

1ST GEO - LEZIONE 17

Def $N^m \subseteq M^m$ sottovarietà, un intorno tubolare per N è un fibrato vettoriale $E \rightarrow N$ e un embedding $i: E \hookrightarrow M$ tali che $i|_N = \text{id}_N$ e $i(E)$ aperto in M .

oss - Necessariamente deve essere $\dim E = m - n$ e $\dim E = m$ essendo $i(E)$ aperto di M .

LEMMA (DI STRIZZAMENTO):

Sia $E \rightarrow N$ fibrato vettoriale ($N \subseteq E$ come 0-sezione) e $W \subseteq N$ aperto.

Allora $\exists j: E \hookrightarrow W$ embedding tale che $j|_N = \text{id}_N$ e $j(E_p) \subseteq E_p$ $\forall p \in N$.

DIM: Prendiamo metrica riemanniana

su E . $\exists \rho: N \rightarrow \mathbb{R}$ continua positiva "raggio"

tale che $\forall p \in N \quad W \cap E_p \supseteq \{v \in E_p \mid \|v\| < \rho(p)\}$ (Esercizio)

Definiamo $j(v) = \rho(\pi(v)) \frac{v}{\sqrt{1+\|v\|^2}} \in W \cap E_p$

PROPOSIZIONE: $N \subseteq \mathbb{R}^m$ \exists intorno tubolare isomorfo a UN (il fibrato normale)

DIM: $UN = \{(p, v) \mid p \in N, v \in T_p N^\perp\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

(ha dimensione m)

Sia $f: UN \rightarrow \mathbb{R}^m$. Osserviamo che localmente $(p, v) \mapsto p + v$

$df_{(p,0)}: T_{(p,0)} UN \rightarrow T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ è l'identità, cioè $df_{(p,0)} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$.

$T_{(p,0)} UN \xrightarrow{\cong} T_p N \oplus T_p N^\perp \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$

Quindi f è un diffeomorfismo locale su $N \Rightarrow \forall p \in N \exists r(p) > 0$ tale che $f|_{UN \cap B(p, r(p))}$ è diffeomorfismo sull'immagine.

Posso scegliere r continuo (Esercizio)

Allora vale che $\exists W \supseteq N$, $W \subseteq UN$ aperto tale che $f|_W$ è embedding (grazie alla funzione r ...). Per il lemma di strizzamento

$\exists j: UN \rightarrow W$ di strizzamento. Prendiamo allora $i = f \circ j: UN \rightarrow \mathbb{R}^m$.

PROPOSIZIONE: $N^m \subseteq M^m$. Allora \exists intorno tubolare con $E = UN$.

DIM: Per il Teorema... all'ultimo $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$

Per la proposizione precedente \exists intorno tubolare $UN \subseteq R^k$
 e anche $UN = \{(p, v) \mid p \in N, v \in T_p N \subseteq T_p M\} \subseteq R^k \times R^k$ complezione UN con UN

Sia $f: UN \rightarrow R^k$ Vorrei considerare per chiudere $\pi \circ f$,
 $(p, v) \mapsto p + v$

ma non è detto che $f(UN) \subseteq UN$. Quindi prendo

$N \subseteq W = f^{-1}(UN) \subseteq UN$ e definisco $g := \pi \circ f|_W$.

Def Due intorni tubolari $E_0 \xrightarrow{f_0} M$ e $E_1 \xrightarrow{f_1} M$ della stessa NSM sono isotopi
 se $\exists \Psi: E_0 \rightarrow E_1$ isomorfismo di fibrati e una isotopia $F: E_0 \times \mathbb{R} \rightarrow M$
 tale che $F_0 = f_0 \circ \Psi$ e $F_1 = f_1$, tale che $F_t(p) = p \ \forall p \in N$, ovvero
 $\forall t \ F_t$ è intorno tubolare.

TEOREMA: $N^m \subseteq M^m$ sottovarietà. L'intorno tubolare è unico a meno di isotopia.

LEMMA: $f: R^n \rightarrow R^m$ differ è sempre isotopo al suo differenziale $df_0: R^n \rightarrow R^m$
 $0 \mapsto 0$
 tramite isotopia che fissa $0 \in R^m$.

DIM: Definiamo $F_t(v) = \frac{f(tv)}{t}$ per $t \in (0, 1]$. $F_1 = f$.

Usando Taylor $f(x) = h_1(x)x_1 + \dots + h_m(x)x_m$ ($f(0)=0$) con $h_i \in C^\infty(R^m)$

$$F_t(v) = h_1(tx) \frac{tx_1}{t} + \dots + h_m(tx) \frac{tx_m}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} h_1(0)x_1 + \dots + h_m(0)x_m = df_0(x)$$

Quindi ha senso definirlo anche per $t=0$ e si ottiene la tesi.

→ DIM: Possiamo a $E_0 \subseteq M$ fissato ($E_0 \xrightarrow{f_0} M, E_1 \xrightarrow{f_1} M$)

Step 1: Possiamo supporre che $f_1(E_1) \subseteq E_0$ (lemma di strisciamento)

Infatti prendendo $W = f_1^{-1}(E_0) \subseteq E_1 \ \exists j: E_1 \rightarrow W$ di strisciamento
 tale che f_1 è isotopo a $f_1 \circ j$.

Possiamo $G_t: E_1 \rightarrow E_1$ $G_0 = j$ $G_1 = id$
 $v \mapsto tv + (1-t)j(v)$

Quindi $f_1 \circ G_t$ è isotopia tra f_1 e $f_1 \circ j$.

Step 2: Definiamo $F: E_1 \times (0, 1] \rightarrow M$

$$(v, t) \mapsto \frac{f_1(tv)}{t}$$

$F_1 = f_1$. Vediamo \bullet per $t \rightarrow 0$ cosa succede:

Consideriamo U intorno bandierante per E_0 , $V \subseteq U$
 bandierante per E_1 . Per continuità $\exists \epsilon > 0$ t.c.

$$F_1(V \times R \cap (0, \epsilon)) \subseteq P \cap (0, \epsilon)$$

A meno di restringere ancora possiamo supporre $U = \mathbb{R}^m$
(secondo certe per N). Allora

$$F_1|_{V \times B(0, R)} \stackrel{\substack{\rightarrow \\ \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}}}{(x, y)} = (F_1(x, y))$$

IST GEO LEZIONE 18

COROLLARIO: M^n connesso. $f, g: \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^n$ embedding. Allora f è isotopa a g oppure a $g \circ r$ con r riflessione di \mathbb{R}^n .

DIM:

~~Dim:~~ M omogenea $\Rightarrow \exists$ isotopia ambiente di M che sposta $f(o)$ in $g(o)$.

Anzi posso supporre $f(o) = g(o)$ ($f_t = F_t \circ f$ è isotopia di f)

Per l'unicità dell'intorno tubolare, ($F_t(o) = g(o)$)

$f \sim_{\text{isotopia}} g \circ \psi$ con $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ di fibroti, cioè vettoriale
 \downarrow $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ha 2 camp. conn. \downarrow ptB

$\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ha 2 camp. conn.

Anzi posso isotopare ψ all'id o ad una riflessione

COROLLARIO: M^n connesso orientato. Allora $\exists!$ embedding $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow M$ che preserva l'orientazione.

PROPOSIZIONE: $f: M \rightarrow N$ continua, $S \subseteq M$ chiuso t.c. $f|_S$ liscio.

$\exists g$ liscio, $g: M \rightarrow N$, tale che $g|_S = f|_S$ e g omotopa a f .

DIM: Per Whitney $\exists k: N \subseteq \mathbb{R}^k$.

$\cup N$ intorno tubolare $\forall p \in N$ peng $E(p) = d(p, \mathbb{R}^k \setminus \cup N)$

$B(p, E(p)) \subseteq \cup N$. E è continuo.

Usa allora approssimazione C^∞ per $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\varepsilon' = \varepsilon \circ f$ continuo

$\Rightarrow \exists h: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ liscio con $|h(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$

(e anche $h|_S = f|_S$).

$\text{Im } h \subseteq \cup N \Rightarrow$ definiamo $g = \pi \circ h$ con $\pi: \cup N \rightarrow N$.

$g|_S = f|_S$ e g è omotopa a f perché s fa comb. conv.

$g_t = \pi \circ (th + (1-t)f)$

COROLLARIO: $f, g: M \rightarrow N$ lisce omotope in modo continuo. Allora sono omotope in modo liscio.

DIM: $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ continua. La estendiamo a $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$

(costante prima di 0 e dopo 1). $S = M \times [0, 1]$ è chius.

Quindi approssimiamo a $F': M \times R \rightarrow N$ lascia con $F'_1|_S = F_1|_S$
 cioè $F'_0 = f$, $F'_1 = g$.

TRASVERSALITÀ

Def $U, W \subseteq V$ sottosp. vett. sono trasversi se $U + W = V$

(quindi in particolare $\dim U + \dim W \geq \dim V$).

Def $f: M \rightarrow N$ sono trasverse se $\forall p \in M, \forall q \in W$ tali che $f(p) = g(q)$ vale
 $g: W \rightarrow N$

$$T_p df_p + T_q dg_q = T_{f(p)} N = T_{g(q)} N. \text{ Si scrive } f \pitchfork g$$

SS. Se $\dim M + \dim W < \dim N$, $f \pitchfork g \Leftrightarrow T_p f \cap T_q g = \emptyset$.

Def $M \subseteq N$, $g \pitchfork M$ se $g \pitchfork i$ con i l'embedding dalla sottovarietà M ,
 cioè $\forall p \in W$ t.c. $g(p) \in M$, vale $T_{g(p)} M + T_p dg_p = T_{g(p)} N$ (l'inclusione)

Def $M \subseteq N$, $M \pitchfork W$ se $i_M \pitchfork i_W$, cioè se $\forall p \in M \cap W$ vale $T_p M + T_p W = T_p N$.

esempio: Se $M = \{p\} \subseteq N$, $g \pitchfork \{p\} \Leftrightarrow p$ è regolare per g .

Proposizione: $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato, $W \xrightarrow{f} E$. Fissato $p \in M$, $f \pitchfork \pi^{-1}(p)$ se e solo
 se p è valore regolare per $\pi \circ f$.

$$\text{Dim: Sia } q \in W \text{ t.c. } f(q) \in \pi^{-1}(p) = E_p. \quad T_{f(q)} E_p = \text{Ker } d\pi_{f(q)},$$

$$f \pitchfork E_p \Leftrightarrow \forall q \in W \text{ t.c. } f(q) \in E_p \text{ vale}$$

$$T_p df_q + \text{Ker } d\pi_{f(q)} = T_{f(q)} E$$

$$\text{Ma questo vale } \Leftrightarrow T_p d(\pi \circ f)_q = T_p M.$$

Quindi l'etero-

Lemma: $f \pitchfork E_p$ per quasi tutti i $p \in M$.

Esercizio: $S \subseteq E$ S sottovarietà è immagine di una sezione
 di π fibrato M se e solo se $\forall p \in M (S \cap E_p) = \{1\}$ e $S \pitchfork E_p$.

Proposizione: $f: W \rightarrow M$, $N \subseteq M$, $f \pitchfork N$. Allora $f^{-1}(N) \subseteq W$ è sottovarietà
 di codimensione $\text{codim } N$.

Dim: Preso $q \in N$, localmente $M = \mathbb{R}^m$, $q = 0$, $N = \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m$

Considerando $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ proiezione su N^\perp ,

$$f^{-1}(N) = (\pi \circ f)^{-1}(0) \quad f \pitchfork N \Rightarrow 0 \text{ valore regolare}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(N) \text{ è sottovarietà.}$$

Tutto si chiude usando il valore regolare.

TEOREMA (DI TRASVERSALITÀ DI THOM):

M, N, S varietà, $F: M \times S \rightarrow N$ liscia (poste anche $\forall s \in S \quad F_s: M \rightarrow N$),
 $W \subset N$
Se $F \pitchfork W$ allora $F_s \pitchfork W$ per quasi tutti gli s .

DIM: Consideriamo $F^{-1}(W)$. Per la proposizione di prima è sottovarietà.

Sia $\pi: M \times S \rightarrow S$ proiezione. Se s è valore regolare
 $(p, s) \mapsto s$

per $\pi|_{F^{-1}(W)}$ allora dico che $F_s \pitchfork W$: infatti

preso $(p, s) \in F^{-1}(W)$ t.c. $\pi(p, s) = s$, per ipotesi sappiamo che $F \pitchfork W$, quindi in particolare

$$\text{Im } dF_{(p,s)} + T_{F(p,s)} W = T_{F(p,s)} N$$

Vogliamo che $\text{Im } (dF_s)_p + T_{F(p,s)} W = T_{F(p,s)} N$.

Questo è vero perché

$$\text{Im } (dF_s)_p + T_{F(p,s)} W \supseteq \text{Im } dF_{(p,s)}$$

(applico F all'uguaglianza che si ha grazie)
all'ipotesi s valore regolare per π

A proposito dell'esistenza dell'intorno tubolare:

$N \subseteq \mathbb{R}^m$, $\forall N \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$f: \forall N \rightarrow \mathbb{R}^m$ $df_{(p,0)}$ invertibile
 $(p,v) \mapsto p+v$

$\Rightarrow \exists U$ intorno di N , $U \subseteq \forall N$ su cui f è embedding:

$\forall p \in N \exists R(p)$ t.c. $f|_{B((p,0), R(p)) \cap \forall N}$ è embedding

Poniamo $U := \bigcup_{p \in N} U_p$ dove $U_p = B((p,0), \frac{R(p)}{8}) \cap \forall N$

Vale allora che $f|_U$ è iniettiva. (è anche differ. loc. $\Rightarrow f|_U$ differ. su immagine)

Infatti: se per assurdo $f(p,v) = f(p',v')$ con

$U_p \ni (p,v) \neq (p',v') \in U_{q'}$

WLOG $R(q) < R(q')$:

quadranti
in la tesi

$$d(q, q') < \underbrace{d(q, p)}_{< \frac{R(q')}{8}} + \underbrace{d(p, p+v)}_{< \frac{R(q')}{8}} + \underbrace{d(p', p'+v')}_{< \frac{R(q')}{8}} + \underbrace{d(p', q')}_p$$
$$\Rightarrow d(q, q') < \frac{R(q')}{8}$$

~~Assurdo~~: oppure: \exists

$$d((q',0), (p',v')) < \frac{R(q')}{8} , d((q',0), (p,v)) < \dots < R(q')$$
$$\Rightarrow (p,v) \in U_{q'} \text{ ma } f|_{U_{q'}} \text{ iniettiva, assurdo.}$$

TEOREMA (THOM):

$F: M \times S \rightarrow N$, $Z \subseteq N$, $F \pitchfork Z \Rightarrow$ per quasi ogni $s \in S$ $F_s \pitchfork Z$.

DIM: $Y = F^{-1}(Z)$ sottovarietà

Dico che se s è regolare per $\pi|_Y$ allora $F_s \pitchfork Z$.

$(\pi: M \times S \rightarrow S)$.

s regolare $\Rightarrow \forall x \in M$ $T_{(x,s)} Y + T_{(x,s)} (M \times \{s\}) = T_{(x,s)} (M \times S)$

Voglio dire che $(dF_s)_{(x,s)} (T_{(x,s)} (M \times \{s\})) + T_{F_s(x)} Z = T_{F_s(x)} N$.

Della prima applichiamo df :

... si ottiene la tesi (Esercizio)

COROLLARIO: $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $Z \subseteq \mathbb{R}^m$. Ponendo $F: M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, vale
 $(p, x) \mapsto f(p) + x$
 che $F \pitchfork Z$ ($dF_{(p,x)}$ è sempre suriettivo).

Quindi per q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ $f_x(p) = f(p) + x$ è trasversa a Z .

COROLLARIO: $f: M \rightarrow N$, $Z \subseteq N$. Allora $\exists g \sim f$ tale che $g \pitchfork Z$.

Dim: $N \subseteq \mathbb{R}^k$.

$$F: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow N$$

$$(p, x) \mapsto \pi(f(p) + \varepsilon(f(p))x)$$

dove $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow N$

$$\varepsilon: N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

$$q \mapsto \varepsilon(q) = d(q, \mathbb{R}^k \setminus N)$$

probabilmente
non funziona

$$(\min\{\|x\|, \varepsilon(f(p))\} \frac{x}{\|x\|} \text{ forse va...})$$

VARIETÀ CON BORDO

$$\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}. \quad \partial \mathbb{R}_+^m = \{x_m = 0\}.$$

Def M varietà con bordo topologica è sp. top. t.c. ogni $x \in M$ ha
 $U(x)$ omeomorfo a $V \subseteq \mathbb{R}_+^m$.

Def M varietà con bordo liscia è (M, \mathcal{A}) con M var. con bordo top.
 e \mathcal{A} atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}_+^m\}$ come prima...

Def $p \in M$ è di bordo se $\exists \varphi: U(p) \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}_+^m$ tale t.c. $\varphi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^m$.
 $\partial M = \{\text{punti di bordo}\}$

Oss. ∂M ha struttura di varietà di codimensione 1 senza bordo.

Def M varietà senza bordo $D \subseteq M$ è dominio regolare se $\forall p \in D$
 $\exists \varphi: U(p) \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ tale che $\varphi(U(p) \cap D) = \varphi(U(p)) \cap \mathbb{R}_+^m$.

Oss. D ha struttura naturale di varietà con bordo.

PROPOSIZIONE: M senza bordo. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Se x_0 è valore regolare
 $D = f^{-1}((-\infty, x_0])$ è un dominio.

Dim: $\forall p \in D$, se $f(p) < x_0$, tutto ok ($p \in \overset{\circ}{D}$)

Se $f(p) = x_0$, df_p suriettivo $\Rightarrow f$ immersione in p
 \Rightarrow localmente per forma normale delle immersioni

$$f(x_1, \dots, x_m) = x_1 \quad \text{quindi ok...}$$

$$f(p) = 0$$

Esempio: $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|x\|^2$
 1 è valore regolare $\Rightarrow f^{-1}((-\infty, 1]) = D \subseteq \mathbb{R}^m$
 è dominio. $\partial D^m = S^{m-1}$.

def Se $p \in \text{int}(M) = M \setminus \partial M$ $T_p M$ si definisce allo stesso modo. Se $p \in \partial M$ $T_p M$ si definisce allo stesso modo con le derivazioni (NON con gli orci, in quel caso va aggiustato).

ss $T_p \partial M \subseteq T_p M$ per $p \in \partial M$ di codim 1.

= M è orientata allora ∂M ha un'orientazione indotta:

$\forall p \in \partial M$ prendo $v \in T_p M$ esterno (cioè uscente, cioè NON una derivata di un arco) e dico che $\{v_1, \dots, v_m\}$ ^{base per $T_p M$} è positiva se lo è $\{v, v_1, \dots, v_m\}$ (base per $T_p M$).

def Un'orientazione su $\{x\}$ è la scelta di un segno $+$ o $-$.

def M varietà (può avere bordo). Una sottovarietà è l'immagine di una $f: N \hookrightarrow M$ embedding.

def M varietà con bordo. N una componente di bordo. Un collare di N è un embedding $F: N \times [0, 1) \hookrightarrow M$ tale che $F(x, 0) = x \ \forall x \in N$ (e quindi $\text{Im} F$ è un aperto).

TEOREMA: $\exists!$ a meno di isotopie collare.

Se M_1, M_2 varietà con bordo, N_1 e N_2 componenti di bordo risp. di M_1, M_2 , $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ diffeom. Potrei definire $M = M_1 \cup_{\varphi} M_2 = M_1 \sqcup M_2 / \varphi$

che risulta essere varietà topologica ma che non ha una chiara struttura liscia. Considero allora due collari $N_1 \times [0, 1)$ e $N_2 \times [0, 1)$ e pongo $M = (M_1 \setminus N_1) \sqcup (M_2 \setminus N_2) / \sim$ dove $(p, t) \sim (\varphi(p), 1-t)$

(Quando incollando aperti viene T_2 , la struttura liscia segue; incollando chiusi viene sempre T_2 , ma la struttura liscia non segue)

ISTGEO LEZIONE 20

(11/12)

Def M^m, N^m conesse orientate. La somma connessa di M e N è una varietà $M \# N$ connessa orientata costruita così:

$f: \mathbb{R}^m \hookrightarrow M$ che preserva orientazione

$g: \mathbb{R}^m \hookrightarrow N$ che inverte orientazione

qualsiasi (sono unici

a meno di isotopia)

$$M \# N := (M \setminus \{f(0)\}) \sqcup (N \setminus \{g(0)\}) \sim$$

dove $j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $v \mapsto \frac{v}{\|v\|^2}$

e $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \quad x \sim g(j(f'(x)))$

Viene di Hausdorff, quindi una varietà (orientata)

TEOREMA: $M \# N$ a meno di diffeomorfismo è univocamente determinata.

Def S_g superficie di genere $g \geq 1$: $S_g = \underbrace{(S^1 \times S^1) \# \dots \# (S^1 \times S^1)}_{g \text{ volte}}$

TEOREMA: Ogni superficie compatta, orientabile e connessa è diffeomorfa a S_g per qualche $g \geq 0$ ($S_0 = S^2$)

FORME DIFFERENZIALI

M^m varietà (può avere bordo). Per $k \geq 0$ consideriamo

$$\Lambda^k(M) := \Lambda^k(TM) \quad \text{fibrato con fibro } \Lambda^k(M)_p = \Lambda^k(T_p M)$$

dove $\Lambda^k(T_p M) = \{X \in \mathcal{T}_0^k(T_p M) \text{ antisimmetrico}\}$

Def Una k -forma su M è $\omega \in \Gamma \Lambda^k(M)$, cioè $\forall p \in M \quad \omega(p) \in \Lambda^k(T_p M)$
 ovvero ancora $\forall v_1, \dots, v_k \in T_p M \quad \omega(p)(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}$ in modo antisimmetrico

Def $\Omega^k(M) := \Gamma \Lambda^k(M)$

$\Omega^* := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$ è un'algebra associativa anticommutativa

Dati $\alpha \in \Lambda^k(T_p M)$, $\beta \in \Lambda^h(T_p M)$ avevamo già definito $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(T_p M)$

quindi $\Lambda^*(T_p M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(T_p M)$ è algebra.

Dati $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^h(M) \Rightarrow \omega \wedge \eta \in \Omega^{k+h}(M)$ definite da

$$(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p)$$

Anticommutatività: $\omega \wedge \eta = (-1)^{kh} \eta \wedge \omega$

Corollario: Se K dispari, $\omega \wedge \omega = 0$

Esempio: $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$

$$\Lambda^1(V) = V^*$$

Esempio: Data $f \in C^\infty(M)$, $df \in \Gamma(T^*M) \stackrel{\vee}{=} \Gamma(\Lambda^1 M) = \Omega^1(M)$

Esempio: $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$

Base $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di \mathbb{R}^n , $\mathcal{E}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ base duale di $(\mathbb{R}^n)^*$

Base di $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ è $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}\}_{i_1 < \dots < i_k}$

Notazione: $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (ovvero già visto) $e^i = dx^i$ (è il differenziale delle proiezioni sulle coordinate x^i)

Data $\omega \in \Omega^k(M)$, in certa $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\omega \in \Omega^k(U)$

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Se abbiamo altre coordinate

$$\omega(p) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \bar{f}_{i_1, \dots, i_k} d\bar{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{i_k}$$

$$\text{vale che } dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$$

Def. Una n -forma in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$)

è $\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, con $f \in C^\infty(U)$

Cambiando coordinate si trasforma in

$$\omega = f(\bar{x}) \det\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right) d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$$

Def $\omega \in \Omega^k(M)$, il supporto di ω è $\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}}$

(in modo analogo si definisce il supporto di sezioni qualunque)

Def $f: M \rightarrow N$ liscia, $\omega \in \Omega^k(N)$. Il pullback di ω lungo f è

$f^* \omega \in \Omega^k(M)$, definita $\forall p \in M$ come $\forall v_1, \dots, v_k \in T_p M$

$$(f^* \omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$$

Otteniamo un morfismo di algebre $f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$, ovvero vale
 $\omega \mapsto f^* \omega$

$$\text{che } f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\omega \in \Omega_c^n(V)$ a supp. compatto, $\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$
 con $f \in C_c^\infty(M)$

Def $\int_V \omega = \int_V f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \mathbb{R}$
 (integrale di Lebesgue)

Oss. Se $V' \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\psi: V \rightarrow V'$ diffeo che preserva orientazione
 $\omega' = (\psi^{-1})^* \omega$. Allora $\int_V \omega = \int_{V'} \omega'$
 (determinante positivo, negli integrali si ha il valore assoluto del determinante)

Def M^n varietà orientata, $\omega \in \Omega_c^n(M)$ a supp. cpt. Voglio definire $\int_M \omega \in \mathbb{R}$.

Se $\text{supp}(\omega) \subseteq U_i$ con $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ carta positiva definiamo
 $\int_M \omega = \int_{V_i} (\varphi_i^{-1})^* \omega$ (non dipende dalla carta scelta)

In generale, se $A = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}$ atlante orientato compatibile, prendo
 $\{p_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}\}$ partiz. di 1 subordinata e pongo

$$\int_M \omega := \sum_i \int_M p_i \omega$$

Oss. $\int_M \omega = - \int_M \omega$ (è somma finita, ω a supp. cpt.)
 - M a orientaz. opposta

PROPOSIZIONE: È una buona definizione, cioè non dipende dall'atlante e dalla partizione di 1.

Dim. Siano $A' = \{\varphi'_i: U'_i \rightarrow V'_i\}$, $\{p'_i: U'_i \rightarrow \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_i \int_M p_i \omega = \sum_i \int_M \sum_j p'_j p_i \omega = \sum_{i,j} \int_M p'_j p_i \omega \\ &= \sum_j \int_M p'_j \omega = \sum_j \int_M \sum_i p_i p'_j \omega = \sum_j \int_M p'_j \omega \end{aligned}$$

Oss. $B \subseteq M$ compatto, $\omega \in \Omega_c^n(M)$ posso definire $\int_B \omega$ allo stesso modo.

TEOREMA: $B = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$, $\int_B \omega = \sum_i \int_{B_i} \omega$

Esempio: $T = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, $\omega(x,y) = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ ma anche $\omega \in \Omega^2(T)$

Prendo D dominio fondamentale $T \setminus \text{int}(D)$ ha misura nulla (unione di sottoinsiemi)

FORMA VOLUME

Def M orientata. Una forma volume per M è una $\omega \in \Omega^n(M)$ tale che
 $\forall p \in M \quad \omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0 \quad \forall v_1, \dots, v_n$ base positiva di $T_p M$.

Def $\forall S \subseteq M$ boreliano definiamo ^{data ω forma di volume} $\text{Vol}(S) := \int_S \omega \in [0, +\infty]$.

Se S è cpt, allora la definizione ha senso (è l'equivalente di ω e supp)
compatto

In generale, $\int_S \omega = \limsup \left\{ \int_{S'} \omega \mid S' \subseteq S \text{ cpt} \right\}$

ss. ω è forma di volume $\Leftrightarrow \forall p \in M \exists \varphi: U(p) \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ carta positiva
 che trasforma ω in $\int f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ con f positiva
 (dunque vale per ogni carta positiva)

Lemma: Se $\text{int}(S) \neq \emptyset$ allora $\text{Vol}(S) > 0$.

Proposizione: \exists sempre una forma di volume per M .

Dim: $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}$ orientato, $\{\rho_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}\}$ partiz. di 1

$$\text{Definiamo } \omega = \sum_i \rho_i \varphi_i^* \omega^E$$

dove $\omega^E = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ la forma di volume euclidea standard
 ω è positiva perché combinazione convessa di forme positive.

ISTGEO - LEZIONE 24

OSS. Se $\dim M < k$ allora $\Omega^k(M) = \{0\}$. Se invece $k \leq \dim M$,

$\forall S \subseteq M$ orientata di dimensione k si può definire $\int_S \omega := \int_S i^*(\omega)$ dove $i: S \hookrightarrow M$ è l'inclusione.

Esempio: Posso integrare $\omega = xy dx \wedge dy + x dx \wedge dz$ su una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Esempio: $T = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ toro, $\omega = dx$; in T consideriamo le circonferenze

$\gamma_1 = \{y=0\}$ e $\gamma_2 = \{x=0\}$. Allora vale

$$\int_{\gamma_1} \omega = 1 \quad \int_{\gamma_2} \omega = 0$$

OSS. Al massimo possiamo derivare una volta le funzioni tra varietà, non di più (eccetto compatte).

DIFFERENZIALE DI K-FORME

Def Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\omega \in \Omega^k(M)$ $\omega = \sum_I f_I dx^I$, si definisce

$$\Omega^{k+1}(M) \ni d\omega = \sum_I df_I \wedge dx^I$$

OSS. Il caso $k=0$ è l'usuale differenziale. In più, $dx^i = d(x^i)$.

Quindi localmente $d\omega$ è combinazione di wedge di 1 -forme. (è un differenziale)

Def M varietà. $d\omega$ si definisce in corte come sopra.

Proposizione: $d\omega$ è ben definita. Dimostrare:

- 1) $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ è lineare
- 2) df se $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ è l'usuale differenziale
- 3) $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$
- 4) $d(d\omega) = 0$.

DIM: Dimostriamo [1], [2], [3], [4] in corte (cioè $M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto)

$$\text{Sia } \omega = \sum_I f_I dx^I. \quad d\omega = \sum_I df_I \wedge dx^I$$

[1] ovvio

[2] ovvio

[3] d lineare, \wedge distributivo risp. alla somma. Basta dimostrarlo per $\omega = f dx^I$ $\eta = g dx^J$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg dx^I \wedge dx^J) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \stackrel{\text{leibniz}}{=} \\ &= (df)g \wedge dx^I \wedge dx^J + f(dg) \wedge dx^I \wedge dx^J = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad d(dw) &= d(df \wedge dx^I) = \quad \text{con } w = f dx^I \\ &= d\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}}_{df} dx^i \wedge dx^I\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)}_{dg} dx^i dx^j \wedge dx^I \\ &\quad \text{I} \end{aligned}$$

i pezzi sono opposti a coppie, quelli diagonali sono 0

Le proprietà 1, 2, 3, 4 caratterizzano $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

$\forall M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\forall M$ varietà

cioè se esiste una mappa con queste proprietà è unica.

Caso $M \subseteq \mathbb{R}^n$

d Bivettore⁽¹⁾, quindi basta capire come fa su $w = f_i dx^i$.

Se $k > 1$, $dw = d((f_i dx^i) \wedge (dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}))$ è determinato da $d(f_i dx^i)$ e $d(dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$. (per proprietà [3])

Quindi basta capire cosa fa su f e su dx^i .

df è determinato dalla proprietà [2], $d(dx^i) = 0$ per [4].

esercizio: $\varphi: M \rightarrow N$ liscia. $\forall w \in \Omega^k(N)$ vale

$$\varphi^*(dw) = d(\varphi^*w)$$

es. Se $U \subseteq \mathbb{R}^3$: 1-forma $w = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3 \rightsquigarrow (f_1, f_2, f_3)$ campo vettoriale

2-forma $w = f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \rightsquigarrow (f_1, f_2, f_3)$ campo vettoriale
usando la metrica e contrazione tra τ_0^i e τ_1^j

3-forma $w = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \rightsquigarrow f \in C^0(U)$

0-forma $w = f \rightsquigarrow f \in C^0(U)$

Quindi formalmente vale che

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(U) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(U) \\ w & \longmapsto & dw \\ f & \longmapsto & \nabla f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega^1(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \Omega^2(U) \\ w & \longmapsto & dw \\ (f_1, f_2, f_3) & \longmapsto & \text{rot}(f_1, f_2, f_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2(U) & \xrightarrow{\text{div}} & \Omega^3(U) \\ w & \longmapsto & dw \\ (f_1, f_2, f_3) & \longmapsto & \text{div}(f_1, f_2, f_3) \end{array}$$

TEOREMA: M^n varietà $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Allora
(STOKES)

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

sarebbe $i^* \omega$ con $i: \partial M \rightarrow M$

DIM: Caso $M \subseteq \mathbb{R}_+^n$ aperto:

$$\Omega^{n-1}(M) \ni \omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

\int e d sono lineari, il pullback pure, quindi basta dimostrarlo per $\omega = f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$.

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

Se $i \neq n$:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= (-1)^{i-1} \int_M \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^i \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^i = 0$ $\leftarrow f_i$ è a supporto compatto

Invece

$$\int_M \omega = \int_{\partial M} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}_+^n} f_i (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f_i (i^* (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)) = 0$$

$f_i = 0$ \leftarrow quando sono in ordine si toglia i (e così scrivere dx^i)

Se $i = n$: $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \int_M f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \int_M (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} (-1)^{n-1} \int_M \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \omega \end{aligned}$$

$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n = 0$ \leftarrow quando sono in ordine si toglia n (e così scrivere dx^n)
 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n = f(0) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$

Abbiamo identificato $\mathbb{R}_+^{n-1} = \partial \mathbb{R}_+^n$. Con questo, l'integrale di Lebesgue cambia di $(-1)^n$ perché $\partial \mathbb{R}_+^n$ ha orientazione di bordo che in generale è diversa da quella di \mathbb{R}_+^{n-1} : $(x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$

COROLLARIO: Se M^n orientata senza bordo, $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$.

Allora $\int_M d\omega = 0$.

CONSEGUENZE GIÀ VISTE

• \mathbb{R} : $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$

$M = [a, b]$ orientata \rightarrow

• \mathbb{R}^2 : $\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(b) - f(a)$

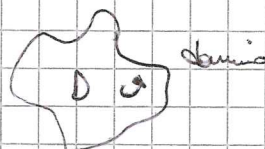
∂M ha orientazione
 $\begin{matrix} - & + \\ a & b \end{matrix}$



• Gauss-Green:

$\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$



• Divergenza:

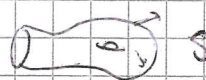
$\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ (campi vett.)
 $d\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ (funzione, "div ω ")

$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$



• Stokes (rotore):

$\int_S \text{rot } X \cdot \hat{n} = \int_{\partial S} X \cdot \hat{t}$



Più in generale, $\omega \in \Omega^k(M)$. Se $\exists N^k \subset M$ orientato ^{senza bordo} tale che $\int_N \omega \neq 0$, allora ω non è esatto.

Esempio: $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con coordinate polari (ρ, θ) . Prendendo $\omega = d\theta$. Localmente θ è funzione, quindi $d\omega = 0$.
 $\int_{S^1} \omega = 2\pi \Rightarrow \omega$ non è esatto.

Def M^n varietà (può avere bordo). $\forall k \geq 0$ poniamo $Z^k(M) = \{k\text{-forme chiuse}\}$ (cicli) e $B^k(M) = \{k\text{-forme esatte}\}$ (cobordi).

Def Il k -esimo gruppo di coomologia di De Rham è $H^k(M) = Z^k(M) / B^k(M)$.

Def $b^k(M) := \dim_{\mathbb{R}}(H^k(M))$ è detto k -esimo numero di Betti.

Oss. $b^k(M^n) = 0$ per $k > n$.

Def Se i $b^k(M)$ sono finiti, si definisce la caratteristica di Eulero-Poincaré

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b^k(M)$$

Oss. Se $M = M_1 \cup \dots \cup M_h$ componenti connesse, allora

$$H^k(M) = \bigoplus_{i=1}^h H^k(M_i)$$

Proposizione: Se M connessa, allora $H^0(M) = \mathbb{R}$ (isomorfismo canonico)

Dim:

$$B^0(M) = \{0\}$$

$$\begin{aligned} Z^0(M) &= \{f \in C^0(M) \mid df=0\} = \{f \in C^0(M) \mid f \text{ loc. costante}\} = \\ &= \{f \in C^0(M) \mid f \text{ costante}\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Corollario: $b^0(M) = \# \text{ comp. conn. di } M$.

Proposizione: Il prodotto \wedge scende ad un prodotto su $H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(M)$ che rende un'algebra associativa anticommutativa.

Dim: $\eta \in Z^k(M)$, $\omega \in Z^h(M)$. Voglio vedere che $\omega \wedge \eta \in Z^{k+h}(M)$

$$d(\omega \wedge \eta) = \underbrace{d\omega}_{=0} \wedge \eta + (-1)^{kh} \omega \wedge \underbrace{d\eta}_{=0} = 0$$

Se $\omega \in B^k(M)$, $\omega = d\xi$, allora

$$\omega \wedge \eta = d\xi \wedge \eta = d(\xi \wedge \eta) - (-1)^{kh} \xi \wedge \underbrace{d\eta}_{=0} = d(\xi \wedge \eta)$$

quindi $\omega \wedge \eta \in B^{k+h}(M)$

La coomologia è un funtore contravariante:

$f: M \rightarrow N \rightsquigarrow f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ morfismo di algebre

Poiché $f^* \circ d = d \circ f^*$, f^* manda cocicli in cocicli e cobordi in cobordi.

Quindi induce $f^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ morfismo di algebre.

f differenziale $\Rightarrow f^*$ isomorfismo

Proposizione: $H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ (\mathbb{R} ha coomologia banale)

Dim: Ovviamente $H^k(\mathbb{R}) = 0$ per $k \geq 2$.

$$H^1(\mathbb{R}) = 0, \text{ Infatti } H^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R}) / B^1(\mathbb{R})$$

$$\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}) \quad \omega = f(x)dx$$

Ponendo $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ si ha $\omega = dg$, quindi $\Omega^1(\mathbb{R}) = B^1(\mathbb{R})$

Lemma (di Poincaré): $H^*(\mathbb{R}^m)$ è banale $\forall m$.

Def Un complesso di cocatene C^* è una successione di sp. vett.
 $C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \dots$ tale che $d_i^{i+1} \circ d_i = 0$.

Def La k -esima coomologia di C^* è $H^k(C^*) = \frac{Z^k(C^*)}{B^k(C^*)}$ dove
 $Z^k(C) = \text{Ker } d^k$
 $B^k(C) = \text{Im } d^{k-1}$

Se $C^k = \Omega^k(M)$ otteniamo $H^k(M)$.

Def Un morfismo fra 2 complessi di cocatene C^* e D^* è $\{f^i: C^i \rightarrow D^i\}$

$$\begin{array}{ccccccc} C^0 & \rightarrow & C^1 & \rightarrow & C^2 & \rightarrow & \dots \\ \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & & \downarrow f^2 & & \downarrow \\ D^0 & \rightarrow & D^1 & \rightarrow & D^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

talché $f^i \circ d_i^{C^*} = d_i^{D^*} \circ f_{i-1}^{C^*}$ $\forall i$ e f^i lineare $\forall i$.

f induce un morfismo (mappe lineari) $f_*: H^k(C^*) \rightarrow H^k(D^*)$

Def Siano $f, g: C^* \rightarrow D^*$ morfismi di cocatene. Una omotopia fra f e g è $\{h^i: C^i \rightarrow D^{i-1}\}$ tale che $f^i - g^i = d_i^{D^*} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_i^{C^*}$

Proposizione: Se \exists omotopia h tra f e g allora $f_* = g_*$.

Dim: $\forall z \in Z^k(C^*)$ vedo che $(f-g)(z) \in B^k(D^*)$

$$f(z) - g(z) = d(h(z)) + \underbrace{h(d(z))}_0 = d(h(z)) \in B^k(D^*)$$

TEOREMA:

Sia M varietà, Fissa $t_0 \in \mathbb{R}$ e considero $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$ con $s(p) = (p, t_0)$.

π^* e s^* sono l'una l'inverso dell'altra.

Dim: $\pi \circ s = \text{id} \Rightarrow (\pi \circ s)^* = s^* \circ \pi^* = \text{id}_{H^*(M)}$

Mostriamo che $\pi^* \circ s^*: \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ non è l'identità
 ma è omotopa all'identità.

Definiamo $h: \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R})$

$$\omega \mapsto (h\omega: (p, t)(v_1, \dots, v_{k-1}) \mapsto \int_{t_0}^t \omega(p, u) \left(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1} \right) du)$$

Dobbiamo mostrare che

$$\pi^* \circ s^* - \text{id} = dh + hd$$

$$\Rightarrow M = \mathbb{R}^m \quad (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_m, t)\})$$

$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ è combinazione lineare di:

$$1) \quad f dx^I \quad |I| = k$$

$$2) \quad g dt \wedge dx^J \quad |J| = k-1$$

$$(\pi^* \circ s^*)(\underbrace{f}_{p(x,t)} dx^I) = f(x, t_0) dx^I$$

$$(\pi^* \circ s^*)(g dt \wedge dx^J) = \pi^*(\underbrace{s^*(g dt)}_0 \wedge s^*(dx^J)) = 0$$

$$h(f dx^I)^{(p,t)} = \int_{t_0}^t f(p, u) (dx^I) \left(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1} \right) du = 0 \quad (\text{c'è un } \frac{\partial}{\partial t} \text{ all'interno})$$

$$h(g dt \wedge dx^J)^{(p,t)} = \left(\int_{t_0}^t g(p, u) du \right) dx^J$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (dh + hd)(f dx^I)^{(p,t)} &= h(d(f dx^I)) = h\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^I + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^I\right) = \\ &= h\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt\right) = (f(p,t) - f(p,t_0)) dx^I \end{aligned}$$

A meno di un segno (che tanto non conta niente) torna.

$$\bullet \quad (dh + hd)(g dt \wedge dx^J)^{(p,t)} = \dots$$

1ST GEO. LEZIONE 23

COROLLARIO: $H^k(M \times \mathbb{R}) \cong H^k(M) \quad \forall k$

COROLLARIO: $H^*(\mathbb{R}^n)$ è banale.

COROLLARIO: $f, g: M \rightarrow N$ lisce omotopiche $\Rightarrow f^* = g^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$

DIM: Sia $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ omotopia

$F_0 = f, F_1 = g$. Consideriamo $S_0: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$
 $p \mapsto (p, 0)$

$S_0^* = S_1^*$ per il teorema di primo

$S_1: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$
 $p \mapsto (p, 1)$

$f = F \circ S_0, g = F \circ S_1$

Quindi $f^* = S_0^* \circ F^*, g^* = S_1^* \circ F^*$ e quindi $f^* = g^*$.

COROLLARIO: $M \sim N$ omotop. equiv. $\Rightarrow b_i(M) = b_i(N) \quad \forall i$.

COROLLARIO: M contrattile. Allora $H^*(M)$ è banale.

COROLLARIO: M^n cpt. orientabile senza bordo $\Rightarrow H^n(M) \neq 0$ e quindi M non è contrattile.

DIM: M orientabile $\Rightarrow \exists \omega$ forma volume.

M cpt $\Rightarrow \int_M \omega > 0$ Poiché M senza bordo, non è esatto

ω è però chiusa (ovviamente)

$\Rightarrow b_n(M) > 0$.

COROLLARIO: S^n non è contrattile.

COROLLARIO: Se M è cpt orientabile senza bordo, allora $M \not\sim N$ per nessuna N varietà con $\dim N < \dim M$.

COROLLARIO: M qualsiasi. $\tilde{M} = M \setminus \partial M$. $i: \tilde{M} \hookrightarrow M$ induce isomorfismo in coomologia.

DIM: Segue dal fatto che i è equivalenza omotopica

(l'inversa omotopica si costruisce usando collar del bordo)

Def Una successione esatta è $\dots \rightarrow V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \rightarrow \dots$ di sp. vett.

tale che $\forall i \quad \text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$.

Esercizio: Se $\dots \rightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \rightarrow \dots$ è esatta allora
 $\dots \rightarrow V_{i+1}^* \xrightarrow{f_i^*} V_i^* \xrightarrow{f_{i-1}^*} V_{i-1}^* \rightarrow \dots$ è esatta.

Se W è sp. vett. allora anche

$$\dots \rightarrow V_{i-1} \otimes W \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \otimes W \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \otimes W \rightarrow \dots \text{ è esatta}$$

Esercizio: $0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_k \rightarrow 0$ esatta con $\dim V_i < +\infty$

Allora
$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0$$

TEOREMA: Una succ. esatta corta di compl. di coetene $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$
induce una succ. esatta lunga in coomologia del tipo

$$\dots \rightarrow H^i(A) \xrightarrow{f_*} H^i(B) \xrightarrow{g_*} H^i(C) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(A) \rightarrow \dots$$

DIM:

Costruiamo δ nel modo di sempre
e facciamo le verifiche come al solito.

TEOREMA (SUCCESIONE DI HATTE-VEITORS)

$M = U \cup V$ aperti. Date
d'coetene

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ i \nearrow & & \searrow \ell \\ U \cap V & & M = U \cup V \\ j \searrow & & \nearrow m \\ & V & \end{array}$$

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(i^*, m^*)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

è una succ. esatta, che quindi induce una succ. esatta lunga in coomologia

$$\dots \rightarrow H^k(M) \xrightarrow{(i^*, m^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

DIM: • (i^*, m^*) è iniettiva: se le restrizioni a U, V sono nulle allora la forma è nulla.

• $\text{Im}(i^*, m^*) = \text{Ker}(i^* - j^*)$:

⊕ via (restrizioni successive)

⊕ Due forme che coincidono sull'intersezione si rinecollano a forma globale

• $i^* - j^*$ è surgettiva:

Prendi $\{p_U, p_V\}$ partiz. di 1 subordinata a $\{U, V\}$

Se $w \in \Omega^k(U \cap V)$ allora $p_U \cdot w \in \Omega^k(U)$
 $p_V \cdot w \in \Omega^k(V)$

(estendendo a zero fuori dall'intersezione)

$$(i^* - j^*)(p_V w, -p_U w) = w.$$

Infatti

$$p_V w + p_U w = (p_V + p_U) w = w \quad \text{su } U \cap V.$$

oss. $[w] \in H^k(U \cap V)$, $\delta([w]) = -dp_V \wedge w = dp_U \wedge w$

PROPOSIZIONE: $H^k(S^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k=0, m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Dim:

$$U = S^m \setminus N$$

$$V = S^m \setminus S$$



$$U \cong \mathbb{R}^m$$

$$V \cong \mathbb{R}^m$$

$$U \cap V \cong S^{m-1} \times \mathbb{R} \sim S^{m-1}$$

m=1:

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^0(\mathbb{R}) & & H^0(\mathbb{R}) & & \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(S^1) & \rightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \rightarrow & H^0(U \cap V) \rightarrow \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & H^0(S^0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & & & & & & & \\ & & \rightarrow & H^1(S^1) & \rightarrow & H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R}) & \rightarrow & H^1(S^0) \rightarrow 0 \\ & & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & \Rightarrow H^1(S^1) = \mathbb{R}. \end{array}$$

m>1: Per induzione

$$\dots \rightarrow H^k(\mathbb{R}^m) \oplus H^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^k(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(S^m) \rightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}^m) \oplus H^{k+1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \dots$$

• Se $k \neq 0$ δ è suriettivo ($H^k(\mathbb{R}^m) = 0$)

~~$H^k(S^{m-1}) \rightarrow H^{k+1}(S^m) \rightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}^m) \oplus H^{k+1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \dots$~~

Per $k=0$ si ha $0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(S^m) \rightarrow 0$

PROPOSIZIONE:

$$H^k(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 0 \leq k \leq 2n \text{ e } k \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dim: m=1: $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ quindi ok.

m>1: Considera $\mathbb{CP}^m \supseteq H$ iperpiano proiettivo ($H = \{z_0 = 0\}$)

$$U = \mathbb{CP}^m \setminus H \cong \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$$

$$V = U \cap H \cong H$$

$$U \cap V = U \cap H$$

usando Poincaré...
Infatti:

[...]

LEMMA: $E \rightarrow M$ fibrato vettoriale, $E \sim M$ omotopicamente equivalenti.
 M è retratto di deformazione forte di E .

[...] Resta da capire chi è $U \cap V \dots$

Fatto questo si usa Mayer-Vietoris e si chiude.

[...]

[...] l'interazione fa scifo.

Combiniamo gli sport.

$$H \subseteq \mathbb{CP}^n, \quad H = \{x_0 = 0\}, \quad P = [1, 0, \dots, 0]$$

$$U = \mathbb{CP}^n \setminus H \cong \mathbb{C}^n$$

$V = \mathbb{CP}^n \setminus \{p\}$ é um \mathbb{C} -fibrato su $H \Rightarrow V \simeq H \simeq \mathbb{CP}^{n-1}$

$$U_n V \cong \mathbb{C}^m \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\} \cong S^{2m-1} \times \mathbb{R} \cong S^{2m-1}$$

Guardando la successione di Mayer-Vietoris e cambiando l'ipotesi induttiva si ottiene la tesi.

COROLLARIO: $\mathbb{C}P^n \simeq S^{2n} \quad \forall n \geq 2$

COMOLOGIA A SUPPORTO COMPATTO

$\Omega_c^k(M) = \{k\text{-forme a support compacto}\}$ Il différentiel maintient la propriété d'être a support compacto.

$$H_c^k(M) := H^k(\Omega_c^*(M))$$

oss. Se $M = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_k$, $\Omega_c^k(M) = \bigoplus_{i=1}^k \Omega_c^k(M_i)$ e $H_c^k(M) = \bigoplus_{i=1}^k H_c^k(M_i)$

PROPOSIZIONE:

M connesso, $H_c^p(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } M \text{ è cpt} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

D.M: $H_c^0(M) = \{ f \in C_c^\infty(M) \text{ loc. constant} \}$, da cui le tes

PROPOSIZIONE:

$$H_c^k(R) = \begin{cases} R & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dim: C'è solo da dimostrare che $H_c^1(R) = R$


Considerations

$$\int_{\mathbb{R}} : H_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

(è ben definito perché
non fa nulla e sup. est.
e sui bordi fa zero)

iii) Surgettiva perché \exists w tale che

$$\int_{\mathbb{R}} w > 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} w > 0 \quad (w = p \, dx \text{ for } p \text{ --- )$$

È anche iniettiva:

Se $\int w = 0$, $w = f(x)dx$ con $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è tale che $dF = w$.

LEMMA:

$H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ dove $\eta \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} \eta \neq 0$
 $[w] \mapsto [w \wedge \eta]$

è un isomorfismo $\forall k \geq 0$.

COROLLARIO:

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

OSS. $H_c^k(M)$ NON è invariante omeomorfo.

FUNTORIALITÀ?

$f: M \rightarrow N$ NON induce $f^*: H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$ perché non induce

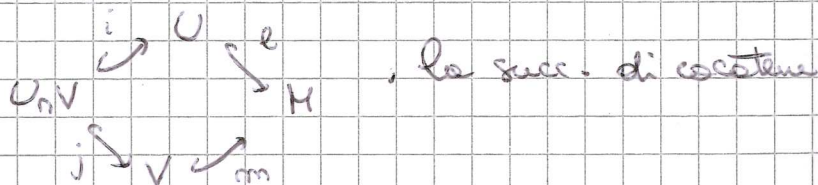
$f^*: \Omega_c^k(N) \rightarrow \Omega_c^k(M)$ (se f è proprio allora sì)

Se $U \subset M$ aperto, $i: U \hookrightarrow M$ induce $i_*: H_c^k(U) \rightarrow H_c^k(M)$ perché

induce $i_*: \Omega_c^k(U) \rightarrow \Omega_c^k(M)$ estensione a zero su $M \setminus U$.

TEOREMA (MAYER-VIETORIS):

$M = U \cup V$ aperti. Date



$$0 \rightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(i_*, j_*)} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{e_* - m_*} \Omega_c^*(M) \rightarrow 0$$

è esatta.

DIM: • (i_*, j_*) è iniettiva perché lo sono i_* e j_*

• $\text{Im}(i_*, j_*) = \text{Ker}(e_* - m_*)$:

① ovvio

② Fuori da $U \cap V$ le forme devono essere nulle su $U \cap V$ coincidono quindi vengono dalla stessa

• $e_* - m_*$ è surgettiva:

Come l'altra volta, usando partizione dell'unità

DUALITÀ DI POINCARÉ

Da ora in poi M è orientata e senza bordo

Consideriamo la forma bilineare

$$H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \xrightarrow{\langle, \rangle} \mathbb{R}$$

$$(w, \eta) \mapsto \int_M w \wedge \eta$$

(ha senso perché $w \wedge \eta \in \Omega_c^n(M)$
e M senza bordo, orientata)

Possiamo per notazione $\int_M w \wedge \eta =: \langle w, \eta \rangle$

Def Siano U, V sp. vett. $\langle, \rangle: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è non degenera se

$U \rightarrow V^*$ è un isomorfismo

$$u \mapsto (v \mapsto \langle u, v \rangle)$$

TEOREMA:

PD: $H^k(M) \rightarrow (H_c^{n-k}(M))^*$ è un isomorfismo.
 $\forall k=0, \dots, n$
 $w \mapsto (\eta \mapsto \langle w, \eta \rangle)$

LEMMA: M^n varietà. Sia A un insieme di aperti di M t.c.

1) Se $U \subseteq M$ è diffeomorfo a \mathbb{R}^n allora $U \in A$

2) Se $U, V, U \cup V \in A$ allora $U \cap V \in A$

3) Se $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq A$ tutti disgiunti, allora $\bigcup_{i \in I} U_i \in A$

Allora $M \in A$.

Dim: Step 1: Se $U_1, \dots, U_k \in A$ così come tutte le loro intersezioni, allora $U_1 \cup \dots \cup U_k \in A$

Step 2: Se $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq A$ t.c. $\overline{U_i}$ cpt e loc. finite e tutte le intersezioni (finite) stanno in A , allora

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \in A$$

Step 3: Se $U \subseteq M$ aperto è diffeomorfo a $V \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $U \in A$

Step 4: $M \in A$

□ Semplice esercizio

□ Definiamo $W_1 = U_1$, $W_{i+1} = U \setminus \bigcup_{j=1}^i W_j$ (o $U_j \cap W_i \neq \emptyset$ e $U_j \not\subseteq W_i$)

Possiamo $Z_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_{2i+1}$ $Z_2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_{2i}$

$W_i \in \mathcal{A} \quad \forall i$ $\leftarrow \begin{matrix} i \text{ W sono disgiunti} \\ W_{\text{disj}} \\ W_{\text{disj}} \end{matrix}$

$$Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}, Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{A}$$

[3] U è unione loc. finita di multirettangoli
(Usando eshaustione in cpt). Si usa lo Step 2.

[4] Consideriamo un ricoprimento adeguato

$$\{U_i\}_{i \in I} \Rightarrow M = \bigcup_{i \in I} U_i \quad (U_i \cong V_i \subseteq \mathbb{R}^n)$$

Usando gli step 2,3 si ottiene quanto voluto

DM: Sia $B = \{U \subseteq M \text{ su cui } PD \text{ è isomorfismo}\}$
 $(PD_U : H^k(U) \rightarrow (H_c^{n-k}(U))^*)$

Mostriamo che per B vale il lemma:

$$1) \quad PD_{\mathbb{R}^n} : H^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow (H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n))^*$$

Per $k \neq 0$ sicuramente è isomorfismo (senza nulla)

Per $k=0$ basta vedere che $PD_{\mathbb{R}^n}$ è non nullo

Basta cioè trovare ω, η tali che $\langle \omega, \eta \rangle \neq 0$

Ad esempio, $\omega \equiv 1$, η una qualsiasi n -forma a supp. cpt.
 tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \neq 0$. (tip. una comparsa)

2) Usiamo Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cup V) & \rightarrow & H^k(U \cup V) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow \dots \\ \downarrow \text{SH} \downarrow \text{PD} \downarrow \text{PD} \downarrow \text{SH} & & \downarrow \text{SH} \downarrow \text{PD} & & \downarrow \text{PD} & & \downarrow \text{SH} \downarrow \text{PD} \downarrow \text{SH} \\ \dots \rightarrow H_c^{k-1}(U) \oplus H_c^{k-1}(V)^* & \rightarrow & H_c^{k-1}(U \cup V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U \cup V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* \rightarrow \dots \end{array}$$

Per il lemma dei 5 anche in mezzo c'è isomorfismo
 è la successione duale di Mayer-Vietoris per coomologia compatta

3) Osserviamo che vale (è vero già a livello di forme)

$$H^k\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \prod_{i \in I} H^k(U_i)$$

$$H_c^k\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigoplus_{i \in I} H_c^k(U_i)$$

Usando che $(\bigoplus_{i \in I} V_i)^* = \prod_{i \in I} V_i^*$ si ottiene la tesi.

ISTGEO - LEZIONE 25

COROLLARIO: $\dim H^k(M) = \dim H_c^{n-k}(M) \quad \forall k$

COROLLARIO: $M \text{ cpt} \Rightarrow b^k(M) = b^{n-k}(M)$

Inoltre se M compatta $b_0(M) = b^n(M) = 1$

COROLLARIO: $M \text{ cpt} \Rightarrow b^i(M) < +\infty \quad \forall i$

Dim:
$$H^k(M) \xrightarrow[\text{PD}]{\cong} H^{n-k}(M)^* \xrightarrow[\text{PD}]{\cong} H^k(M)^{**}$$

inclusioni naturali

Vale che $i: V \hookrightarrow V^{**}$ isomorfismo $\Leftrightarrow \dim V < +\infty$

COROLLARIO: $\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b^i(M)$ ha senso

COROLLARIO: M cpt orientabile senza bordo. Se $\dim M = 2m+1 \Rightarrow \chi(M) = 0$

$H^k(M) \times H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare non degenera

(M cpt orientabile senza ∂). Se $n=2k$ si ottiene

$H^k(M) \times H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare non degenera su $H^k(M)$

• Se k dispari, la forma è antisimmetrica (simplettica)

• Se k pari, la forma è simmetrica (prodotto scalare) (non degenera)

Infatti $\langle \omega, \eta \rangle = (-1)^{k^2} \langle \eta, \omega \rangle$

PROPOSIZIONE: Sia $\dim V < +\infty$.

• Se esiste forma simplettica, allora $\dim V$ è pari e la forma è (a meno di cambio base)

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

• I prodotti scalari sono (a meno di cambi base)

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}$$

$\sigma = p - m$ si dice segnatura

FORMULA DI KÜNNETH

$$\begin{array}{ccc} M \times N & & (\text{qualsiasi}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & & N \end{array}$$

$$\Omega^k(M) \times \Omega^h(N) \rightarrow \Omega^{k+h}(M \times N)$$

$$(\omega, \eta) \mapsto (\pi^* \omega) \wedge (\pi^* \eta)$$

è bilineare associativa ed è commutativa

universale del Teorema dopo essere passato in coomologia
 la soluzione (il teorema definito tramite prop. univ., per spazi
 di dimensione infinite la definizione fatta nelle prime lezioni
 non funziona). Si ottiene

$$\bigoplus_{k,h} H^k(M) \otimes H^h(N) \rightarrow H^*(M \times N)$$

$$\stackrel{1)}{\left(\bigoplus_k H^k(M) \right) \otimes \left(\bigoplus_h H^h(N) \right)}$$

$$\stackrel{2)}{H^*(M) \otimes H^*(N)}$$

TEOREMA (di KUNNETH): Se $b^i(N) < +\infty \quad \forall i$,

$$H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N) \quad \text{è isomorfismo}$$

Dim:

La dimostrazione è la stessa di PD, usando il lemma per
 l'induzione sugli aperti.

COROLLARIO:

$$\sum_{h=0}^k b^h(M) b^{k-h}(N) = b^k(M \times N)$$

Esempio: $b^0(S^1 \times S^1) = 1$ è connesso

$$b^2(S^1 \times S^1) = 1 \quad \text{per PD}$$

$$b^1(S^1 \times S^1) = b^0(S^1)b^1(S^1) + b^1(S^1)b^0(S^1) = 2$$

Esercizio: $b^i(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n) = \binom{n}{i}$

Esempio: $M = S^2 \times S^2$

$$b^0(M) = 1$$

$$b^1(M) = 0$$

$$b^2(M) = 2$$

$$b^3(M) = 0$$

$$b^4(M) = 1$$

Quindi $S^4 \simeq \mathbb{C}P^2 \simeq S^2 \times S^2$ per via del b^2 :

$$b^2(S^4) = 0, \quad b^2(\mathbb{C}P^2) = 1, \quad b^2(S^2 \times S^2) = 2.$$

Esercizio: (Mayer-Vietoris) M, N connessi cpt orientati senza bordo

$$b^i(M \# N) = b^i(M) + b^i(N) \quad \forall 0 < i < n$$

COROLLARIO: $b^0(S_g) = 1$, $b^1(S_g) = 2g$, $b^2(S_g) = 1$.

Def M^{4m} cpt orientabile senza bordo. La segnatura di M è
 $\sigma(M) = \text{segnatura di } \langle, \rangle \text{ su } H^{2m}(M)$

oss- $\sigma(-M) = -\sigma(M)$. Infatti

$$\langle \omega, \eta \rangle_M = \int_M \omega \wedge \eta = - \int_{-M} \omega \wedge \eta = - \langle \omega, \eta \rangle_{-M}$$

COROLLARIO: M^{4m} cpt orientabile senza bordo. Se è specchiabile
 allora $\sigma(M) = 0$.

oss. Se $b^2(M^4)$ è dispari allora M non è specchiabile (gli indici di positività e negatività non coincidono)

Esempio: \mathbb{CP}^2 non è specchiabile.

M^m varietà qualsiasi cpt, $S \subseteq M$ sottovarietà cpt, orientata senza bordo, $\dim S = k$.

$\int_S : \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ per Stokes passa in coomologie

$$\Rightarrow \int_S : H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ cioè } \int_S \in H^k(M)^* = H^{m-k}(M)$$

Quindi $\int_S = [S] \in H^{m-k}(M)$ è rappresentata da una $(m-k)$ -forma

$$\omega_S \text{ tale che } \int_M \omega_S \wedge \eta = \int_S \eta \quad \forall \eta \in H^k(M)$$

Chi è ω_S ?

L'idea è considerare un intorno tubolare di S (le fibre hanno dim $m-k$)
 e su ogni fibra considerare una forma a compenso

$$S = \{\text{pt}\} \quad [S] \in H^m(M) = \mathbb{R} \quad \omega_S \text{ è forma volume con } \int_M \omega_S = 1$$

$$S = M \quad [M] \in H^0(M) = \mathbb{R} \quad \omega_S \text{ è la costante } 1.$$

$M \supseteq W, N$, con tutte orientate e cpt, $W \cap N$, $S := W \cap N$. S ha orientazione indotta

(anche nel caso di $S = \{\text{punti}\}$ $\uparrow \rightarrow \vec{\sigma}$, $\leftarrow \uparrow \vec{\sigma}$)

$$[W] \in H^w(M)$$

$$[N] \in H^n(M)$$

$$[S] \in H^{w+n}(M)$$

$$\text{Vale che } [W] \wedge [N] = [W \cap N]$$

TEORIA DELL'INTERSEZIONE

Esempio: Se $W^k, M^{n-k} \subseteq N^n$ $[W] \in H^{n-k}(N)$
 orientate cpt senza ∂ $[M] \in H^k(N)$

$$[W] \wedge [M] \in H^n(N) = \mathbb{R}$$

Se $W \cap M$ allora $W \cap M = \{p_1, \dots, p_r\}$ con segni

Quindi $[W \cap M] = \sum_{i=1}^r \text{segno}(p_i) =: i(W, M)$ detta intersezione algebrica
 $[W] \wedge [M]$

PROPOSIZIONE: $M \xrightleftharpoons[j]{i} N$ embedding omostop. Allora $[i(M)] = [j(M)]$

Dim: $F: M \times [0,1] \rightarrow N$ esiste (posso...)

$$[i(M)](\eta) = \int_M i^*(\eta) = \int_M j^*(\eta) \quad \forall \eta \in H^k(N)$$

Usiamo Stokes:

$$\int_M i^*(\eta) - \int_M j^*(\eta) = \int_{\partial(M \times [0,1])} F^*(\eta) = \int_{M \times \{0,1\}} dF^*(\eta) = \int_{M \times \{0,1\}} F^*(d\eta) = \int_{M \times \{0,1\}} F^*(0) = 0$$

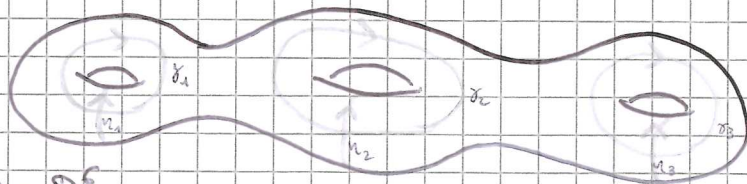
COROLLARIO: $i(W, M) = i(W', M)$ se W' è omostop a W .

APPLICAZIONE 1:

$$H^1(S_g) \cong \mathbb{R}^{2g}$$

Se $g=3$ c'è una forma symplectica:

come è fatto?



$$[\gamma] \in H^1(S_3) \cong \mathbb{R}^6$$

Guardando le intersezioni algebriche prendendo come base $\{[\gamma_1], [\gamma_2], [\gamma_3], [\eta_1], [\eta_2], [\eta_3]\}$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & & \\ & & & \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(In realtà prima vediamo la forma, poi deduciamo che è una base)

APPLICAZIONE 2: In \mathbb{CP}^2 , $C_d = \{P(x) = 0 \text{ omogeneo di grado } d\}$

Se p è preso in modo generico, C_d è liscia. È una superficie cpt orientabile

Spostate un po' per omostopia

Vale che $C_d \cong S_{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}$. Chi è $[C_d] \in H^2(\mathbb{CP}^2) \cong \mathbb{R}$?

$$[C_1] \wedge [C_1] = 1 \Rightarrow [C_1] \text{ generatore di } H^2(\mathbb{CP}^2)$$

retta proiettiva

di punti (in \mathbb{C} tutto è +)

[...] Quindi si ottiene in pratica il teorema di Bézout:

C_d e $C_{d'}$ generiche si intersecano in $d \cdot d'$ punti.

VARIETÀ RIEMANNIANE

Def Una varietà Riemanniana è una coppia (M, g) con M varietà liscia e g è tensore metrico su M , cioè $g \in \Gamma(S^2(TM))$ t.c.

$$\forall p \in M \quad g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita positiva}$$

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle = g_p(v, w)$$

Def Una varietà Lorentziana è una (M, g) con g che ha signature $(n-1, 1)$ in ogni punto.

OSS. Data M , \exists sempre g metrico (non unico). Non è vero per le Lorentziane.

Def Una isometria $f: M \rightarrow N$ fra varietà Riemanniane è un diffeomorfismo tale che $\forall p \in M \quad \forall v, w \in T_p M \quad \langle v, w \rangle = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle$

Def Una $f: M \rightarrow N$ è isometria locale in $p \in M$ se $\exists U(p)$ t.c. $f|_{U(p)}: U(p) \rightarrow U(f(p))$ è isometria.

Def Una $f: M \rightarrow N$ è isometria locale se lo è in ogni punto.

OSS. (M, g) Riemanniana, $N \subseteq M$ sottovarietà liscia. Allora $(N, g|_N)$ è Riemanniana (per le Lorentziane non vale).

$g|_N(p)$ è la restrizione di g su $T_p N \subseteq T_p M$

Esempio: (\mathbb{R}^n, g_E) esempio fondamentale.

$g_E(x)$ è il prodotto scalare euclideo su $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

$$\langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^n y^i y^i = \delta_{ij} y^i y^j$$

Ovvero $g_E(x)$ è la matrice δ_{ij} .

Quindi qualsiasi $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ha naturale struttura di varietà Riemanniana.

Esempio: M, N Riemanniane $\Rightarrow M \times N$ ha naturale struttura di varietà Riemanniana (con tensore metrico che fa la somma di quelli singoli)

OSS. $f: M \rightarrow N$ diffeo. Ogni campo tensoriale si trasporta, quindi vale che ogni tensore metrico g su M induce $f_* g$ su N t.c. $\forall p \in M \quad \forall v, w \in T_p M$

$$\langle v, w \rangle = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle. \text{ Quindi } f \text{ diventa isometria automaticamente.}$$

In certe si ha allora
$$\begin{array}{ccc} M \supseteq U & \xrightarrow{f} & V \subseteq \mathbb{R}^n \\ g|_U & \rightsquigarrow & g \end{array}$$
 con g su V che è

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

matrice simmetrica che varia con il punto

Adesso su TM c'è $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quindi $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ e quindi scegli tre vettori.

Def $\gamma: I \rightarrow M$ riemanniana, $L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt$ è la lunghezza della curva
 \uparrow
 $\|d\gamma_t(1)\|$

PROPOSIZIONE:

$L(\gamma)$ non dipende dalla parametrizzazione, ovvero se $\varphi: J \rightarrow I$ diffeom.

$L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$. In realtà basta φ monotona surgettiva

(riparametrizzazione in senso più largo).

Def Una distanza su una (M, g) , con M connesso si definisce come

$$\forall p, q \in M \quad d(p, q) = \inf_{\substack{\gamma \text{ c.c.} \\ \text{collega } p \text{ e } q}} \{L(\gamma)\}$$

oss. Non è detto che l'inf sia un minimo. Ad esempio in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$d((-1,0), (1,0)) = 2$ ma non ci sono curve di lunghezza 2.

PROPOSIZIONE:

(M, d) è spazio metrico e inoltre induce la topologia di M .

DIM: • $p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0$

Prendiamo corte intorno a p che non contenga q

$\varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considero $B(\varphi(p))$.

Una curva che va da p a q deve uscire da $\varphi^{-1}(B(\varphi(p)))$.

Vediamo che queste curve devono essere lunghe almeno un certo ε .

Consideriamo $g_{ij}(x)$ in corte. Si ha anche $g_{ij}(x)$.

Le norme in \mathbb{R}^n sono tutte equivalenti, quindi $\exists M > m > 0$

tali che $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad m \|v\|_{Eucl} \leq \|v\|_g \leq M \|v\|_{Eucl}$

(con $g = g_{ij}(x) \quad \forall x \in B(\varphi(p))$) (compattezza)

Quindi

$$m \leq m \underbrace{L_{Eucl}(\alpha)}_{\geq 1} \leq L_g(\alpha) \leq M L_{Eucl}(\alpha)$$

Quindi $d(p, q) > m$.

- $d(p, q) = d(q, p)$ ovvio (riparametrizzazione)
- $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ perché si uniscono le curve (riparametrizzazione)
- d è compatibile con la topologia (si fa simile al primo punto)

Dobbiamo verificare che $\{\text{Dischi}(p, r) \mid r > 0\}$ è base di aperti.

Def. Dato (M, g) , c'è una naturale forma volume $\omega_g \in \Gamma \wedge^n M$ definita da M orientata

$$\forall p \in M \quad \omega_g(p)(v_1, \dots, v_n) = 1 \quad (\omega_g(p) \in \wedge^n(T_p M) \cong \mathbb{R})$$

base ortogonale
positiva

Proposizione: In carte orientate $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $\omega = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

Dim: $\sqrt{\det g_{ij}}$ geometricamente è il volume dell'ipercubo e_1, \dots, e_n nella metrica del punto.

Passando da e_1, \dots, e_n ad una base ortogonale (rispetto a g_{ij}) (cambiando carta wlog) (thin spettrale, si cambia base tramite matrici con determinante 1, quel numero non cambia)

A questo punto si ha il volume dell'ipercubo v_1, \dots, v_n e g_{ij} è diventato $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, quindi il volume è il prodotto delle lunghezze dei lati: $\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \sqrt{\det g_{ij}}$.

Quindi in carte

$$\text{Vol}(U) = \int_U \sqrt{\det g}$$

CONNESSIONI

Avevamo definito la derivata di Lie $L_X(Y) (= [X, Y])$. Era una def locale.

Def M liscia. Una connessione è un operatore ∇ che, dati $p \in M$, $v \in T_p M$, $X \in \mathcal{X}(U)$ definisce un vettore $\nabla_v(X) \in T_p(M)$ tale che

- 1) se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ che coincidono su un intorno di p , allora

$$\nabla_v(X) = \nabla_v(Y)$$

- 2) $\nabla_v(X)$ è lineare in X e in v

- 3) $\forall f \in C^\infty(U) \quad \nabla_v(fX) = v(f)X(p) + f(p)\nabla_v(X)$

- 4) $\nabla_v(X)$ cambia in modo liscio rispetto a p , cioè

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(U) \quad \nabla_Y(X) \in \mathcal{X}(U)$$

SIMBOLI DI CHRISTOFFEL

In corte, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, g_{ij} , ∇ connessione.

Def. I simboli di Christoffel sono $\forall x \in U$ tali che

$$\nabla_{e_i} (e_j) = \Gamma_{ij}^k(x) e_k \quad (\text{è somma su } k)$$

$\begin{matrix} e_i & & e_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{vettore} & & \text{vettore} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} & \uparrow & \\ & \text{campo} & \end{matrix}$

Oss. $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ liscio è equivalente alla condizione 4.

Proposizione: La connessione ∇ in corte è determinata da Γ_{ij}^k .

Dire: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, X campo, $v \in \mathbb{R}^n$ in un punto p

$$\begin{aligned} \nabla_v X &= v^i \nabla_{e_i} X = v^i \nabla_{e_i} (X^j e_j) = \\ &= v^i \left(X^j(p) \nabla_{e_i} (e_j) + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(p) e_j \right) = \\ &= v^i \left(X^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) e_k + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(p) e_j \right) = \\ &= v^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i}(p) + X^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) e_k = \\ &= \underbrace{v^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}}_{\text{Derivate direzionali di } X \text{ lungo } v} e_k + \underbrace{X^j \Gamma_{ij}^k v^i}_{\text{fattori di connessione}} e_k \end{aligned}$$

Oss. In realtà comunque scelte $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ liscie queste definiscono una connessione.

Esercizio: Cambiando corte $\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$ si ottiene

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^j} \Gamma_{pq}^k \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^r} + \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \hat{x}^i \partial \hat{x}^j}$$

PROPOSIZIONE: $\nabla_v X$ dipende soltanto da $v \in T_p M$ e dalla restrizione di X ad una qualsiasi curva γ con $\gamma'(t_0) = v$, $\gamma(t_0) = p$.

Dim.: Nelle corte è vero, essendo

$$\nabla_v X = v^i \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x_i}}_{\substack{\text{è la derivata} \\ \text{direzionale} \\ \text{classica}}} + v^i X^j \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\substack{\text{dipende solo dal} \\ \text{valore di } X \text{ nel punto}}} e_k$$

Def Data (M, ∇) , $\gamma: I \rightarrow M$ immersa (cioè regolare, $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$).

Un campo lungo γ è una funzione $X: I \rightarrow TM$ tale che $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$.

Oss. Se γ è embedding, è equivalente ad un campo vettoriale definito su $\gamma(I)$.

Esempio: $X = \gamma'(t)$ campo tangente

Def $\gamma: I \rightarrow M$, X campo su γ . $\frac{DX}{dt}$ è un altro campo su γ ottenuto derivando X , ovvero: la definizione è locale (e γ localmente è embedding), quindi localmente X è un campo vettoriale su $\gamma(I)$.

Lo possiamo estendere a $X \in \mathcal{X}(U(p))$. Prendiamo allora ($p = \gamma(t_0)$)

$$\frac{DX}{dt}(t_0) \in T_p M \quad \text{come} \quad \frac{DX}{dt}(t_0) := \nabla_{\gamma'(t_0)} X$$

Oss. È una buona definizione per quanto detto sopra

In corte vale:

$$\frac{DX}{dt}(t) = \gamma'(t)^i \frac{\partial X}{\partial x_i} + \gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

Def X è parallelo se $\frac{DX}{dt} = 0$.

PROPOSIZIONE: $\gamma: I \rightarrow M$, $\forall t_0 \in I$, $\forall v \in T_{\gamma(t_0)} M$ esiste un unico campo su γ X con $X(t_0) = v$ e parallelo.

Dim.: X è parallelo \Leftrightarrow localmente $\gamma'(t)^i \frac{\partial X}{\partial x_i} + \gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k = 0$

Questa è equazione lineare del primo ordine, quindi c'è esistenza e unicità della soluzione (che esiste globalmente per la linearità dei coefficienti). Quindi $\exists! X: I \rightarrow TM$

Def Il trasporto parallelo tramite $\gamma: I \rightarrow M$ tra $t_0, t \in I$ è
 $\Gamma_{t_0}^t(\gamma): T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ definita prendendo $v \mapsto X(t)$ con

X l'unico campo parallelo che estende v .

PROPOSIZIONE: $\Gamma_{t_0}^t(\gamma)$ è un isomorfismo.

Dim: la linearità è data dal fatto che l'equazione differenziale è lineare.

Inoltre $\Gamma_t^{t_0}(\gamma)$ è la sua inversa

TORSIONE

$(M, \nabla) \rightsquigarrow$ campo tensoriale T di tipo $(1, 2)$ ("torsione")

Def $T(p)(v, w) = \nabla_v Y - \nabla_w X - [X, Y](p)$

$\forall p \in M, \forall v, w \in T_p M$ con $X, Y \in \mathcal{X}(U(p))$ che estendono v, w

PROPOSIZIONE: Non dipende dalle estensioni X e Y .

Dim: In corte

$$\begin{aligned} T(p)(v, w) &= v^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} + v^i \overset{w^j}{\Gamma_{ij}^k} e_k - w^i \frac{\partial X}{\partial x^i} - w^i \overset{v^j}{\Gamma_{ij}^k} e_k - \\ &\quad - \overset{v^i}{X^i(p)} \frac{\partial Y}{\partial x^i} + \overset{w^i}{Y^i(p)} \frac{\partial X}{\partial x^i} = \\ &= v^i w^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i v^j \Gamma_{ji}^k e_k = v^i w^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) e_k \end{aligned}$$

Quindi non dipende da X e Y

oss. In corte le coordinate di T sono

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

Def ∇ è simmetrica se $T \equiv 0$.

(ovvero se $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ovunque in corte)

Def (M, g, ∇) . ∇ è compatibile con g se tutti i $\Gamma_{t_0}^t(\gamma)$ sono isometrie (per ogni curva e per ogni coppia di punti)

TEOREMA: Data (M, g) , esiste ed è unica ∇ simmetrica e compatibile con g . Si chiama connessione di Levi-Civita e in coordinate

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

$(g_{ij} g^{jl} = \delta_i^l)$

Proposizione: Dato (M, g, ∇) , ∇ è compatibile $\Leftrightarrow \forall \gamma: I \rightarrow M, \forall X, Y \in \mathcal{X}_\gamma$

$$\forall t \in I \quad \frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{DY}{dt}(t) \right\rangle$$

Dim:

① Prendendo X, Y paralleli, si ha

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = 0 \quad \text{cioè il prodotto scalare}$$

rimane costante. Quindi i trasporti paralleli sono isometrici.

② Fisso $t_0 \in I$, e_1, \dots, e_m ortonormale su $T_{\gamma(t_0)} M$ e

le estendo per trasporto parallelo a tutto I .

Quindi $X = X^i e_i, Y = Y^i e_i$ (Y^i e e_i dipendono dal tempo)

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \frac{d}{dt} (X^i Y^j g_{ij})$$

$$\frac{DX}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} (X^i e_i) = \frac{dX^i}{dt} e_i$$

\nwarrow \nearrow
 Leibnitz campo parallelo

Da questo si ottiene la tesi.

Proposizione: (M, g, ∇) . ∇ è compatibile con $g \Leftrightarrow \forall p \in M, \forall v \in T_p M, \forall X, Y \in \mathcal{X}(U_p)$

$$v(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_v X, Y \rangle + \langle X, \nabla_v Y \rangle$$

Dim: Segue immediatamente dalla proposizione sopra.

Proposizione: (M, g, ∇) . ∇ è compatibile se e solo se

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}$$

Dim: Osserviamo che la caratterizzazione di prima vale se e solo se vale per $v = e_i$ (per linearità).

$$e_i(\langle X, Y \rangle) = \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{jk} X^j Y^k) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} X^j Y^k + g_{jk} \frac{\partial X^j}{\partial x_i} Y^k + g_{jk} X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x_i}$$

$$\langle \nabla_{e_i} X, Y \rangle = g_{jk} \left(\frac{\partial X^j}{\partial x_i} Y^k + X^l \Gamma_{il}^j Y^k \right) = \dots \quad (\text{Viene}) \quad [\text{Da finire...}]$$

→ Dim: Unicità: Usando la caratterizzazione precedente con i, j, k permutati ciclicamente

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 2 \Gamma_{ij}^k g_{kl}$$

Esistenza: In una carta, Γ_{ij}^k definito come nell'enunciato è simmetrico e compatibile. Si ricollano bene grazie all'unicità.

Oss. $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ sono tutte bilineari

$$(X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

$$\longmapsto \nabla_X Y : p \longmapsto \nabla_{X(p)} Y \text{ dipende da } X(p) \text{ e } Y \text{ in un intorno}$$

$$\longmapsto T(X, Y) \text{ dipende solo da } X(p) \text{ e } Y(p)$$

In più $T(X, Y)$ è $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineare: $T(fX, gY)(p) = f(p)T(X, Y)(p)g(p)$

Perché chiedere $T \equiv 0$?

1) è canonica: $f: M \xrightarrow{\cong} N$ isometria manda $\overset{\text{Levi-Civita}}{\nabla^M}$ in ∇^N

2) connessioni compatibili con g hanno le stesse geodetiche

3) la connessione di Levi-Civita si comporta bene con le sottovarietà

PROPOSIZIONE: (M, g) , $N \subseteq M$. Sia $p \in N$, $v \in T_p N$, X campo su N vicino a p

Allora per ogni estensione di X ad un campo locale su M vale

$$\nabla_v^N(X) = \pi \circ \nabla_v^M(X) \text{ con } \pi \text{ proiezione ortogonale}$$

DIM: Si definisce la connessione su N

$$\nabla_v(X) := \pi \circ \nabla_v^M(X)$$

Si verifica che ∇ è connessione su N compatibile e simmetrica

$$\Rightarrow \nabla^N = \nabla$$

Esempio: $M = \mathbb{R}^m$, $g = g^{\text{E}}$, ∇ = derivata direzionale. Infatti $\Gamma_{ij}^k = 0$

$$\text{Se } N \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow \nabla_v^N(X) = \pi \circ \frac{\partial X}{\partial v}$$

GEODETICHE

Def $\gamma: I \rightarrow M$ è una geodetica se $\gamma': I \rightarrow TM$ campo tangente è parallelo. Una geodetica è massimale se non è estendibile a geodetica con dominio più grande

PROPOSIZIONE: Dato $p \in M$, $v \in T_p M$ $\exists!$ geodetica $\gamma_v: I_v \rightarrow M$ t.c.

$$\gamma_v(0) = p \text{ e } \gamma'_v(0) = v.$$

DIM: Localmente: $X = \dot{\gamma}(t)$ è parallelo \Leftrightarrow

$$0 = \ddot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t)^i \dot{\gamma}(t)^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

$$\Leftrightarrow \forall k=1, \dots, m$$

$$\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0$$

\exists un'equazione differenziale 2° ordine.

$\Rightarrow \exists!$ soluzione massima con dati iniziali dati.

OSS. $\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$. Infatti se $\nabla_v X = 0$, allora $\nabla_{c_1 v} c_2 X = c_1 c_2 \nabla_v X = 0$

OSS. Se $v=0$ $\gamma_v(t) \equiv p$.

OSS. Se (M, g) riemanniana e ∇ Levi-Civita allora $\|\gamma_v(t)\| = \text{costante} = \|v\|$

Segue dalla compatibilità di ∇ con g .

Esempio: (\mathbb{R}^n, g^E) . $\ddot{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow$ le geodetiche sono le rette percorse a velocità costante

Esempio: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ $\gamma: I \rightarrow N$ geodetica $\Leftrightarrow \pi \circ \ddot{\gamma}(t) = 0$, cioè $\ddot{\gamma}(t) \perp_{T_{\gamma(t)} N} \forall t$

FLUSSO GEODETICO

Dato $v \in TM$ $\exists! \gamma_v: I_v \rightarrow M$ geodetica $\leadsto \gamma'_v: I_v \rightarrow TM$.

Def Definiamo X campo su TM , detto campo geodetico, come $X(v) = d(\gamma'_v)$.

Def Il flusso geodetico è il flusso Φ di X ,

$$\Phi: U \rightarrow TM \quad \text{con} \quad U \subseteq \underbrace{TM \times \mathbb{R}}_{TM \times \{0\}} \quad \text{e tale che} \quad \bigcup_{v \in U} \{v\} \times \mathbb{R} = I_v.$$

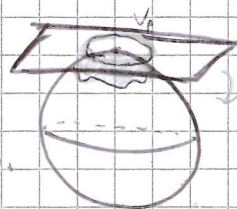
Consideriamo $V = \{v \in TM \mid I_v \ni 1\} = \{v \in TM \mid v \times \{1\} \in U\}$ e definiamo

$$\exp: V \rightarrow M \quad \text{mappe esponenziale} \\ v \mapsto \gamma_v(1)$$

Def $\forall p \in M$ chiamiamo $\exp_p: V_p \rightarrow M$ con $V_p = V \cap T_p M$ la restrizione della mappa esponenziale sopra.

Proposizione: $V_p \ni 0$ aperto stellato. Inoltre $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$

$\forall t \in [0, 1]$. Inoltre \exp_p è diffeomorfismo locale in $0 \in T_p M$.



Incontro dell'uso di Riquadro

Dim: Che sia un aperto stellato segue da

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t). \quad \text{Per il secondo punto}$$

$$d\exp_p: T_p M \rightarrow T_p M \quad \text{vale che è l'identità.}$$

$$\left(\text{Sarebbe } d\exp_p: T_p M \rightarrow T_{\exp_p(p)} M \right)$$

SPAZIO IPERBOLICO

3 modelli (cioè varietà isometriche) per lo spazio iperbolico

IPERBOLOIDE:

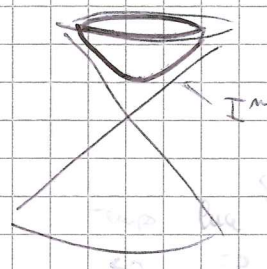
Consideriamo $R^{m,1} := (R^{m+1}, g^L)$ con $g^L(x,y) = \sum_{i=1}^m x^i y^i - x^{m+1} y^{m+1}$
una metrica lorentziana.

$$I^m := \{x \in R^{m,1} \mid \langle x, x \rangle = -1\} \cap \{x_{m+1} > 0\}$$

Oss. $I^m \subseteq R^{m,1}$ è riemanniana. Infatti

$\forall v \in I^m$, $T_v I^m = v^\perp$ è di tipo spazio

Quindi $g^L|_{T_v I^m}$ è definita positiva.



PROPOSIZIONE:

$Isom(H^m \times R^m \times S^m)$ agisce in modo transitivo sui frame, intesi come $p \in M$, $v_1, \dots, v_m \in T_p M$ ormonale.

TEOREMA (MYERS-STENROD '60): (M, g) riemanniana $\Rightarrow Isom(M)$ gruppo di Lie

\rightarrow Dim: Per R^m lo sappiamo già.

In generale dobbiamo vedere che $Isom(H^m \times S^m)$ agisce transitivamente sui punti e che $Stab(p)$ agisce transitivamente sui frame.

Per S^m si sa che $Isom(S^m) \cong O(m+1)$. Lei agisce transitivamente sui punti e frame.

Per H^m vale che $Isom(H^m) \cong O_0(m, 1)$

dove in generale definiamo $O(p, q) = \{A \in GL(n, R) \mid {}^t A J A = J\}$

$O_0(m, 1)$ è sottogruppo d'indice 2 in $O(m, 1)$

che manda I^m in sé (cioè $\{A \in O(m, 1) \mid A_{m+1, m+1} \geq 0\}$)

Questo sottogruppo agisce bene, perché anche sui tangenti sono isometrie e si fa anche che agisce transitivamente sui punti e sui frame. Per quest'ultima, scegliendo $p = (0, \dots, 0, 1)$,

si ha che $Stab(p) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in Isom(R^m) = O(m) \right\}$ che quindi agisce transitivamente sui frame.

Def Fissata una isometria $T_p M \cong \mathbb{R}^n$, se $r > 0$ t.c. $\exp_p|_{B(0,r)}$ sia differ. sull'immagine allora $\exp_p(B(0,r))$ è la palla geodetica di centro p e raggio r .

Sulla palla geodetica si hanno le coordinate fornite dalla carta. Una parametrizzazione di questo tipo dà coordinate normali.

PROPOSIZIONE:

In coordinate normali:

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(0) = 0$$

DIM:

La prima vale perché $d(\exp_p)_0 = \text{id}$.

La seconda:

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k$$

Mettendoci dentro le rette passanti dall'origine (che sono geodetiche) a velocità costante, si verifica che $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$.

La terza: per la compatibilità avremo relazione

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li}$$

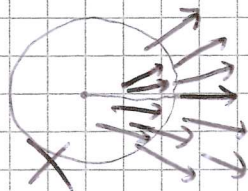
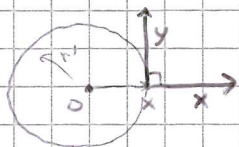
In 0 i simboli si annullano, da cui la tesi.

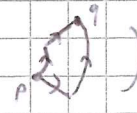
OSS - Un vettore radiale (sta su geodetiche) in un punto x ha stessa lunghezza wrt euclidea, cioè $g_{ij}(x) v^i v^j = \delta_{ij} v^i v^j$ ($v \in T_x B(0,r)$ e radiale).

LEMMA DI GAUSS:

Le sfere $\partial B(0,r)$ sono g -ortogonali alle geodetiche radiali $\forall r' < r$.

DIM: Fissato $x \in B(0,r)$ prendiamo $\overset{\text{è quello radiale in pratica}}{x, y \in T_x B(0,r)}$ con $\|y\|_g = \|x\|_g$ e $y \perp x$.
Estendiamo x, y a due campi X, Y .



Vale che $[X, Y] = 0$ (perché i flussi commutano: 

Dimostrare che $\langle X, Y \rangle = 0$ (per ogni (p, θ))

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X X, Y \rangle + \langle X, \nabla_X Y \rangle \quad \text{per compatibilità}$$

Ma $\nabla_x X = 0$ perché le rette radiali sono geodetiche

Inoltre ∇ è simmetrica, quindi $0 = T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$

da cui $\nabla_X Y = \nabla_Y X$

$$\Rightarrow \langle X, \nabla_X Y \rangle = \langle X, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle X, X \rangle = 0$$

è quella
euclidea
(radiale)

Quindi $\langle X, Y \rangle$ è costante al variare di ρ , ma

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \langle X, Y \rangle = 0 \quad \text{perché} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} Y = 0 \quad \Rightarrow \langle X, Y \rangle = 0$$

Def In coordinate normali $\forall r' < r$ $\partial B(a, r')$ è detta sfera geodetica

Def (M, g) . $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ è minimizzante se $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma)$.

$\gamma: I \rightarrow M$ è localmente minimizzante se $\forall t \in I \exists$ intorno $\text{opt } k$
t.c. $\gamma|_k$ è minimizzante.

PROPOSIZIONE: (M, g) . $p \in M$, $p \in B \subseteq M$ palla geodetica di raggio r . $\forall q \in B$
sia γ_{pq} una geodetica da p a q radiale. γ_{pq} è minimizzante
ed è l'unica curva minimizzante con estremi p e q a meno
di riparametrizzazione.

DIM: Consideriamo $\partial B(a, r')$ (in carta normale) con $d(p, q) = r'$.



Preso un'altra curva qualsiasi da p a q , prima
o poi deve toccare $\partial B(a, r')$. La restrizione al
primo punto di intersezione ha lunghezza $\geq r'$

Infatti, presa α , $L_g(\alpha) = \int_t^{t_1} \underbrace{\|\alpha'(t)\|_g}_{\geq \text{lunghezza euclidea}} dt$ (per q)

La retta radiale ha solo componente
radiale, quindi è la minimizzante
(ed è anche unica)

radiale \perp tangente
per Pitagora
~~lunghezza euclidea~~
solo componente
radiale

Def Un intorno totalmente normale di $p \in M$ è un intorno $U(p)$ t.c.

$\forall q \in U(p) \exists B$ palla geodetica centrata in q che contiene U .

PROPOSIZIONE: Ogni $p \in M$ ha intorno totalmente normale.

OSS. U totalmente normale, $\forall p, q \in U$ è ben definita γ_{pq} geodetica ed è
l'unica curva minimizzante.

Quindi in U le curve minimizzanti sono tutte e sole le geodetiche γ_{pq} .

PROPOSIZIONE: $\gamma: I \rightarrow M$ è loc. minimizzante \Leftrightarrow è geodetica e meno di riparametrizzazione.

DIM: \Rightarrow

Osserviamo che $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ minimizzante $\Rightarrow \gamma|_{[a', b']}$ minimizzante

$\forall p \in \gamma(I)$ prende $U_{(p)}$ tot. normale, e dove γ è minimizzante

γ è geodetica. Essere geodetica è condiz. locale.

\Leftarrow Allo stesso modo, si passa al locale in un intorno totalmente normale.

COMPLETEZZA

M connesso, g riemanniana, senza bordo

(M, g) è spazio metrico. Quando è completo?

Def M è geodeticamente completa se le geodetiche esistono globalmente ovvero se $\exp: TM \rightarrow M$ ($\exp_p: T_p M \rightarrow M \quad \forall p \in M$).

PROPOSIZIONE: Se M è geodeticamente completa, $\forall p, q \in M \exists \gamma$ geodetica minimizzante che li collega.

DIM: $\forall p, q \in M$ prende $B \ni p$ palla geodetica intorno a p di raggio r

$d(p, q) = d > 0$. Se $q \in B$ abbiamo finito. Altrimenti

Considero $f: \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ ∂B è sfera cpt $\Rightarrow \exists$ minimo \bar{x}
 $x \mapsto d(x, q)$

Collega p a \bar{x} con l'unica geodetica minimizzante $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$
 con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(t) = 1 \quad \forall t$ e $\gamma(r) = \bar{x}$.

Vediamo che $d(\bar{x}, q) = d - r$, \geq val per disug. triangolare

L'uguaglianza vale perché: se fosse $d(\bar{x}, q) > d - r$, considero

di curve da p a q di lunghezza $d + \epsilon$ con ϵ piccolo opportuno

o a passa da \bar{x} (e allora assurdo...) o non ci passa (altro assurdo).

Si conclude considerando $I = \{t \in [0, d] \mid d(\gamma(t), q) = d - t\} \ni 0$
 Questo è chiuso e aperto $\Rightarrow \gamma(d) = q$.

COROLLARIO: Se M geodetic. completa, allora $\forall p \in M \exp_p: T_p M \rightarrow M$ è surgettivo.

TEOREMA (HOPF-RINOW) (M, g) riemanniana. TFAE:

- 1) M geodeticamente completa
- 2) $K \subseteq M$ è cpt $\Leftrightarrow K$ chiuso e limitato
- 3) M completa

DIM: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$

$K \text{ cpt} \Rightarrow K \text{ chiuso e limitato}$

ovvio.

\Leftarrow

$K \text{ chiuso e limitato}$ Pres $p \in M$ $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ surgettiva

$K \text{ limitato} \Rightarrow \exists L > 0: d(p, q) < L \quad \forall q \in K$ Quindi

$$\underbrace{\exp_p(B(0, L))}_{\text{cpt}} \supseteq K \quad K \text{ chiuso in un cpt} \Downarrow K \text{ cpt.}$$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Vale in ogni spazio metrico (banco)

Chiusura di succ. di Cauchy, ha sotto convergente

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Se per assurdo γ geodetica massimale che ha dominio

$$I \subsetneq \mathbb{R} \quad \text{wlog} \quad I = (-\infty, t_0)$$

$p = \lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t)$ esiste perché è successione di Cauchy, essendo una geodetica: $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq c(t_2 - t_1)$

Prendo U tot. normale intorno a p . \uparrow la velocità di γ

Vale che qualsiasi geodetica in U prima o poi esce da U

Si ottiene quindi assurdo.

COROLLARIO: (M, g) riemanniana. Se M è cpt allora è geodeticamente completa.

DIM: $M \text{ cpt} \Rightarrow M \text{ completa} \xRightarrow{\text{HR}} M \text{ geodeticamente completa}$

COROLLARIO: Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ chiusa, allora è geodeticamente completa (con la metrica indotta)

COROLLARIO: Su qualsiasi M si può mettere una metrica g geod. completa.

DIM: Per Whitney c'è embedding con immagine chiusa.

SPAZIO IPERBOLICO

PROPOSIZIONE: Siano $f, g: M \rightarrow N$ isometrie con M connessa. Se $\exists x \in M$ tale che $f(x) = g(x)$ e $df_x = dg_x$, allora $f \equiv g$.

DIM: Sia $U \subseteq M$, $U = \{x \in M \mid f(x) = g(x), df_x = dg_x\}$

Mostriamo che U è aperto e chiuso.

È chiuso (Esercizio) (La condizione è uguaglianza di _{nostra} ∇).

Preso $x \in U$ considero B palla geodetica intorno a x .

Dimostriamo che $f|_B = g|_B$ (a quel punto anche i differenziali coincidono).

Per ogni $x' \in B$ considero la geodetica da x a x' .

Questa geodetica è determinata da un vettore di $T_x M$.

Tramite isometrie una geodetica va in geodetica, e quale

sia la geodetica è determinato da df_x (sceglie la direzione). Quindi $B \subseteq U \Rightarrow U = M$.

COROLLARIO: M connessa $\Rightarrow \text{Isom}(M)$ agisce liberamente sui frame.

COROLLARIO: $\text{Isom}(S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n)$ agisce in modo libero e transitivo sui frame.

PROPOSIZIONE: le geodetiche nei 3 spazi $S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ sono ($\|v\|=1$)

1) In \mathbb{R}^n : $\gamma(t) = x + tv$

2) In S^n : $\gamma(t) = \cos t \cdot x + \sin t \cdot v$

3) In $\mathbb{H}^n = T^n$: $\gamma(t) = \cosh t \cdot x + \sinh t \cdot v$

OSS. $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 \quad \forall t.$

DIM: Usiamo simmetrie per dimostrare che $\gamma(t)$ è geodetica
nei casi ②, ③.

Sia $W = \text{Span}(x, v)$

$\gamma(t)$ è una parametrizzazione di $W \cap S^n$ ($W \cap I^n$)

(è l'unica a velocità costante a meno di invertire)

Prendiamo $W \oplus W^\perp$ (il p.s. è non degenere) e usiamo

$r_W: W \oplus W^\perp \rightarrow W \oplus W^\perp$ è isometria

$$(v_1, v_2) \mapsto (v_1, -v_2)$$

Se α è l'unica geodetica con $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$

allora $r_W \circ \alpha$ è geodetica con $r_W(\alpha(0)) = x$ e $(r_W \alpha)'(0) = v$

Quindi $(r_W \circ \alpha)(t) = \alpha(t) \Rightarrow \text{supp}(\alpha) \subseteq W.$

Dunque $\alpha = \gamma.$

Def Il disco di Poincaré è la varietà riemanniana

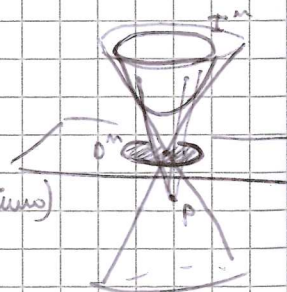
$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}, \quad g^n = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g^E. \quad \text{È conforme}$$

non cambia gli angoli

OSS. $v \in T_x D^n \quad \|v\|_n = \frac{2}{1 - \|x\|^2} \|v\|_E$

OSS. D^n e I^n sono isometrici. L'isometria è data dalla proiezione di I

su $\mathbb{R}^n = \{x_n = 0\}$ tramite $p = (0, \dots, 0, -1)$



Proposizione Le geodetiche sono archi di circonferenze

o segmenti \perp a ∂D^n (parametrizzati in modo opportuno)

Def Il modello del semispazio è

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g^H = \frac{1}{x_n^2} g^E \quad (x = (x_1, \dots, x_n))$$

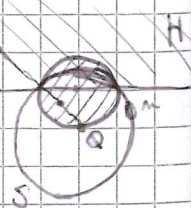
È conforme.

OSS. È isometrico al disco di Poincaré tramite l'inversione lungo sfere, per

$Q = (0, \dots, 0, -1)$, $S = S(Q, \sqrt{2})$ sfera.

Le inversioni lungo sfere sono conformi (preservano gli angoli),

mandano $\{k\text{-sp. affini e } k\text{-sfere in } \mathbb{R}^n\}$ in sé



Proposizione: $I_{\text{iso}}(H^m)$ agisce transitivamente sui punti.

Dim: g^H è invariante per traslazioni orizzontali.

Quindi $x \mapsto x+b$ è isometria di H^m con $b = (b_1, \dots, b_{m-1}, 0)$

Ma anche $x \mapsto \lambda x$ è isometria con $\lambda > 0$
(fai i conti)

Oss. Le geodetiche in H^m sono le rette e archi di circonferenze
⊥ a ∂H^m

Oss. $\text{Area}(P) = \pi(n-2) - \sum_{i=1}^m \alpha_i$ con P poligono convesso di n lati
in H^m .

Poligono convesso = intersezione di semispazi

CURVATURA

Dato (M, g) riemanniano ^{si definisce} un tensore $(1,3)$ (in realtà basta avere ∇ connessione) $T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$

Def Il tensore di Riemann (di curvatura) è definito così:

$\forall p \in M \forall u, v, w \in T_p M$ prendiamo X, Y, Z campi che estendono i vettori e poniamo

$$R(p)(u, v, w) = \nabla_u \nabla_v Z - \nabla_v \nabla_u Z - \nabla_{[X, Y]Z}$$

Proposizione: È ben definito, cioè non dipende dalle estensioni.

Dim. In coordinate

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left(Y^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} e_k + Y^i Z^j \Gamma_{ij}^k e_k \right) = \\ &= X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(Y^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} \right) e_k + X^j Y^i \frac{\partial^2 Z^k}{\partial x^j \partial x^i} e_k + \\ &\quad + X^j \frac{\partial}{\partial x^j} (Y^i Z^l \Gamma_{il}^k) e_k + X^j Y^i Z^l \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^m e_m = \\ &= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} e_k + X^j Y^i \frac{\partial^2 Z^k}{\partial x^j \partial x^i} e_k + \\ &\quad + X^j Y^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l e_l + X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} Z^l \Gamma_{il}^k e_k + \\ &\quad + X^j Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^l} \Gamma_{ij}^k e_k + X^j Y^i Z^j \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} e_k + \\ &\quad + X^j Y^i Z^j \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m e_m \end{aligned}$$

Faccendo $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$, i pezzi (2), (3), (5) sono simmetrici in X e Y , perciò si cancellano. I pezzi (1), (4) fanno opporre $\nabla_{[X, Y]Z}$. Quello che resta sono i pezzi (6), (7), che sono proprio il tensore di Riemann. (I pezzi (6), (7) dipendono solo dal valore di X, Y, Z nel punto)

Oss. In coordinate si scrive

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l$$

Un'altra versione del tensore di Riemann è di tipo (0,4) ottenuto contrando:

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{me}$$

(a volte si scrive $R_{ijk}^l = R_{ijk}^e$ per far capire che "l'ordine" è con l'ultimo, cioè si contrae quello in alto mettendolo per ultimo)

In coordinate normali, nell'origine si ha (più semplice)

$$R_{ijk}^e = \frac{\partial \Gamma_{jk}^e}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^e}{\partial x^j}$$

In più, usando che $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$, si ottiene

(più semplice da vedere con quello di tipo (0,4))

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} \right)$$

(VALE SOLO NELL'ORIGINE IN COORDINATE NORMALI)

Proposizione: Valgono le seguenti simmetrie per qualsiasi carta:

1) $R_{ijkl} = -R_{jike} = -R_{ijek}$

2) $R_{ijkl} = R_{klij}$

3) $R_{ijk}^e + R_{jki}^e + R_{kij}^e = 0$ [prima identità di Bianchi]

Valevole si possono riscrivere come

1) $R(u, v, w, z) = -R(v, u, w, z) = -R(u, v, z, w) \quad \forall u, v, w, z$

2) $R(u, v, w, z) = R(w, z, u, v) \quad \forall u, v, w, z$

3) $R_{(ijk)}^e = 0$
simmetrizzato sui 3 indici bassi

Dici: la prima cosa da osservare è che se valgono in una base, allora valgono per ogni vettore e di conseguenza per ogni base. Per ogni punto guardiamo allora coordinate normali con lui nell'origine e considero la formula scritta prima. Da quella è evidente la tesi.

CURVATURA SEZIONALE

(M, g) riemanniana. $p \in M$, $\sigma \subseteq T_p M$ piano.

Def $K(\sigma)$, detta curvatura sezione, è definita prendendo $\{u, v\}$ base di σ e ponendo

$$K(\sigma) = \frac{R(u, v, u, v)}{\text{Area}(u, v)^2}$$

dove $\text{Area}(u, v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$.

Proposizione: Non dipende dalla base scelta.

DIM: Tutti i cambi di base si scrivono usando

$$(u, v) \mapsto (v, u)$$

$$(u, v) \mapsto (u, v + \lambda u)$$

$$(u, v) \mapsto (\lambda u, v)$$

Per questi la quantità $K(\sigma)$ non cambia.

TEOREMA: 1) Le curvature sezioni determinano Riemann R .

2) La curvatura sezione è la curvatura gaussiana di superficie ottenuta usando la mappa \exp ristretta ad un disco in 0 nel punto.

Def Tensore di Ricci: $R_{ij} = R^k_{kij}$ è di tipo $(0, 2)$

(contrazione di indici).

Proposizione: Il tensore di Ricci è simmetrico $R_{ij} = R_{ji}$

DIM:
$$R_{ij} = R^k_{kij} = R_{kije} g^{ek} = R_{ejik} g^{ek} = R_{eji}^e = R_{ji}$$

Esempio: $(\mathbb{R}^n, g \equiv 0)$ $\Gamma^k_{ij} \equiv 0 \Rightarrow R^e_{ijk} \equiv 0$, $R_{ij} \equiv 0$

EQUAZIONE DI CAMPO DI EINSTEIN: [varietà lorentziana di dim 4]

$$R_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

dove $R = R_{ij} g^{ij}$ è la curvatura scalare (dopo un indice e contrazione, cioè faccio la traccia).

OSS - Per le superfici $R = c \cdot K$ \nwarrow curvatura gaussiana
 \nwarrow costante

T_{ij} è detto tensore di energia-impulso

Filosoficamente: "la materia incurva l'universo"

Def (M, g) riemanniana. M è euclidea se è localmente isometrica a \mathbb{R}^n .

Def (M, g) riemanniana. M è piatta se il tensore di Riemann è nullo ovunque.

TEOREMA: M è euclidea $\Leftrightarrow M$ è piatta.

DIM: (\Rightarrow) ovvio perché le isometrie trasportano i tensori
(il tensore di Riemann è intrinseco)

(\Leftarrow) Sia $p \in M$, in coordinate normali

$p=0$. $B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Scelgo $\varepsilon > 0$ tale che

$(-\varepsilon, \varepsilon)^n \subseteq B(0, r)$. Nell'origine $\{e_1, \dots, e_n\}$ è base ^{ortonormale}

Prendiamo $S_i = \{x_1 = \dots = x_n = 0\}$ e facciamo

il trasporto parallelo lungo S_1 , poi sull'ortogonale dentro S_2 ,
poi sull'ortogonale dentro S_3 e così via...

Abbiamo esteso $\{e_1, \dots, e_n\}$ a frame ortonormale su $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$

X_1, \dots, X_n .

Per costruzione si ha $\nabla_{e_j} X_k = 0 \quad \forall k$ su S_j

Dico che $\nabla_{e_j} X_k = 0 \quad \forall k$ su S_i con $i \geq j$.

Per induzione su i : $i=1$ ok

$i \Rightarrow i+1$ Supponiamo che $\nabla_{e_{i+1}} X^k = 0$ su S_{i+1}

Mostriamo che $\nabla_{e_{i+1}} \nabla_{e_j} X_k = 0$ su S_{i+1}

Questo implica $\nabla_{e_j} X_k = 0$ su S_{i+1} .

$$\nabla_{e_{i+1}} \nabla_{e_j} X_k \stackrel{R=0}{=} \nabla_{e_j} \nabla_{e_{i+1}} X_k = \nabla_{e_j} 0 = 0$$

$$R=0 \\ [e_n, e_n]=0$$

Quindi $\nabla_{e_i} X_k = 0 \quad \forall i, \forall k$, e anche $\nabla_{X_i} X_k = 0 \quad \forall i, \forall k$

Per simmetria della connessione $[X_i, X_k] = \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_k} X_i = 0$

I campi commutano, quindi esiste una carta che li soddisfa

Questa carta è per costruzione isometrica con open di \mathbb{R}^n .

TEOREMA: M semplicemente connessa, completa.

$$K(\sigma) \in 1, 0, -1 \quad \Leftrightarrow M \underset{\text{isom}}{\cong} S^n, R^n, H^n$$

OSS. La freccia \Leftarrow è facile, grazie al fatto che le isom dei 3 spazi agiscono transitivamente su punti e frames, quindi tutte le curvature sezioni sono uguali e basta calcolarle in un punto.