , a base numerabile

4) X è paracompatto.

Dim: 1) Dato $\{U_i\}$ ric. aperto di X , e una esaurizione in cpt $\{K_j\}$

Definisco $W_{ij} = U_i \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$

$\{W_{ij}\}$ è un raffinamento ($W_{ij} \subseteq U_i$).

Per induzione su j , considerando $K_j \setminus K_{j-1}$ (che è cpt),

Prendo un sottocoprimento $\{W_{ij}\}_{i \in \mathbb{N}}$ (j fissato) per $K_j \setminus K_{j-1}$ e ne considero l'unione (della famiglia).

Questo è raffinamento loc. finito di $\{U_i\}$.

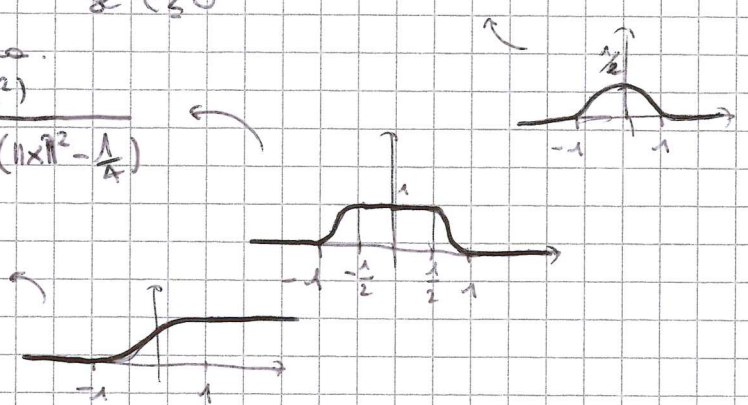
~~Def. Una funzione a compenso è $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$~~

Def. Una funzione a compenso è $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che ha supporto compatto

Esempio: • Basta $h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = h(1 - \|x\|^2)$ è una funzione a compenso.

• $\eta(x) = \frac{h(1 - \|x\|^2)}{h(1 - \|x\|^2) + h(\|x\|^2 - 1)}$

• $\psi(x) = \frac{h(x)}{h(x) + h(1-x)}$



Def. Un atlante liscio $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}$ per M è adeguato se:

- $\{U_i\}$ è loc. finito
- $V_i = \mathbb{R}^m \quad \forall i$
- $\{\varphi_i^{-1}(B^m)\}$ ricoprimento di M
← palla standard

PROPOSIZIONE: M varietà liscia, $\{U_i\}$ ric. aperto di M . Allora \exists atlante adeguato $\{\varphi_j: W_j \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ tale che $\{W_j\}$ sia un raffinamento di $\{U_i\}$

DIM: Prendo $\{K_j\}$ copertura in compatti, come prima prendo $W_{ij} = U_i \cap (K_{j+1} \setminus K_{j-2})$. $\forall p \in K_j \setminus K_{j-1}$ sicuramente $\exists \varphi_p: V(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $V(p) \subseteq W_{ij}$ (basta restringere...)

Considero allora $\{\varphi_p: V(p) \rightarrow \mathbb{R}^m\}$.

Per ogni j , $\{\varphi_p^{-1}(B^m)\}_{p \in K_j \setminus K_{j-1}}$ dà ricoprimento di $K_j \setminus K_{j-1}$.

Ne estraggo sotto ricoprimento finito e, facendolo $\forall j$, la famiglia delle φ_p scelte dà un atlante adeguato.

Def. M varietà liscia, $\{U_i\}_{i \in I}$ ric. aperto. Una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento è una collezione di funzioni lisce $\{p_i: M \rightarrow \mathbb{R}\}$ tale che

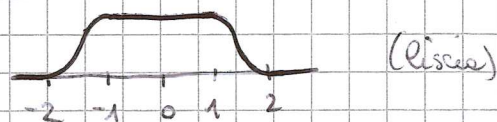
- 1) $\text{Supp } p_i \subseteq U_i \quad \forall i$ (cioè la chiusura dell'insieme dei punti che non sono a zero $\subseteq U_i$)
- 2) $\forall p \exists U(p)$ su cui solo un # finito di p_i non è identicamente nulla e inoltre $\sum_{i \in I} p_i(p) = 1$.

Proposizione: Dato $\{U_i\}$ ric. aperto di M , \exists sempre partizione dell'unità subordinata a lui.

DIM: Prendiamo $\{\varphi_j: W_j \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ adeguato con $\{W_j\}$ raffinamento di $\{U_i\}$. Costruiamo prima partiz. di 1 subordinata a $\{W_j\}$.

Costruiamo $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 2 \\ \in (0,1) & \text{se } 1 < \|x\| < 2 \end{cases}$$



e costruiamo

$$p_j: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \begin{cases} \lambda(\varphi_j(p)) & \text{se } p \in W_j \\ 0 & \text{se } p \notin W_j \end{cases}$$

p_j è liscia e $\text{supp } p_j \subseteq W_j$ ed essendo $\{\varphi_j\}$ adeguato vale che $\forall p$ solo un numero finito sono $\neq 0$.

$$\text{Quindi } \sum_{i \in I} p_i(p) < +\infty \quad \text{e anche } \sum_{i \in I} p_i(p) \geq 1$$

perché $\{\varphi_j(B^1)\}$ ricoprimento, quindi densità un addendo è $= 1$ (e $\neq 0$).

$$\text{Poniamo infine } \bar{p}_i(p) = \frac{p_i(p)}{p(p)}$$

$$\text{dove } p(p) = \sum_{i \in I} p_i(p)$$

$$p: M \rightarrow \mathbb{R}$$

Questa partiz. è subordinata a $\{W_j\}$, ma passere a $\{U_i\}$ è semplice.

Def. $S \subseteq M$ sottinsieme di varietà liscia. Una $f: S \rightarrow N$ è liscia se $\forall p \in S$ $\exists U(p) \subseteq M$, $g: U(p) \rightarrow N$ liscia tale che $g|_{S \cap U} = f|_{S \cap U}$.

Proposizione: M varietà liscia. $S \subseteq M$ sottinsieme chiuso.

Ogni $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia si estende a $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia.

DIM: $\forall p \in S \exists U(p)$, $g_p: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ che estende f .

Considero il ricoprimento aperto $\{U(p)\}_{p \in S}$ di $U(M, S)$.

Prendo $\{p_p: M \rightarrow \mathbb{R}\} \cup \{\bar{p}: M \rightarrow \mathbb{R}\}$ partiz. di 1

subordinata al ricoprimento.

Poniamo $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \mapsto \sum_{p \in S} p_p(x) g_p(x)$$

è liscia perché localmente è somma finita di funz. lisce.

Se $x \in S$,
$$f(x) = \sum_{p \in S} p_p(x) g_p(x) = \sum_{p \in S} p_p(x) f(x) = f(x)$$

Proposizione:

Dato $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuo, $S \subset M$ chiuso (anche vuoto) tale che $f|_S: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia,

$\forall \varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ continua $\exists g: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia tale che $f|_S = g|_S$ e

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x) \quad \forall x \in M.$$

Dim: Si definisce g localmente: $\forall p \in M \exists g_p: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$g_p|_{S \cap U(p)} = f|_{S \cap U(p)} \quad \text{e} \quad \|g_p(x) - f(x)\| < \varepsilon(x).$$

Infatti: se $p \notin S$ definisco $g_p(x) \equiv f(p)$. Prendendo $U(p)$ abbastanza piccolo per continuità di f e ε .

se $p \in S$ $g_p(x)$ è l'estensione locale e $U(p)$ sufficientemente piccolo.

Considero ora $\{U(p)\}_{p \in M}$ e una partizione di 1 $\{p_p: M \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in M}$ subordinate.

Poniamo $g(x) = \sum_{p \in M} p_p(x) g_p(x)$. È liscia, $g|_S = f|_S$ come sopra.

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &= \left\| \sum_{p \in M} p_p(x) f(x) - \sum_{p \in M} p_p(x) g_p(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{p \in M} p_p(x) (f(x) - g_p(x)) \right\| \leq \sum_{p \in M} p_p(x) \|f(x) - g_p(x)\| \\ &\leq \sum_{p \in M} p_p(x) \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \end{aligned}$$

ISTGEO - LEZIONE 7

oss. A proposito dei rivestimenti lisci:

Def. 1 $\phi: \tilde{M} \rightarrow M$ rivestimento fra varietà lisse è riv. liscio se è anche differ. locale.

Def. 2 $p: \tilde{M} \rightarrow M$ è riv. liscio se $\forall p^M \exists V(p), \exists U(p^M(p))$ tali che $p: U_i \rightarrow V$ differ.

Le definizioni sono equivalenti (si usa che omeo + differ. loc. \Rightarrow differ.)

Def Una esunzione liscia su M varietà liscia è una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tale che $f^{-1}([0, T])$ è compatto.

Proposizione Data M varietà, esiste una esunzione liscia per M .

DIM:

Prendiamo $\{U_i\}$ ric. aperto per M loc. finito con U_i rel. cpt.

Consideriamo $\{f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}\}$ partiz. dell'unità


(si può fare perché prendendo $A = \{f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ adeguato, $\{f_i^{-1}(B^m)\}_i$ è il ric. cercato. Tra l'altro $\bigcup_i U_i \cong \mathbb{D}^m$)

Definiamo adesso $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. È ben definita perché $f \mapsto \sum_i f_i(p)$ somma finita in ogni punto.

$f^{-1}([0, T])$ è cpt (Esercizio).

Def M, N var. lisse. $f, g: M \rightarrow N$. Una omotopia liscia ^{tra f e g} è una mappa $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ liscia tale che $F(p, 0) = f(p)$ e $F(p, 1) = g(p)$.

Lemma: Se $\exists F$ tra f e g omotopia liscia, allora ne esiste una F' tale che $F'(x, t) = f(x) \quad \forall t \leq 0$ e $F'(x, t) = g(x) \quad \forall t \geq 1$.

DIM: Prendiamo $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di raccordo C^∞ (come nella letz. scorsa)  Definiamo $F'(x, t) = F(x, \psi(t))$.

Proposizione: Essere omotopi (nel senso liscio) per $f, g: M \rightarrow N$ è una relazione di equivalenza.

DIM: $f \sim_F g$, $g \sim_H h$ con F, G costanti sui tempi fissi da $[0, 1]$.

Unisco le due isotopie facendo

F in $[0, \frac{1}{3}]$ (riscolata), poi $H \equiv g$ in $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ e infine G riscolata in $[\frac{2}{3}, 1]$.

È liscia perché FH coincide con F e HG con G .

Def $f, g: M \hookrightarrow N$ embedding. Una isotopia liscia è una omotopia liscia $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tra f e g tale che $F_t: M \rightarrow N$ è embedding $p \mapsto F(p, t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Come prima, si possono costruire isotopie F' tale che $F'(x, t) = f(x) \forall t$ e $F'(x, t) = g(x) \forall t \geq 0$.

Essere isotopi è una relazione di equivalenza fra embedding.

Esempio: Un nodo è un embedding $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ oppure S^3 .

Di solito si considera a meno di isotopia liscia.

Analogamente $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

Def X sp. top. Un base liano $S \subseteq X$ è un insieme costruito prendendo aperti e operando con complementare, unioni (anche infinite) e intersezioni (anche infinite). In pratica $S \in \sigma(\{\text{Aperti}\})$ (la σ -alg. generata).

Def M varietà liscia. $S \subseteq M$ ha misura nulla se \forall corte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ $\varphi(U \cap S) \subseteq \mathbb{R}^m$ ha misura nulla (di Lebesgue).

Oss. Basta verificarlo per le corte di un atlante compatibile.

(Le mappe C^∞ tra aperti di \mathbb{R}^m mandano insiemi di misura nulla in misura nulla).

TEOREMA (LEMMA DI SARD): $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. I valori critici formano un insieme di misura nulla.

COROLLARIO: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia, $m < n$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow \text{Im}(f)$ ha misura nulla.

COROLLARIO: $f: M^m \rightarrow N^n$ liscia. Se $m < n$ allora $\text{Im}(f)$ ha misura nulla in N .

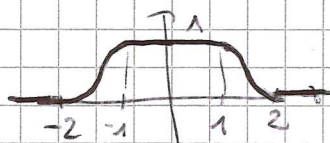
DIM: Passando in corte è vero. Basta una quantità numerabile di corte \Rightarrow unione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

TEOREMI DI WHITNEY

TEOREMA: M^m cpt. Allora \exists embedding $F: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ per qualche $n > 0$.

DIM: Sia \mathcal{A} adeguato $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\} \Rightarrow$ l'atlante è finito (diciamo in k pezzi).
(cpt + loc. finito \Rightarrow finito).

Consideriamo $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$



Definiamo

$$\lambda_i: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \lambda_i(p) = \begin{cases} \lambda(\varphi_i(p)) & \text{se } p \in U_i \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

λ_i è liscia. Infatti $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\text{supp}(\lambda(\varphi_i(U_i))) \subseteq \varphi_i^{-1}(B_2^m) \quad \text{raggio 2}$$

Quindi i 2 pezzi si innestano bene.

Definiamo $F: M \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{k \text{ volte}} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k \text{ volte}} \cong \mathbb{R}^{(m+1)k}$

$$p \mapsto (\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p), \lambda_1(p), \dots, \lambda_k(p))$$

dove $\varphi_i: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $\varphi_i(p) = \begin{cases} \lambda_i(p) \varphi_i(p) & \text{se } p \in U_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

F è embedding: $\forall p \in M \exists i$ t.c. $p \in V_i = \varphi_i^{-1}(B^m)$.

$\varphi_i(x) = \varphi_i(x)$ in un intorno di p (in realtà in tutto V_i)

~~quindi~~ quindi è differ. loc. $\Rightarrow (d\varphi_i)_p$ ha rango m .

$\Rightarrow (dF)_p$ ha rango m .

$\hat{=}$ iniettiva: siano $p, q \in M$ con $F(p) = F(q)$.

$\exists i$ t.c. $p \in V_i \Rightarrow \lambda_i(p) = 1 \Rightarrow \lambda_i(q) = 1 \Rightarrow q \in V_i$.

Ma $\varphi_i(p) = \varphi_i(p) = \varphi_i(q) = \varphi_i(q) \Rightarrow p = q$ perché φ_i è una carta.

Quindi M cpt, F immersione iniettiva $\Rightarrow F$ embedding.

TEOREMA (DI IMMERSIONE DI WHITNEY):

Data $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua con $n \geq 2m$, $\forall \varepsilon > 0 \exists F: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ immersione tale che $\|F(p) - f(p)\| < \varepsilon \quad \forall p \in M$.

DIM: Sia $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ atlante adeguato.

Poniamo $V_i = \varphi_i^{-1}(B^m)$. Vale che $\overline{V_i} \cong D^m$ cpt.

Definiamo come prima $\lambda_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi_i: M \rightarrow \mathbb{R}^m$

Sia $M_J = \bigcup_{i=1}^J V_i$. $\overline{M_J}$ è qst pacchè unione finita di dischi chiusi.

Costruiamo induttivamente

$F_1, F_2, \dots: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tali che: (prendo $F_0 = \tilde{f}$, con \tilde{f} approssimazione liscia di f)

1) $\|F_i(p) - f(p)\| < \epsilon \quad \forall p \in M$

2) $F_i(p) = F_{i-1}(p) \quad \forall p \notin U_i$

3) $(dF_i)_p$ iniettiva $\forall p \in \overline{M_i}$

Perché $\{U_i\}$ è loc. finita, su ogni $\overline{M_j}$ la successione delle F_i stabilizza in punti passi.

Quindi $F_i \rightarrow F$ con $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ immersione liscia

Definiamo $F_i(p) := F_{i-1}(p) + A\psi_i(p)$

con $A \in \mathcal{M}(m, m)$

Qualunque scelta A la condiz. 2 è soddisfatta.

La condiz. 1 è soddisfatta prendendo A tale che $\|A\|$ sia sufficientemente piccolo. Come ottengo la 3?

$$(dF_i)_p = (dF_{i-1})_p + A(d\psi_i)_p$$

$(d\psi_i)_p$ invertibile su $p \in \overline{M_i} \setminus \overline{M_{i-1}}$, quindi

$$\underbrace{(dF_i)_p (d\psi_i)_p^{-1}}_B = \underbrace{(dF_{i-1})_p (d\psi_i)_p^{-1}}_B + A$$

$$B = d(F_{i-1} \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(p)}$$

Quindi voglio che B abbia rango max.

B non ha rango max $\Leftrightarrow d(F_{i-1} \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(p)} + A$ non ha rk max

ovvero

$A = C - d(F_{i-1} \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(p)}$ con C di rango $k < m$

Cioè $C \in \mathcal{M}_k(m, m)$

\hookrightarrow è varietà di dim $mm - (m-k)(m-k)$

Consideriamo la mappa $\mathcal{M}_k(m, m) \times U \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M}(m, m)$

$$(C, p) \mapsto C - d(F_{i-1} \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(p)}$$

Dimostriamo che $\text{Im } \Phi$ ha misura nulla.

La misura nulla è data da $m(m-k)(m-k) < mm$

per escludere il caso in cui B non ha rango max
(in realtà lo vogliamo fuori da $\text{Im } \Phi_k \quad \forall k < m$).

Per dire questo basta provare che

$$mm - (m-k)(n-k) + m < mm, \text{ ovvero che } m < (m-k)(n-k).$$

Usiamo che $n \geq 2m$: ($k \geq 1$)

$$\begin{array}{l} m-k \geq m+1 \\ m-k \geq 1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} m-k \geq m+1 \\ m-k \geq 1 \end{array}} \right\} \Rightarrow m < m+1 = (m+1) \cdot 1 \leq (m-k) \cdot (m-k)$$

OK.

ISTGEO - LEZIONE 8

NOTAZIONE: $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ significa F immersione.

TEOREMA (DI IMMERSIONE INIETTIVA DI WHITNEY):

Dato $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Se $m \geq 2m+1$, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists F: M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ immersione iniettiva tale che $\forall p \in M \quad \|F(p) - f(p)\| < \varepsilon$.

DIM: WLOG f immersione.

Come prima, induttivamente $F_0 = f$, $F_i = F_{i-1} + \langle v, \lambda_i \rangle$ per un certo vettore $v \in \mathbb{R}^m$

Viene fuori che è possibile scegliere in modo generico con norma piccola. La scelta di v compie ad ogni passaggio in modo liscio.

COROLLARIO: Dato M^m qualsiasi, esiste sempre $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ immersione.

DIM: Prendiamo $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ costante e perturbiamola con il Teorema di immersione di Whitney.

COROLLARIO: Dato M^m qualsiasi, esiste sempre $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ immersione propria.

DIM: $\exists p: M \rightarrow \mathbb{R}$ esauriente liscia \Rightarrow è propria

Da questa definiamo $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ che è propria.
$$p \mapsto (f(p), 0, 0, \dots, 0)$$

Usiamo il teorema: $\exists G: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ con $\|G(p) - g(p)\| < 1 \quad \forall p \in M$.

Esercizio g propria $\Rightarrow G$ propria.

COROLLARIO: Dato M^m qualsiasi, $\exists M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ embedding proprio.

DIM: Come sopra, si crea un'immersione iniettiva propria (quindi embedding).

Esercizio: Sia $f: M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ embedding. f è propria $\Leftrightarrow f(M)$ è un chiuso di \mathbb{R}^k .

ALGEBRA MULTILINEARE

Consideriamo solo spazi vettoriali reali di dimensione finita.

Def $f: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ è multilineare se è lineare in ogni componente.

Siano $\mathcal{B}_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$ base di V_i , $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W .

Esercizio: F è determinato dai numeri F_{i_1, \dots, i_k}^j , $j \in \{1, \dots, m\}$
 $i_\ell \in \{1, \dots, m_\ell\} \forall \ell \leq k$
 con $F(v_{1, i_1}, \dots, v_{k, i_k}) = \sum_{j=1}^m F_{i_1, \dots, i_k}^j w_j$.

Inoltre per ogni scelta dei coefficienti esiste una F .

CONVENZIONE DI EINSTEIN: la sommatoria non si scrive. Implicitamente si somma sugli indici ripetuti (a coppie) con uno sopra e uno sotto.

COROLLARIO $M(v_1, \dots, v_k; W) = \{F: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W \text{ multilineare}\}$ è uno sp. vettoriale di dimensione $\dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_k \cdot \dim W$

NOTAZIONE: $M(v_1, \dots, v_k; \mathbb{R}) = M(v_1, \dots, v_k)$

OSS. C'è un isomorfismo canonico

$$M(v_1, \dots, v_k; W) = M(v_1, \dots, v_k, W^*)$$

$$F \mapsto F'(v_1, \dots, v_k, w^*) = w^*(F(v_1, \dots, v_k))$$

Esercizio: $\hat{=}$ iniettiva (e dunque isomorfismo, avendo la stessa dimensione).

Def. $V_1 \otimes \dots \otimes V_k := M(v_1^*, \dots, v_k^*)$ il prodotto tensoriale (spazi di dim finita).

Se $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$, si definisce $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ come

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k(v^1, \dots, v^k) = v^1(v_1) \cdot \dots \cdot v^k(v_k)$$

(indici in basso \rightarrow vettori
 indici in alto \rightarrow covettori
 (non nel dual))

Un elemento di questo tipo si dice puro o semplice.

Non tutti gli elementi sono di questo tipo.

PROPOSIZIONE

$B_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$ base di V_i $i=1, \dots, k$.

Allora $\{v_{1,i_1} \otimes \dots \otimes v_{k,i_k}\}_{i_\ell \in \{1, \dots, m_\ell\} \forall \ell=1, \dots, k}$ sono una base di $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$

Dim: $v_I = v_{1,i_1} \otimes \dots \otimes v_{k,i_k}$ con $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Sono lin. indep.

$\sum_I \lambda_I v_I = 0$, $\lambda_I \in \mathbb{R}$. Chiamiamo $B^i = \{v^{i,1}, \dots, v^{i,m_i}\}$ la base duale di B_i .

Scegli i_1, \dots, i_k

$$0 = \left(\sum_I \lambda_I v_I \right) (v^{1,i_1}, \dots, v^{k,i_k}) = \lambda_{(i_1, \dots, i_k)} v^{1,i_1}(v_{1,i_1}) \cdot \dots \cdot v^{k,i_k}(v_{k,i_k}) = \lambda_{(i_1, \dots, i_k)}$$

$$\Rightarrow \lambda_I = 0 \quad \forall I.$$

Generano ovviamente.

PROPOSIZIONE: (PROPRIETÀ UNIVERSALE)

$\forall f \in \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W) \quad \exists! F: V_1 \otimes \dots \otimes V_k \rightarrow W$ lineare tale che
 $f = F \pi$, dove $\pi: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ (è multilineare)
 $(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_k$

Detto in un altro modo,

$$\text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k, W) \cong \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W)$$

(tramite la mappa $- \circ \pi$).

PROPOSIZIONE: Esistono isomorfismi canonici:

- $V \otimes W = W \otimes V$
- $(V \otimes W) \otimes Z = V \otimes (W \otimes Z)$
- $V \otimes W = W \otimes V$
- $(V \otimes W) \otimes Z = V \otimes (W \otimes Z)$
- $V \otimes (W \otimes Z) = (V \otimes W) \otimes (V \otimes Z)$
- $(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$
- $(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$

DIM: Vediamo solo $V \otimes W = W \otimes V$:

Definiamo $V \times W \rightarrow W \otimes V$ bilineare. Usiamo la propr.
 $(v, w) \mapsto w \otimes v$
universale per definire la mappa lineare $V \otimes W \rightarrow W \otimes V$
 $v \otimes w \mapsto w \otimes v$
Si dimostra poi che è isomorfismo.

COROLLARIO: $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$

DIM: $V^* \otimes W = \mathcal{M}(V^*, W^*) = \mathcal{M}(V; W) = \text{Hom}(V, W)$.

Def di $V = n$. Lo spazio dei tensori di tipo (h, k) con $h, k \geq 0$ è

$$T_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ volte}}$$

Esempio: Per convenzione, $T_0^0(V) = \mathbb{R}$.

Un tensore di tipo $(0,0)$ è numero, uno di tipo $(1,0)$ è un vettore, uno di tipo $(0,1)$ è un covettore, uno di tipo $(1,1)$ è un endomorfismo di V , uno di tipo $(0,2)$ è una bilineare su V a valori in \mathbb{R} .

oss. Un tensore $T \in T_h^k(V)$ è una mappa $T: \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_h \times \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$ multilineare

Si può anche interpretare come mappa $\underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_h$

Un tensore di tipo $(1,k)$ è quindi mappa multilineare da $\underbrace{V^k}_{k \text{ volte}}$ in V , uno di tipo $(0,k)$ è multilineare da V^k in \mathbb{R} .

Esempio: $V = \mathbb{R}^n$. Il determinante è un tensore di tipo $(0,n)$. Il prod. vett. è $(1,2)$ in \mathbb{R}^3 .

Una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ induce una base $B^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ di V^* .
 Una base indotta su $T_n^k(V)$ è $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}\}$

Dunque, in notazione di Einstein, un qualsiasi $T \in T_n^k(V)$ si scrive

$$T = \underbrace{T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_k}}_{\text{coefficiente}} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}$$

PROPOSIZIONE:

$$T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_k} = T(v^{i_1}, \dots, v^{i_n}, v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$$

Esempio:

In \mathbb{R}^n con la base canonica, il prodotto scalare standard $g \in \text{Bil}(\mathbb{R}^n)$, ovvero è un tensore $(0, 2)$, e ha coordinate

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

Esempio:

$$T_1^1(V) = \text{End}(V) = V \otimes V^*$$

↖ c'è un elemento canonico (non dipende dalla base):

$$\text{id}_V^j = \delta_i^j$$

↖ indici uno sopra e uno sotto indicano matrice

Esempio:

$$T: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } B \text{ standard il prodotto vettoriale} \\ (x, y) \mapsto x \wedge y \quad (T \in T_1^2(\mathbb{R}^3))$$

$$\text{Vale che } T_{ij}^k = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

↖ simbolo di Levi-Civita

Esempio: In \mathbb{R}^3 , $\det \in T_0^3(\mathbb{R}^3) = T^3(\mathbb{R}^3)$ e, rispetto alla base canonica

$$\det_{i,j,k} = \varepsilon_{ijk}$$

NOTAZIONE: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V (tecnicamente roba in grassetto è vettore)

le coordinate di un generico $v \in V$ sono v^1, \dots, v^n , da cui

$$\text{scriviamo } v = v^j v_j$$

Se $T \in \text{End}(V)$, T si scrive in coordinate T_i^j e scriviamo

$$V = T(W) \quad \leadsto \quad v^i = T_i^j w^j$$

Se $g \in \text{Bil}(V)$ si scrive in coordinate g_{ij} e vale

$$g(v, w) = v^i g_{ij} w^j$$

$$g(T(v), T(w)) = T_e^i v^e g_{ij} T_k^j w^k$$

← sono tutti numeri, l'ordine non è importante

OSS. Il volume del parallelepipedo con lati u, v, w è:

$$\det(u, v, w) = u \cdot (v \wedge w) = (u \wedge v) \cdot w$$

D.M. Nella base canonica:

$$\det(u, v, w) = \varepsilon_{ijk} u^i v^j w^k$$

$$u \cdot (v \wedge w) = u^i \underbrace{\delta_{ij} \varepsilon_{jem} v^e w^m}_{(v \wedge w)^j} = u^j \varepsilon_{jem} v^e w^m$$

Analogamente l'altro.

OSS. Come cambiano le coordinate cambiando base?

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ sono basi di V , allora

$$w_j = A_j^i v_i \quad \text{e} \quad v_j = B_j^i w_i$$

A e B sono matrici inverse l'una dell'altra, ovvero

$$A_j^i B_k^j = \delta_k^i, \quad A_j^i B_i^k = \delta_j^k$$

Proposizione: Se $T \in \mathcal{T}_n^k(V)$ con coordinate $T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_n}$ rispetto a \mathcal{B}

e $\hat{T}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_n}$ rispetto a \mathcal{C} , allora

$$\hat{T}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_n} = B_{e_1}^{i_1} \dots B_{e_n}^{i_n} A_{j_1}^{m_1} \dots A_{j_k}^{m_k} T_{m_1, \dots, m_k}^{e_1, \dots, e_n}$$

Prodotto TENSORIALE DI TENSORI:

Vale che $\mathcal{T}_n^k(V) \otimes \mathcal{T}_e^m(V) \cong \mathcal{T}_{n+e}^{k+m}(V)$

Proposizione: Vale che, se $T \in \mathcal{T}_n^k(V)$ e $U \in \mathcal{T}_e^m(V)$, allora

$$(T \otimes U)_{j_1, \dots, j_{k+m}}^{i_1, \dots, i_{n+e}} = T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_n} \cdot U_{j_{k+1}, \dots, j_{k+m}}^{i_{n+1}, \dots, i_{n+e}}$$

Esempio:

$$g \in \mathcal{T}^2(V), \quad T \in \mathcal{T}_1^1(V) \Rightarrow g \otimes T \in \mathcal{T}_1^3(V) \text{ e}$$

$$(g \otimes T)_{i,j}^k = g_{ij} T_i^k$$

Una contrazione degli indici, se $k, k \geq 1$, è:

(operatore di tipo "traccia")

$C: \tau_h^k(V) \rightarrow \tau_{h-1}^{k-1}(V)$ definito "eliminando" una copia di V e una copia di V^* (scegliendo in pratica un $a \in \{1, \dots, k\}$ e $b \in \{1, \dots, k\}$).

Esempio: Se $T \in \tau_1^1(V)$, è ben definita la traccia facendo contrazione degli indici:

$$T_i^i \mapsto T_i^i \quad (\text{non dipende dalla base})$$

Invece, non è ben definita la traccia di un prodotto scalare,

perché $g \in \tau_2^2(V)$ e $g_{ij} \mapsto g_{ii}$ NON VA BENE (ho indice ripetuto in basso)

Formalmente:

$$\tau_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ volte}} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h-1 \text{ volte}} \otimes \underbrace{V \otimes V^*}_{\substack{\text{Sposta la} \\ a\text{-esima copia di } V \\ \text{e } b\text{-esima copia di } V^* \\ \text{in fondo}}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k-1 \text{ volte}} = \tau_{h-1}^{k-1}(V) \otimes V \otimes V^*$$

$$C: \tau_{h-1}^{k-1}(V) \otimes V \otimes V^* \rightarrow \tau_{h-1}^{k-1}(V)$$

$$W \otimes V \otimes V^* \mapsto V^*(V) \cdot W \quad \text{esteso poi per linearità.}$$

(per dimostrare l'esistenza di questa funzione si usa le proprietà univ.)

Usando gli indici:

Proposizione:

$$C(T)_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{h-1}} = T_{j_1, \dots, j_{k-1}, l, j_b, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{h-1}, l, i_a, \dots, i_{h-1}}$$

In pratica è una generalizzazione della traccia.

ISTGEO - LEZIONE 10

Se V ha un prodotto scalare g (forma bilineare simmetrica non degenera) con signature (p, m) , allora g induce alcuni isomorfismi:

\swarrow indice di positività \nwarrow indice di negatività

$$V \xrightarrow{\cong} V^* \quad , \quad \text{da cui} \quad T_h^k(V) \cong T_{h+k}(V) \cong T^{h+k}(V)$$

$$v \mapsto (w \mapsto g(v, w))$$

Questi hanno un prodotto scalare: su V^* ce lo abbiamo passando dall'isom.,

Chiamiamo g_{ij} le coordinate di g in V ($g(v, w) = v^i g_{ij} w^j$)

e g^{ij} le coordinate di g in V^* .

← Abbiamo fissato base

PROPOSIZIONE: g^{ij} è l'inverso di g_{ij} .

DIM:

Se $v \in V$ ha coordinate v^i , v^* ha coordinate $v^i g_{ij}$
 (in pratica $v = v^i v_i$)
elementi della base

$$g(v, w) = v^i g_{ij} w^j$$

$$g(v^*, w^*) = v_i^* g^{ij} w_j^* = v^j g_{ji} g^{il} w_l^* = v^j g_{ji} g^{il} w^k g_{ke} = v^j g_{ji} g^{il} g_{ke} w^k$$

$$\text{Quindi } G = G H G, \text{ dove } G = g_{ij}, H = g^{ij} \Rightarrow H = G^{-1}$$

Definiamo su $T_h^k(V)$ un prodotto scalare che chiameremo ancora g :

dati $T, U \in T_h^k(V)$, poniamo

$$g(T, U) = T_{i_1 \dots i_h}^{j_1 \dots j_k} U_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_h} g_{a_1 i_1} \dots g_{a_h i_h} g^{j_1 b_1} \dots g^{j_k b_k}$$

Esercizio: Se B ortogonale (cioè $g(v_i, v_j) = \pm \delta_{ij}$) allora le basi indotte su $T_h^k(V)$ sono ortogonali $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}\}$

Def L'algebra tensoriale è $T(V) = \bigoplus_{h, k \geq 0} T_h^k(V)$ con operazione \otimes estesa a tutto in modo distributivo.

OSS. $T(V)$ è un'algebra associativa non commutativa se $\dim V \geq 2$.

Esercizio: Se v, w indep. $\Rightarrow v \otimes w \neq w \otimes v$

Def $T_*(V) = \bigoplus_h T_h(V)$ è sottoalgebra di $T(V)$ detta sottoalgebra

Def $\mathcal{T}^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{T}^k(V)$ è detta algebra contravariante.

Def $T \in \mathcal{T}^k(V)$ è simmetrica se $\forall \sigma \in S_k$ permutazione

$$T(u_1, \dots, u_k) = T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

Def $T \in \mathcal{T}^k(V)$ è antisimmetrica se $\forall \sigma \in S_k$

$$T(u_1, \dots, u_k) = \text{sgn}(\sigma) T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

Esempio: $g \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^n)$ è simmetrica.

$\det \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ è antisimmetrica.

Proposizione: Fissata base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ,

$$T \in \mathcal{T}^k(V) \text{ simmetrica} \Leftrightarrow T_{i_1, \dots, i_k} = T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}} \quad \forall \sigma \in S_k$$

$$T \in \mathcal{T}^k(V) \text{ antisimmetrica} \Leftrightarrow T_{i_1, \dots, i_k} = \text{sgn}(\sigma) T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}} \quad \forall \sigma \in S_k$$

Dim: Esercizio:

Def Dato $T \in \mathcal{T}^k(V)$, si definisce il simmetrizzato $S(T) \in \mathcal{T}^k(V)$ come

$$S(T)(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

Def Dato $T \in \mathcal{T}^k(V)$, si definisce l'antisimmetrizzato $A(T) \in \mathcal{T}^k(V)$ come

$$A(T)(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

Esercizio: $S(T)$ è simmetrica, $A(T)$ è antisimmetrica.

$$S(T) = T \Leftrightarrow T \text{ simmetrica}, \quad A(T) = T \Leftrightarrow T \text{ antisimmetrica}$$

Proposizione:

$$S(T)_{i_1, \dots, i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}} =: T_{[i_1, \dots, i_k]}$$

$$A(T)_{i_1, \dots, i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}} =: T_{[i_1, \dots, i_k]}$$

Def $S^k(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ tensori simmetrici $S^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(V)$

$\Lambda^k(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ tensori antisimmetrici $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(V)$

Oss. $S^*(V)$ e $\Lambda^*(V)$ non sono algebre con \otimes .

Esercizio: Se $v^*, w^* \in V^*$ indipendenti, $v^* \otimes w^*$ non è né simmetrico né antisimmetrico.

Esercizio: $S(v^* \otimes w^*) = \frac{1}{2} (v^* \otimes w^* + w^* \otimes v^*)$

$$A(v^* \otimes w^*) = \frac{1}{2} (v^* \otimes w^* - w^* \otimes v^*)$$

Def T^1, \dots, T^m con $T^i \in \mathcal{T}^{k_i}(V)$ definiamo il prodotto simmetrico

$$T^1 \odot \dots \odot T^m := \binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m} S(T^1 \otimes \dots \otimes T^m)$$

e il prodotto antisimmetrico

$$T^1 \wedge \dots \wedge T^m := \binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m} A(T^1 \otimes \dots \otimes T^m)$$

Proposizione: $S^*(V)$ con \odot e $\Lambda^*(V)$ con \wedge sono algebre associative.

Esempio: $V^*, W^* \in V^*$. $V^* \odot W^* = 2 S(V^* \otimes W^*) = V^* \otimes W^* + W^* \otimes V^*$

$$V^* \wedge W^* = 2 A(V^* \otimes W^*) = V^* \otimes W^* - W^* \otimes V^*$$

Proposizione: Se $B = \{V_1, \dots, V_m\}$ base di V ,

$\{V_{i_1} \odot \dots \odot V_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m}$ è base per $S^k(V)$

$\{V_{i_1} \wedge \dots \wedge V_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m}$ è base per $\Lambda^k(V)$.

in realtà sarebbe
 V^* e tutti
 covetori

DIM: ovvio ma incasinato.

Corollario: $\dim S^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$$

In particolare, $\dim S^*(V) = +\infty$, mentre $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$

Corollario: $S^*(V)$ è un'algebra commutativa, $\Lambda^*(V)$ è un'algebra anticommutativa, ovvero è commutativa a meno di un segno.

EsPLICITAMENTE $T \odot U = U \odot T \quad \forall T \in S^p(V) \quad \forall U \in S^q(V) \quad \forall p, q$

$$T \wedge U = (-1)^{pq} U \wedge T \quad \forall T \in \Lambda^p(V) \quad \forall U \in \Lambda^q(V) \quad \forall p, q$$

DIM: È sufficiente mostrarlo su una base

$$T = V_{i_1} \wedge \dots \wedge V_{i_p} \quad U = V_{j_1} \wedge \dots \wedge V_{j_q}$$

$T \wedge U = V_{i_1} \wedge \dots \wedge V_{i_p} \wedge V_{j_1} \wedge \dots \wedge V_{j_q}$ usando l'associatività e che

Covetori

$\rightarrow V \wedge W = -W \wedge V$ si scambia tutto arrivando a $U \wedge T$.

Corollario: $T \in \Lambda^{2p+1}(V) \Rightarrow T \wedge T = 0$.

Proposizione: $V^1, \dots, V^k \in V^*$ indep $\Leftrightarrow V^1 \wedge \dots \wedge V^k \neq 0$.

DIM: Facile.

Dato V , $\dim V = n$, lo spazio $\Lambda^n(V)$ ha dimensione 1 ma non ha una base canonica.

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V , questa induce una base su $\Lambda^n(V)$ data dall'elemento $v^1 \wedge \dots \wedge v^n$.

Proposizione: Se $C = \{w^1, \dots, w^n\}$ base di V^* , scrivendo $v^i = A_j^i w^j$, allora $v^1 \wedge \dots \wedge v^n = \det A w^1 \wedge \dots \wedge w^n$.

Dim:

$$\begin{aligned} v^1 \wedge \dots \wedge v^n &= (A_{j_1}^1 w^{j_1}) \wedge \dots \wedge (A_{j_n}^n w^{j_n}) = A_{j_1}^1 \dots A_{j_n}^n w^{j_1} \wedge \dots \wedge w^{j_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)}^1 \dots A_{\sigma(n)}^n w^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge w^{\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)}^1 \dots A_{\sigma(n)}^n \operatorname{sgn}(\sigma) w^1 \wedge \dots \wedge w^n = \det A w^1 \wedge \dots \wedge w^n \end{aligned}$$

FUNTORIALITÀ:

$L: V \rightarrow W$ lineare induce $L_*: \mathcal{T}_*(V) \rightarrow \mathcal{T}_*(W)$, $L^*: \mathcal{T}^*(W) \rightarrow \mathcal{T}^*(V)$ entrambi lineari. Inoltre

$$L_*: S_*(V) \rightarrow S_*(W)$$

e

$$L^*: S^*(W) \rightarrow S^*(V)$$

$$L_*: \Lambda_*(V) \rightarrow \Lambda_*(W)$$

$$L^*: \Lambda^*(W) \rightarrow \Lambda^*(V)$$

definiti in modo
duale o quelli visti

In fine

$$\begin{aligned} (L \circ L')_* &= L_* \circ L'_* \\ (L \circ L')^* &= (L')^* \circ L^* \end{aligned}$$

e

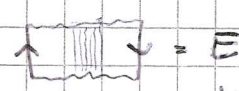

$$\begin{aligned} \operatorname{id}_* &= \operatorname{id} \\ \operatorname{id}^* &= \operatorname{id} \end{aligned}$$

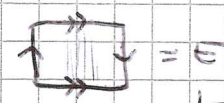

Def F varietà liscia, un fibrato liscio con fibre F è una mappa $\pi: E \rightarrow B$ liscia tra varietà lisce tale che $\forall p \in B \exists U(p)$ e un diffeomorfismo $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

Oss. Nel caso in cui F è discreto è un rivestimento.

Esempio: Date B, F , $E = B \times F$ è fibrato banale

Esempio: Möbius  $= E$ $F = (0, 1) \cong \mathbb{R}$
 $\downarrow \pi$
 $= B = S^1$

Esempio: Klein  $= E$ $F = S^1$
 $\downarrow \pi$
 $= B = S^1$

Def Due fibrati $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$ e $\begin{array}{c} E' \\ \downarrow \pi' \\ B' \end{array}$ sono isomorfi se $\exists F, f$ diffeomorfismi tali che il diagramma seguente commuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Def Un fibrato vettoriale è un fibrato $E \xrightarrow{\pi} B$ in cui ogni fibra $\pi^{-1}(p) =: E_p \cong F$ ha una struttura di spazio vettoriale in modo tale che $\forall p \in B \exists U(p)$ e un diffeo $\varphi: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$ t.c. $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$
 e in più $\varphi|_{E_p}: E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ è isomorfismo di sp. vett. $\forall p \in U$.

Esempio: Fibrato banale: $E = M \times \mathbb{R}^k$

Esempio: Fibrato tangente: $E = \{(p, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in \ell(p)\}$ è fibrato su $B = \mathbb{R}P^n$.
 $\pi: E \rightarrow B$
 $(p, v) \mapsto p$

$\pi^{-1}(p)$ è la retta $\ell(p)$ in $\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ determinata da p .

Non è un fibrato banale.

Def Un morfismo di fibrati ^{vettoriali} \mathcal{F} è un diagramma commutativo

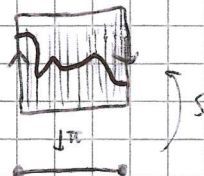
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array} \quad \text{con } F, f \text{ liscie tali che } F|_{E_p}: E_p \rightarrow E'_{f(p)} \text{ sia lineare.}$$

Def Un morfismo è un isomorfismo se è invertibile.

Esercizio Isomorfismo $\Leftrightarrow F$ differenziale

Def $E \xrightarrow{\pi} B$ fibrato. Una sezione è $s: B \rightarrow E$ liscia tale che $\pi \circ s = \text{id}_B$

Esempio Möbius, Klein hanno sezioni.



Esempio Fibrato di Hopf: $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$, $S^3 = \{(w, z) \mid |w|^2 + |z|^2 = 1\}$

$S^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ è detto fibrato di Hopf. Vale che $F = S^1$
 $(w, z) \mapsto [w, z]$ Non ha sezioni.

Dato $[w, z] \in \mathbb{CP}^1$, $\pi^{-1}([w, z]) = \{(e^{i\theta} w, e^{i\theta} z) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cong S^1$

oss. Fibrato \Rightarrow immersione in ogni punto.

oss. Ogni fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ ha almeno una sezione, detta sezione nulla

$$s(p) = 0 \in E_p \quad \forall p \in M.$$

A volte pensiamo ad M dentro E immerso tramite la sezione nulla

$(s: M \hookrightarrow E \text{ embedding})$
 immersione inj. propria

MANIPOLAZIONE DI FIBRATI

Ogni operazione sugli sp. vettoriali si estende ai fibrati.

FIBRATI SULLA STESSA BASE:

$$\begin{array}{ccccc} E & E' & E \oplus E' & E \otimes E' & E^* \\ \pi \downarrow & \downarrow \pi' & \downarrow \pi & \downarrow \pi & \downarrow \pi \\ M & M & M & M & M \end{array}$$

$\forall p \in M \quad (E \oplus E')_p = E_p \oplus E'_p \quad (E \otimes E')_p = E_p \otimes E'_p \quad \forall p \in M \quad (E^*)_p = (E_p)^*$

Definiamo donc strutture di varietà liscia a $E \oplus E'$, $E \otimes E'$, E^* :

$\forall p \in M \exists U(p)$ banalizzante per E e per E' , $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, $\varphi': \pi'^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{k'}$

inducano una mappa bigettiva $\bar{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}$. Usiamo queste per

definire strutture di varietà liscia a $E \oplus E'$, $E \otimes E'$, E^* .

Def Un sottofibrato di $E \xrightarrow{\pi} M$ è sottovarietà liscia $E' \subseteq E$ tale che $E'_p := E_p \cap E'$ è sottospazio vettoriale $\forall p \in M$ e tale che $E' \xrightarrow{\pi|_{E'}} M$ sia fibrato vettoriale.

Esempio: Il fibrato tangente $E \subseteq \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ è sottofibrato del fibrato bundle

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Def Se $E' \subseteq E$ sottofibrato, posso definire il fibrato quoziente E/E' che ha $\forall p \in M \quad (E/E')_p := E_p / E'_p \quad (E/E' = \bigsqcup_{p \in M} E_p / E'_p)$

Def Restrizione: $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato, $N \subseteq M$ sottovarietà. Posso definire il fibrato $E|_N \xrightarrow{\pi} N$ con $E|_N := \pi^{-1}(N)$.

Def Pullback: dato $f: N \rightarrow M$ liscia, $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato, il pullback di E tramite f è $f^*E := \{(p, v) \in N \times E \mid f(p) = \pi(v)\} \xrightarrow{\pi_1} N$

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \pi & \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Proposizione: $f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$ è fibrato.

Dim: • $f^*E \subseteq N \times E$ è sottovarietà liscia:

A meno di lavorare in carte e in aperti banalizzanti, si ha:

$$\begin{array}{ccc} f^*(\mathbb{R}^{m+k}) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$f^*(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \mid f(x) = y\}$$

è il grafico di una funzione, quindi è varietà liscia.

• È localmente bundle: dal diagramma sopra, localmente

$$f^*(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k) = \text{Grf}(f) \times \mathbb{R}^k$$

Osserviamo che $(f^*E)_p = E_{f(p)}$.

Operazioni su fibrati vettoriali:

- $E \oplus E'$, $E \otimes E'$, E^* , $T_h^k(E)$
- Sottofibrato: $E' \subseteq E$ (con $E'_p \subseteq E_p$ s.v.)
- Quoziente: E/E' (con $E'_p \subseteq E_p$ s.v.)
- Restrizione: $N \subseteq M$ sottovarietà $E|_N \xrightarrow{\pi} N$
- Pullback: $f: N \rightarrow M$ liscia, f^*E

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi} & E \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

FIBRATO TANGENTE

Def M varietà liscia. Il fibrato tangente su M è il fibrato

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad TM \xrightarrow{\pi} M$$

$$T_p M \ni v \mapsto p$$

Atlante per M . Per ogni carta $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ dell'atlante ottergo

$$\varphi_*: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n.$$

$$A_* = \{ \varphi_* \}_{\varphi \in \mathcal{A}}$$

$(p, v) \mapsto (\varphi(p), d\varphi_p(v))$

$\begin{matrix} p \in U \\ v \in T_p M \end{matrix}$

Inoltre φ_* fornisce una locale trivializzazione.

Oss.

~~Oss.~~ $f: M \rightarrow N$ liscia induce un morfismo di fibrati

$$TM \xrightarrow{f_*} TN \quad \text{dove } f_*(p, v) = (f(p), df_p(v))$$

$$\begin{array}{ccc} \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Oss. È tutto functoriale ($\text{id}_* = \text{id}$ e $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$).

Quindi $M \xrightarrow{f} N$ differenziale $\Rightarrow TM \xrightarrow{f_*} TN$ isomorfismo

FIBRATO COTANGENTE

Def Il fibrato cotangente di M è T^*M (il duale di TM).

$$\forall p \in M \quad (T^*M)_p = (T_p M)^*.$$

Oss. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ liscia induce una sezione df di T^*M .

$$\forall p \in M \quad df_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \text{ cioè } df_p \in (T_p M)^*.$$

Esempio: Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $TU = U \times \mathbb{R}^n$

Def M varietà liscia. $\forall h, k \geq 0$ il fibrato tensoriale di tipo h, k è

$$\tau_h^k(M) = \tau_h^k(TM) = \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{h \text{ volte}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{k \text{ volte}}$$

Def $N \subseteq M$ sottovarietà, $TM|_N \supseteq TN$ (essendo $\forall p \in N$ $T_p N \subseteq T_p M$ s.v.). Il fibrato

normale di N è

$$\nu N = TM|_N / TN$$

(ha rango $m-n$)

$$(\dim \nu N = m + m - n = m) \\ = \dim M$$

Esempio: $M^m \subseteq \mathbb{R}^m$.

$$TM \subseteq M \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^m \mid v \in T_p M\} \text{ e poiché } M \subseteq \mathbb{R}^m, T_p M \subseteq \mathbb{R}^m = T_p \mathbb{R}^m$$

$$\nu_p M = T_p \mathbb{R}^m / T_p M \cong T_p M^\perp$$

$$\nu M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^m \mid v \in T_p M^\perp\}$$

Esempio:

$$TS^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}, TS^m = \{(x, v) \mid \|x\|=1, \langle x, v \rangle = 0\} \text{ Spesso non è bundle}$$

$$\nu S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}, \nu S^m = \{(x, v) \mid \|x\|=1, v = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ è bundle (Esercizio)}$$

$$S^m \times \mathbb{R} \cong \nu S^m$$

$$(x, \lambda) \mapsto (x, \lambda x)$$

$$\text{oss. } M \subseteq \mathbb{R}^m. \forall p \in M \quad T_p M \oplus T_p M^\perp = \mathbb{R}^m$$

$$TM \oplus \nu M = M \times \mathbb{R}^m$$

$$\text{Esempio: } TS^m \oplus \nu S^m = S^m \times \mathbb{R}^{m+1}$$

↑
può non essere bundle bundle bundle

SEZIONI

$$\begin{array}{c} \in \\ \pi \downarrow \\ M \end{array} \begin{array}{c} \nearrow s \\ \nearrow s \end{array}$$

$s: M \rightarrow E$ è sezione se $\pi \circ s = \text{id}_M$.

$S_0: M \hookrightarrow E$ tale che $S_0(p) = 0 \forall p \in M$ è detta sezione nulla. \hookrightarrow embedding, (localmente s è grafico di una funzione $U \rightarrow \mathbb{R}^n$)

Def $S \subseteq M$ sottoscuema, $E \rightarrow M$ fibrato. Una sezione parziale definita su S è $s: S \rightarrow E$ liscia.

Proposizione: Ogni sezione parziale su un chiuso si estende a sezione globale.

om: Come nel caso di $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S \subseteq M$ chiuso.

Def $E \rightarrow M$ fibrato. $\Gamma(E) = \{s: M \rightarrow E \text{ sezione}\}$ è sp. vett. e anche un $C^\infty(M)$ -mod.

$$s \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M) \mapsto f \cdot s \in \Gamma(E)$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p)$$

Si possono fare somme, prodotti di sezioni
 $s \in \Gamma(E), s' \in \Gamma(E') \Rightarrow s \otimes s' \in \Gamma(E \otimes E')$
 $s \otimes s' \in \Gamma(E \otimes E')$

$s \in \Gamma(\mathcal{T}_h^k(E)) \xrightarrow[\substack{\text{scatti} \\ a, b}]{h, k \geq 1} s' = C(s) \in \Gamma(\mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(E))$ contrazione di indici.

Def $E \rightarrow M$ fibrato di rango k . Un frame è un insieme ordinato s_1, \dots, s_k di sezioni tali che $s_i(p), \dots, s_k(p)$ sia base di $E_p \forall p \in M$.

Def Una sezione di TM si chiama campo vettoriale.

Def Una sezione di $\mathcal{T}_h^k M$ si chiama campo tensoriale.

TEOREMA: Se $M = \mathbb{R}^m, S^m$ non ha campi vettoriali tangenti mai nullo.
 Quindi in particolare non ha frames.

PROPOSIZIONE: $E \rightarrow M$ è bundle $\Leftrightarrow \exists$ frame.

DIM: $\textcircled{=}$ $M \times \mathbb{R}^k$
 \downarrow
 M
 $\textcircled{=}$ $M \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{F} E$ Definisco $s_i(p) = e_i \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$
 con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$
 $(p, x) \mapsto (p, x_1 s_1(p) + \dots + x_k s_k(p))$

Def M è parallelizzabile se TM è bundle.

COROLLARIO: S^{2n} non è parallelizzabile $\forall n$.

Esercizio: S^1, S^3 sono parallelizzabili

METRICA RIEMANNIANA

Def $E \rightarrow M$ fibrato di rango k . Una metrica riemanniana su E è una sezione $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ tale che $\forall p \in M \quad g(p) \in E_p^* \otimes E_p^* = \text{Bil}(E_p)$ sia simmetrico e definito positivo

PROPOSIZIONE: Esiste sempre una metrica riemanniana.

DIM: Sia $\{U_i\}$ ricoprimento di M di aperti banalizzanti per π

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow[\cong]{\varphi_i} U_i \times \mathbb{R}^k$$

$$\pi \searrow \quad \swarrow \pi_i \\ U_i$$

Definiamo $\forall p \in U_i$:

$g_i(p) =$ prodotto euclideo g_E su \mathbb{R}^k trasportato tramite φ_i

$$\forall v, w \in E_p \quad g_i(p)(v, w) = g_E(\varphi_i(v), \varphi_i(w))$$

\nearrow dentro \mathbb{R}^k

Sia $\{p_i\}$ partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}$

Pongo $g(p) = \sum p_i(p) g_i(p)$

$$g(p) \in E_p^* \otimes E_p^* = \text{Bil}(E_p)$$

È comb. lin. di prodotti scalari definiti positivi con coefficienti positivi:
 $\Rightarrow g(p)$ è def. pos. (e simmetrico)

Def Una varietà riemanniana è una coppia (M, g) con M liscia, g è metrica riemanniana su TM .

Oss. Se $N^m \subseteq M^m$, $\downarrow N = TM|_N / T_N$. Sia g metrica riemanniana su TM .

Possiamo costruire l'ortogonale e identificare, come in \mathbb{R}^n , $\downarrow N$.

In generale: $E \supseteq E'$ sottofibrato. Sia g metrica su E , possiamo definire

Def $(E')^\perp$ fibrato ortogonale. $\forall p \in M \quad (E')_p^\perp = (E'_p)^\perp$

Notiamo che $(E')^\perp \cong E/E'$, poiché $(E'_p)^\perp \cong E_p/E'_p$.

Proposizione: $E \cong E^*$ isomorfi.

Dim: Sia g metrica riemanniana su E .

$$\forall p \in M \quad E_p \xrightarrow{\cong} E_p^* \\ v \mapsto (w \mapsto g_p(v, w))$$

Corollario: $TM \cong T^*M$.

Def $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato con metrica g . Un frame s_1, \dots, s_k è ortogonale se $\{s_i(p), \dots, s_k(p)\}$ base ortogonale di $(E_p, g(p))$.

Proposizione: \exists frame ortogonale $\Leftrightarrow \pi$ è bundle.

Dim: ① già visto

② Preso un frame, lo ortogonalizziamo usando Gram-Schmidt

ISTGEO. LEZIONE 13

OSS. Se $f: M \rightarrow N$ differ, X campo vettoriale su M induce un campo Y su N (vale per qualsiasi campo tensoriale)

$$\forall p \in M \quad Y(f(p)) = df_p(X(p))$$

Se f non è differ, i campi non si spostano né in avanti né all'indietro.

Dato certo $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ possiamo trasportare un campo X su U ad un campo X su V . Come scriverlo?

$$X = X^i e_i \quad \text{dove} \quad e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$$

Se prendiamo un'altra carta, con base di \mathbb{R}^m \bar{x}_i ,

$$\text{si ha} \quad X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$$

$\{\bar{x}_i\}$ e $\{x_i\}$ differiscono per cambio di base:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Le coordinate cambiano tramite

$$\bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} X^j$$

Def X campo su M . Una linea integrale è una curva $\gamma: I \rightarrow M$ tale che $\forall t \in I \quad \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad (\gamma'(t) = d\gamma_t(1))$

Def Una linea integrale γ è massimale se $\nexists \gamma_2: I_2 \rightarrow M$ linea integrale con $I_2 \supset I$ e $\gamma_2|_I = \gamma$.

PROPOSIZIONE: X campo su M . $\forall p \in M \exists!$ curve integrale massimale

$$\gamma_p: I_p \rightarrow M, \quad 0 \in I, \quad \gamma(0) = p.$$

DIM: In carta $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, $\gamma: I \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \text{ è problema di Cauchy.}$$

$\Rightarrow \exists!$ soluzione (e meno di estendere il dominio)

Da qui si passa al globale.

TEOREMA: X campo su M . $\exists!$ $U \subseteq M \times \mathbb{R}$ intorno aperto di $M \times \{0\}$ ed $\exists!$ $\Phi: U \rightarrow M$ tali che $\forall p \in M \quad U \cap (\{p\} \times \mathbb{R}) = I_p$ e

DIM: $U := \bigcup_{p \in M} I_p$. $\Phi := \bigcup_{p \in M} \gamma_p$ Quindi esistono e sono unici.

Dobbiamo dimostrare che U è aperto e Φ liscio.

Tutto funziona per la dipendenza liscia dai dati iniziali dei problemi di Cauchy.

Def. Φ è detto flusso associato a X .

Def. X è completo se $U = M \times \mathbb{R}$. Si può definire allora $\Phi_t: M \rightarrow M$
 $p \mapsto \Phi(p, t)$

Esempio: $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ in \mathbb{R}^n . $\Phi(x, t) = x + t e_1$ è completo.

Se $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, lo stesso campo non è completo.

PROPOSIZIONE:

Se X è completo, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Phi_t: M \rightarrow M$ è diffeo,

$$\Phi_0 = \text{id}, \quad \Phi_{t+u} = \Phi_t \circ \Phi_u, \quad \Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$$

DIM: Per unicità della curva integrale vale $\forall p \in M$

$$\Phi(\Phi(p, t), u) = \Phi(p, t+u) \quad (I_p = I_{\Phi(p, t)} + t)$$

Da questo si dimostra che è diffeo

$$(\Phi_0 = \text{id} = \Phi_{t-t} = \Phi_t \circ \Phi_{-t}).$$

oss. $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ è omom. di gruppi.
 $t \mapsto \Phi_t$

LEMMA: X campo su M . Se $\varepsilon > 0$ t.c. $U \supseteq M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ allora X è compl.

DIM: "Se ad ogni istante della tua vita hai altri e secondi da vivere, non muori mai"

COROLLARIO: Se M cpt allora ogni X è completo.

DIM: U è intorno di $M \times \{0\}$ che è cpt.

Esempio: S^{2n-1} $X(x) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1}) \in T_x S^{2n-1}$
 $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in S^{2n-1}$

$$\Phi(x, t) = (x_1 \cos t + x_2 \sin t, -x_1 \sin t + x_2 \cos t, \dots, x_{2n-1} \cos t + x_{2n} \sin t, -x_{2n-1} \sin t + x_{2n} \cos t)$$

Def M varietà. Una isotopia ambiente di M è una isotopia $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tra l'identità e una certa $\varphi: M \rightarrow M$ che sia diffeomorfismo $\forall t \in \mathbb{R}$.

Def $f, g: N \hookrightarrow M$ embedding sono collegati da una isotopia ambiente se $\exists F$ isotopia ambiente di M t.c. $g(p) = F(f(p), 1) \quad \forall p \in N$.

oss. isotopia ambiente \Rightarrow isotopia.

$$G: N \times \mathbb{R} \rightarrow M \quad \text{con} \quad G(p, t) = F(f(p), t) = F_t(f(p))$$

(è isotopia tra f, g)

TEOREMA: N cpt. $f, g: N \hookrightarrow M$ embedding isotop. Allora sono collegati da isotopia ambiente.

DIM: Sia $F: N \times \mathbb{R} \rightarrow M$ isotopia tra f e g .

$$\text{Definisco } G: N \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R} \\ (p, t) \mapsto (F(p, t), t)$$

Consideriamo su $N \times \mathbb{R}$ il campo vettoriale verticale

$$[...] \quad X = \frac{\partial}{\partial t} \quad (t \text{ generatore di } \mathbb{R} \text{ di } T_p(N \times \mathbb{R}) = T_p N \times \mathbb{R})$$

LEMMA: $h: P \hookrightarrow Q$ embedding, X campo su P induce campo parziale Y su $h(P)$.

$$\text{DIM: } Y(h(p)) = dh_p(X(p))$$

[...] Preso $(p, t) \in N \times \mathbb{R}$

$$dG_{(p,t)} = \begin{pmatrix} dF_{(p,t)} & 0 \\ \hline & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ha rango massimo (iniettivo)}$$

$\Rightarrow G$ è immersione iniettiva propria $\Rightarrow G$ embedding

Prendo un cpt in $M \times \mathbb{R}$. È contenuto in $M \times [-N, N]$
 $G^{-1}(\text{cpt}) \in N \times [-N, N]$ che è cpt. \Rightarrow cpt in cpt è cpt.

Porto il campo X su Y su $G(N \times \mathbb{R})$ e lo estendo ad un campo su tutto $M \times \mathbb{R}$ in modo che sia nullo fuori da $B \supseteq B = G(N \times [0, 1])$ interno nel cpt.

Infine cambio Y in modo che la t -coordinata sia sempre 1 (ovunque in $M \times \mathbb{R}$)

Vediamo che Y è completo:

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall (q,t) \in M \times \mathbb{R} \quad I_{(q,t)} \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Infatti, in \bar{U} un certo $\varepsilon > 0$ esiste per compattezza

Fuori da U tutto funziona bene grazie alla t -coordinata verticale (le linee integrali esistono sempre)

Quindi $\exists \Phi_t: M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$

$$(q, u) \mapsto (H_t(q, u), u+t)$$

La componente orizzontale $H_t: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ è l'isotopia ambiente cercata
 $(q, t) \mapsto H_t(q, 0)$

• $H_0(q) = H_0(q, 0) = q$ perché $\Phi_0 = \text{id}$

• H_t è diffeo perché Φ_t è diffeo

• $H_t(f(p)) = g(p)$ perché il campo vettoriale in arrivo è trasportato di quello in partenza

COROLLARIO: $f, g: N \hookrightarrow M$ embedding isotopi, N cpt $\Rightarrow M \setminus f(N) \stackrel{\text{diffeo}}{\cong} M \setminus g(N)$



DIM:

$$F_1: M \rightarrow M \text{ diffeo} \Rightarrow F_1: M \setminus f(N) \rightarrow M \setminus g(N) \text{ diffeo}$$

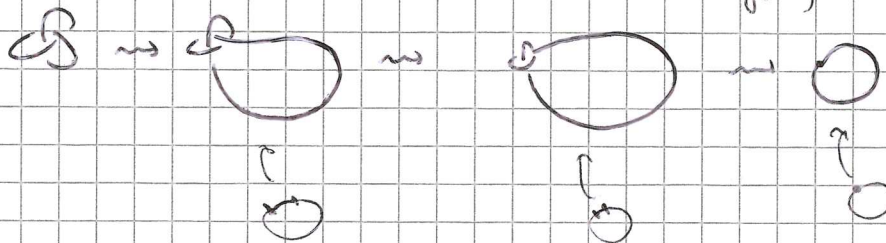
$f(N) \mapsto g(N)$

Def Un nodo in S^3 o \mathbb{R}^3 è un embedding $S^1 \hookrightarrow S^3$ o \mathbb{R}^3 .

Oss. Due nodi sono isotopi \Leftrightarrow ambientalmente isotopi.

Esempio:  non è isotopo a  perché i complementari hanno π_1 diversi (non sono omeomorfi).

Esiste però isotopia continua (embedding topologic: mappa inj cont. omeo con l'immagine)



(quindi togliendo l'essere liscio si perde anche proprietà topologiche, il condorcio sopra non vale: embedding isotopi continui $\nRightarrow M \setminus f(N) \stackrel{\text{diffeo}}{\cong} M \setminus g(N)$)

COROLLARIO: M connessa $\Rightarrow M$ omogenea, cioè $\forall p, q \in M \quad \exists \varphi: M \rightarrow M$ isotopo a id
 $p \mapsto q$

DIM: M connessa $\Rightarrow \exists \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ liscia t.c. $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$ (Esercizio)

α è isotopia tra $f: N \rightarrow M$ e $g: N \rightarrow M$ con $N = \{pt\}$.
 $\{pt\} \mapsto p \quad \{pt\} \mapsto q$

N cpt $\Rightarrow \exists$ isotopia ambiente ~~per il~~ Allora $\varphi = F_1$.

Def L'insieme dei campi vettoriali è $\mathcal{X}(M) := \Gamma(TM)$.

PROPOSIZIONE: $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ tale che $X(p) \neq 0$

Allora \exists carta intorno a p tale che $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Dim:

Costruiamo in carte, quindi in \mathbb{R}^n e $p=0$.

Possiamo (e meno di notazioni) supporre $X(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

$\exists \varepsilon > 0$, $\exists U(0)$ tale che il flusso $F_t(X)$ è definito

$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall x \in U$.

Definiamo in $U \cap \{x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = F_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$$

Valle che

$$\psi(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$$

$\gamma(t) = \psi(t, 0, \dots, 0)$ è la linea integrale passante per $X(0)$

$$\Rightarrow \gamma'(0) = X(0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Rightarrow d\psi_0 = \text{id} \text{ e quindi } \psi \text{ è invertibile}$$

$\Rightarrow \psi$ diffeomorfismo locale in 0.

ψ per costruzione manda il campo vettoriale orizzontale in X , quindi la sua inversa (locale) è la carta cercata.

PARENTESI DI LIE

Se $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Possiamo considerare allora

$$fX \in \mathcal{X}(M) \quad fX(p) = f(p)X(p)$$

$$Xf \in C^\infty(M) \quad (Xf)(p) = X(p)(f) \quad \leftarrow \text{è derivazione}$$

Sono cose perché in carte, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, si ha $fX = f X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$
e $Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Def $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Si definisce il prodotto di Lie

$$[X, Y] = XY - YX : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U) \quad \forall U \subseteq M$$

$$f \mapsto XY(f) - YX(f)$$

PROPOSIZIONE: $[X, Y]$ è campo vettoriale

Dim: $\forall p \in M \quad \Gamma(XY)(p)(f) = XY(p)(f) - YX(p)(f)$ mostro che è

una derivazione.

lineare, località OK.

Leibnitz:

$$XY(fg) = X(gYf) + f(Yg) = (Xg)(Yf) + gXYf + (Xf)(Yg) + fXYg$$

$$YX(fg) = \dots = (Yg)(Xf) + gYXf + (Yf)(Xg) + fYXg$$

$$\begin{aligned} [X, Y](f)g &= g(XY - YX)f + f(XY - YX)g = \\ &= g[X, Y](f) + f[X, Y](g) \quad \text{OK.} \end{aligned}$$

oss. $f: M \xrightarrow{\cong} N$ La definizione del bracket è naturale e intrinseca
$$\begin{aligned} x &\mapsto x' \\ Y &\mapsto Y' \\ [X, Y] &\mapsto [X', Y'] \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE: In carte

$$[X, Y] = X^i \frac{\partial Y}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X}{\partial x_i}$$

$$(\text{in componenti } [X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j})$$

Dim: $f \in C^\infty(U)$

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X^i \frac{\partial}{\partial x_i} (Y^j \frac{\partial f}{\partial x_j}) - Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} (X^j \frac{\partial f}{\partial x_j}) = \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \cancel{X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \cancel{Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}} = \\ &= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (*) \end{aligned}$$

COROLLARIO: $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, allora $[X, Y] = \frac{\partial Y}{\partial x_1}$

PROPOSIZIONE: $[X, Y] = -[Y, X]$

COROLLARIO: $X = \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \frac{\partial}{\partial x_j} \Rightarrow [X, Y] = 0$

Def Un'algebra di Lie è un \mathbb{R} -sp. vett. A con un'operazione

$A \times A \rightarrow A$ tale che sia bilineare, antisimmetrica e per cui
 $(a, b) \mapsto [a, b]$

valga l'identità di Jacobi. (non è associativa)

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

Esercizio: $\mathcal{X}(M)$ è algebra di Lie.

Esercizio: $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$ $M = \mathbb{R}^n$

$$X(x) = Ax$$

$$Y(x) = Bx$$

$$\Rightarrow [X, Y](x) = (AB - BA)(x) \\ [A, B]$$

LEMMA: X, Y campi su M con flussi associati F e G .

$\forall p \in M$, in corte

$$-F_s \circ G_t(p) + G_t \circ F_s(p) = st[X, Y](p) + o(s^2 + t^2) \quad (\text{quando ha senso})$$

Dim:

Definiamo $\gamma(s, t) = G_t \circ F_s(p) - F_s \circ G_t(p)$ (costante sulle rette $x=0$ e $y=0$)

Sviluppando con Taylor si ha che al primo ordine fa zero e le derivate seconde pure fanno zero

Def $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ con flussi F, G .

X e Y commutano se $[X, Y] = 0$.

F e G commutano se $F_s \circ G_t(p) = G_t \circ F_s(p)$ dovunque ha senso.

PROPOSIZIONE:

X e Y commutano $\Leftrightarrow F$ e G commutano

Dim: Dal lemma \Leftrightarrow ovvio.

$\Rightarrow \forall p \in M$, se $X(p) = Y(p) = 0$ è banale (i flussi lasciano tutto fermo)

Altrimenti wlog $X(p) \neq 0$. (localmente siamo in corte)

Per un lemma precedente possiamo supporre

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{Allora} \quad 0 = [X, Y] = \frac{\partial Y}{\partial x_1}$$

$$F_s(x) = x + se_1$$

$$\Rightarrow G_t \circ F_s(x) = G_t(x + se_1)$$

$$F_s \circ G_t(x) = G_t(x) + se_1$$

sono uguali perché

(Questo vale per tempi piccoli, ma se commutano localmente commutano sempre)

PROPOSIZIONE: $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ e sia $p \in M$ tale che $X_1(p), \dots, X_k(p)$ indep.

\exists corte in p che trasforma le X_i in $\frac{\partial}{\partial x_i} \Leftrightarrow [X_i, X_j] = 0 \quad \forall i, j$ in un intorno di p .

Diri: \Rightarrow Per trasporto tramite differenziali

\Leftarrow In carte (\mathbb{R}^n) , $p=0$, $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ (a meno di transf. lineari)

Pongo F_i^j il flusso di X_i e definisco

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = F_{x_1}^1 \circ \dots \circ F_{x_n}^n(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_n)$$

$d\Phi_0 = \text{id}$ (cerco come prima, si usa che i flussi commutano)
è dimostrato che $\forall i \leq n \quad \gamma(t) = \Phi(x + te_i)$ è linea integrale di X_i

• Se G è gruppo di Lie, $\mathfrak{g} = T_e G$ ha struttura di algebra di Lie.

Def $X \in \mathfrak{X}(G)$ è invariante a sx se è invariante per $L_g \quad \forall g \in G$, cioè
 $(dL_g)_h(X(h)) = X(gh)$. In particolare $(dL_g)_e(X(e)) = X(g)$.

oss. le moltiplicazioni, fissato $h \in G$, $L_h: G \rightarrow G$ e $R_h: G \rightarrow G$ sono
 $x \mapsto hx$ e $x \mapsto xh$
diffeomorfismi.

$R_{g^{-1}} \circ L_g$ è un isomorfismo di gruppi e differenziale (è il coniugio)

oss. Se $\forall g \in G \quad (dL_g)_e(X(e)) = X(g)$ allora $\forall g, h \in G \quad (dL_g)_h(X(h)) = X(gh)$

Questo vale perché $L_g = L_{gh} \circ L_{h^{-1}}$

Corollario: Esiste in modo naturale

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longleftrightarrow \{\text{campi invarianti a sinistra}\} \subseteq \mathfrak{X}(G) \\ &\parallel \\ &T_e G \\ v &\longmapsto X(g) = (dL_g)_e(v) \\ X(e) &\longleftrightarrow X \end{aligned}$$

oss. X, Y invarianti a sx $\Rightarrow [X, Y]$ invariante a sx.

Quindi \mathfrak{g} è algebra di Lie di $\mathfrak{X}(G)$.

Esempio: • $(\mathbb{R}^n, +)$ $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ $[,]$ banale (nullo) (è commutativa)

• $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ è aperto di $M(n, n, \mathbb{R})$. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, n, \mathbb{R})$ con
bracket $[A, B] = AB - BA$

Def Data varietà M , se $\Gamma T_h^k(M)$ un campo tensoriale e $X \in \mathfrak{X}(M)$, si definisce derivata di Lie

$L_X s \in \Gamma T_h^k(M)$ definite come

$$(L_X s)(p) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (dF_t(s(F_t(p)))) \quad \text{dove } F_t \text{ è il flusso associato a } X.$$

- Esempio:
- $L_X f = Xf \leftarrow$ dipende da f in un intorno di p e da $X(p)$.
 - $L_X Y = [X, Y]$
 - $L_X (s \otimes T) = (L_X s) \otimes T + s \otimes (L_X T)$
- } in generale dipende in modo locale da X e non solo da $X(p)$

FOLIAZIONE

Def 1 Una k -foliazione su M^n è una partizione $\mathcal{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ di M in k -sottovarietà ^{dette foglie} iniettivamente immerse (cioè l'immagine di immersioni iniettive), con $k < n$, tale che: $\forall p \in M \exists$ carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $p \in U$ tale che per ogni $i \in I$ l'immagine $\varphi(\lambda_i \cap U)$ è unione di k -sottospazi affini orizzontali in \mathbb{R}^n .

Oss Può capitare che λ_i sia densa in M , ma $\varphi(\lambda_i \cap U)$ consiste in quantità numerabile di sottospazi affini.

Questo perché λ_i è a base numerabile (non può avere più di numerabili ^{aperti disgiunti} componenti).

($\lambda_i = \text{Im}(S \xrightarrow{f} M)$, $f^{-1}(U)$ è aperto di S con numerabili componenti connesse)

Def Una carta fatta come sopra si dice compatibile con \mathcal{F} .

Esempio:

- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ $\mathcal{F} = \{k\text{-piani orizzontali}\} \leftarrow$ foglie embedded
- $E \rightarrow B$ fibrato $\mathcal{F} = \{E_p\}_{p \in B}$

- $M = S^1 \times S^1$, $\alpha_t^S: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ (t è coefficiente angolare, s traslazione)

$\mathcal{F} = \{\alpha_t^S\}_{t \in \mathbb{R}} \leftarrow$ è foliazione sul toro. (Esercizio)

Inoltre: se $t \in \mathbb{Q}$, le foglie sono compatte, se $t \notin \mathbb{Q}$ le foglie non sono compatte e ciascuna foglia è densa.

Oss Le foglie in \mathcal{F} sono sempre più che numerabili.

Def 2 Una k -foliazione su M è un atlante $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ compatibile con la struttura di M tale che φ_{ij} sono localmente del tipo

$$\varphi_{ij}(x, y) = (\varphi_{ij}^1(x, y), \varphi_{ij}^2(y))$$

$\underbrace{\quad}_{\substack{\text{non dipendente da } x \\ \text{non dipendente da } y}}$

Proposizione: le 2 definizioni sono equivalenti.

DM: ① \Leftrightarrow ② $\mathcal{F} = \{\varphi_i \text{ compatibili con } \mathcal{F}\}$

φ_{ij} manda localmente k -piani affini in k -piani affini.

② \Rightarrow ① Grazie alle ipotesi si possono incollare le controimmagini dei k -piani affini lungo tutto M .

Per costruire la varietà S da immergere in M si considera l'unione degli \mathbb{R}^k quotientato per le mappe di transizione (su $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ mettiamo la top. prodotto euclideo \times discreta)

DISTRIBUZIONI

Def Una k -distribuzione su M un k -sottofascio $D \subseteq TM$.

Anche D definisce un k -sottospazio $D_p \subseteq T_p M \quad \forall p \in M$

Esempio: Se \mathcal{F} è foliazione su M , i k -piani tangenti alle foglie formano una distribuzione.

Def D distribuzione è integrabile se è la distribuzione tangente ad una qualche foliazione.

Def D è involutiva se $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tangenti a D , anche $[X, Y]$ è tangente a D .

Def $X \in \mathcal{X}(M)$ è tangente ad una distribuzione D se $\forall p \in M \quad X(p) \in D_p$

Proposizione: D distribuzione è integrabile \Leftrightarrow è localmente costante, ovvero $\forall p \in M \exists \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, U \ni p, \varphi$ certa che trasporta $D|_U$ nella distribuzione costante $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$
(cioè \mathbb{R}^n tangente)

DM: ① L'insieme delle curve delle ipotesi danno foliazione (def 2)

② Usando la def 1 con le φ compatibili per \mathcal{F} .

TEOREMA (DI FROBENIUS):

D integrabile $\Leftrightarrow D$ involutiva.

DIM: \Rightarrow D integrabile, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tangenti a D

Vogliamo dimostrare $[X, Y]$ tangente a D .

È un fatto locale $\Rightarrow M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

$D =$ costante orizzontale

$$X = \sum_{i=1}^k X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{i=1}^k Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\text{Vale che } [X, Y]^j = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}$$

$$\text{quindi } [X, Y]^j = 0 \text{ per } j > k$$

$\Rightarrow D$ è involutiva.

\Leftarrow D involutiva. $\forall p \in M$ vogliamo costruire carta $\varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ che porta D_p nella distribuz. orizzontale.

Prendiamo φ tale che $\varphi(0) = 0$ e « porta D_0 in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ »
(Identifichiamo D_p con il traslato su $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k}$)

In un intorno di zero, $D_p \oplus W = \mathbb{R}^n$, con $W = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$

Quindi esiste un frame X_1, \dots, X_k per D tale che

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^n x_{ij}^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

per $1 \leq i \leq k$ $[X_i, X_j]$ devono essere tangenti: dunque

$$\left. \begin{aligned} [X_i, X_j]^e &= 0 \\ \text{Ma } [X_i, X_j] &\in D_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow [X_i, X_j] = 0$$

$\forall p$ intorno l'origine
coincidente,

Per il lemma di qualche giorno fa

$\exists \varphi$ carta che manda X_1, \dots, X_k in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$

φ manda dunque D_p in k -piani orizzontali $\forall p$.

Esempio: $M = \mathbb{R}^3$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$. $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z}$

Quindi $D_p = \text{Span}(X_1(p), X_2(p))$ non è integrabile

COROLLARIO: Se $k=1$, le distribuzioni sono sempre integrabili.

DIM: Segue tutto dalla formula $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$

(Esercizio)

Def Un sottogruppo di Lie è una sottovarietà iniettivamente immersa che sia anche sottogruppo.

oss. Può non essere embedded (e quindi sottovarietà).

Esempio:

• $O(m, \mathbb{R}) \subseteq GL(m, \mathbb{R})$

• $\text{Aff}(\mathbb{R}^m) = \{F(x) = Ax + b \mid A \in GL(m, \mathbb{R})\} \subseteq GL(m+1, \mathbb{R})$

$\text{Aff}(\mathbb{R}^m) = GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$

diffeomorfo anche a $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$

• $\text{Heis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(3, \mathbb{R})$

è sottogruppo non abeliano diffeomorfo a \mathbb{R}^3
(ma è nilpotente)

Sono tutte embedded

Def Un morfismo di gruppi di Lie (omomorfismo) è un $f: G \rightarrow H$ liscio e omomorfismo di gruppi.

Esempio: $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ con λ fissato è omomorfismo di gruppi di Lie.
 $t \mapsto (e^{2\pi i \lambda t}, e^{2\pi i t})$

$\text{Im } f_\lambda \subseteq S^1 \times S^1$ è sottogruppo (f_λ è immersione, iniettiva se $\lambda \notin \mathbb{Q}$, non iniettiva se $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ha considerato S^1 invece di \mathbb{R} come dominio tutto si risolve)
ma non è embedded se $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Def $G^\circ :=$ la componente connessa di G che contiene $e \in G$.

Proposizione: $G^\circ \triangleleft G$

Dim: Consideriamo (fissato $g \in G$) $L_g: G \rightarrow G$ diffeo.

Permute le comp. connesse di G .

Se $g \in G^\circ$, $L_g(G^\circ) = G^\circ$ (perché $L_g(e) = g \in G^\circ$)

$\Rightarrow \forall g, h \in G^\circ$ $gh \in G^\circ$ (G° è chiuso per prodotto).

Analogamente $i: G \rightarrow G$ diffeo, $i(e) = e \Rightarrow i(G^\circ) = G^\circ$
 $g \mapsto g^{-1}$
 $\Rightarrow G^\circ \triangleleft G$.

Per dire che è normale considero $g \in G$ e $R_{g^{-1}} \circ L_g: G \rightarrow G$
difeo, $(R_{g^{-1}} \circ L_g)(e) = e \Rightarrow (R_{g^{-1}} \circ L_g)(G^\circ) = G^\circ$
 $h \mapsto ghg^{-1}$

$\Rightarrow \forall g \in G, \forall h \in G^\circ$ $ghg^{-1} \in G^\circ$.

oss. G/G° è in modo naturale un gruppo di Lie discreto (di dim 0).

PROPOSIZIONE:

G gruppo di Lie $\Rightarrow G$ parallelizzabile.

Dim:

$X_1(e), \dots, X_n(e)$ base di $T_e G = \mathfrak{g}$

Li estendo a campi moltiplicando a sinistra

$\Rightarrow X_1(p), \dots, X_n(p)$ è frame.

$$X_i(p) = d(L_g)_e(X_i(e)) \quad (d(L_g)_e \text{ manda basi in basi})$$

PROPOSIZIONE:

M parallelizzabile $\Rightarrow M$ orientabile.

Dim: Per ip. esiste frame globale X_1, \dots, X_n

Su $T_p M$ prende l'orientazione di $X_1(p), \dots, X_n(p)$.

(è chiaramente localmente coerente).

COROLLARIO:

G di Lie \Rightarrow orientabile.

COROLLARIO: S^{2n} non è gruppo di Lie. (per nessun n)

Esempio: S^1 gruppo di Lie ($S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}$)

S^3 gruppo di Lie ($S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\|=1\}$ oppure $S^3 \cong \text{SU}(2)$)

$\Rightarrow S^3$ è parallelizzabile

Def $f: M \rightarrow N$ liscia, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ sono f -correlati se $\forall p \in M$
 $Y(f(p)) = df_p(X(p))$

Esercizio: $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ correlati a $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ (con $f: M \rightarrow N$).

Allora $[X_1, X_2]$ è f -correlato a $[Y_1, Y_2]$.

(Si dimostra nel locale...)

PROPOSIZIONE: $f: G \rightarrow H$ omom. di gruppi di Lie, $f_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ la mappa indotta sulle algebre di Lie ($f_* = df_e: T_e G \rightarrow T_e H$).

f_* è omomorfismo di algebre di Lie.

Dim: f_* è lineare. C'è solo da mostrare che commuta con il bracket. Ma questo è esattamente l'esercizio precedente:

$\forall g \in G \quad f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ (è auto di gruppi), quindi dato $X \in \mathfrak{g}$

$f_*(X)_{f(g)} = df_g(X(g))$. Dunque X e $f_*(X)$ sono f -correlati

Per l'esercizio $[X, Y]$ e $[f_*(X), f_*(Y)]$ sono f -correlati

$$\Rightarrow f_*([X, Y]) = [f_*(X), f_*(Y)]$$

COROLLARIO: $H < G$ sgr. di L_G , allora R è sottalgebra di \mathfrak{g} .

TEOREMA: G gruppo di L_G . $\forall R$ sottalgebra di $\mathfrak{g} \exists! H < G$ connesso
con $T_e H = R$.

Dim: $R < \mathfrak{g} = T_e G$ è sottospazio vettoriale.

Portandola ovunque con la moltiplicazione si ottiene una distribuzione

$$D(g) = (dL_g)_e(R) \quad \text{con } D(e) = R.$$

R sottalgebra, dico dove che D è involutiva.

Prendo $X_1(e), \dots, X_k(e)$ base di R e la porto in giro

$$\text{con } X_i(g) = (dL_g)_e(X_i(e)).$$

$[X_i, X_j]$ è ancora tangente a D (perché $[X_i, X_j](e) \in R$)

Questo dice che se X, Y tangenti a $D \Rightarrow [X, Y]$ tangente a D .

Tutto deriva dal fatto che gli X_i sono frame.

$$X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k \quad Y = \mu_1 X_1 + \dots + \mu_k X_k$$

$$[X, Y] = \sum_{i,j} [\lambda_i X_i, \mu_j X_j]$$

$\nearrow \text{Span}(X_i, X_j, [X_i, X_j]) \subseteq D$
 \nwarrow Per formula di Lie \star tangente a D

D involutiva $\Rightarrow D$ è integrabile, cioè $\exists \mathcal{F} = \{\lambda_i\}$ e cui D è tangente.

$$H := \mathcal{F} \text{ che contiene } e. \quad T_e H = R.$$

Devo solo far vedere che H è sottogruppo: tutto è uguale alla dimostrazione che G^0 è sgr.

$\forall g \in G \quad \Delta$ è L_g invariante. Quindi anche la foliazione è L_g -invar.

Quindi L_g permuta le foglie. Se $g \in H$, $L_g(e) = g \in H$

$$\Rightarrow L_g(H) = H.$$

Allo stesso modo è chiuso per inverso.
Se $g \in H$, $L_{g^{-1}}(g) = e \in H \Rightarrow L_{g^{-1}}(H) = H$
(da cui $L_{g^{-1}}(e) = g^{-1} \in H$)

OSS. H non è normale perché D non è R_g -invariante.

Proposizione: $m: G \times G \rightarrow G$

$$dm_{(e,e)}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$i: G \rightarrow G$$

$$(X, Y) \mapsto X + Y$$

$$di_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$X \mapsto -X$$

Dim:

$$m(e, g) = g \text{ da cui}$$

$$dm_{(e,e)}(0, Y) = Y$$

$$\text{Allo stesso modo } dm_{(e,e)}(X, 0) = X$$

Per linearità fa quello che deve fare

$$\text{Usando che } m(g, i(g)) = e \text{ costantemente,}$$

il suo differenziale è nullo e implica la tesi.

Proposizione: G abeliano $\Rightarrow \mathfrak{g}$ abeliano.

Dim:

$i: G \rightarrow G$ è omomorfismo, quindi induce morfismo
 $g \mapsto g^{-1}$

di algebre di Lie

$$g \mapsto g$$

$$X \mapsto -X$$

$$X \mapsto -X$$

$$Y \mapsto -Y$$

$$[X, Y] \mapsto -[X, Y]$$

$$\mapsto [X, Y] = [-X, -Y] = -[X, Y] \Rightarrow [X, Y] = 0$$

è morfismo di algebre

Proposizione: G di Lie, $X \in \mathfrak{g}$. Allora X è completo.

Dim:

$$\gamma_e: I_e \rightarrow G \text{ curva integrale per } X, \text{ con } \gamma_e(0) = e.$$

$$X \text{ invariante e } X \Rightarrow \gamma_g = L_g \circ \gamma_e, \text{ da cui } I_e = I_g$$

$$\text{Quindi } \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_g \quad \forall g \in G \Rightarrow X \text{ completo.}$$

Sia $\Phi_X: G \times \mathbb{R} \rightarrow G$ flusso per X . Dipende in modo liscio da X

Def $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ tale che $\exp(X) = \Phi_X(e, 1)$ è detta mappa esponenziale (è liscia).

oss. $\gamma_X(t) = \exp(tX)$ è curva integrale di X .

oss. $\mathbb{R} \rightarrow G$ è omomorfismo di gruppi di Lie (per ogni X fisso)
 $t \mapsto \gamma_X(t)$

Proposizione: $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$. $d\exp_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è l'identità.

Quindi \exp è differ. locale

Esempio: • $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = gl(n, \mathbb{R}) = M(n, n, \mathbb{R})$, $\exp: gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$
 $A \mapsto e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

• $SL(2, \mathbb{R}) < GL(2, \mathbb{R})$, $sl(2, \mathbb{R}) = \{\text{traccia nulla}\}$, $\exp: sl(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ non è