TOPA - LEZIONE 1

TEORIA DI MORSE CLASSICA

M varietà differenziabile.

Def [redacted] Una funzione "generica", o di Morse, $f: M \to \mathbb{R}$ è tale che i punti critici sono non degeneri e isolati e i valori critici sono distinti.

$\uparrow$ Hess f non deg.

Si dimostra che le funzioni di Morse sono dense nelle funz. differenziabili

Def Un punto critico è di indice p se $p = i_-(H(f)_p)$

Fatti:
- Sia $M_a = f^{-1}((-\infty, a])$, $M_b = f^{-1}((-\infty, b])$. Se $[a,b]$ non contiene valori critici allora M_a è retratto per deformazione di M_b.
  (Si dimostra costruendo la retraz. usando il campo vett. $-\nabla f$).
- (a,b) contiene valore critico corrispondente a un punto critico di indice i
  $\Rightarrow M_b \cong \underbrace{M_a \#_\varphi D^i}_{\text{attacco una cella}}$ (in realtà M_b si retrae per deformaz. su $\underbrace{M_a \#_\varphi D^i}$ $\leftarrow M_a \sqcup D^i / \varphi: \partial D^i \to M$)
- $M \underset{\text{omot. equiv.}}{\sim} K$ con K CW-compl. che ha tante i-celle quanti sono i punti critici di indice i.

TEORIA DI MORSE DISCRETA

Def K è un CW-complesso se $K = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha}} \varphi_\alpha^n(e_\alpha^n)$ dove $e^n = \mathring{D}^n$ e $\varphi_\alpha^n: D^n \to K$ è omeo. se ristretto a e_α^n. (φ è detta f. di attaccamento) (o f. caratteristica)

celle

Def σ^p è una p-cella se $\sigma^p = \varphi_\alpha^p(e_\alpha^p)$.

Def $\sigma^p < \tau^{p+1}$ σ^p è faccia di τ^{p+1} se $\sigma^p \subseteq \overline{\tau}^{p+1}$

Def $\sigma^p < \tau^{p+1} = \varphi(e^{p+1})$ con $\varphi: D^{p+1} \to K$. σ^p è faccia regolare di τ^{p+1} se valgono le seguenti condizioni:
- $\varphi: \varphi^{-1}(\sigma) \to \sigma$ è omeomorfismo
- $\overline{\varphi^{-1}(\sigma)}$ è una p-palla chiusa

Def $C_*(K, \mathbb{Z})$ complesso algebrico di un CW-compl. K è complesso def. da $C_p = \bigoplus_{\sigma^p} \mathbb{Z}\sigma^p$ con mappa di bordo $\partial: C_{p+1} \to C_p$

$$\tau_\alpha^{p+1} \mapsto \sum_\beta [\partial \tau_\alpha^{p+1} : \sigma_\beta^p] \sigma_\beta^p$$

con $[\partial \tau_\alpha^{p+1} : \sigma_\beta^p] \in \mathbb{Z}$ detto indice di incidenza.

OSS. Se $\sigma_\beta^p < \tau_\alpha^{p+1}$ è faccia regolare allora $[\partial\tau_\alpha^{p+1} : \sigma_\beta^p] = \pm 1$

Chiamiamo φ la funz. caratt. $(\varphi : D^{p+1} \to K)$ e $\dot\varphi$ la funz. di attaccamento $(\dot\varphi = \varphi|_{\partial D^{p+1}})$. Considero

$$\partial D_\alpha^{p+1} = S_\alpha^p \xrightarrow{\dot\varphi_\alpha^{p+1}} K_p \to K_p/K_{p-1} \xrightarrow{\tilde{=}} \bigvee_{\beta'} S_{\beta'}^p \twoheadrightarrow S_\beta^p = D^p/\partial D^p$$

(K_p: p-scheletro)

è mappa $S_\alpha^p \to S_\beta^p$, calcolandone il grado ho che essendo $\varphi|_{\varphi^{-1}(\sigma_\beta^p)}$ omeomorfismo vale ± 1 (unica controimmagine).

Per calcolare $[\partial\tau_\alpha^{p+1} : \sigma_\beta^p]$ in generale si fa allo stesso modo.

Def $\mathcal{F}(K) = \{$celle di $K\}$ insieme discreto. Una funzione $f : \mathcal{F}(K) \to \mathbb{R}$ è detta di Morse discreta se

- $\sigma^p < \tau^{p+1}$ faccia irregolare $\Rightarrow f(\sigma) < f(\tau)$ $\quad \forall p$
- $\#\{\tau^{p+1} > \sigma^p \mid f(\tau) \le f(\sigma)\} \le 1$ $\quad$ (fissato σ)
- $\#\{\lambda^{p-1} < \sigma^p \mid f(\lambda) \ge f(\sigma)\} \le 1$ $\quad$ (fissato σ)

Def f di Morse su K. σ^p è critica di indice p se

$$\#\{\tau^{p+1} > \sigma^p \mid f(\tau) \le f(\sigma)\} = \#\{\lambda^{p-1} < \sigma^p \mid f(\lambda) \ge f(\sigma)\} = 0$$

OSS. K un CW-compl. regolare (quindi φ iniettive). Allora ogni faccia è regolare. Dunque $\min f$ è preso in una 0-cella.

$\max f$ è preso in una n-cella se $n = \dim K$, e K è varietà triangolata senza bordo.

PROPOSIZIONE: Non può accadere che, fissato σ,

$$\#\{\tau > \sigma \mid f(\tau) \le f(\sigma)\} = \#\{\lambda < \sigma \mid f(\lambda) \ge f(\sigma)\} = 1.$$

LEMMA: Siano $\tau^{p+1} > \sigma^p > \lambda^{p-1}$. Allora vale uno dei seguenti:

1) σ irreg. in τ
2) λ irreg. in σ
3) $\exists\, \mu^p \neq \sigma^p$ tale che $\tau^{p+1} > \mu^p > \lambda^{p-1}$

DIM: Se non vale ① o ②,

$$\left.\begin{aligned} \partial\tau &= \pm\sigma + \sum_{\mu^p \neq \sigma} [\partial\tau : \mu]\, \mu^p \\ \partial\sigma &= \pm\lambda + \sum_{\nu^{p-1} \neq \lambda} [\partial\sigma : \nu]\, \nu^{p-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \partial^2\tau = 0 = \pm\lambda + \sum_{\nu \neq \lambda} [\partial\sigma : \nu]\, \nu + \sum_{\mu \neq \sigma} [\partial\tau : \mu]\, \partial\mu$$

da cui $\exists\, \mu$ t.c. $[\partial\mu : \lambda] \neq 0$, ovvero $\lambda < \mu$.

↳ DIM: Siano $\tau > \sigma > \lambda$ tutte regolari e eccezioni (cioè $f(\lambda) \ge f(\sigma) \ge f(\tau)$). Ma per il lemma $\exists\, \mu^p \neq \sigma^p$ t.c. $\tau > \mu > \lambda$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \tau \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \sigma \arrow[dr, dash] & & \mu \arrow[dl, dash] \\ & \lambda & \end{tikzcd}$$

Poiché in ogni punto c'è al più un'eccezione $f(\mu) > f(\lambda)$ e $f(\tau) > f(\mu)$. Assurdo.

OSS. $L \subseteq K$ sottocomplesso. Allora $\forall\, f : \mathcal{F}(K) \to \mathbb{R}$ di Morse $f|_{\mathcal{F}(L)}$ è di Morse

OSS. f di Morse su $L \subseteq K$ sottocomplesso $\Rightarrow f$ si estende a una f di Morse su K ponendo, $m = \max_{\sigma \in L} \{f(\sigma)\}$, $g(\sigma) = m + \dim\sigma$ per $\sigma \notin L$ e $g = f$ su L.

Def X è ottenuto da Y per collassamento elementare se

$$Y = X \cup_{\varphi_-} D^n \qquad \varphi_- : \partial D_-^n = S_-^{n-1} \to X$$

(S_-^{n-1}: emisfero)

Def K CW-compl. $L \subseteq K$ sottocompl.

Si dice che K collassa a L $(K \searrow L)$ se $\exists$ succ. di collassamenti elementari da K a L.

PROPOSIZIONE: $L \subseteq K$ sottocompl. $f : \mathcal{F}(L) \to \mathbb{R}$ funzione di Morse. Se $K \searrow L$ f si estende a f di Morse su K che non ha celle critiche fuori da L.

DIM: Sia $K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_m = L$

Per induz. su m. $m = 0$ ovvio. Per il passo induttivo basta supporre $m = 1$. $K = L \cup_\varphi D^n$

Sia $c = \max_{\sigma \in L} \{f(\sigma)\}$ Poniamo $g(\lambda) = f(\lambda)$ $\forall \lambda \in L$

$g(\sigma) = c + 2$

$g(\tau) = c + 1$

Esercizio: Δ^n simplesso standard. Allora $\Delta^n \searrow v$.

Vediamo che $\Delta^n = [0, \ldots, n] \searrow 0$. Accoppiando $[i_0, \ldots, i_p] < [0, i_0, \ldots, i_p]$ $(i_0 \neq 0)$ e collassandoli faccio collassare tutto a 0.

Scrivi formalmente f che opera il collassamento.

TOPA_LEZIONE 2_

Def L'accoppiamento (matching) definito da una f di Morse è l'insieme delle coppie di celle $V(f) = \{(\tau^{p+1}, \sigma^p) \mid f(\tau^{p+1}) \leq f(\sigma^p)\}$ (al variare di p)

OSS. $\forall \sigma \in \mathcal{F}(K)$ non critica appartiene ad una e una sola coppia in $V(f)$.

OSS. $(\mathcal{F}(K), <_{\text{faccia}})$ è un poset, e un matching può essere definito più in generale:

Def $(P,<)$ poset. Un matching in P è un insieme $M \subseteq P \times P$ tale che:

1) $(a,b) \in M \Rightarrow a \succ b$ (a copre b, cioè $a>b$ e $\nexists c: a>c>b$)

2) $\forall a \in P$, a è contenuto in al più una coppia di M.

NOTAZIONE: Un matching in $\mathcal{F}(K)$ viene detto campo di vettori discreto.

Un $V(f)$ è detto campo gradiente.

Def M matching su $(P,<)$ poset. Un cammino alternante di M è una successione

$$\tau_0 \succ \sigma_1 \prec \tau_1 \succ \sigma_2 \prec \tau_2 \succ \sigma_3 \prec \tau_3 \succ \dots \quad \text{finita}$$

tale che $\forall i \quad (\tau_i, \sigma_i) \in M$ e $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i$

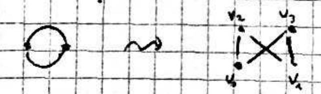
Def Diagramma di Hasse: $\mathcal{F}(K)$ è grafo con vertici i suoi elementi e archi se uno è faccia dell'altro.

Partiamo dal grafo di $\mathcal{F}(K)$ orientato all'ingiù (ovvero $\tau^{p+1} \to \sigma^p$) e scambiamo l'orientazione di tutti gli archi di coppie in $\overrightarrow{M}$.

Si ottiene il grafo Γ_M orientato.

Quindi un cammino alternante è un cammino orientato su Γ_M.

Def L'accoppiamento M si dice aciclico se non possiede cammini alternanti chiusi.

Esempio: S^1  Poniamo $M = \{(v_2, v_0), (v_3, v_1)\}$

$\overset{\Gamma_M}{\rightsquigarrow}$  non è aciclico.

TEOREMA: M aciclico $\Leftrightarrow \Gamma_M$ è aciclico

DIM: ($\Leftarrow$) ovvio

($\Rightarrow$) Dimostriamo che i cammini di Γ_M non possono chiudersi.

Sia c cammino in Γ_M. Non può salire di 2 livelli perché ogni vertice di arco orientato verso l'alto ha intorno solo archi verso il basso (per definizione di M). Quindi o salta sempre tra 2 livelli fissati (dunque è alternante e non si chiude) o ad un certo punto scende di 2 livelli (e non si chiude perché non può risalire di 2 livelli).

TEOREMA: Un matching M in $\mathcal{F}(K)$ è un campo gradiente ($M = V(f)$ per qualche f) $\Leftrightarrow$ è aciclico.

DIM: ($\Rightarrow$) $M = V(f)$, f di Morse. Sia c cammino

$$c = \sigma_1^p \prec \tau_1^{p+1} \succ \sigma_2^p \prec \tau_3^{p+1} \succ \dots \prec \tau_M^{p+1} \succ \sigma_{M+1}^p$$

Per def. $f(\sigma_k^p) \geq f(\tau_k^{p+1}) > f(\sigma_{k+1}^p) \quad \forall k$, quindi lungo il cammino la f decresce $\Rightarrow c$ non può chiudersi.

($\Leftarrow$) Γ_M aciclico. (Supponiamo $|\mathcal{F}(K)| < +\infty$)

$\forall \sigma \in \mathcal{F}(K)$ definiamo $f(\sigma) :=$ max lunghezza di un cammino uscente da σ

Se $a \to b$ è lato orientato di $\Gamma_M \Rightarrow f(a) > f(b)$.

È facile verificare che f è di Morse e che $M = V(f)$.

OSS. σ critica per $f \Leftrightarrow f$ non appartiene a coppie in $V(f)$

Invece di partire da una f di Morse possiamo partire da M aciclico e chiamare cella critica (di indice i = dimensione i) una $\sigma^i \notin M$ (detto meglio: $(\sigma^i, *) \notin M$, $(*, \sigma^i) \notin M$)

CONSIDERIAMO IL CASO POLIEDRALE (K regolare)

Ogni cella è poliedro convesso in $\mathbb{R}^N$ con facce poliedri convessi.

TEOREMA:

K CW-complesso (complesso poliedrale). M matching aciclico su $\mathcal{F}(K)$.

Sia $c_i = \#$ i-celle critiche di K. Allora:

1) Se le celle critiche formano un sottocomplesso $K_c \subseteq K$ allora $K \searrow K_c$

2) In generale K è omotopicamente equivalente a un complesso K_c avente c_i celle di dimensione i (messe in bigezione con le celle critiche di K)

3) Orientando le celle di K, gli indici di incidenza in K_c si trovano come:

$$[\partial \tilde{\tau}^{p+1} : \tilde{\sigma}^p] = \sum_c w(c)$$ con c cammino alternante che connette τ^{p+1} a σ^p (i corrispondenti in K a $\tilde{\tau}^{p+1}$ e $\tilde{\sigma}^p$ come vertici di partenza e arrivo)

e $W(c) = (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} [\partial \tau_{i+1}^{p+1} : \sigma_{i+1}^{p}][\partial \tau_i^{p+1} : \sigma_{i+1}^{p}]$

dove $c = \{ \tau^{p+1} = \tau_0^{p+1} \searrow \sigma_1^p \nearrow \tau_1^{p+1} \searrow \sigma_2^{p+1} \nearrow \dots \searrow \sigma_k^p \nearrow \tau_k^{p+1} \searrow \sigma_{k+1}^p = \sigma^p \}$

(poniamo per notazione $[\partial \tau_{p+1}^{p+1} : \sigma_{p+1}^{p}] = 1$) ← in pratica faccio il prodotto di tutti gli indici di incidenza nel cammino

OSS. La parte (1) del teorema dice [redacted] se $L \subseteq K$ sottocomplesso e f di Morse e non ha celle critiche in $K \setminus L \Rightarrow K \searrow L$

In particolare se $L = \{v\} \Rightarrow K \searrow \{v\}$. È il viceversa dell'ultima prop. della lezione scorsa.

(Forse non è proprio l'inverso) [Quasi sicuramente è sbagliato]

↳ DIM: $\boxed{1}$ Γ_M aciclico. Poniamo $\sigma_1 \underset{M}{\leq} \sigma_2 \Leftrightarrow \exists$ cammino in Γ_M da σ_1 a σ_2.

Se $K = K_c$ ovvio.

Sia τ una cella minimale per $\underset{M}{\leq}$ in $K \setminus K_c$

Celle in K_c non sono connesse a celle fuori da K_c perché K_c è chiuso per facce e ha solo celle critiche.

$\Rightarrow \exists\, \tau$ minimale in $K \setminus K_c$ $\quad (\nexists\, K \longrightarrow K \setminus K_c)$ roba che esce

τ deve essere la cella più piccola di una coppia in M (σ, τ)

τ è faccia solo di una cella (quella in M) σ

$\Rightarrow \tau$ è faccia "libera" di σ. Dunque siamo nella situazione in cui poter fare un collassamento elementare cancellando τ e σ

$\Rightarrow K \searrow (K \setminus \{\sigma, \tau\}) = K'$. Si conclude per induzione sul numero di celle

sopra a σ non c'è nulla

$\boxed{2}$ Per induzione sul numero di celle. $n = 0, 1$ ovvio.

τ^p non critica: Sia τ^p minimale per $\underset{M}{\leq}$. Se τ^p non è critica $\exists\, \sigma^{p+1} > \tau^p$ e $(\sigma^{p+1}, \tau^p) \in M$. Come prima, τ^p è faccia libera di σ^{p+1}.

Allora $K \searrow K \setminus \{\sigma^{p+1}, \tau^p\}$ (sarebbe $K \searrow K \setminus (\mathring{\sigma}^{p+1} \cup \mathring{\tau}^p) = K'$)

τ^p critica

Si chiude per induzione. $(K \overset{\text{omot. eq.}}{\simeq} K' \overset{\text{omot. eq.}}{\simeq} K_c \Rightarrow K \sim K_c)$ non cambiano le celle critiche

Se τ^p è critica, per minimalità non è faccia di altre celle.

$K = K' \cup_\varphi D^p$ $\quad \varphi$ funz. di attaccamento della cella.

K' ha una cella in meno $\Rightarrow K' \underset{\text{omot. equiv.}}{\sim} K'_c$ Il numero di celle di K'_c è lo stesso di K_c tranne in dimensione p, in cui ne ha 1 in meno.

Se h è omotopia tra K' e K'_c, pongo $K_c = K'_c \underset{h \circ \varphi}{\cup} D^p$

Estendendo l'omotopia a $\tilde{h} : K \times I \to K_c$

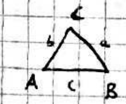
$(x,t) \longmapsto h(x,t)$ se $x \in K'$

$(x,t) \longmapsto x$ se $x \in D^p$

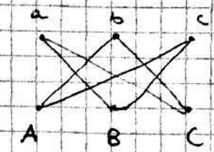
(Esercizio) Se h è equiv. omotopica allora anche $\tilde{h}$ lo è.

[...]

Esempio:



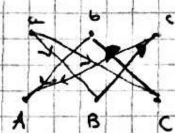
ha diagramma



La filosofia è mettere un matching più grosso possibile.

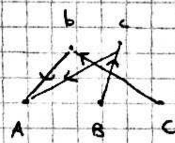
$M = \{(b, C), (c, B)\}$

$\Rightarrow \Gamma_M =$

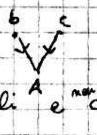


Se cancello a ottengo

minimale (critica)



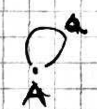
Adesso i minimali sono B, C non critiche: li elimino e ottengo



[redacted] Elimino anche b e c (che sono minimali e non critiche) ?

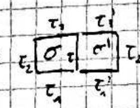
Resto con A e devo riattaccare a tramite l'omotopia.

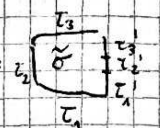
$\rightsquigarrow$

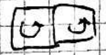


TOPA. LEZIONE 3

In realtà l'osservazione balorda della lezione precedente funziona con l'ulteriore ipotesi: $\forall \sigma \in K \setminus L \ \exists \tau \in K \setminus L$ tale che $(\tau, \sigma) \in M$ (o $(\sigma,\tau) \in M$?)

[...] DIM: $\boxed{3}$ L'idea è: $K =$  Voglio collassare σ' e τ

$K \searrow K'$ con $K' =$ 

Dando orientazioni su K 

dopo il collassamento

$$[\partial\tilde{\sigma} : \tau_i'] = -[\partial\sigma : \tau][\partial\sigma' : \tau][\partial\sigma' : \tau_i']$$

che è proprio la formula del Teorema.

Dimostriamo tutto per induzione:

1. Prendiamo tutti i minimi per $\underset{M}{<}$ non critici e facciamo tutti i collassamenti

Ottengo un nuovo poset (abbiamo tolto le celle delle coppie e tutti i lati uscenti da queste)

2. Se tutti i minimi per $\underset{M}{<}$ sono celle critiche, ognuna di queste non è faccia di altre celle. Quindi "stacco" le celle e procedo

Ottengo un nuovo poset (cancello le celle e i lati uscenti)

Nella procedura itero finché posso il passo 1), poi passo al 2). Poi Ripeto.

$K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_t$ successione di operazioni come sopra.

Sia anche $K_{i_0} \supseteq K_{i_1} \supseteq \ldots \supseteq K_{i_s} = K_t$ sottosuccessione in cui i minimi sono tutti critici (quindi il passo $K_{i_j} \rightsquigarrow K_{i_j+1}$ è ottenuto tramite 2)

ovvero $K_{i_j+1} = K_{i_j} \setminus \{$celle critiche minimi al passo $i_j\}$

Può anche accadere che $K_{i_j+1} = K_{i_{j+1}}$. Sicuramente si ha un collassamento $h_j : K_{i_j+1} \to K_{i_{j+1}}$. Estendiamo h_j a

$\tilde{h}_j : K_{i_j} \to K_{i_{j+1}} \underset{h_j \circ \varphi_{..}}{\cup} \{$celle critiche minimi al passo $i_j\}$ (funz. di attacc.)

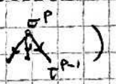
Attraverso le $\tilde{h}_j$ si può ricostruire K_c partendo da K_t (fatto solo di 0-celle, è l'ultimo passo possibile) facendo

$$K_c = \left(\left(\left(\left(K_t \underset{h_s \circ \varphi..}{\cup} \{\ldots\} \right) \underset{h_{s-1} \circ \varphi..}{\cup} \{\ldots\} \right) \underset{h_{s-2} \circ \varphi..}{\cup} \{\ldots\} \right) \ldots \right).$$

Se (all'inverso) il primo passo è di tipo 1, $K = K_0 \searrow K_{i_0}$, si ha $K_c = (K_{i_0})_c$ per induzione K_{i_0} ha meno celle, quindi uso ipotesi induttiva e concludo con la tesi.

Se il primo passo è di tipo 2, siano $\{\sigma_i^{p_i}\}_i$ le celle critiche minimi. Prendendo $p = \max_i p_i$ e consideriamo tutti i cammini alternanti massimali che escono da σ^p e finiscono in qualche τ^{p-1} critica.

Hanno tutti lunghezza dispari: $2k+1$.

- Se $\bar{k} = \max k = 0$ allora $\forall \tau^{p-1} < \sigma^p$ non è accoppiata con nessuna μ^p 

Se $(\tau^{p-1}, \lambda^{p-2}) \in M$, prima o poi la collasso, per cui non mi interessa considerarla.

Per questo motivo mi basta considerare i cammini che finiscono in celle critiche.

Sia $\tilde{\sigma}$ la cella in K_c corrispondente a σ alla fine della procedura scritta.

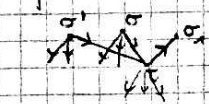
$[\partial\sigma : \tau] = \pm 1$ indice di incidenza in K rimane inalterato nel conto di $[\partial\tilde{\sigma} : \tilde{\tau}]$ (per come è costruito K_c).

- Se $\bar{k} \geq 1$, $\exists \tau^{p-1} < \sigma^p$ tale che $(\sigma_1^p, \tau^{p-1}) \in M$ per qualche σ_1^p.

Scegliamo σ' in modo tale che $\bar{k}$ sia massimo possibile.

Allora se $\sigma' > \tau^{p-1}$ come faccia, necessariamente σ' è critica

Considerando $K_0 = K_{i_0} \supseteq K_{i_0+1} = K_{i_0} \setminus \{\sigma, \sigma', \ldots\}$, vale che τ^{p-1} è un minimo in $K_{i_0+1} = K_1$.



Faccio il collassamento (σ_1, τ)

$K_{i_0+1} \searrow K'$ tramite ρ. Allora:

$\varphi : \partial\sigma = S^{p-1} \to K_{i_0+1}$ $\qquad \varphi_1 : \partial\sigma_1 = S^{p-1} \to K_{i_0+1}$

$S^{p-1} \cong (S^{p-1} \setminus \varphi^{-1}(\mathring{\tau})) \underset{\partial\tau}{\cup} (S^{p-1} \setminus \varphi_1^{-1}(\mathring{\tau}))$

$\partial\tau \ni x \sim \varphi_1^{-1}\varphi(x)$

Questo perché stacco, minimi su K_{i_0}

L'incidenza viene (con $(\sigma_1, \tau) \in M$)

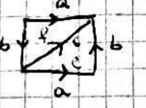
$$[\partial\tilde{\sigma} : \tilde{\lambda}^{p-1}] = [\partial\sigma : \lambda^{p-1}] - [\partial\sigma : \tau][\partial\sigma_1 : \tau][\partial\sigma_1 : \lambda^{p-1}]$$

Applico a questo punto l'induzione a K_{j+1} cambiando l'orientazione di $\tau \to \sigma_1$ in modo che σ_1 diventi critica.

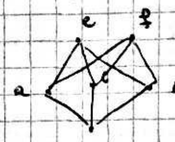
Quindi:

$$[\partial\tilde{\sigma} : \tilde{\lambda}^{p-1}] = \underbrace{[\partial\sigma : \lambda^{p-1}]}_{\text{se c'è è di lungh. zero}} - [\partial\sigma : \tau][\partial\sigma_1 : \tau]\underbrace{[\partial\sigma_1 : \lambda]}_{\text{per ip. induttiva rispetta la formula}}$$

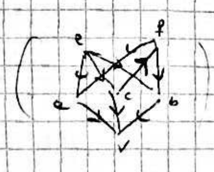
Quindi la formula vale.

Esempio: K^2 = Bottiglia di Klein. $K^2 =$ 

Poset:



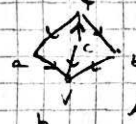
Prendiamo $M = \{(f, c)\}$.



Celle critiche $= \{v, a, b, e\}$. $M_{in} \underset{M}{<} = \{e\}$.

$\varphi : \partial e = S^1 \longrightarrow K^2 \setminus \mathring{e}$ $\quad \varphi(\partial e) = aec^{-1}$.

Stacco e: ottengo



$\min \underset{M}{<} = \{c\}$. Non è critica, quindi

collasso: ottengo

A questo punto a, b sono minimi e critici: li stacco e resto con $\{v\}$.

Esercizio: Ricostruire K_c.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}e \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}v \longrightarrow 0$$

$$e \longmapsto \underbrace{([\partial e : a] - [\partial e : c][\partial f : c][\partial f : a])a + ([\partial e : b] - [\partial e : c][\partial f : c][\partial f : b])b}_{= 2b}$$

$a \longmapsto 0$

$b \longmapsto 0$

$v \longmapsto 0$

Ad esempio, mettendo $\longrightarrow$

TOPA - LEZIONE 4

LEMMA: K complesso connesso. Allora K ha f. di Morse con 1 cella critica di dim 0. Posso scegliere una qualsiasi 0-cella v che sia quella critica.

PASSO BASE → DIM: K_1 è un grafo connesso. (1-scheletro)

Sia $T \subseteq K_1$ albero massimale. Sicuramente $T \searrow v$.

Costruisco f di Morse che ha solo v come cella critica su T.

Vogliamo estenderla a tutto K.

PASSO INDUTTIVO → Supponiamo K varietà senza bordo di dim n (basta pseudovarietà)

Allora $\exists f$ di Morse con $c_n(f) = 1$ (numero celle critiche di dim n) e posso scegliere la σ^n critica come mi pare.

Le $(n-1)$ facce di σ in $K' = K - \{\sigma^n\}$ sono facce libere.

Posso allora collassare. Dico che continuando così posso cancellare tutte le n-celle. Se σ' non si potesse cancellare, consideriamo la succ. $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n = \sigma'$ tutte adiacenti l'una a quella dopo (con una $(n-1)$-faccia comune). Assurdo perché a cascata le posso collassare tutte. Dunque $K' \searrow L$ con L complesso di dim $L \leq n-1$.

Per ip. induttiva $\exists f$ di Morse definita su L con $c_0(f) = 1$.

Allora si estende a K' senza introdurre altre celle critiche

Estendo infine f a σ (cioè a K) mettendo un valore $> \max$ su K'.

OSS. Se conosco le funzioni di attaccamento delle 2-celle di K e conosco il matching M e $[\partial\sigma^2 : \tau^1]$ per tutti i σ, τ, allora trovo le funzioni di attaccamento delle 2-celle di K_c. Quindi si può presentare il $\pi_1(K_c)$ a partire da quelle cose.

LEMMA: $\varphi : P \to Q$ morfismo di posets. Sia M_q un matching aciclico su $\varphi^{-1}(q)$ $\forall q \in Q$. Allora $M = \bigcup_{q \in Q} M_q$ è matching aciclico su P.

DIM: È ovviamente matching perché non ci sono accoppiamenti non interni a una fibra. È aciclico perché φ è decrescente (nel senso di Q) lungo un cammino.

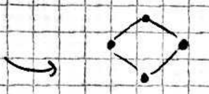
(Finché resto su una fibra è costante, quando cambio fibra non posso crescere).

Def Complesso simpliciale astratto sull'insieme $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

$K = \{\sigma \subseteq I\}_\sigma$ tali che $\sigma \in K \Rightarrow \forall \tau \subseteq \sigma \ \ \tau \in K$. $(\emptyset \in K)$

Def Sia $I = A \sqcup B$. $K' \subseteq \mathcal{P}(A)$, $K'' \subseteq \mathcal{P}(B)$ complessi simpl. astratti

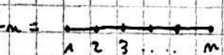
$K' * K'' := \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in K', \tau \in K''\}$ è detto il join di K' e K''.

Esempio: $S^0 * S^0 = S^1$  $S^n * S^0 = S^{n+1}$ (equatore, poli)

$S^1 * S^1 = S^3$ $\quad \dots \quad S^n * S^m = S^{n+m+1}$

COROLLARIO: K connesso. Se tutte le facce critiche di dim > 0 hanno la stessa dimensione (dim $= d$), allora $K_c = \bigvee_{c_d} S^d$

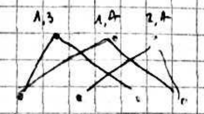
COROLLARIO: K connesso. Se tutte le facce critiche di dim > 0 hanno dim $\geq d$ allora K_c è $(d-1)$-connesso (ovvero $\pi_k(K_c) = 0 \ \ \forall k < d$).

Def $L_n =$  $\quad I_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$\mathrm{Ind}(L_n) = \{\sigma \subseteq I_n \mid i, j \in \sigma \Rightarrow [i,j] \notin \overset{\text{edges}}{E(L_n)}\}$ ("indipendenti")

(si definisce per qualsiasi grafo).

Esempio: $\mathrm{Ind}(L_4) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$



Def $\mathrm{Ind}_k(L_n) = \{\sigma \subseteq I_n \mid$ n. di vertici delle comp. conn. del sottografo generato da σ $\leq k\}$

Esempio: $\mathrm{Ind}_2(L_4) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}\} \cup \underset{\mathrm{Ind}(L_4)}{\mathrm{Ind}_1(L_4)}$

TEOREMA: $K = \mathrm{Ind}_{d-2}(L_n) \underset{\text{omotop. equiv.}}{\sim} \begin{cases} S^{dk-2k-1} & \text{se } n = dk \text{ o } n = dk-1 \\ \{*\} & \text{altrimenti} \end{cases}$

DIM: Sia $n = dk + r$, con $0 \leq r < d$. Pongo $P = \mathcal{F}(K)$ e

$Q = \{c_d > c_{2d} > \dots > c_{kd} > c_*\}$ totalmente ordinato.

Definiamo $f: P \to Q$: $\quad f(\Gamma) = c_*$ se $\Gamma \not\ni jd \ \ \forall j$

$f(\Gamma) = c_{jd}$ se jd è il minimo multiplo di d in Γ

Osserviamo che è morfismo di poset:

se $\Gamma' \subseteq \Gamma$ il minimo diventa più grande (in $\mathbb{Z}$) $\Rightarrow f(\Gamma) \geq f(\Gamma')$

• $f^{-1}(c_d) \ni \Gamma$ allora $\{2, 3, \dots, d-1\} \not\subseteq \Gamma$ $\quad (d \in \Gamma)$

Pongo $\mathcal{M}_1 = \{(\Gamma \setminus \{1\}, \Gamma \cup \{1\})\}_{\Gamma \in f^{-1}(c_d)}$ è matching su $f^{-1}(c_d)$.

È ovviamente aciclico ~~[illegible]~~

Tutti gli elementi di $f^{-1}(c_d)$ stanno in una coppia di $\mathcal{M}_1$ (è matching completo o perfetto)

Su $f^{-1}(c_{jd})$ pongo $\mathcal{M}_j = \{(\Gamma \setminus \{(j-1)d+1\}, \Gamma \cup \{(j-1)d+1\})\}_{\Gamma \in f^{-1}(c_{jd})}$

allo stesso identico modo (anche questo è matching perfetto).

• $f^{-1}(c_*)$ è un sottocomplesso di $\mathcal{F}(K)$. $\mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{M}_j$ è matching fuori da $f^{-1}(c_*)$ in cui tutto è accoppiato.

Quindi $K \searrow f^{-1}(c_*) = K_*$. $\quad K_* \subseteq \mathcal{P}(I_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{k} \{jd\}))$

$K_* = \underbrace{\mathrm{Ind}_{d-2}(L_{d-1}) * \underset{\text{il secondo pezzo}}{\mathrm{Ind}_{d-2}(L_{d-1})} * \dots}_{k \text{ volte}} * \mathrm{Ind}_{d-2}(L_r)$

Ma $\mathrm{Ind}_{d-2}(L_{d-1}) = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, d-1\}) \setminus \{1, 2, \dots, d-1\} = S^{d-3}$ (complesso meno parte interna (è solo bordo))

$\Rightarrow$ Se $r = 0$: $K_* = (S^{d-3})^{*k} = S^{(d-3)k + k - 1}$

Se $r = d-1$: $K_* = (S^{d-3})^{*(k+1)} = S^{(d-3)(k+1)+k}$

Altrimenti: $\mathrm{Ind}_{d-2}(L_r) \cong \Delta^{r-1}$ contrattile $\Rightarrow K_*$ contrattile

Esempio: Sia $P = \{$partizioni di $\{1, \dots, n\}\}$ con $<$ dato dal raffinamento. È un poset. [...]

Def $(P, <)$ poset. Si definisce il complesso d'ordine

$\Delta P = \{\sigma^p = (a_0 < \dots < a_p)$ totalm. ordinati$\}$

OSS. Se P ha minimo, ΔP è contrattile (tutto è faccia del simpl. con il minimo all'inizio). Stessa cosa se ha massimo.

[...] Lui ha ovviamente massimo e minimo, quindi il suo studio è banale. Considero allora $\hat{P} = P \setminus \{\text{minimo}, \text{massimo}\}$. È interessante studiare a questo punto $\Delta \hat{P}$ (in particolare la sua omologia).

TOPA - LEZIONE 5

P poset finito con minimo $\hat{0}$ e massimo $\hat{1}$.

$\hat{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$. $\overline{\chi} = \chi - 1$ caratteristica di Eulero ridotta

$\overline{\chi}(\Delta \hat{P}) = \mu(\hat{0}, \hat{1})$ con μ funz. di Möbius,

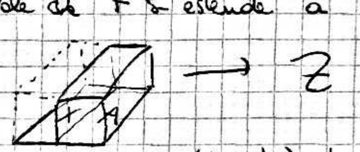
cioè $\mu : \hat{P} \times P \to \mathbb{Z}$ tale che $\mu(x,x) = 1$ e se $x \lneq y$ $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x,z) = 0$.

Sia x massimale in $\hat{P}$.

$\hat{Q} = \hat{P} - \{x\}$. Allora $\Delta \hat{P} = \Delta \hat{Q} \cup \mathrm{Cono}\{x, \Delta_{\leq x} \hat{Q}\}$

OMOTOPIA

Def (X, A) (coppia di sp. top.) ha la PEO (proprietà dell'estensione dell'omotopia), detta anche HEP se $\forall Z$ e $\forall f : X \to Z$, $\forall F : A \times I \to Z$ t.c. $F|_{A \times \{0\}} = f|_A$, vale che F si estende a $\hat{F} : X \times I \to Z$. (tutto continuo ovviamente)



TEOREMA: Una coppia simpliciale (K, L) ha HEP.

DIM: Sia σ simplesso (dim $\sigma > 0$).

Si ha una retrazione di $\sigma \times I \xrightarrow{\rho} (\partial\sigma \times I) \cup \sigma \times \{0\}$

Nel caso dim $\sigma = 0$ si ha $\sigma \times I \to \sigma \times \{0\}$

Data $f : K \to Z$, $F : L \times I \to Z$ con $F|_{L \times \{0\}} = f|_L$, estendiamo su $(K_0 \setminus L) \times I$ ponendo $F(v, t) = f(v)$.

Per induzione supponiamo di aver definito F su $(K_n \setminus L) \times I$, definiamo su ogni $\sigma \in K_{n+1} \setminus L$ F ponendo $F(x,t) = F(\rho(x), t)$ $(x \in \sigma)$

dove ρ è la retrazione di prima.

TEOREMA: Una coppia cellulare (K, L) ha HEP.

DIM: Come prima, esiste retrazione $D^n \times I \xrightarrow{\rho} (\partial D^n \times I) \cup (D^n \times \{0\})$

Per le facce regolari è tutto come prima. In generale, se $\hat{\varphi} : D^n \to K$ funz. caratteristica, supponiamo di aver già definito per induzione F su $(K_n \setminus L) \times I$, e poniamo $F(x, t)$ (n-cella) tramite $D^n \times I \xrightarrow{\rho} \partial D^n \times I \cup D^n \times \{0\} \xrightarrow{\hat{\varphi} \times 1} (K_{n-1} \cup L) \times I \xrightarrow{F} Z$

OSS. Se (X, A) è tale che $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto di $X \times I$ allora (X, A) ha HEP.

PROPOSIZIONE: (X, A) ha HEP $\iff$ $X \times \{0\} \cup A \times I$ è un retratto di $X \times I$.

DIM: $\Rightarrow$ Poniamo $Z = X \times \{0\} \cup A \times I$

$f(x) = (x, 0)$ $(f : X \hookrightarrow Z)$

$F : A \times I \to Z$, $(y,t) \to (y,t)$. Per HEP $\exists \tilde{F} : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ che per costruzione è una retrazione.

$\Leftarrow$ ovvio.

Def (X, A) è NDR (neighbourhood deformation retract) se esistono $u : X \to [0,1]$ e $F : X \times I \to X$ tali che $A = u^{-1}(0)$, (in particolare A chiuso)

$F(x, 0) = x$, $F(x,t) = x$ $\forall x \in A$, $F(x, 1) \in A$ se $u(x) < 1$.

Def (X, A) si dice DR se è NDR e $U := u^{-1}([0,1)) = X$.

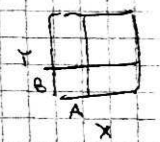
TEOREMA: (X, A) è NDR $\iff$ (X, A) ha HEP. (A chiuso)

DIM $\Rightarrow$ Passo 1: (X, A), (Y, B) NDR $\Rightarrow$ $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ è NDR

Se almeno una coppia è DR, anche il prodotto è DR.

Su X abbiamo u, F. Su Y abbiamo v, G.

Dobbiamo definire $w : X \times Y \to [0,1]$, $(x,y) \mapsto \min\{u(x), v(y)\}$



$w^{-1}(0) = X \times B \cup A \times Y$.

Definiamo $H : X \times Y \times I \to X \times Y$ tale che

$$H(x,y,t) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } (x,y) \in A \times B \\ \left(F(x,t), G\left(y, t\frac{u(x)}{v(y)}\right)\right) & \text{se } u(x) \leq v(y) \\ \left(F\left(x, t\frac{v(y)}{u(x)}\right), G(y,t)\right) & \text{se } v(y) \leq u(x) \end{cases}$$

È continua (ovvio).

$H(x,y,0) = (x,y)$, $H(x,y,t) = (x,y)$ $\forall (x,y) \in X \times B \cup A \times Y$

ed è ovvio anche che $H(x,y,1) \in A$ dove $w(x,y) < 1$.

Passo 2: Prendiamo $(Y, B) = (I, \{0\})$ che è DR.

Quindi $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times Y)$ è DR. $\Rightarrow (X, A)$ ha HEP

Sia $\rho: X\times I \to X\times\{0\} \cup A\times I$ retrazione

Definiamo $\begin{cases} \pi_1 : X\times I \to X \\ \pi_2 : X\times I \to I \end{cases}$ le proiezioni sui fattori.

$u: X \to I$

$x \mapsto \underbrace{\sup_t \{t - \pi_2 \rho(x,t)\}}$

per $t=0$ vale $t-\pi_2\rho(x,t)=0$
Quindi il sup è sempre ≥ 0
Banalmente è sempre ≤ 1

$u^{-1}(0) \supseteq A$ ovvio

A è chiuso, quindi $\forall x\in X\setminus A$ $\exists U(x)$ intorno t.c. $U(x)\cap A=\emptyset$

Quindi $\exists \varepsilon>0$ tale che per $t<\varepsilon$ $\rho(x,t)\in U\times\{0\}$ per continuità di ρ. Quindi se $x\notin A$ $u(x)>0$.

Poniamo inoltre $F: X\times I \to X$
$(x,t)\mapsto \pi_1\rho(x,t)$

$F(x,0)=\pi_1\rho(x,0)=\pi_1(x,0)=x \quad \forall x\in X$

$F(x,t)=x, \ \forall x\in A \ \forall t\in I$ grazie a ρ.

$F(x,1)\in A$ per $u(x)<1$.

se $u(x)<1$
$\pi_2\rho(x,1)>0$
$\Rightarrow \rho(x,1)\in A\times I$

Esempio: (D^n, S^{n-1}) è NDR (non DR).

COROLLARIO: (X_n, X_{n-1}) è NDR.

TEOREMA: (X,A) NDR, A contrattile $\Rightarrow q: X\to X/_A$ è equivalenza omotopica

DIM: Sia $G: A\times I\to A$ omotopia tra id_A e $a_0\in A$ costante.

Definiamo $F: X\times I\to X$ estensione di $F_0 = id_X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_t"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/_A \arrow[r, dashed, "\overline{F_t}"] & X/_A \end{tikzcd}$$

F_t fattorizza su $X/_A$ con la mappa $\overline{F_t}$.

Vedendo per $t=1$ il diagramma

$\exists p: X/_A \to X$ che fa commutare

(Esercizio)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/_A \arrow[r, "\overline{F_1}"] \arrow[ur, "p"] & X/_A \end{tikzcd}$$

(perché $F_1(A)=a_0$)

$pq = F_1 \sim id_X$
$qp = \overline{F_1} \sim id_{X/A}$ entrambe per costruzione

TEOREMA: (X,A) CW-coppia, $f,g: A\to Y$ con $f\sim g$. Allora
$Y \cup_f X \sim Y\cup_g X$ relativamente a Y.

DIM: Sia $F: A\times I \to Y$ con $F_0=f$, $F_1=g$.

Poniamo $Z = Y \cup_F (X\times I)$.

Questo è omotopo sia a $Y\cup_f X$ che a $Y\cup_g X$ rel. a Y.

Si prende una contrazione

$X\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I$ che induce contraz. di Z su $Y\cup_f X$

COROLLARIO: Il tipo di omotopia di un CW compl. non dipende dalle funzioni di attaccamento delle celle, dipende solo dalla classe di omotopia delle funzioni di attaccamento.

TEOREMA: $f:(X,A)\to(Y,A)$, con $f|_A = id_A$, equivalenza omotopica, $(X,A),(Y,A)$ NDR. Allora f è equiv. omot. relativamente ad A
(cioè $\exists g:(Y,A)\to(X,A)$ t.c. $g\circ f \underset{rel_A}{\sim} id_X$ e $f\circ g \underset{rel_A}{\sim} id_Y$).

COROLLARIO: $f: X\to X$, $f\sim id_X$, $f|_A = id_A \Rightarrow \exists g: X\to X$, $g\sim id_X$ tale che $g\circ f \underset{rel_A}{\sim} id_X$ e $f\circ g \underset{rel_A}{\sim} id_X$.

Def A, X sp. top. $i: A \hookrightarrow X$ è detta cofibrazione se soddisfa HEP $(X, i(A))$

In pratica:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "i"] & A\times I \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "i\times id"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "i_0"] & Y \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"] & \\ & & X\times I \end{tikzcd}$$

date f, h che fanno commutare esiste $\tilde{h}: Y\to X\times I$ che fa commutare

Def Il mapping cylinder di $f: X\to Y$ è $M(f) := (X\times I)\sqcup Y /_{(x,1)\sim f(x)\ \forall x\in X}$

Def Il mapping cone di $f: X\to Y$ è $C(f) := M(f)/_{(x,0)\sim(y,0)\ \forall x,y\in X}$

OSS. $j: X\hookrightarrow M(f)$, $x\mapsto(x,0)$ e $j': Y\hookrightarrow M(f)$, $y\mapsto(0,y)$ sono inclusioni e $Y\hookrightarrow M(f)$ è retratto di deformaz.

TOPA _ LEZIONE 6

COROLLARIO: (X,A) NDR. $i: A \hookrightarrow X$ eq. omotopica $\Leftrightarrow$ (X,A) è DR.

PROPOSIZIONE: $i: A \to X$ cofibrazione $\Rightarrow$ i omeomorfismo su $i(A)$.

DIM: Definisco $F: A \times I \to M(i)$
$(a,0) \mapsto j(i(a))$ con $j: X \hookrightarrow M(i)$
$(a,t) \mapsto (a, 1-t)$

i cofibrazione $\Rightarrow \exists \tilde{F}: X \times I \to M(i)$ che estende F

$\tilde{F}_t(i(a)) = F_t(a)$

Per $t>0$ F_t dà omeomorfismo tra A e $A \times \{t\}$

(F_t iniettiva) $\Rightarrow$ i iniettiva

Inoltre $F_t^{-1} \tilde{F}_t : i(A) \to A$ è l'inversa

$i(A)$ è chiuso (Esercizio)

COROLLARIO: $f: X \to Y$ eq. omot. $\Leftrightarrow$ X è retratto di def di $M(f)$.

DIM: $i: X \hookrightarrow X \times \{0\} \subseteq M(f)$ è una cofibrazione
(perché $(M(f), X \times \{0\})$ è NDR ($X \times \{0\}$ chiuso))

Y è retratto di deformazione di $M(f)$ $r: M(f) \to Y$

$f = r \circ i$ $\quad (R(x,t) = (x,1) = f(x))$

Sia $j: Y \hookrightarrow M(f)$. Allora $i \sim j \circ f$ $\quad (j \circ r \sim id_{M(f)})$

Quindi f è eq. omotopica $\Leftrightarrow$ i è eq. omotopica

Ma per il corollario di prima i è eq. omotopica $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ X è retratto di deformazione di $M(f)$.

PROPOSIZIONE: $\forall f: X \to Y$, f è composizione di una cofibrazione e di una equivalenza omotopica.

DIM: $X \xhookrightarrow{i} M(f)$ è cofibrazione $r: M(f) \to Y$ è eq. omot.

$\Rightarrow f = r \circ i$.

PROPOSIZIONE: $f: X \to Y$ cofibrazione $\Rightarrow C(f) \sim Y/_{f(X)}$.

DIM: $f: X \hookrightarrow Y \subseteq M(f)$ iniettiva (perché cofibrazione)

$i: X \hookrightarrow X \times \{0\} \subseteq M(f)$.

.... ? ...

Sia π proiezione su $C(f)$

$A = \pi(X \times I) \subseteq C(f)$. $(C(f), A)$ è NDR

A è contrattile (è $X \times I/_{(x,0)}$)

Consideriamo $Y/_{f(X)} \supseteq A$. A contrattile $\Rightarrow$ $Y/_{f(X)} = \dfrac{C(f)/_{f(X)}}{A}$, $C(f) \sim C(f)/_A$

Esercizio: $i: A \to X$ cofibrazione.

$g: A \to B$ qualunque $\Rightarrow B \hookrightarrow B \cup_g X$ è cofibrazione.

Def $p: E \to B$ surgettivo è fibrazione se ha la proprietà di sollevamento dell'omotopia CHP (covering homotopy property), ovvero

$\forall X$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$
data F e f (che commutano), esiste $\tilde{F}$ che fa commutare

PROPOSIZIONE: $p: E \to B$ fibrazione, $g: A \to B$ $\Rightarrow$ $A \times_g E := g^*(p) = \{(a,e) \in A \times E \mid g(a) = p(e)\}$

$\pi_1: A \times_g E \to A$ è ancora fibrazione.

DIM:
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & A \times_g E \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] \arrow[urr, dashed, "\tilde{h}"] & A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$
Per fibrazione $\exists \tilde{h}: Y \times I \to E$

Definiamo

$\overline{h}: Y \times I \to A \times_g E$
$(y,t) \mapsto (h(y,t), \tilde{h}(y,t))$

È quella giusta.

Def Dati X, Y, $Y^X := \{f: X \to Y\}$ con Topologia compatta-aperta, cioè generata da aperti $W_{K,U} = \{\varphi: X \to Y \mid \varphi(K) \subseteq U\}$ $\forall K \subseteq X$ compatto $\forall U \subseteq Y$ aperto

OSS. $p_0: B^I \to B$ tale che $p_0(\lambda) = \lambda(0)$ è fibrazione.

Infatti
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & B^I \arrow[d, "p_0"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$
$\tilde{F}(y,t) = \overrightarrow{(F(y)|_{[0,t]})} * f(y)$

Def $f: X \to Y$. Il mapping path space è $N_f = \{(x,\lambda) \in X \times Y^I \mid f(x) = \lambda(0)\}$

$N_f = X \times_f Y^I$.

Def Una $s: N_p \to E^I$ tale che $k \circ s = id_{N_p}$, con $k: E^I \to N_p$, $\lambda \mapsto (\lambda(0), p \circ \lambda)$ e $p: E \to B$ si dice funzione di sollevamento di cammini

PROPOSIZIONE: Se $p: E \to B$ ha una funzione di sollevamento di cammini allora p è una fibrazione.

DIM: Esercizio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

F può essere vista come $F: X \to B^I$ ....

PROPOSIZIONE: Vale anche il viceversa. $p: E \to B$ fibrazione $\Rightarrow \exists$ funz. soll. cammini

DIM:
$$\begin{tikzcd} E^I \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p^I"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B^I \arrow[r, "p_0"'] & B \end{tikzcd}$$ con $Y = N_p = E \times_p B^I$

$\exists \tilde{F}: N_p \to E^I$ è quella che cercavamo.

PROPOSIZIONE: $p: E \to B$ rivestimento $\Rightarrow$ ha funz. sollevamento cammini.

TEOREMA: Ogni applicazione è composizione di una equivalenza omotopica e fibrazione.

DIM: Data $f: X \to Y$, $N_f = X \times_f Y^I$.

$X \xrightarrow{\nu} N_f \xrightarrow{p} Y$ $\qquad p\nu = f$

$x \longmapsto (x, c_{f(x)})$
cammino costante

$(x, \lambda) \longmapsto \lambda(1)$

$\pi: N_f \to X$ $\qquad (\nu \circ \pi)(x, \lambda) = (x, c_{f(x)})$
$(x,\lambda) \mapsto x$ $\qquad \simeq id_{N_f}$ ok perché basta contrarre i cammini sul punto di inizio

Resta da verificare che p è fibrazione

Dati
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & N_f \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & Y \end{tikzcd}$$
con $g(a) = (g_1(a), g_2(a))$ con $g_2(a)(0) = f(g_1(a))$, $g_2(a)(1) = G(a,0)$

$\tilde{G}(a,t) = (g_1(a), g_2(a) * G|_{\{a\} \times [0,t]})$

è il sollevamento di cammini cercato

$E \xleftarrow{i_b} F_b = p^{-1}(b)$ fibra
$p \downarrow$
B
fibrazione

Dato $\gamma: (I, 0, 1) \to (B, b, b')$, per CHP $\exists \tilde{\gamma}: F_b \times I \to E$ che solleva γ.

$\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ manda F_b nella fibra $F_{\gamma(t)}$

Per $t=1$ si definisce la traslazione lungo γ.

$\tau[\gamma] = [\tilde{\gamma}_1]$: $\qquad \tau: F_b \to F_{b'}$

LEMMA: τ dipende solo dalla classe di omotopia relativamente a b, b' di γ.

DIM: $F: I^2 \to B$ omotopia tra $F_0 = \gamma$ e $F_1 = \gamma'$

Sia $J^2 = I \times \{0\} \cup I \times \{1\} \cup \{0\} \times I$

Usando un omeo $(I^2, J^2) \cong (I^2, I \times \{0\})$:

$f: F_b \times J^2 \to E$ che fa come $\tilde{\gamma}$ su $I \times \{0\}$, come $\tilde{\gamma}'$ su $I \times \{1\}$ e i_b sopra a $\{0\} \times I$.

Estendo f a $\tilde{F}: F_b \times I^2 \to E$ prolungando i cammini punto per punto

Passando attraverso l'omeo, F è omotopia di $p \circ f$

L'omotopia tra $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_1'$ è data dall'omotopia $\tilde{F}$ ...

COROLLARIO: τ è un funtore

$\Pi(B) \longrightarrow h\,Top$

$\Pi(B)$: gruppoide fondamentale
$Ob(\Pi(B)) = B$
$Mor(\Pi(B))$ = classi di omotopia di cammini

$h\,Top$: sp. top. con freccia classi di omotopia di applicazioni

Quindi $\tau[c_b] = [id_{F_b}]$ e $\tau[\gamma\gamma'] = \tau[\gamma]\tau[\gamma']$

Restringendo, si ha che $\pi_1(B,b) \to \pi_0(Aut(F_b))$ dove $Aut(F_b)$ = equiv. omotopiche

ovvero $\pi_1(B,b) \curvearrowright F_b$.

Def X, Y sp. top. puntati. $[X,Y]$ = classi di omotopia di $f: (X,*) \to (Y,*)$.

$[X,Y] \ni * = c: X \to *$.

Def Smash product: $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$, dove

$X \vee Y = X \times \{*\} \cup \{*\} \times Y$. Ha un naturale punto base $(*,*)$ ovvero la classe di $X \times \{*\} \cup \{*\} \times Y$.

$Y^X \cong F(X,Y) = \{ f : (X,*) \to (Y,*) \}$

$* : (X,*) \longmapsto (*,*)$

$(Z^Y)^X = Z^{Y \times X}$

oss. $F(X, F(Y,Z)) \cong F(X \wedge Y, Z)$

PROPOSIZIONE: Dati $f \in F(X,A)$ e $g \in F(Y,B)$ $\exists f \wedge g : X \wedge Y \to A \wedge B$.

Inoltre:

1) $h : A \to C$ $k : B \to B$ $\Rightarrow (h \wedge k)(f \wedge g) = hf \wedge kg$

2) $f \sim f'$, $g \sim g'$ $\Rightarrow f \wedge g \sim f' \wedge g'$.

COROLLARIO: f, g equivalenze omotopiche $\Rightarrow f \wedge g$ lo è.

Def $cX := X \wedge I = X \times I /_{\{*\} \times I \cup X \times \{1\}} = CX /_{\{*\} \times I}$
cono ridotto

oss. cX è contrattile

Def Sospensione ridotta di X: $\Sigma X = X \wedge S^1$, con $S^1 = I /_{\partial I} \ni 1$.

Def Sospensione di X: $SX = X \times I /_{X \times \{0\} \cup X \times \{1\}}$

oss. $\Sigma X = SX /_{\{*\} \times I}$

Def Path-space: $PX = F(I, X)$ ($\{0\} \in I$ pto base)

PROPOSIZIONE: PX è contrattile

$[f : (I,0) \to (X,*)] \longmapsto [f_t(u) = f(tu)]$

Def Loop-space: $\Omega X = F(S^1, X)$

oss. (Formula di aggiunzione): $F(\Sigma X, Y) = F(X, \Omega Y)$

$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$

PROPOSIZIONE: $[\Sigma X, Y]$ è gruppo e $[\Sigma^2 X, Y]$ è gruppo abeliano.

DIM: $(g+f)(x,t) = (g_* f_*)(t) = \begin{cases} f(x,2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(x,2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

$\Sigma^2 X = \Sigma(\Sigma X) = \Sigma(S^1 \wedge X) = (S^1 \wedge S^1) \wedge X = S^2 \wedge X$

$F(\Sigma^2 X, Y) = F(S^2, F(X,Y))$

La dimostrazione è come quella per il π^2...

Punti base per cofibrazioni: $i : (A,*) \to (X,*)$

Se i è una cofibrazione "libera" (senza punti base) $\Rightarrow i$ è cofibrazione puntata.

Esercizio: $* \hookrightarrow A$ e $* \hookrightarrow X$ sono cofibrazioni, allora se $i : (A,*) \hookrightarrow (X,*)$ cofibrazione puntata $\Rightarrow$ i cofibrazione libera.

Def $f : X \to Y$. Il mapping cylinder ridotto è

$M(f) = Y \cup_f (X \wedge I_+)$ dove $I_+ = I \sqcup \{pto\}$

$\left(X \wedge I_+ = \dfrac{X \times I \sqcup X \times \{pto\}}{\{*\} \times I \sqcup X \times \{pto\}} = X \times I /_{\{*\} \times I} \right)$

oss. Il mapping cone $C(f) = Y \cup_f CX$

oss. Data $f \in F(X,Y)$ si ha $\Sigma f = f \wedge 1 : \Sigma X \to \Sigma Y$

$-\Sigma f = f \wedge r : \Sigma X \to \Sigma Y$
riflessione
$(x \wedge t) \mapsto (x \wedge (1-t))$

$\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$
$\lambda \mapsto f \circ \lambda$

oss. $i : Y \to C(f)$ inclusione è cofibrazione, cioè $(C(f), Y)$ è NDR.

Def Cono ridotto: $c(f) = C(f) /_{\{*\} \times I}$

oss. $c(f) /_Y \cong \Sigma X$

SUCCESSIONE DI COFIBRAZIONE

$$X \xrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{i} c(f) \xrightarrow{\pi} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma i} \Sigma c(f) \xrightarrow{-\Sigma \pi} \Sigma^2 X \to \dots$$

TEOREMA: $\forall$ spazio Z, applicando il funtore $[-, Z]$ (controvariante) alla successione sopra (che è un complesso), si ottiene

$\dots \to [\Sigma c(f), Z] \to [\Sigma Y, Z] \to [\Sigma X, Z] \to [c(f), Z] \to [Y, Z] \to [X, Z]$

Succ. esatta: di gruppi abeliani da Σ^2 in su, di gruppi da Σ in su, di spazi puntati dal grado zero.

LEMMA: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} c(f)$ dà luogo a una succ. esatta $[c(f), Z] \xrightarrow{i^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$ $\forall Z$.

DIM: • $f^* i^*(\varphi) = \varphi \circ i \circ f \sim *$ perché $i \circ f \sim *$ in $c(f)$ (poi si compone l'omotopia con φ).

• Se $\psi : Y \to Z$ t.c. $f^*(\psi) \sim *$, ovvero $\exists F : X \times I \to Z$ con $F_0 = \psi \circ f$ e $F_1 = *$

Estendo ψ al cono usando F: $G : c(f) \to Z$ t.c. $G|_{X \times I} = F$ al quoz. e $G|_Y = \psi$. Si incollano bene.

COROLLARIO: Considerando $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} c(f) \xrightarrow{i'} c(i) \xrightarrow{i''} c(i') \longrightarrow \dots$

allora $\forall Z$

$$\dots \to [c(i''), Z] \to [c(i'), Z] \to [c(i), Z] \to [c(f), Z] \to [Y, Z] \to [X, Z]$$

è esatta.

OSS. $c(i) = c(f) \cup_i c(Y) \underset{\text{per cofibrazione}}{\overset{\text{omotop. equiv.}}{\simeq}} c(f)/_Y \simeq \Sigma X$

$c(i') = \Sigma X \cup_{i'} c(f) \sim \Sigma X/_{c(f)} \sim \dots \sim \Sigma Y$

E così via per tutti gli altri ...

TOPA - LEZIONE 8

OSS. Nella succ. esatta mettiamo $-\Sigma f$ per far commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} C(i) \arrow[r] \arrow[d] & C(i') \arrow[d] \\ C(i)/_{C(Y)} = \Sigma X \arrow[r, dashed] & \Sigma Y = C(i')/_{C(C(f))} \end{tikzcd}$$

OSS. Caso particolare $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ cofibrazione:

$$X \xrightarrow{i} Y \to Y/_X \to \Sigma X \to \Sigma Y \to \Sigma Y/_X \to \dots$$

Def Data $f: X \to Y$ puntata, si definisce la fibra omotopica

$$Ff = X \times_f PY = \{(x, \lambda) \mid f(x) = \lambda(1)\}.$$

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & PY \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

fibrazione

OSS. Ff è diversa da $N(f) = \{(x, \lambda) \in X \times Y^I \mid f(x) = \lambda(1)\} = X \times_f Y^I$.

Dato $p: Nf \to Y$, $\lambda \mapsto \lambda(0)$, vale che $Ff = p^{-1}(*)$

Si ha l'inclusione $i: \Omega Y \to Ff$
$\lambda \mapsto (*, \lambda)$

TEOREMA: Data la succ.

$$\dots \to \Omega^2 Y \to \Omega Ff \to \Omega X \to \Omega Y \xrightarrow{i} Ff \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

applicando $\forall Z$ il funtore $[Z, -]$ vale che

$$\dots \to [Z, \Omega Ff] \to [Z, \Omega X] \to [Z, \Omega Y] \to [Z, Ff] \to [Z, X] \to [Z, Y]$$

è esatta di insiemi puntati, di gruppi a partire dagli Ω.., di gruppi abeliani a partire dagli Ω^2... .

DIM:

LEMMA: $\forall Z$, $[Z, Ff] \xrightarrow{\pi_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$ è esatta.

Dim: $f_* \pi_* [\varphi] = [f \circ \pi \circ \varphi]$ $\qquad f \circ \pi \circ \varphi(z) = \underbrace{f(\varphi_1(z))}_{= \varphi_2(z)(1)}$

cammino

Usando $\varphi_2(z)$ si omotopa a costante

$F(z,t) = \varphi_2(z)(t)$ $\qquad F_0 \equiv *$, $F_1 = f \circ \pi \circ \varphi$

Data $\psi: Z \to X$ con $f\psi \sim *$ tramite $F: X \times I \to Y$.

$F_0 \equiv *$ $\quad F_1 = f\psi$

Definiamo $\varphi: Z \to Ff$ –
$z \mapsto (\psi(z), F|_{\{z\}\times I})$

COROLLARIO: Considerando

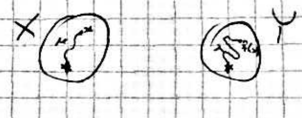
$\dots \to F\pi' \xrightarrow{\pi''} F\pi \xrightarrow{\pi'} Ff \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$, $\forall Z$ vale che

$\dots \to [Z, F\pi'] \to [Z, F\pi] \to [Z, Ff] \to [Z, X] \to [Z, Y]$ è esatta.

$\to$ DIM: Resta da dimostrare solo che

$F\pi \simeq \Omega Y$: $\quad \pi: Ff \to X$

$F\pi = Ff \times_\pi PX = (X \times_f PY) \times_\pi PX =$
$= \{(x,\lambda,\mu) \mid f(x) = \lambda(1),\ x = \mu(1)\}$



Si ha l'inclusione

$PX \xrightarrow{j} F\pi$
$\mu \longmapsto (\mu(1), f\circ\mu, \mu)$

Definiamo $\varphi: F\pi \to \Omega Y$
$(x,\lambda,\mu) \mapsto \lambda \cdot f(\mu)^{-1}$ (faccio il cammino λ e torno indietro passando per $f(\mu)$)

$\psi: \Omega Y \to F\pi$
$\lambda \longmapsto (*, \lambda, *)$

$\varphi \circ \psi = id_{\Omega Y}$

$(\psi\circ\varphi)(x,\lambda,\mu) = (*, \lambda \cdot f(\mu)^{-1}, *)$ Dico che è omotopa a $id_{F\pi}$ tramite

$(x,\lambda,\mu)(t) \xrightarrow{F} (\mu(t), \lambda \cdot f(\mu([t,1]))^{-1}, \mu([0,t]))$

$F_0 = \psi\circ\varphi \qquad F_1 = id_{F\pi}$. Quindi $F\pi \simeq \Omega Y$.

Allo stesso modo dimostro tutti gli altri.

Se vogliamo che commuti il diagramma serve il segno – alla mappa Ωf.

$$\begin{tikzcd} F\pi' \arrow[r, "\pi''"] & F\pi \\ \Omega X \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, dashed, "-\Omega f"] & \Omega Y \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Consideriamo ora

$$\begin{tikzcd} & & & & & M(f) \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr] & & \\ \dots \arrow[r] & F\pi' \arrow[r, "\pi''"] & F\pi \arrow[r, "\pi'"] & Ff \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\text{cofibra}"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "i"] & c(f) \arrow[r, "i'"] & c(i) \arrow[r, "i''"] & c(i') \arrow[r] & \dots \\ & & & & & N(f) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[ur, "\text{fibra}"'] & & \end{tikzcd}$$

PROPOSIZIONE:

$p: E \to B$ fibrazione. Allora $\varphi: p^{-1}(*) \to F_p$ è equivalenza omotopica
$e \longmapsto (e, c_*)$

DIM:
$F_p = E \times_p PB$
fibraz. $\downarrow$
PB $\qquad PB$ è contrattile. Allora:

LEMMA: $q: C \to D$ fibrazione, $D \underset{rel_*}{\sim} * \Rightarrow C \sim q^{-1}(*)$.

DIM:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "id"] \arrow[d, "i_0"'] & C \arrow[d] \\ C\times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde F"] & D \end{tikzcd}$$

con $F_0 = q$, $F_1 = *$

$\exists \tilde F$ sollevamento. Allora
$\tilde F_0 = id_C$, $\tilde F_1 \subseteq q^{-1}(*)$

Dunque, se $i: q^{-1}(*) \hookrightarrow C$,
$i \circ \tilde F_1 = \tilde F_1 \sim \tilde F_0 = id_C$
$\tilde F_1 \circ i \sim id_{q^{-1}(*)}$ tramite $\tilde F|_{q^{-1}(*)\times I}$ (è ben posta perché F è rel. $*$)

COROLLARIO: $p: E \to B$ fibrazione con fibra F. Allora $\forall Z$

$\dots \to [Z, \Omega F] \to [Z, \Omega E] \to [Z, \Omega B] \to [Z, F] \to [Z, E] \to [Z, B]$

Def $\pi_n(X, *) := [S^n, X] = \{(I^n, \partial I^n) \to (X, *)\}/_{\sim_{rel.\,\partial I^n}}$

$[\Sigma S^{n-1}, X] = [\Sigma^2 S^{n-2}, X]$
gruppo abeliano ($n \geq 2$)

OSS. $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$.

Infatti $\pi_n(X) = [S^n, X] = [\Sigma S^{n-1}, X] = [S^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X)$

OSS. $\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n X)$.

Caso relativo: $* \in A \overset{i}{\subseteq} X$

Def $\pi_n(X, A, *) := \pi_{n-1}(\underbrace{P(X; *, A)}_{})$
$P(X;*,A) = \{\lambda \mid \lambda(0) = *, \lambda(1) \in A\} = F_i = A \times_i PX$

È gruppo per $n \geq 2$, abeliano per $n \geq 3$.

La succ. di fibrazione per $i: A \to X$ è

$$\dots \to \Omega^2 A \to \Omega^2 X \to \Omega F_i \to \Omega A \to \Omega X \to F_i \to A \to X$$

Applichiamo il funtore $[S^0, -]$:

$$\dots \to \pi_2(A) \to \pi_2(X) \to \underset{\pi_2(X,A)}{\underset{\parallel}{\pi_1(F_i)}} \to \pi_1(A) \to \pi_1(X) \to \underset{\pi_1(X,A)}{\underset{\parallel}{\pi_0(F_i)}} \to \pi_0(A) \to \pi_0(X)$$

Allo stesso modo, prendendo una fibrazione $p: E \to B$ e applicando $[S^0, -]$ si ottiene

$$\dots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \pi_{n-1}(E) \to \pi_{n-1}(B) \to \dots$$

$$\dots \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \underbrace{\{*\}}_{B \text{ connesso}}$$

OSS. Vale che $\pi_n(E,F) = \pi_n(B)$.

FIBRAZIONE DI SERRE

Si richiede la CHP per I^n (solo per loro) (quindi per i CW-compl.)

Vale anche per queste fibrazioni la succ. esatta lunga di fibrazione.

<u>Esempi:</u> fibrazione di Serre non fibrazione:

$B = [0,1]$ $E =$  $y = 1 + \frac{1}{n}$ $x \in [0,1]$

con proiezione sul primo fattore

le fibre $\pi^{-1}(0)$ e $\pi^{-1}(1)$ non sono omotopicamente equivalenti ($\pi^{-1}(1)$ è discreto, in $\pi^{-1}(0)$ c'è un punto che "swiuchia"), quindi non è fibrazione. È però fibraz. di Serre.

<u>Def</u> $e: Y \to Z$ è una n-equivalenza se $\forall y \in Y$, $e_*: \pi_q(Y,y) \to \pi_q(Z, e(y))$ è iniettiva per $q < n$ e surgettiva per $q \le n$.

Si dice equivalenza debole se è n-equivalenza $\forall n$.

OSS. f equiv. omot. $\Rightarrow$ f è equivalenza debole.

Sia $Y \hookrightarrow Z$ inclusione, allora:

$$\dots \to \pi_n(Y) \to \pi_n(Z) \to \pi_n(Z,Y) \to \pi_{n-1}(Y) \to \pi_{n-1}(Z) \to \dots$$

i è n-equiv. $\Leftrightarrow$ $\pi_q(Z,Y) = 0$ $\forall q \le n$.

i è equiv. debole $\Leftrightarrow$ $\pi_n(Z,Y) = 0$ $\forall n$.

<u>TEOREMA (WHITEHEAD):</u>

X CW-compl., $e: Y \to Z$ una n-equiv. Allora

$e_*: [X,Y] \to [X,Z]$ è una bigezione se $\dim X < n$, è surgettiva se $\dim X = n$.

<u>TEOREMA (WHITEHEAD):</u>

Una equivalenza debole tra CW-complessi è equiv. omotopica.

TOPA - LEZIONE 9

OSS. • $X \sim Y \Rightarrow \pi_n(X) = \pi_n(Y) \quad \forall n$

• $X \sim * \Rightarrow \pi_n(X) = 0 \quad \forall n$

• X discreto $\Rightarrow \pi_n(X) = 0 \quad \forall n > 0$

• $p: E \to B$ rivestimento $\Rightarrow p_*: \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ isomorfismo $\forall n \geq 2$

(F è discreto, si usa la succ. esatta di fibraz.)

Esempio: • $\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

• $\pi_n(\mathbb{R}P^k) = \pi_n(S^k)$ per $n \geq 2$

• $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$

• $\pi_i(S^n) = 0$ per $i < n$ (approx. cellulare)

• Fibrato di Hopf $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$

Per $n=1$: $S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$, usando la succ. della coppia

$\pi_i(S^2) = \pi_i(S^3)$ per $i \geq 3$.

Usando il punto prec. si ha $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

• $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (SPOILER)

TEOREMA (WHITEHEAD):

X CW-compl., $e: Y \to Z$ n-equivalenza. Allora $e_*: [X,Y] \to [X,Z]$ è bigezione se $\dim X < n$, è surgettiva se $\dim X = n$.

COROLLARIO:

e equivalenza debole $\Rightarrow e_*: [X,Y] \to [X,Z]$ è bigezione $\forall X$ CW-compl.

LEMMA DI COMPRESSIONE:

(X,A) CW-coppia, (Y,B) coppia qualunque con $B \neq \emptyset$. Supponiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $X \setminus A$ ha delle celle di dim n si abbia $\pi_n(Y,B) = 0$ (per ogni punto base)

Allora ogni $f: (X,A) \to (Y,B)$ è $\sim_{\text{rel } A}$ a una $f_1: X \to B$.

DIM: Per induz. sugli scheletri.

Se $f \sim f'$ con $f'(X_{k-1}) \subseteq B$, per ogni k-cella in $X \setminus A$

$\varphi: (D^k, \partial D^k) \to (X, X_{k-1})$ funz. caratt.

$f' \circ \varphi: (D^k, \partial D^k) \to (Y, B) \quad \sim_{\text{rel } \partial D^k} 0$

perché $\pi_k(Y,B) = 0$.

Quindi $f'|_{\varphi(D^k)} \sim_{\text{rel } \varphi(\partial D^k)} f''$ con $f''(\varphi(D^k)) \subseteq B$.

Facendo questo contemporaneamente $\forall$ k-cella si trova $F: X_k \times I \to Y$ con $F_0 = f'$, $F_1(X_k) \subseteq B$.

X è CW-compl., quindi ha HEP ((X, X_k) è NDR), estendiamo F a tutto X.

Nel caso $\dim X < +\infty$ ok, se $\dim X = +\infty$ basta incollare le omotopie in modo furbo (ognuna nell'intervallo $[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}}]$).

→ DIM: 1° CASO: $i: Y \to Z$ inclusione.

Per ip. $\pi_k(Z,Y) = 0$ se $k \leq n$ — applicato a $(X, *)$

Se $\dim X \leq n$, per il lemma $\forall f: X \to Z$

$f \sim f_1: X \to Y$. $\Rightarrow i_*$ surgettiva.

Se $\dim X < n$, siano $f, g: X \to Y$ tali che $i \circ f \sim i \circ g$ (in Z) $\Rightarrow \exists F: (X \times I, X \times \partial I) \to (Z, Y)$

$F_0 = f$, $F_1 = g$

$X \times I$ è CW-compl. di dimensione $\dim X + 1 \leq n$.

e $X \times \partial I$ è sottocompl. (ovvero $(X \times I, X \times \partial I)$ è CW-coppia)

Possiamo allora applicare il lemma:

$\exists G: X \times I \to Y$ con $G_0 = f$, $G_1 = g$. $\Rightarrow f \sim g$ (in Y)

CASO GENERALE: $Y \xrightarrow{j} M(e) \xrightarrow{r} Z$, $e = r \circ j$

r è equiv. omot. $\Rightarrow j: Y \to M(e)$ è n-equivalenza.

Quindi ci siamo ridotti al caso precedente.

TEOREMA 2 (WHITEHEAD): Una n-equivalenza tra CW-compl. di dim $< n$ è una equivalenza omotopica.

Una equivalenza debole tra CW-compl. è equiv. omotopica.

DIM: Sia $e: Y \to Z$ che soddisfa una delle ipotesi, per il teorema 1, $e_*: [Z,Y] \to [Z,Z]$ è bigezione

cioè $\exists f: Z \to Y$ tale che $e \circ f \sim id_Z$

Quindi $e f e \sim e \circ id_Y$

Consideriamo ora $e_*: [Y,Y] \to [Y,Z]$ bigezione

$\Rightarrow f \circ e \sim id_Y$.

OSS. Se $\dim X, \dim Y < n$ ed $e: X \to Y$ è n-equiv., allora $e_*: \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ è isomorfismo $\forall k$.

Esempio: $\mathbb{RP}^2$, $S^2 \times \mathbb{RP}^\infty$ hanno stessa omotopia ma non sono omotop. equiv.

$S^2 \to \mathbb{RP}^2$ rivestimento $\Rightarrow \pi_n(S^2) = \pi_n(\mathbb{RP}^2) \quad \forall n \geq 2$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n = S^\infty \to \mathbb{RP}^\infty$ rivestiment $\Rightarrow \pi_n(\mathbb{RP}^\infty) = 0 \quad \forall n \geq 2$

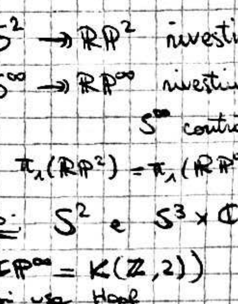
S^∞ contrattile

$\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \pi_1(\mathbb{RP}^\infty) \quad \Rightarrow$ Stessa omotopia

Esempio: S^2 e $S^3 \times \mathbb{CP}^\infty$ hanno stessa omotopia ma non sono omotop. eq.

($\mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z},2)$)
poi si usa Hopf

Esempio:



$= X \qquad \pi_n(X) = 0 \quad \forall n$ ma X non è contrattile

Siano $A = X \cap \{y > \frac{1}{3}\}$, $B = X \cap \{-\frac{2}{3} < y < \frac{2}{3}\}$,
$C = X \cap \{y < -\frac{1}{3}\}$

Presa $f: S^n \to X$, triangoliamo S^n in modo che ogni simplesso stia in A, B o C.

$f(S^n) \subseteq A \cup C \cup \{$unione finita di segmenti in $B\}$

Allora $f(S^n)$ contrattile ($f \sim *$)

Se fosse $X \sim \{(0,0)\}$ allora $\exists F: X \times I \to X$ con $F_0 = id$, $F_1 = \{(0,0)\}$

Ma $(\frac{1}{n}, 0)$ per andare in $(0,0)$ deve passare da $(0,1)$

Ciò va contro alla continuità di $F|_{\{(\frac{1}{n},0)\} \times I}$

X non è CW-compl. perché la consideriamo con la top. di sottosp. di $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA (APPROSSIMAZIONE CELLULARE)

Data $f: (X,A) \to (Y,B)$ di CW-coppie, $f|_A$ cellulare. Allora $f \sim_{rel A} g$ cellulare.

Def $f: X \to Y$ tra CW-compl. è cellulare se $\forall k \quad f(X_k) \subseteq Y_k$.

PROPOSIZIONE: $f: (K,L) \to M$ tra compl. simpliciali, $f|_L$ simpliciale. Allora $f \sim_{rel L} g$ simpliciale.

Def X è n-connesso se $\pi_q(X,*) = 0 \quad \forall q \leq n$.

Def (X,A) è n-connesso se $\pi_q(X,A,*) = 0 \quad \forall q \leq n$ (ovvero $i: A \to X$ è n-equivalenza)

LEMMA: (X,A) CW-coppia. Se $X \setminus A$ non ha m-celle per $m \leq n$, allora (X,A) è n-connessa. In particolare, questo accade per (X, X_n) per ogni CW-compl. X.

$\to$ DIM: Per induz. sulla dim dello scheletro.

Se ci sono 0-celle in $X \setminus A$ costruisco omotopia prendendo cammino da $f(x)$ verso un vertice in Y.

Se abbiamo definito $F|_{(X_{k-1} \times I) \cup A}$ con $F_1(X_{k-1}) \subseteq Y_{k-1} \quad \forall k \leq n$

Applichiamo il lemma a (Y, Y_n):

$\pi_n(Y, Y_n) = 0$ Usando il lemma di compressione trovo

$f|_{X_n} \sim f': X_n \to Y$ con $f'(X_n) \subseteq Y_n$

Usiamo HEP per estendere a tutto X l'omotopia.

$\to$ DIM: Il lemma è vero $\Leftrightarrow \forall k \leq n \quad \forall f: S^k \to X \quad (f(1) = * \in A)$ allora $f \sim g$ con $g(S^k) \subseteq A$.

Basta trovare g tale che $\forall$ cella $e \in X \setminus A$, $Im(g) \not\ni$ un punto di e

$f(S^k)$ interseca # finito di celle, quindi mi riduco al caso di 1 sola cella $\quad X = A \cup_\varphi D^r \quad r > n$. $\quad f: (I^k, \partial I^k) \to (X, *)$

Consider $D^r = U \cup V$ con $U = \{x \mid \|x\| > 1 - 2\varepsilon\}$
$V = \{x \mid \|x\| < 1 - \varepsilon\}$

Suddividiamo I^k in modo che ogni simplesso finisca in U o in V.

Consideriamo $q: D^r \to D^r/_{U} \cong X/_{A \cup_\varphi (U)} \cong S^r$. Triangoliamo S^r con un vertice P corrispondente a $[U]$.

Un numero finito di simplessi di I^k vanno in U e quindi in P.

Sia $M \subseteq I^k$ l'unione di questi simplessi (è sottocompl.). Usiamo approx. simpliciale e ho $qf \sim g$ simpliciale tramite omotopia che fissa M ($\supseteq \partial I^k$). L'omotopia muove solo punti nell'interno del disco

$\Rightarrow$ è omotopia di f

Esempio: • $\pi_k(S^n) = 0 \quad \forall k < n$.

• Supponendo di sapere $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, per $n \geq 2$ $\pi_n(S^n \vee S^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$S^n \vee S^n = (S^n \times \{*\}) \cup (\{*\} \times S^n) \subseteq S^n \times S^n$ uso succ. della coppia

$$\dots \to \pi_{n+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \to \pi_n(S^n \vee S^n) \to \pi_n(S^n \times S^n) \to \pi_n(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \to \dots$$

sono nulli

TOPA - LEZIONE 10

TEOREMA (ESCISSIONE IN OMOTOPIA).

$(X; A, B)$ triade di CW-compl. (cioè $X = A \cup B$, $C = A \cap B \neq \emptyset$).

Se (A, C) è m-connesso, (B, C) è n-connesso $\Rightarrow (A, C) \hookrightarrow (X, B)$ è $(m+n)$-connesso.

• $\Sigma : \pi_q(X) \to \pi_{q+1}(X)$

$\quad f \longmapsto \Sigma f = f \wedge id : S^{q+1} = S^q \wedge S^1 \to X \wedge S^1 = \Sigma X$

(omomorfismo di Freudenthal)

TEOREMA (SOSPENSIONE DI FREUDENTHAL)

X CW-compl. $(n-1)$-connesso $\Rightarrow \Sigma$ è bigezione se $q < 2n-1$, è surgettiva se $q = 2n-1$

DIM: $\Sigma X = C_+X \cup C_-X$

$C_+X \cap C_-X = X$

$\pi_i(X) \cong \pi_{i+1}(C_+X, X)$ usando succ. esatta per la coppia e $\pi_{i+1}(\Sigma X, C_-X) \cong \pi_{i+1}(\Sigma X)$ allo stesso modo.

Usando $(C_+X, X) \hookrightarrow (\Sigma X, C_-X)$ si ha

$\pi_i(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$ (guardandoci, la mappa è proprio Σ)

X è $(n-1)$-connesso $\Rightarrow (C_+X, X)$ è n-connesso

Per escissione $(C_+X, X) \hookrightarrow (\Sigma X, C_-X)$ è una $2n$-equivalenza

$\Rightarrow \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X)$ è iso per $i+1 < 2n$ e surg. per $i+1 = 2n$.

COROLLARIO: $\forall n \quad \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Inoltre $\pi_i(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{i+1}(S^{n+1} = \Sigma S^n)$ è isom. per $i < 2n-1$, surg. per $i = 2n-1$

DIM: Usiamo la succ. esatta lungo

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow[\text{surg.}]{\Sigma} \pi_2(S^2) \xrightarrow[\text{isom.}]{\Sigma} \pi_3(S^3) \xrightarrow[\text{isom.}]{} \dots$$

Usando inoltre $S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$ si ottiene per succ. di omotopia $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2)$.

OSS. X n-connesso $\Rightarrow$ $\Sigma^k X$ è $(n+k)$-connesso

$\pi_{i+1}(\Sigma X) \cong \pi_{i+2}(\Sigma^2 X)$ se $i+1 \leq 2(n+1)-1$ cioè $i \leq 2n$

$\vdots$

$\pi_{i+k}(\Sigma^k X) \cong \pi_{i+k+1}(\Sigma^{k+1} X)$ se $i+k \leq 2(n+k)-1$ cioè $i \leq 2n+k-1$

Quindi se $k \gg 1$ si ha isomorfismo (per ogni n, anche $n=-1$, cioè niente connessione)

Def $\pi_i^S(X) := \pi_{i+k}(\Sigma^k X)$ per $k \gg 1$.

(stabile)

Esempio: $\pi_i^S(S^0) = \pi_{i+k}(S^k)$

$\pi_i^S(S^1) = \pi_{i+k}(S^{k+1}) = \pi_{i-1+k+1}(S^{k+1}) = \pi_{i-1}^S(S^0)$

$\pi_i^S(S^2) = \pi_{i-2}^S(S^0)$

TEOREMA (SERRE) $\exists$ π_i^S sono finiti.

Esempio: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $\pi_n(S^n \vee S^n) = \pi_n(S^n) \oplus \pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\pi_n(\underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_{k \text{ volte}}) = \mathbb{Z}^k$.

- $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z} = \langle i_0 = [\{1\} - \{-1\}] \rangle$ con $S^0 = \{1\} \cup \{-1\}$

Possiamo definire induttivamente

$i_{n+1} \in \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$ $\quad i_{n+1} = \Sigma i_n$

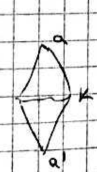
dove $\Sigma : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_{n+1}(\Sigma S^n = S^{n+1})$

In generale

K compl. simpl.

$S : \tilde{H}_n(K) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(SK)$ $\qquad SK = K * S^0$

è isom. perché si usa Mayer-Vietoris con i coni di base K



$\mathfrak{S} : C_i(K) \to C_{i+1}(SK)$

$[v_0, \dots, v_i] \mapsto [v_1, \dots, v_i, a] - [v_0, \dots, v_i, a']$

S è di compl., quindi induce $S_* : \tilde{H}_i(K) \to H_{i+1}(SK)$

Usando Mayer-Vietoris con $(SK; K*a, K*a')$

$\partial_{n+1} : \tilde{H}_{n+1}(SK) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(K)$

$\mathfrak{S} : C_{n+1}(K*a) \oplus C_{n+1}(K*a') \to C_{n+1}(SK)$

$\alpha \oplus \beta \mapsto \alpha + \beta$

$z \in C_n(K)$: $\quad$ inteso come C ci aggiungo il vertice

$S(z) = za - za' = \mathfrak{S}(za \oplus -za')$

$\partial_{n+1}(za) = (-1)^{n+1} z$ $\qquad$ perché z è ciclo

$\partial_{n+1}(-za') = (-1)^n z$

$\Rightarrow$ $\partial_{n+1}([Sz]) = \partial_{n+1}(S_*[z]) = (-1)^{n+1}[z]$ $\Rightarrow$ S_* isomorfismo.

- $\alpha_n \in \tilde{H}_n(S^n)$

$\overset{\shortparallel}{\Sigma^n i_0}$ $\qquad$ Vedendo $S^n = S^0_1 * \dots * S^0_{n+1}$

$S^0_i = \{a_i, a_i'\}$

$\alpha_0 = a_1 - a_1'$

$\alpha_1 = S_* \alpha_0 = [[a_1, a_2] - [a_1', a_2] - [a_1, a_2'] + [a_1', a_2']]$

$\vdots$

COROLLARIO: $S_* : \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$

OSS.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "S_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{H}_n(Y) \arrow[d, "S_*"] \\
\tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "(\Sigma f)_*"] & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

è commutativo ($f : X \to Y$).

- X sp. con punto base

$h : \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X)$ $\qquad$ è ovviamente ben definita

$[f] \mapsto f_*(i_n)$ $\qquad$ (omomorfismo di HUREWICZ)

$f : S^n \to X$ $\qquad$ $f_* : \tilde{H}_n(S_n) \to \tilde{H}_n(X)$

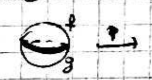
Se $n \geq 2$ è omomorfismo. ($n \geq 1$ nel caso assoluto)

Allo stesso modo, $h : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$

$[f] \mapsto f_*(j_n)$

$f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ $\qquad$ $j_n \in H_n(D^n, S^{n-1})$

Il caso $n=1$ assoluto è l'abelianizzazione.

Per $n \geq 2$, $\quad [f] + [g]$ è rappr. da  $\xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$

con $\nabla(X \times \{*\}) = X$

$\nabla(\{*\} \times X) = X$

$P_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n) \oplus \tilde{H}_n(S^n)$ $\qquad$ $\nabla_* : \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(X)$

$i_n \mapsto i_n \oplus i_n$ $\qquad$ $\alpha \oplus \beta \mapsto \alpha + \beta$

$\Rightarrow$ $(\nabla \circ f \vee g \circ P)_* = f_*(i_n) + g_*(i_n)$ $\quad$ Quindi è omomorfismo

LEMMA: h è funtoriale: se $f: X \to Y$ allora
$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_n(Y) \arrow[d, "h"] \\ \tilde{H}_n(X) \arrow[r, "f_*"] & \tilde{H}_n(Y) \end{tikzcd}$$

In particolare
$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Sigma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{H}_n(X) \arrow[d, "\Sigma"] \\ \pi_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "h"] & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \end{tikzcd}$$

OSS. - $X = \bigvee_{i \in I} S^n_i$. $h: \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X)$ per $n > 1$ è isomorfismo.

TEOREMA (HUREWICZ): (Guarda la dim nelle note)

X spazio $(n-1)$-connesso $\Rightarrow$ $h: \pi_n(X) \to H_n(X)$ è abelianizzazione per $n=1$, isomorfismo per $n>1$.

TEOREMA (APPROSSIMAZIONE PER CW-COMPL)

$\forall$ spazio X $\exists$ CW-compl. ΓX e una equivalenza debole $\gamma: \Gamma X \to X$. Se X è n-connesso, si può prendere ΓX con 1 0-cella e nessuna q-cella per $1 \le q \le n$.

COROLLARIO:

X CW-compl. n-connesso $\Rightarrow$ X è omot. equiv. a un CW-compl. con 1 0-cella e nessuna cella di dim $\le n$.

$\to$ DIM:
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, "\gamma_1"'] & X_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "\gamma_2"] & \dots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma_n"] & X_{n+1} \arrow[r] \arrow[dll, "\gamma_{n+1}"] & \dots \\ & & X & & & \end{tikzcd}$$

$X_1 = \bigvee_j S^q$ $\forall (q,j)$ tale che $f_j: S^q \to X$ è generatore di $\pi_q(X)$

Poniamo $\gamma_1 = f_j$ su S^q_j.

X_1 è CW-compl. $(\gamma_1)_*$ è surgettiva per ogni gruppo di omologia

Per ip. induttiva supponiamo di aver costruito X_q, $q \le n$, con $X_q \overset{i_q}{\hookrightarrow} X_{q+1}$ sottocomplesso e, $\gamma_{q+1} \circ i_q = \gamma_q$, e $(\gamma_q)_*: \pi_r(X_q) \to \pi_r(X)$ è surg. per ogni r e isom. per $r<q$.

Poniamo
- $X_{n+1} := X_n \cup_{f_i} \bigcup D^{n+1}_i$ dove $f_i: S^n \to X_n$ sono tali che $[f_i]$ generano $\mathrm{Ker}(\pi_n(X_n) \to \pi_n(X))$
- $i_n: X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ l'inclusione
- $\gamma_{n+1}: X_{n+1} \to X$ tale che $\gamma_{n+1}|_{X_n} = \gamma_n$ e su D^{n+1}_i usiamo l'omotopia $\gamma_n \circ f_i \simeq *$

In questo modo si ottiene l'isomorfismo sui π_n (e non abbiamo cambiato quelli minori)

TOPA_ LEZIONE 11

$\hookrightarrow$ DIM [HUREWICZ]: Per l'ultimo teorema possiamo supporre X CW-compl. con 1 0-cella, nessuna q-cella per $1 \le q \le n$

Facciamo solo il caso $n \ge 2$.

$\pi_n(X_{n+1}) = \pi_n(X)$, quindi possiamo supporre $X = X_{n+1}$

Dunque
$$X = \left(\bigvee_i S^n_i\right) \cup_{\{\varphi_j\}} \left(\bigcup_j D^{n+1}_j\right)$$
con $\varphi_j: \partial D^{n+1}_j \to \bigvee S^n_i = L$

Ponendo $K = \bigvee_j \partial D^{n+1}_j$ incolliamo con una unica funzione $\varphi: K \to L$

Quindi $X = C\varphi$ è la cofibra di $\varphi: K \to L$

$$\begin{tikzcd} \pi_n(K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \tilde{H}_n(K) \arrow[r] & \tilde{H}_n(L) \arrow[r] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Per bouquet di sfere avevamo già visto l'isomorfismo

è esatta perché è la succ. della coppia (X, L):

$H_{n+1}(X,L) \xrightarrow{\partial} H_n(L) \to H_n(X) \to H_n(X,L) = 0$ $(L = X_n)$

la mappa ∂ è fatta dalle funz. di attaccamento dei bordi delle $(n+1)$-celle

Quindi mettendoci $H_n(K)$ si ottiene la stessa immagine

è esatta anche questa:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "j"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & M\varphi \arrow[r, "\simeq"] & L \end{tikzcd}$$

$X = C\varphi = M\varphi / j(K)$

Quindi la succ. di fibraz. dà
$$\begin{tikzcd} \pi_n(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_n(M\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(M\varphi, K) \arrow[r] \arrow[d, "(*)"] & 0 \\ \pi_n(K) \arrow[r] & \pi_n(L) \arrow[r] & \pi_n(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

X è $(n-1)$-connesso. Usiamo che

PROPOSIZIONE:

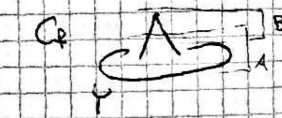
Se $f: X \to Y$, X, Y $(n-1)$-connessi con $n > 1$, allora Cf è $(n-1)$-connesso e l'appl. quoziente $\pi: (Mf, X) \to (Cf, *)$ è $(2n-1)$-equiv.

Quindi $(*)$ è isomorfismo.

Dunque possiamo usare il lemma dei 5 e concludere.

↳ DIM: $C_f = M_f / X$

Consideriamo (C_f, A, B) e usiamo escissione con

C_f 

$A = Y \cup (X \times [0, \frac{2}{3}])$

$B = (X \times [\frac{1}{3}, 1]) / X \times \{1\}$

$C = A \cap B = X \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

$(M_f, X) \simeq (A, C) \hookrightarrow (C_f, B) \simeq (C_f, *)$

Penso $A \subseteq M_f$.

Considero la succ. della coppia (M_f, X)

$$\dots \to \underset{\substack{\| \\ \pi_{n-1}(Y) = 0 \text{ per ip.}}}{\pi_{n-1}(M_f)} \to \underset{\substack{? \\ 0}}{\pi_{n-1}(M_f, X)} \to \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ per ip.}}}{\pi_{n-2}(X)} \to \pi_{n-2}(M_f) \to \dots$$

[redacted]

Quindi anche (A, C) è $(n-1)$-connesso.

Consideriamo allora (CX, X):

$$\dots \to \underset{\substack{\| \\ 0 \; CX \text{ contrattile}}}{\pi_n(CX)} \to \underset{\substack{? \\ 0}}{\pi_n(CX, X)} \to \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ per ip}}}{\pi_{n-1}(X)} \to \dots$$

da cui $(B, C) \simeq (CX, X)$ è n-connessa.

Escissione ci dà che $(A, C) \hookrightarrow (C_f, B)$ è $(2n-1)$-equiv.

$\Rightarrow$ lo è anche $(M_f, X) \to (C_f, *)$.

SUCCESSIONI SPETTRALI

(C^*, d) complesso graduato di cocatene su R anello (R-modulo graduato $C^* = \oplus C^i$)

(C_*, d) complesso graduato di catene su R anello.

$$H^*(C^\cdot) = \left\{ \frac{\ker d^i}{\operatorname{Im} d^{i-1}} \right\} \qquad H_*(C_\cdot) = \left\{ \frac{\ker d_i}{\operatorname{Im} d_{i+1}} \right\}$$

Def F^* (F_*) è filtrazione su un R-modulo A se è una famiglia di sottomoduli ordinati rispetto all'inclusione

$\dots \subseteq F^{p+1}A \subseteq F^pA \subseteq F^{p-1}A \subseteq \dots$ filtraz. decresc

$\dots \subseteq F_{p-1}A \subseteq F_pA \subseteq F_{p+1}A \subseteq \dots$ filtraz. crescente

Def (C^*, d) o (C_*, d) sono complessi graduati filtrati se sono R-moduli filtrati da F e

$d(F^iC^j) \subseteq F^iC^{j+1}$

$d(F_iC_j) \subseteq F_iC_{j-1}$

Esempio: $A = \mathbb{Z}$, $F^iA = \begin{cases} 2^i\mathbb{Z} & \text{per } i \geq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{per } i \leq 0 \end{cases}$ è filtrazione

Def Se (A, F) è R-mod filtrato, il modulo graduato associato è

$$E_0^p(A) = \begin{cases} F^pA / F^{p+1}A & \text{se } F \text{ decr.} \\ F_pA / F_{p-1}A & \text{se } F \text{ cresc.} \end{cases}$$

Def Una filtraz è limitata se $\exists n : F^nA = 0$ e $\exists m : F^mA = A$.

Analogamente per "limitata dal basso/dall'alto"

OSS. Anche se F è limitata, in generale $E_0^*(A)$ non determina univocamente A.

Vale però

$$0 \to F^{n-1}A \to E_0^{n-1}(A) \to 0$$
$$0 \to F^{n-2}A \to F^{n-1}A \to E_0^{n-2}(A) \to 0$$
$$\vdots$$
$$0 \to F^{m-1}A \to F^mA \to E_0^m(A) \to 0$$

Esempio: X CW-compl. X_p il p-scheletro

$C_* = C_*(X)$ catene cellulari / singolari

$F_pC_n = C_n(X_p) \subseteq C_n(X)$ è filtraz. crescente di $C_*(X)$

$C^* = C^*(X) = \operatorname{Hom}(C_*(X), R)$

$F^pC^* = \{ \phi \in \operatorname{Hom}(C_*(X), R) \mid \phi|_{C_*(X_{p-1})} = 0 \} = \operatorname{Ann}(F_{p-1}C_*) \subseteq C^*$

è filtraz. decresc. di C^*.

$E_0^p(C_*) = F_pC_* / F_{p-1}C_* = C_*(X_p, X_{p-1})$

$E_0^p(C^*) = \operatorname{Ann}(F_{p-1}C_*) / \operatorname{Ann}(F_pC_*) = C^*(X_p, X_{p-1})$

- Se $f: D_* \to C_*$ mappa di complessi e F filtraz. di C_*, allora $G_pD_* := f^{-1}(F_pC_*)$ è filtraz di D_*.
- Se (C_*, d) complesso di catene, F filtraz crescente. $H_*(C_*)$ è modulo graduato e

$F_iH_*(C_\cdot) = \operatorname{Im}(H_*(F_iC_\cdot) \to H_*(C_\cdot))$ è filtraz. (cresc.)

Analogamente, se (C^*, d) compl. di cocatene, F filtraz decresc. $H^*(C^\cdot)$ è filtrato da

$F^iH^*(C^\cdot) = \ker(H^*(C^\cdot) \to H^*(F^{i-1}C^\cdot))$ (filtraz decr.)

Def E R-modulo bigraduato è collezione di moduli con gradi dati da 2 indici (s,t).

Def Un differenziale per un modulo bigraduato E è $d: E \to E$ di bigrado $\underset{\text{(scorro sull diag. minori)}}{(-r, r-1)}$ o $\underset{\text{(sale sulle diag. minori)}}{(r, 1-r)}$ se $d^2 = 0$ e

$d: E_{s,t} \to E_{s-r, t+r-1}$ (se $(-r,r-1)$)

$d: E^{s,t} \to E^{s+r, t+1-r}$ (se $(r, 1-r)$)

OSS. $(K^i = \bigoplus_{s+t=i} E^{s,t}, d)$ è complesso di cocatene (grado $d = +1$)

$(K_i = \bigoplus_{s+t=i} E_{s,t}, d)$ è complesso di catene (grado $d = -1$)

$$H_{p,q}(E_{*,*}, d) = \mathrm{Ker}(d: E_{p,q} \to E_{p-r, q+r-1}) \Big/ \mathrm{Im}(d: E_{p+r, q-r+1} \to E_{p,q})$$

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \mathrm{Ker}(d: E^{p,q} \to E^{p+r, q+1-r}) \Big/ \mathrm{Im}(d: E^{p-r, q+r-1} \to E^{p,q})$$

dà bigradazione in omologia/coomologia.

Def Una successione spettrale è collezione di moduli bigraduati differenziati $\{(E^r_{p,q}, d_r)\}_{r \geq k}$ oppure $\{E^{p,q}_r, d^r\}_{r \geq k}$ con d_r di bigrado $(-r, r-1)$ e d^r di bigrado $(r, 1-r)$ tale che

$E^{r+1}_{p,q} = H_{p,q}((E^r, d_r))$ (succ. spettr. di omologia)

$E^{p,q}_{r+1} = H^{p,q}((E_r, d^r))$ (S.S. di coomologia)

OSS. (E_r, d^r) determina E_{r+1} ma non determina d^{r+1} (analogo in coom.)

Def Il limite di una succ. spettr. è:

$E_{i+1} = Z_i / B_i$, $d^{i+1}: Z_i/B_i \to Z_i/B_i$ dove $Z_i = \mathrm{Ker}\, d^i$, $B_i = \mathrm{Im}\, d^i$, $B_i \subseteq Z_i$

possiamo considerare $Z_{i+1} \subseteq Z_i$ t.c. $\mathrm{Ker}\, d^{i+1} = Z_{i+1}/B_i$ e scrivere allora $B_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq Z_i$

Allo stesso modo scrivo $B_i \subseteq B_{i+1} \subseteq Z_{i+1} \subseteq Z_i$ ($B_{i+1}/B_i = \mathrm{Im}\, d^{i+1}$)

Ripetendo la costruzione

$B_k \subseteq \ldots \subseteq B_i \subseteq B_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq Z_{i+1} \subseteq Z_i \subseteq \ldots \subseteq Z_k$

Definiamo allora $B_\infty = \bigcup_i B_i$, $Z_\infty = \bigcap_i Z_i$

Questi continuano ad essere bigraduati.

Definiamo allora il limite $E_\infty := Z_\infty / B_\infty$

$$E_\infty = \bigoplus_{p,q} E^{p,q}_\infty$$

Def $(E_r^{*,*}, d^r)$ succ. spettr. è convergente ad un H^* se $\exists$ filtraz. di H^* tale che $E^{p,q}_\infty = E_0^{p,q}(H^*)$ risp. alla filtraz. F (è bigraduato: uno dato da H, l'altro da F)

Posso chiedere per ipotesi che d_r siano definitivamente nulli (almeno per (p,q) fissati)

Esempio: Se $E^{p,q}_r \neq 0$ solo per $p \geq 0, q \geq 0$, definitivamente per (p,q) fissato i differenziali saranno nulli. (succ. spettr. di 1° quadrante)

Def Se vale questo, cioè d^r definitivamente nulli, dico che $\{(E_r, d^r)\}_r$ stabilizza.

Def Dico che $\{(E_r, d^r)\}_r$ collassa alla pagina E_N se $d^r \equiv 0$ $\forall r \geq N$.

Def F filtraz. crescente per A è convergente se $\bigcup F_s A = A$ e $\bigcap F_s A = \{0\}$

Def F filtraz. su A graduato è limitata dal basso se $\forall t\ \exists s(t): F_{s(t)} A_t = 0$
è limitata dall'alto se $\forall t\ \exists s'(t): F_{s'(t)} A_t = A_t$.

Se valgono entrambe è limitata.

TEOREMA:

Se (A, d, F) è complesso di catene filtrato graduato, $\exists$ S.S. $\{(E^r, d_r)\}_{r \geq 0}$ tale che $E^1_{s,t} = H_{s+t}(F_sA / F_{s-1}A)$, d_1 è l'operatore di bordo di $(F_sA, F_{s-1}A, F_{s-2}A)$ e se F è convergente e limitata $\{(E^r, d_r)\}$ converge a $H_*(A)$, più precisamente

$$E^\infty_{p,q} = F_p H_{p+q}(A) \big/ F_{p-1} H_{p+q}(A).$$

TOPA - LEZIONE 13

X varietà paracompatta.

$$\Omega^*(X) = \{\Omega^k(X), \partial_{DR}\}$$

k-forme

$\mathcal{U}$ buon ricoprimento di X

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \bigoplus_{\substack{i_0<\dots<i_k \\ U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_k}\neq\emptyset}} C(U_{i_0,\dots,i_k}, \mathbb{R})$$

f loc. costanti

$$\delta : \check{C}^k \to \check{C}^{k+1}$$

$$\alpha \longmapsto (\delta\alpha)(U_{i_0,\dots,i_{k+1}}) = \sum (-1)^j \alpha(U_{i_0,\dots,\cancel{i_j},\dots,i_{k+1}})$$

<u>LEMMA DI POINCARÉ:</u>

U aperto contrattile. $H^*_{DR}(U;\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & *=0 \\ 0 & *\neq 0 \end{cases}$

$H^0_{DR}(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ loc. costanti}\}$

<u>TEOREMA:</u> $\check{H}^*(\mathcal{U};\mathbb{R}) = H^*_{DR}(X;\mathbb{R})$.

DIM: Consideriamo

$$\bigoplus_{p,q} \underbrace{\left(\bigoplus_{\substack{i_0<\dots<i_q \\ U_{i_0,\dots,i_q}\neq\emptyset}} \Omega^p(U_{i_0,\dots,i_q})\right)}_{=A^{p,q}} \quad \text{con differenziale} \quad d^{(p,q)} = \partial + (-1)^p\delta$$

Costruiamo filtrazione

$$\mathcal{F}^k A = \bigoplus_{\substack{p,q \\ q\geq k}} A^{p,q} \qquad \mathcal{F}^k A / \mathcal{F}^{k+1} A = \bigoplus_p A^{p,k}$$

$$d_0 = \partial : A^{p,k} \to A^{p+1,k}$$

Scrivo $A^i = \bigoplus_{p+q=i} A^{p,q}$ e faccio succ. spettr.

Grado per grado

$$E_0^{p,q} = \mathcal{F}^p\Big(\underbrace{\bigoplus_{i+j=p+q} A^{i,j}}_{A^{p+q}}\Big) \Big/ \mathcal{F}^{p+1}\Big(\underbrace{\bigoplus_{i+j=p+q} A^{i,j}}_{A^{p+q}}\Big) = \bigoplus_{\substack{i+j=p+q \\ j\geq p}} A^{i,j} \Big/ \bigoplus_{\substack{i+j=p+q \\ q\geq p+1}} A^{i,j} = A^{q,p}$$

Quindi $E_1^{p,q} = H^0_{DR}(A^{q,p})$ solo sulla prima riga, $\emptyset$ altrove.

$d_1 = \delta$ e $\bigoplus H^0_{DR}(U_{i_0,\dots,i_p}) = \check{C}^p(\mathcal{U};\mathbb{R})$

$\Rightarrow E_2 = E_\infty = \check{H}(\mathcal{U};\mathbb{R})$.

Considerando invece A^i con differenziale indotto da una filtraz. completamente simmetrica, che verrà $\delta : A^{q,p} \to A^{q,p+1}$ e usando

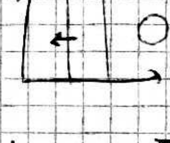
<u>LEMMA:</u> $\Big(\bigoplus_{\substack{i_0<\dots<i_p \\ U_{i_0,\dots,i_p}\neq\emptyset}} \Omega^k(U_{i_0,\dots,i_p}), \delta\Big)$ è esatto tranne in grado $p=0$.

Quindi in E_1 sopravvivono solo le forme globali sulla prima colonna e niente altrove. $d_1 = \partial \Rightarrow E_2 = E_\infty = H^*_{DR}(X;\mathbb{R})$

(in teoria E_∞ dipenderebbe dalla filtrazione ... Ma si risolve ...)

OSS. Sia (X,Y) coppia (Scriviamo $Y = X_0$, $X = X_1$). $(Y\neq\emptyset)$

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) = \begin{cases} H_q(Y) & p=0 \\ H_{q+1}(X,Y) & p=1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  $d^1_s : E^1_{1,q} \to E^1_{0,q}$ è l'operatore di bordo della succ. esatta della coppia.

E^∞:

$$E^\infty_{0,q} = \frac{\mathrm{Im}(H_q(Y) \to H_q(X))}{\mathrm{Im}(H_q(\emptyset) \to H_q(X))} = \mathrm{Im}(H_q(Y) \to H_q(X))$$

$$E^\infty_{1,q} = \frac{H_{q+1}(X)}{\mathrm{Im}(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(X))}$$

E^2: $\mathrm{Ker}\,\partial = H_{q+1}(X,Y) \Big/ \mathrm{Im}(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(X,Y)) = E^2_{1,q}$

$$E^2_{0,q} = H_q(Y) \big/ \mathrm{Im}\,\partial$$

Dunque

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Im}(H_i(Y) \to H_i(X))}_{\substack{E^2_{0,i} \\ \| \\ H_i(Y)/\mathrm{Im}\,\partial_{i+1}}} \to H_i(X) \to \underbrace{H_i(X) \big/ \mathrm{Im}(H_i(Y) \to H_i(X))}_{\substack{E^2_{1,i-1} \\ \| \\ \mathrm{Ker}\,\partial_i}} \to 0$$

La succ. spettrale diventa equivalente a quella della succ. della coppia (con ... il differenziale)

Fibrazioni $\pi: E \to B$ fibrato di Serre

B sp. top. c.p.a.

B può essere approssimato con CW compl. (con stessa omologia)

$E_x = \pi^{-1}(x)$ fibra $\rightsquigarrow H_*(E_x)$

$\gamma: (S^1, *) \to (B, b_0) \quad \rightsquigarrow \quad \gamma_\#: H_*(E_{b_0}) \to H_*(E_{b_0})$

Se $\gamma \sim \gamma'$ in $\pi_1(B, b_0)$ $\Rightarrow$ $\gamma_\# = \gamma'_\#$.

Supponiamo

$\tau: \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Aut}(H_*(E_{b_0}))$ sia banale

(ad esempio se $\pi_1(B, b_0) = 0$)

TEOREMA:

Sia $\pi: E \to B$ fibrato di Serre. Allora $\exists$ s.s. $E^r_{p,q}$ $r \geq 2$

con $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(E_x))$ e

$E^\infty_{p,q} = G_p H_{p+q}(E)$ per una certa filtraz G su $H_*(E)$.

Esempio: $SU(2) \leftarrow \{A\}$ $\Rightarrow$ $SU(2) \cong S^3$.

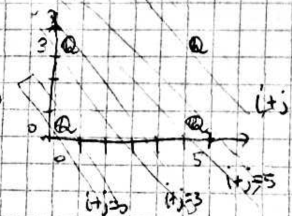
con $v \in S^3 \to$ fissato

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ Av \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \end{array}$$

fibraz. di Serre

Esempio: $S^3 \cong SU(2) \hookrightarrow SU(3)$, $SU(3) \to S^5$ fibraz. di Serre. $\Rightarrow$ Usiamo il teorema:

$E^2_{p,q} = H_p(S^5, H_q(S^3)) \rightsquigarrow$



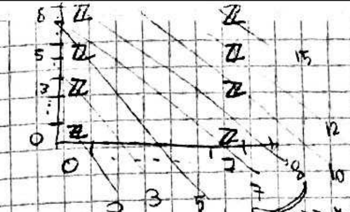
Tutti i differenziali sono nulli $\Rightarrow E^2 = E^\infty$

$\Rightarrow H_i(SU(3); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{per } i = 0, 3, 5, 8 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(stessa cosa per coefficienti in $\mathbb{Z}$)

Esempio: $SU(3) \hookrightarrow SU(4) \to S^7$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$:

E^2



$\to$ Ma il differenziale si muove verso $\leftarrow$ quindi è comunque nullo

$\Rightarrow E^2 = E^\infty$ $\Rightarrow$ $H_i(SU(4); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esempio: La stessa cosa per $SU(5)$ non funziona. Si trovano dei differenziali che potrebbero essere $\neq 0$.

Esempio: X CW-compl. con pto base x_0

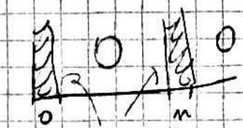
$\Omega X \hookrightarrow PX \to X$ fibraz. di Serre

$PX \sim *$, quindi $E^2_{p,q} = H_p(X, H_q(\Omega X))$ e $E^\infty_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } p,q = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Quindi: se ad esempio prendiamo

$X = S^n$, $\mathbb{K}$ campo. $E^2_{p,q} = H_p(S^n; H_q(\Omega S^n; \mathbb{K})) = H_p(S^n; \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} H_q(\Omega S^n; \mathbb{K})$

E^2:



le 2 colonne sono uguali (a stessa altezza)

ΩS^n connesso $\Rightarrow$ $E^2_{0,0} = E^2_{n,0} = \mathbb{K}$

L'unico differenziale che può non essere nullo è d^n.

$E^\infty_{p,q} = 0$ per $(p,q) \neq (0,0)$ $\Rightarrow$ $d^n: E^2_{n,0} \to E^2_{0,n-1}$ è isomorfismo

$\Rightarrow E^2_{0,n-1} \cong \mathbb{K} = E^2_{n,n-1}$. Da qua ripeto il ragionamento.

$\Rightarrow$ (se $n \geq 2$) $H_i(\Omega S^n; \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{se } i = m(n-1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

TOPA - LEZIONE 14

Esempio:
Se $\pi_k(X)=0 \quad \forall k<m \Rightarrow H_k(X)=0 \quad \forall k<m$

Considerando $\Omega X \hookrightarrow PX \twoheadrightarrow X$

dalla s.s. si ottiene che $H_k(\Omega X)=0 \quad \forall k<m-1$

OSS - Se C, C' complessi diff. graduati filtrati e $f: C \to C'$ compatibile con diff. e filtraz., allora f induce una appl. di succ. spettr. $f_i: E_i^{p,q} \to E'^{p,q}_i$

TEOREMA: $\tau: C \to C'$ di compl. compatibile con filtrazioni. Se le filtraz. sono convergenti limitate dal basso e se $\exists r \geq 1$ t.c. $\tau^{(r)}: E^r \to E'^r$ è isomorfismo, allora $\tau_*: H_*(C) \to H_*(C')$ è isomorfismo.

DIM: Per funtorialità τ induce isomorfismo su $\tau^{(\infty)}: E^\infty \to E'^\infty$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F_{s-1}(H_mC) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & F_s(H_mC) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & E^\infty_{s,m-s} \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{(\infty)}", "\cong"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_{s-1}(H_mC') \arrow[r] & F_s(H_mC') \arrow[r] & E'^\infty_{s,m-s} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Per s abbastanza piccolo $F_{s-1}(H_mC)=0$, $F_{s-1}(H_mC')=0$
(F lim. dal basso)

Quindi $\tau: F_s(H_mC) \to F_s(H_mC')$ è isom.

Per induz. su s τ induce sempre isomorfismo tra i filtrati.

$$\bigcup_s F_sH_mC = H_mC \qquad \text{(la filtr. converge)}$$

$$\bigcup_s F_sH_mC' = H_mC'$$

$\Rightarrow \tau: \bigcup_s F_sH_mC \to \bigcup_s F_sH_mC'$ è isom., ovvero $H_mC \cong H_mC'$

Quindi, se
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$
morfismo tra fibrazioni, questo induce mappa di compl. grad. filtr. e quindi mappa di s.s.

Se si ha una sezione $\begin{tikzcd} F \arrow[r] & X \arrow[d, "\pi"', shift right] \\ & B \arrow[u, "s"', shift right] \end{tikzcd}$, si ha

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, shift left] \arrow[d] & F \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\ B \arrow[r, "s", shift left] \arrow[d] & X \arrow[l, "\pi", shift left] \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

da cui si hanno relaz. tra le s.s.

$E'^r_{p,q} \Rightarrow H_*(B) \qquad E^r_{p,q} \Rightarrow H_*(X)$

Poiché $\pi s = id$, nella riga 0 di $E^r_{p,q}$ si ha $H_*(B)$ in ogni pagina, quindi non ci sono differenziali che entrano (o escono) nella riga 0.

SUCC. SPETTR. DI SERRE (OMOLOGIA) DIM:

$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$ fibrato di Serre. Assumiamo B CW-compl (approx cell. + pullback)

Sia B^i l'i-esimo scheletro di B: $\emptyset = B^{-1} \subseteq B^0 \subseteq \ldots \subseteq B^n \subseteq \ldots \subseteq B$

Su E consideriamo la filtraz. $E^i = p^{-1}(B^i)$

$E^0_{p,q} = C_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \qquad d^0 = \text{diff. di } C_*(E)$

$E^1_{p,q} := H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \underset{\text{se } p+q>0}{\cong} H_{p+q}(E^p/E^{p-1})$

$$E^p/E^{p-1} = \bigvee_i \left(E^p / E^p \setminus p^{-1}(\sigma_i)\right) \quad \text{dove } \sigma_i \text{ p-celle di } B$$

$$= \bigvee_i \left(\overline{p^{-1}(\sigma_i)} / p^{-1}(\partial\sigma_i) \right) = \bigvee_i \left(p^{-1}(\bar\sigma_i) / p^{-1}(\partial\sigma_i) \right)$$

Assumiamo per semplicità che p sia localmente banale (altrimenti usiamo approx. CW)

$$\begin{tikzcd} \dot{\bar{E}} \arrow[d] & \bar{E} \arrow[d] & p^{-1}(\bar\sigma_i) \subseteq E \arrow[d] \arrow[d, "p", shift left=6] \\ S^{p-1} \subseteq & D^p \arrow[r] & \bar\sigma_i \subseteq B \end{tikzcd}$$

$$p^{-1}(\bar\sigma_i) / p^{-1}(\partial\sigma_i) \cong \bar{E} / \dot{\bar{E}} \cong (D^p \times F) / (S^{p-1} \times F)$$

$$\Rightarrow E^1_{p,q} = \bigoplus_i H_{p+q}\left(D^p \times F / S^{p-1} \times F\right)$$

Claim: Ponendo $S^p := D^p \times \{*\} / \sim \; \subseteq D^p \times F / S^{p-1} \times F$, allora

$$\left(D^p \times F / S^{p-1} \times F\right) / S^p \cong \Sigma^p F = S^p \wedge F = S^p \times F / S^p \vee F$$

$$D^p \times F \big/ S^{p-1}\times F \cong S^p\times F \big/ \{\infty\}\times F$$

$$\left(D^p\times F \big/ S^{p-1}\times F\right)\big/ S^p \cong S^p\times F \big/ \{\infty\}\times F \cup S^p\times\{\infty\}$$ OK.

Se $q>0$, $H_{p+q}\left(D^p\times F/_{S^{p-1}\times F}\right) \underset{\substack{\text{per succ.}\\ \text{esatta lunga}\\ \text{coppia}}}{\cong} H_{p+q}\left(D^p\times F/_{S^{p-1}\times F}, S^p\right) = H_{p+q}\left(\left(D^p\times F/_{S^{p-1}\times F}\right)/_{S^p}\right) =$

$= H_{p+q}(\Sigma^p F) =$

$= H_q(F)$

Se $q=0$, $H_p\left(D^p\times F/_{S^{p-1}\times F}\right) = H_p\left(S^p\times F/_{\{\infty\}\times F}\right) \underset{\text{se } p>0}{\cong} H_p(S^p\times F, \{\infty\}\times F) \underset{\text{coppia}}{=}$

$= H_0(F)$

(Künneth)

perché

$$H_p(F) \to H_p(S^p\times F) \to H_p(S^p\times F, \{\infty\}\times F) \to H_{p-1}(F) \to H_{p-1}(S^p\times F) \to \dots$$

$H_p(S^p\times F) = H_p(F)\otimes H_0(S^p) \oplus H_0(F)\otimes H_p(S^p)$, $\quad H_{p-1}(S^p\times F) = H_0(S^p)\otimes H_{p-1}(F) \cong H_{p-1}(F)$

$\Rightarrow H_p(S^p\times F, \{\infty\}\times F) \cong H_0(F)\otimes H_p(S^p) = H_0(F)$

$\Rightarrow E^1_{p,q} = C_p(B; H_q(F))$ è isomorfismo di moduli. Cosa possiamo dire per d^1?

Per fissare un iso $\bigoplus_i H_{p+q}\left(p^{-1}(\overline{\sigma}_i)/_{p^{-1}(\partial\sigma_i)}\right) \cong C_p(B; H_q(F))$

Scegliamo $\forall$ cella $\sigma_i \in B$ un punto $x_0\in\sigma_i$ e cammino $b_0 \xrightarrow{\gamma} x_0$

(dove b_0 punto base).

γ induce iso $H_*(F_{b_0}) \cong H_*(F_{x_0})$

Assumiamo che $\pi_1(B)$ agisca banalmente su $H_*(F)$

(Quindi l'isomorfismo sopra non dipende da γ)

Allora $d^1_{p,q}: C_p(B; H_q(F)) \to C_{p-1}(B; H_q(F))$ corrisponde al differenziale di bordo ∂. $\Rightarrow E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(E))$

Se usiamo coefficienti in un campo o se $H_*(B)$ oppure $H_*(F)$ sono moduli liberi, allora $E^2_{p,q} \cong H_p(B)\otimes H_q(F)$

Un analogo Teorema vale in coomologia:

TEOREMA: $F\to E\to B$ fibrato di Serre, $\pi_1(B)$ agisce banalmente su $H^*(F)$

Allora $\exists$ s.s. $\{E_r^{p,q}, d_r\}_{r\geq 2}$ tale che $E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F))$

e $E_\infty^{p,n-p} = F_p^n/_{F^n_{p+1}}$ dove $0 \subseteq F^n_n \subseteq \dots \subseteq F^n_0 = H^n(E)$

PROPRIETÀ MOLTIPLICATIVE

Lavoriamo a coefficienti in R e supponiamo anche che $H^p(B; H^q(F;R)) \cong H^p(B;R)\otimes H^q(F;R)$

Allora E_2 ha struttura moltiplicativa

$$(a'\otimes b')(a''\otimes b'') = (-1)^{|b'|\cdot|a''|}\, \underset{\text{prod. in coomologia}}{a'a''\otimes b'b''}$$

Se A anello filtrato, F_iA filtr. decr.,

Se $F_pA\cdot F_qA \subseteq F_{p+q}A \Rightarrow \underset{GA}{\bigoplus}\left(F_pA/_{F_{p+1}A}\right)$ ha struttura moltiplicativa

La struttura potrebbe essere molto povera, anche se quella su A non lo è

(ad esempio il prod su GA è banale se $F_pA\cdot F_qA \subseteq F_{p+q+1}A$)

La moltiplicazione in $H^*(X)$ è indotta da

$$\Delta: X \to X\times X$$

$$\underbrace{H^*(X)\otimes H^*(X) \xrightarrow{\cong} H^*(X\times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)}_{\text{prodotto}}$$

Con catene relative: $\left.\begin{matrix} c_1 \in C^k(X, X_1) \\ c_2 \in C^l(Y, Y_1)\end{matrix}\right\} \to c_1\otimes c_2 \in C^{k+l}(X\times Y, (X_1\times Y)\cup(X\times Y_1))$

Dati (E', B', F', p') e (E'', B'', F'', p'') fibrazioni, possiamo considerare $(E'\times E'', B'\times B'', F'\times F'', p'\times p'')$. Ognuna di queste dà s.s. $\{(E')_p\}$ (da filtraz.)

$\{(E'')_p\}$, $\{(E'\times E'')_p\}$ (sono p^{-1} degli scheletri di B', B'', $B'\times B''$), da cui

$\alpha_1 \in {}'E_1^{p_1,q_1} = H^{p_1+q_1}((E')_{p_1}, (E')_{p_1-1})$,

$\alpha_2 \in {}''E_1^{p_2,q_2} = H^{p_2+q_2}((E'')_{p_2}, (E'')_{p_2-1})$

$\Rightarrow \alpha_1\otimes\alpha_2 \in H^{p_1+q_1+p_2+q_2}\left((E')_{p_1}\times(E'')_{p_2}, ((E')_{p_1}\times(E'')_{p_2-1})\cup((E')_{p_1-1}\times(E'')_{p_2})\right)$

Per escissione $\cong$

$$H^{p_1+q_1+p_2+q_2}\left((E'\times E'')_{p_1+p_2}, (E'\times E'')_{p_1+p_2-1}\right) = \bigoplus_{i+j=p_1+p_2} H^{p_1+q_1+p_2+q_2}\left(E'_i\times E''_j, (E'_{i-1}\times E''_j)\cup(E'_i\times E''_{j-1})\right)$$

La mappa descritta (⊗) induce omo di S.S. La uso combinato con la mappa indotta da
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & E\times E \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B\times B \end{tikzcd}$$
per indurre il prodotto

Vale che $d_r(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = d_r\alpha_1 \otimes \alpha_2 + (-1)^{|\alpha_1|}\alpha_1 \otimes d_r \alpha_2$

<u>Esempio:</u> $H^*(SU(n);\mathbb{Z}) = ?$

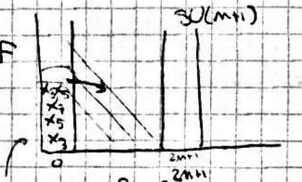
<u>Claim:</u> $H^*(SU(n);\mathbb{Z}) \cong H^*(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1};\mathbb{Z}) = \Lambda[x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}]$ algebra esterna libera su $x_3, \dots, x_{2n-1}$, dove $|x_i| = i$

Per induz. su n:
$$\begin{tikzcd} & H^*(SU(n+1)) \arrow[dl, shift left, "i^*"] & \\ H^*(SU(n)) \arrow[ur, shift left, "s"] & & H^*(S^{2n+1}) \arrow[ul, "p^*"'] \end{tikzcd}$$
indotte da
$$\begin{tikzcd} SU(n) \arrow[r, hook] & SU(n+1) \arrow[d] \\ & S^{2n+1} \end{tikzcd}$$

sezione come anelli c'è

Si ha quindi
$$H^*(SU(n)) \otimes H^*(S^{2n+1}) \longrightarrow H^*(SU(n+1))$$
$$(\quad 1 \otimes e_{2n+1} \longmapsto x_{2n+1} \quad)$$

$SU(n) = F$



$B = S^{2n+1}$

la roba "pura" (non prodotti) sono $x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}$

Tramite differenziali finiscono al max sulla colonna $2n$
$\Rightarrow x_i \overset{d}{\longmapsto} 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow$ anche i prodotti vanno a $\emptyset$
$\Rightarrow$ la pagina E_2 corrisponde a E_∞.

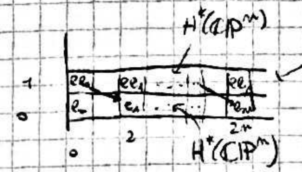
[...]

[...] Quindi come $\mathbb{Z}$-moduli $H^*(SU(n+1);\mathbb{Z}) \cong \Lambda[x_3, \dots, x_{2n+1}]$

Vedendo $\Psi : H^*(SU(n)) \otimes H^*(S^{2n+1}) \twoheadrightarrow H^*(SU(n+1))$
è omo di anelli. Per rango non si possono avere elementi in $\operatorname{Ker}\Psi \Rightarrow \Psi$ è isom.

<u>Esempio:</u> $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^n$

$\rightsquigarrow$



è fatto così perché E^∞ deve essere $H^*(S^{2n+1})$ che è nulla tranne in grado $2n+1$ (quindi deve morire la roba di grado basso)

$d_2(e_0) = 0$
$d_2(e_1) = \dots = d_2(e_n) = 0$
$d_2(e) = e_1 \qquad d_2(ee_1) = e_2 = e_1^2$

$\Rightarrow e_1^2 = e_2$ Analogamente $d_2(ee_2) = e_1^3 = e_3 \quad \dots$

$\Rightarrow e_i = e_1^i \quad \Rightarrow \quad H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e_1]/(e_1^{n+1})$, $|e_1| = 2$

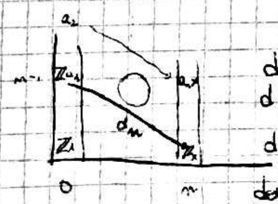
<u>Esempio:</u> $\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1} \hookrightarrow \dots$

$\mathbb{CP}^\infty = \bigcup_n \mathbb{CP}^n$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook] & S^\infty = \bigcup_n S^{2n+1} \arrow[d] \\ & \mathbb{CP}^\infty \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow H^*(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e_1]$, $|e_1| = 2$

<u>Esempio:</u> $(n > 1)$
$$\begin{tikzcd} \Omega S^n \arrow[r, hook] & PS^n \simeq * \arrow[d] \\ & S^n \end{tikzcd}$$



$d_n(a_1) = x$
$d_n(a_2) = a_1 x$
$d_n(a_k) = a_{k-1} x$

dove gli a_k sono gen. di $H^{(n-1)k}(\Omega S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

$d_n(a_1^2) \overset{\text{se } n \text{ dispari}}{=} 2 d_n(a_1) a_1 = 2 x a_1$
$d_n(a_2) = a_1 x$
$\Rightarrow a_1^2 = 2 a_2$

$a_1^k = k!\, a_k$

$\Rightarrow H^*(\Omega S^n;\mathbb{Z}) \cong \Gamma_{\mathbb{Z}}[a] = \langle 1, a, \frac{a^2}{2}, \dots, \frac{a^k}{k!}, \dots \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Q}[a]$ per n dispari (algebra di divisione)

Se n pari a_1 ha grado dispari $\Rightarrow d_n(a_1^2) = 0 \Rightarrow a_1^2 = 0$

Per a_2 valgono le cose di prima, ha grado pari

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2^k = k!\,a_{2k} \\ a_1 a_{2k} = a_{2k+1} \end{cases}$$ perché $d_m(a_1 a_{2k}) = x a_{2k} + \underbrace{a_1 a_{2k-1} x}_{0 \text{ per induz. e suppo...}} =$

$= x a_{2k}$

$\Rightarrow d_m(a_1 a_{2k}) = d_m(a_{2k+1}) \Rightarrow a_1 a_{2k} = a_{2k+1}$

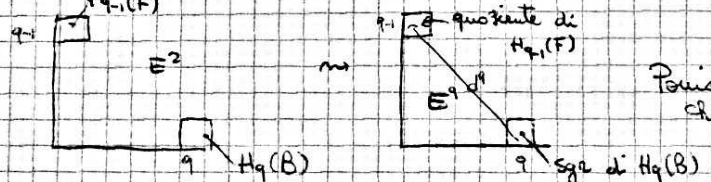
e $d_m(a_2^k) = k\, a_1 x\, a_2^{k-1} \underset{\text{per induz.}}{=} k!\, a_1 x a_{2k-2} = k!\, d_m(a_{2k})$

$\Rightarrow a_2^k = k!\, a_{2k}$

$\Rightarrow H^*(\Omega S^m; \mathbb{Z}) \cong \underset{\dim \dots}{\Lambda[a]} \otimes \underset{\dim = 2(m-1)}{\Gamma_{\mathbb{Z}}[b]}$

TRASGRESSIONE

$F \hookrightarrow X \rightarrow B$ fibrato di Serre. Supponiamo B sempl. connesso



Poniamo $\tau := d^q$ e lo chiamiamo trasgressione

<u>Def</u> Una classe $\alpha \in H_q(B)$ t.c. α sopravvive in $E^q_{0,q}$ è trasgressiva.

Dalla succ. esatta lunga della coppia abbiamo

$$H_q(X,F) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(F)$$

Inoltre si ha anche $\quad H_q(X,F) \xrightarrow{p_*} H_q(B,*) \cong H_q(B)$

γ inversa (si può definire solo su un sgp)

<u>PROPOSIZIONE</u>:

τ è indotto da $\partial \circ \gamma$.

L'analogo vale in coomologia:

$$\tau : [\underset{E_q^{0,q}}{\text{sgp di }} H^q(F)] \longrightarrow [\underset{\Xi_q^{q+1,0}}{\text{quoziente di}} \ H^{q+1}(B)]$$

<u>Def</u>
$z \in H^q(F)$ è trasgressiva se $\exists\, \alpha$ cocatena in $C^q(X)$ t.c.

$$[i^*(\alpha)] = z \quad \text{e} \quad \delta\alpha \in \operatorname{Im}(C^{q+1}(B) \xrightarrow{p^*} C^{q+1}(X))$$

Se $\delta\alpha = p^*(\omega)$ con $\omega \in C^{q+1}(B)$ allora dico che ω è l'img di z rispetto alla pretrasgressione $\tilde{\tau}$

OSS. Anche se $i(\alpha)$ è cociclo, in generale $\delta\alpha \neq 0$

Gli elementi trasgressivi in $H^q(F)$ sono sottogruppo, quindi $\tilde{\tau}$ è definita solo su un sgp.

OSS. ω non è determinato univocamente:

$z \rightsquigarrow \alpha_1 \rightsquigarrow \omega_1 \qquad p^*(\omega_1) = \delta\alpha_1$

$\ \ \rightsquigarrow \alpha_2 \rightsquigarrow \omega_2 \qquad p^*(\omega_2) = \delta\alpha_2$

$p^*(\omega_1 - \omega_2) = \delta(\alpha_1 - \alpha_2)$

$i^*(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$

Le $\tilde{\omega}$ t.c. $p^*(\tilde{\omega}) = \delta\tilde{\alpha}$ con $i^*(\tilde{\alpha}) = 0$ sono un sgp chiamato $\Gamma^{q+1}(B) \subseteq H^{q+1}(B)$

Quindi l'immagine di z è definita in $H^{q+1}(B)/\Gamma^{q+1}(B)$

cioè $\tau = \tilde{\tau}$ dove $\tilde{\tau} : z \mapsto \tilde{\tau}(z) \in H^{q+1}(B)/\Gamma^{q+1}(B)$

$$H^q(F) \supseteq T^q(F) \xrightarrow{\tau} H^{q+1}(B)/\Gamma^{q+1}(B)$$

$\rightarrow$ DIM: (omologia)

$\alpha \in E^1_{i,q-i} = C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ con $X_i = p^{-1}(B_i)$ (i-scheletro di B)

α sta in $Z^r_{i,q-i} \subseteq E^1_{i,q-i}$ se e solo se

$\exists\, a \in C_q(X_i)$ rapp. di α e tale che $\partial a \in C_{q-1}(X_{i-r})$

Prendendo $r = q$, $i = q$:

Se supponiamo B connesso, B_0 lo possiamo considerare con 1 sola cella, quindi $\quad C_{q-1}(p^{-1}(B_0)) = C_{q-1}(F)$

$\Rightarrow \left(\alpha \in Z^q_{q,0} \iff \alpha \text{ ha rappr. } a \in C_q(X) \text{ t.c. } \partial a \in C_{q-1}(F) \right)$

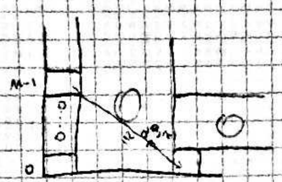
Come calcolo $d^q_{q,0}$?

$E^2_{q,0} = H_q(B) > E^q_{q,0} = \{\alpha \in H_q(B)$ con rappr. $a \in C_q(B)$, t.c. $\tilde{a} \in C_q(X)$, $\partial\tilde{a} \in C_{q-1}(F)$ (cioè $\tilde{a} \in Z^q_{q,0}$) $\}$

$d^q_{q,0}(\alpha) = \tau(\alpha) = [\partial(\tilde{a})] \in C_{q-1}(F)$

Quindi $\tau(\alpha) = \partial p^{-1}(\alpha)$, da cui la tesi.

Esempio: $F \hookrightarrow X \to B$ con $\pi_i(B) = 0$ per $i < n$ e $X \simeq \{*\}$



$d_r^{0,r-1}: H^{r-1}(F) \to H^r(B)$ è isomorfismo per $r \leq 2n-1$

Poiché X contraibile, $F \hookrightarrow X \rightsquigarrow CF \hookrightarrow X \overset{\text{compressione}}{\rightsquigarrow} \Sigma F \xrightarrow{\varphi} B$

$\varphi^*: H^r(B) \to H^r(\Sigma F) = H^{r-1}(F)$

$\tau: (\text{sg. } H^{r-1}(F)) \to (\text{quoz. di } H^r(B))$ Affermo che per $r \leq 2n-1$ $\tau^{-1} = \varphi^*$

oss. φ^* è iso per $r < 2n-1$:

$F \to X \to B \xrightarrow{\varphi} \Sigma F \to \Sigma X \to \Sigma B \to \dots$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & \Omega\Sigma B \arrow[d] \\ & \Sigma F \end{tikzcd}$$

è iso fino a $r = 2n-2$ per Freudenthal (succ. esatta lunga di omot.)

$\pi_i(\Sigma X) \to \pi_i(\Sigma B) \overset{\cong}{\to} \pi_{i-1}(\Sigma F) \to \pi_{i-1}(\Sigma X)$, con $\pi_i(\Sigma X) = 0$, $\pi_{i-1}(\Sigma X) = 0$; indotta da $\Omega\Sigma B \to \Sigma F$

$\Rightarrow \varphi$ in omologia è iso. anche φ^* in omologia di iso.

Consideriamo $(CF, F) \hookrightarrow (X, F) \xrightarrow{p} (B, *)$

$$\begin{tikzcd} \overset{0}{H^q(CF)} \arrow[r] & H^q(F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & H^{q+1}(CF,F) \arrow[r] & \overset{0}{H^{q+1}(CF)} \\ H^q(X) \arrow[r] & H^q(F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{q+1}(X,F) \arrow[u] \arrow[r] & H^{q+1}(X) = 0 \end{tikzcd}$$

con $H^q(X) = 0$.

Si ha

$$H^{q+1}(B) \to H^{q+1}(X,F) \to H^{q+1}(CF,F) \cong H^{q+1}(\Sigma F) \cong H^q(F)$$

(composizione φ^*)

$$\begin{tikzcd} & H^{q+1}(CF,F) \arrow[dl] \\ H^q(F) \arrow[r, dashed] \arrow[dr, bend left, "\tau"] & H^{q+1}(X,F) \arrow[u] \\ & H^{q+1}(B) \arrow[u, dashed] \arrow[ul, bend left, "\varphi^*"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \varphi^* = \tau^{-1}$ perché il triangolo in alto commuta

TOPA - LEZIONE 15

SPAZI EILENBERG - MACLANE

Def Dato $n \geq 1$ intero e G gruppo (abeliano se $n > 1$).
Uno sp. X connesso tale che $\pi_k(X) = \begin{cases} G & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
è detto sp. di Eilenberg-Maclane o $K(G,n)$.

Possiamo costruire $K(G,n)$ come CW-complesso:
Presa una presentazione di G (abeliana se $n>1$), costruiamo con 1 0-cella, tante n-celle quanti i generatori e $(n+1)$-celle quante le relazioni (attaccate in modo buono...)

Se $\{s_\alpha\}$ generatori e $\{r_\beta\}$ relazioni (parole negli s_α), si ha

$\bigvee_\alpha S^n_\alpha$ $\quad \forall \beta$ $\quad e^{n+1}_\beta$ si incolla in modo che $\partial e^{n+1}_\beta = \sum S^n_{\alpha_i}$ (inteso in $\pi_n(\bigvee S^n) = \oplus \pi_n(S^n)$); se $r_\beta = \prod s_{\alpha_i}$

(nel caso $n=1$ $\pi_1(\bigvee S^1) = * \pi_1(S^1)$, la somma è "ordinata")

Nella succ. in omotopia

$$\to \pi_{n+1}(\underbrace{\bigvee_\alpha S^n_\alpha \cup_\varphi \bigcup_\beta e^{n+1}_\beta}_{X}, \underbrace{\bigvee_\alpha S^n_\alpha}_{X_n}) \to \pi_n(X_n) \to \pi_n(X) \to 0$$

$[e^{n+1}_\beta \hookrightarrow X] \longmapsto r_\beta$; $\pi_n(X_n) = \underset{\alpha}{*}\mathbb{Z}$ ($n=1$), $\bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ ($n>1$)

$\Rightarrow \pi_n(X) = G$. È ovvio che $\pi_k(X) = 0 \quad \forall k < n$.

Dobbiamo uccidere i gruppi superiori.
Usiamo $(n+2)$-celle per tappare tutti i generatori di $\pi_{n+1}(X)$ e così via per ogni $k > n$.
Alla fine prendiamo $X := \bigcup_m X_m$ si ha $X = K(G,n)$.

Esempi: $\cdot K(\mathbb{Z},1) = S^1$ $\quad \cdot K(\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{R}P^\infty$
$\cdot K(F_n, 1) = \bigvee^n S^1$ $\quad \cdot K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$

PROPOSIZIONE: Il tipo di omotopia di un $K(G,n)$ è determinato da G, n.

LEMMA: Sia $X = (\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \cup (\bigcup_\beta e^{n+1}_\beta)$ (per $n \geq 1$). Per ogni $\psi: \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ con Y c.p.a. $\exists f: X \to Y$ tale che $f_* = \psi$

DIM: Costruiamo f che manda pto base in pto base estendendo su S^n_α tramite una mappa che rappresenta $\psi([i_\alpha])$ dove $i_\alpha : S^n_\alpha \hookrightarrow X$

Quindi abbiamo definito f su X_n in modo tale che

$$f_*([i_\alpha]) = \psi([i_\alpha]) \quad \forall \alpha \Rightarrow f_* = \psi \text{ su } \pi_n(X_n).$$

(le $[i_\alpha]$ generano)

Estendiamo f a e^{n+1}_β : ∂e^{n+1}_β è contrattile in X, quindi lo è in Y. $\quad \varphi_\beta : S^n \to \partial e^{n+1}_\beta \subseteq X$.

$$[\varphi_\beta] = 0 \text{ in } \pi_n(X) \Rightarrow \psi([\varphi_\beta]) = 0 \text{ in } \pi_n(Y)$$

$$\| $$

$$[S^n \xrightarrow{\varphi_\beta} \partial e^{n+1}_\beta \xrightarrow{f} Y]$$

Quindi possiamo estendere.

→ DIM: Siano K, K' due $K(G,n)$. Supponiamo che K sia costruito come fatto prima.

Dal lemma, $\exists f : K_{n+1} \to K'$ che dà isom. sui π_n.

La estendiamo uno scheletro alla volta a tutte le celle di K usando che $\pi_k(K') = 0$ per $k > n$.

Abbiamo ottenuto $f : K \to K'$ che per Whitehead è eq. omot. (a meno di usare approx. cellulare prima per avere 2 CW-compl)

TEOREMA: $\forall X \sim$ CW compl. connesso, G abeliano

$\tilde{H}^n(X;G)$ è in bigezione naturale con $\langle X, K(G,n) \rangle$

$\xleftarrow{\quad T \quad}$ mappe puntate a meno di omotopia

T è così descritta:

$\exists$ classe $\alpha \in \tilde{H}^n(K(G,n);G)$ tale che $T([f]) = f^*(\alpha)$

α è detta classe fondamentale di $K(G,n)$

DIM: Step 1: $h^n(X) := \langle X, K(G,n) \rangle$ definisce teoria coomologica ridotta per spazi puntati

Step 2: Una teoria coomologica ridotta per sp. puntati h^* su CW-compl. t.c. $h^n(S^0) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \neq 0 & n = 0 \end{cases}$ è necessariamente del tipo $h^n(X) = \tilde{H}^n(X, h^0(S^0))$ $\forall X$ $\forall n$.

Quando $\langle X, K \rangle$ ha struttura di gruppo?

Se $X = \Sigma Y$, si ha $\Sigma Y \to \Sigma Y \vee \Sigma Y$ che induce

$$\langle X, K \rangle \times \langle X, K \rangle \to \langle X, K \rangle$$

e si vede che $\langle X, K \rangle$ son gruppi.

Inoltre

$$\langle \Sigma Y, K \rangle = \langle Y, \Omega K \rangle, \quad \pi_{n+1}(K) = \pi_n(\Omega K)$$

Quindi $\Omega K(G,n)$ è un $K(G, n-1)$

TEOREMA (MILNOR):

Se X è CW-compl., ΩX ha il tipo di omotopia di un CW-compl.

OSS. $\langle X, \Omega^2 K \rangle$ è abeliano (stesso motivo che π_n abeliano per $n \geq 2$)

Quindi se K_n è debolmente omot. equiv. a ΩL_n allora

$$\langle X, K_n \rangle = \langle X, \Omega L_n \rangle \text{ è gruppo}$$

Se prendo $L_n = K_{n+1} = K(G, n+1)$, allora $K_n \to \Omega K_{n+1}$ è approx. CW.

Dalla succ. esatta della coppia

$$h^n(X) = \langle X, K_n \rangle \rightsquigarrow h^n(X) = h^{n+1}(\Sigma X)$$

(segue dalla coppia (CX, X))

(se h^* è teor. coom. ridotta)

Per cui $h^n(X) = h^{n+1}(\Sigma X)$ è indotta da $K_n \to \Omega K_{n+1}$

Def Ω spettro è succ. di CW compl $K_1, K_2, \dots$ e di eq. omot. deboli $K_n \to \Omega K_{n+1}$ $\forall n$

OSS. Non importa che inizi da K_1, se il primo è K_{37}, costruisco un CW-compl $K_{36} \simeq \Omega K_{37}$ e così via.

TEOREMA: Se $\{K_n\}$ è spettro, $X \to h^n(X) = \langle X, K_n \rangle$ è teoria coom. ridotta su CW-compl. puntati.

OSS. Se $\{K_n\}$ è spettro, $K_n = \Omega^k K_{n+k}$ $\forall k$, quindi K_n si scrive come sp. di loop di ordine k per k grande a piacere, quindi è "sp. di loop infinito"

DIM: • Assioma di omotopia:

$f^* : \langle Y, K_n \rangle \to \langle X, K_n \rangle$ dipende solo dal tipo di omot. di $f : X \to Y$

• Assioma wedge:

se $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$, $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$, allora

$$\prod_\alpha i_\alpha^* : h^*(X) \to \prod_\alpha h^*(X_\alpha) \text{ è isom.}$$

• Assioma della coppia:

Data (X,A) si ha

$$\dots \to h^n(X/A) \to h^n(X) \to h^n(A) \to h^{n+1}(X/A) \to \dots$$

☒ Il primo assioma è ovvio

☒ Quasi ovvio, pensaci su...

☒ Se (X,A) coppia

$$\begin{array}{ccccccccc} A \hookrightarrow & X & \to X \cup CA & \hookrightarrow (X\cup CA)\cup CX & \hookrightarrow (X\cup CA \cup CX)\cup C(X\cup A) \hookrightarrow \dots \\ \| & \| & \| & \| & \downarrow \\ A \hookrightarrow & X & \to X/A & \to SA & \to SX & \to \dots \end{array}$$

tutti i quadrati commutano (in realtà collassiamo e mandiamo la sospensione ridotta)

È succ. di cofibrazione. Commuta con $(X,A) \to (Y,B)$ e induce

$$\langle A,K\rangle \leftarrow \langle X,K\rangle \leftarrow \langle X/A, K\rangle \leftarrow \langle \Sigma A, K\rangle \leftarrow \langle \Sigma X, K\rangle \leftarrow \dots$$

esatta, che è esattamente ciò che ci serviva perché

$$\langle \Sigma^n -, K\rangle \cong \langle -, \Omega^n K\rangle$$

TEOREMA:

Se h^* è teoria coom. non rid. su CW compl. e $h^n(\text{pto}) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 0 \end{cases}$

allora $h^n(X,A) = H^n(X,A; h^0(\text{pto}))$ $\forall (X,A)$ coppia $\forall n$

(Stesso enunciato in omologia)

DIM: (OMOLOGIA)

X CW-compl. Consideriamo succ. esatta lunga per (X_n, X_{n-1})

$$\to h_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to h_n(X_n, X_{n-1}) \to h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \to \dots$$

$$h_n(X_n) \qquad h_{n-1}(X_{n-1})$$

Poiché $h(\text{pto}) = 0$ per $n \neq 0$, la succ. è esatta lunga

$$h_n(X_n, X_{n-1}) = h_n(X_n/X_{n-1}) = h_n(\bigvee S^n_\alpha) = \prod h^*(\Sigma^n \text{pto})$$

[...]

TOPA. LEZIONE 17

[...] Devo verificare che le mappe di bordo coincidano con quelle del complesso di catene cellulari per X dato che

$$h_n(X_n, X_{n-1}) = h_n(X_n/X_{n-1}) = h_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha h_0(\text{pto}) = C_n(X; h_0(\text{pto}))$$

α le n-celle

come spazi sono iso.

Possiamo ignorare $d_1 : h_1(X_1, X_0) \to h_0(X_0)$ perché a meno di sospensione possiamo supporre che X non abbia 1-celle

Calcoliamo $d_n : h_n(X_n, X_{n-1}) \to h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ in termini di mappe tra sfere.

$$d_n : \bigoplus_\alpha h_n(e^n_\alpha, \partial e^n_\alpha) \to \bigoplus_\beta h_{n-1}(S^{n-1}_\beta)$$ vogliamo vedere che il grado delle mappe è lo stesso. ($f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ indotte da $f: S^n \to S^n$, $f_* : h_n(S^n) \to h_n(S^n)$)

Se $n = 0, 1$:

$\underline{n=0}$

f è omotopa a costante $\Rightarrow h_*(f) = 0$

$\underline{n=1}$

f è omot. a isom. $\Rightarrow h_*(f) = id$

Il caso generale segue per additività: [...]

LEMMA: Se h è funtore tra CW-compl. puntati e gruppi abeliani che soddisfa: 1) assioma di omotopia

2) assioma di wedge

Allora, dati $f, g : \Sigma X \to K$ vale che $(f+g)_* = f_* + g_*$

(o $(f+g)^* = f^* + g^*$ se controvar.)

DIM:

$$\Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} K$$

Quindi

$$h(\Sigma X) \xrightarrow{c_*} h(\Sigma X \vee \Sigma X) \to h(K)$$

$$(q_1, q_2)_* \qquad \uparrow i_{1*} + i_{2*}$$

identità su entrambe, cotene succ. stre $\quad h(\Sigma X) \oplus h(\Sigma X)$

Da questo si vede

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (f+g)_*(x) \\ \searrow & & \\ & (x,x) \mapsto & f_*(x) + g_*(x) \end{array}$$

← sono uguali perché il diagramma commuta

[...] Quindi $\quad$ m qualsiasi $\Rightarrow h_*(f) = \cdot\,$ id

Quindi $\left(\{h_m(X_m, X_{m-1})\}_m, d_m\right) \cong \left(\{C_m(X; h_0(pt))\}_m, \partial_m\right)$

da cui $h_m(X) \cong H_m(X; h_0(pt)) \quad \forall m$.

<u>NATURALITÀ</u>: $f: X \to Y$

1) approx. f con mappa cell.

2) f manda $(X_m, X_{m-1}) \to (Y_m, Y_{m-1})$, quindi induce mappa tra complessi cellulari per h_* e per $H_*(-, h_0(pt))$.

Per calcolare queste mappe passo al quoziente

$$\begin{array}{ccc} X^m/X_{m-1} & \xrightarrow{f} & Y_m/Y_{m-1} \\ \cong & & \cong \\ \bigvee_\alpha S^n_\alpha & & \bigvee_\beta S^n_\beta \end{array}$$

e come prima la mappa indotta tra compl. cell. dipende dal grado.

$\Rightarrow$ la mappa indotta da f coincide sui complessi cell. di h_* e $H_*(-, h_0(pt))$ e quindi l'iso è naturale.

- La dimostrazione in coomologia è circa analoga: però i gruppi di cocatene sono prodotti diretti di copie di $h_0(pt)$.

Quindi le mappe non sono determinate da quelle sui fattori.

Vogliamo capire $d_n: h^m(X_m, X_{m-1}) \to h^{m+1}(X_{m+1}, X_m)$

$$\begin{array}{ccc} h^m(X_m, X_{m-1}) & \to & h^{m+1}(X_{m+1}, X_m) \\ \| & & \cong \\ h^m(X_m/X_{m-1}) & & \prod_\beta h^{m+1}(S^{m+1}_\beta) \\ \| & & \\ \prod_\alpha h^n(S^n_\alpha) & & \end{array}$$

$\varphi_\beta: \partial e^{n+1}_\beta \to X_m$ in un CW-compl. ha img cpt e tocca un # finito di n-celle. Quindi

$h^m(X^m_m/X_{m-1}) \to h^{m+1}(S^n_\beta)$ ha supp. finito

$$\Rightarrow \prod_\alpha h^n(S^n_\alpha) = \underbrace{\bigoplus_{e^n_\alpha \cap \partial e^{n+1}_\beta \neq \emptyset} h^m(S^n_\alpha)}_{A} \oplus \underbrace{\prod_{\alpha \text{ restanti}} h^n(S^n_\alpha)}_{B}$$

Su A la mappa è indotta dal grado della mappa di incollamento φ_β

Su B ha supp. $\emptyset$.

Da qui si ha la tesi.

DIM [Bigezione $T: \langle X, K(G,m)\rangle \to H^m(X;G)$ e $\exists\alpha$ cl. fond.]:

Ora sappiamo che $h^m(X) = \langle X, K(G,m)\rangle$ è teor. coom. rid. a coeff in $h^m(S^1) = \pi_1(K(G,m)) \cong \tilde{H}^m(S^1;G) = \begin{cases} G & \text{se } i = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\Rightarrow \exists$ iso nat. T come voluto.

Poniamo $\alpha = id_{K(G,m)}$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^m(X;G) & \xleftarrow{f^*} & \tilde{H}^m(K(G,m);G) \\ \cong T & & \cong T \\ \langle X, K(G,m)\rangle & \xleftarrow{-\circ f} & \langle K(G,m), K(G,m)\rangle \\ \ni f & & \ni id_{K(G,m)} \end{array}$$

Seguendo il diagr.

$id \mapsto T(id) \mapsto f^*(T(id))$

$\mapsto f \mapsto T(f)$

Cerchiamo di esplicitare $T(id) = \alpha$:

$K = K(G,m)$ CW-compl. con $K_{m-1} = \{pt\}$

$h^m(X) = \langle X, K\rangle$ e $h^m(K) = h^m(K^*_{m+1}) = \ker(d_m: h^m(K_m) \to h^{m+1}_*(K^*_{m+1}, K_m))$

Consideriamo $id_{K(G,m)}$ e la restriz. $K_m \hookrightarrow K$

$T(id) = \alpha$ corrisp. a $K_m \hookrightarrow K$ come elemento di $h^m(K_m)$ che come cociclo cell. assegna a ogni n-cella l'elem. di $G = \pi_m(K)$ che corrisponde a inclusione di n-cella in K

Cioè $\forall$ n-cella di K (cioè $S^n_\beta \hookrightarrow K$) associamo l'el. $[S^n_\beta \hookrightarrow K] \in G = \pi_m(K)$

Per naturalità. $f: X \to K$.

in $H^m(X;G)$ $f^*(\alpha)$ è l'elem. che associa alla cella e^n_β la classe $[S^n_\beta \to K] \in G$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & K(G,m) \\ & \searrow & \uparrow f_\beta \\ S^n_\beta & \to X_n/X_{n-1} & \end{array}$$

$\Rightarrow e^n_\beta \longmapsto [f_\beta \cdot S^n_\beta \to K] \in G$ descrive la cocatena $f^*(\alpha)$

Esempio:

- $H^1(X; \mathbb{Z}) \to H^2(X; \mathbb{Z})$ (dato dal cup product)

$\omega \longmapsto \omega^2$

$\forall X$ CW-compl. questa mappa è nulla. Perché $\omega = f^*(\alpha)$ con $f: X \to K(\mathbb{Z},1) = S^1$ e $\alpha \in H^1(S^1, \mathbb{Z})$ classe fond.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & f^*(\alpha) = \omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(S^1, \mathbb{Z}) = 0 \ni \alpha^2 & \longmapsto & \omega^2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \omega^2 = 0$$

Esempio: $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\underset{\dim=1}{x}]$

Abbiamo già visto $H^*(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\underset{\dim=2}{x_2}]$

$$H^q(\mathbb{RP}^n,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \text{ e } q=n \text{ se } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & q=2k \text{ con } k=1,\dots,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$ Infatti

n dispari: $n=2k+1$

$S^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^{2k+1} \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{CP}^k$ fibrazione induce isomorfismi

$\pi_k^*: H^q(\mathbb{CP}^k;\mathbb{Z}) \to H^q(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z})$ per q dispari. Per q pari è $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

SS E_2 sp. tot. $\mathbb{RP}^n$

$H^1(S^1;\mathbb{Z})$	a		ax_2	ax_2^2	$\dots$	ax_2^k
$H^0(S^1;\mathbb{Z})$	1	0 x_2	0	x_2^2	$\dots$	x_2^k
	$H^*(\mathbb{CP}^k,\mathbb{Z})$					

un diff. deve essere la molt. per 2

Quindi le mappe sono non nulle

sopravvive, e dà lo $\mathbb{Z}$ finale...

Per $k=\infty$ $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[a]/(2a)$

Per capire ora $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ usiamo la stessa S.S.

Però le d sono tutte nulle. Ci dà info sulla struttura additiva ma non come anello.... [...]

[...] A questo punto sappiamo che c'è $x_2 \in H^*(\mathbb{RP}^{2k+1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ che genera una sottoalgebra polinomiale. Chi è però a^2?

$\mathbb{RP}^{2k+1}$ è varietà $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-orientabile, quindi DP:

$$H^i(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^{2k+1-i}(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{2k+1}(\mathbb{RP}^{2k+1};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

accoppiamento non degenere:

Prendendo $i=1$, si ha che $a \cdot x_2^k \neq 0$, quindi $a \cdot x_2^i \neq 0 \ \forall i$.

Usando l'accoppiamento per il proiettivo pari:

in $\mathbb{RP}^2$, $a \in H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ e si ha $a^2 \neq 0$. Poiché $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ ($n \geq 2$)

per la mappa indotta $H^1(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$a \longmapsto a$$

$\Rightarrow a^2 = x_2$, da cui $H^*(\mathbb{RP}^k;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]/(a^{k+1})$ ← in grado 1

e $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\underset{\dim=1}{a}]$

- Quindi, in generale, $\alpha \in H^n(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genera una sottoalgebra polinomiale $\forall n \geq 1$. Infatti considerando $f: \mathbb{RP}^\infty \to K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n)$, $f^*(\alpha) \in H^n(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

  Posso scegliere f in modo tale che $f^*(\alpha) = a^n$

  (α classe fondamentale). Allora essendo $(a^n)^k \neq 0 \ \forall k$, anche $\alpha^k \neq 0 \ \forall k$

Se prendiamo la classe fondamentale $\alpha \in H^{2m}(K(\mathbb{Z},2m);\mathbb{Z})$, α genera una sottoalgebra polinomiale. Allo stesso modo di prima, sapendo $H^*(\mathbb{CP}^\infty,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\underset{\dim 2}{x_2}]$

prendiamo $f: \mathbb{CP}^\infty \to K(\mathbb{Z},2m)$ e tutto segue come sopra.

Prendendo $H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ con $n \geq 3$ dispari, α classe fondamentale.

Per anticommutatività $\alpha^2 = -\alpha^2$ (quindi o $\alpha^2=0$ o ha ordine 2). Dico che vale la seconda: vogliamo ripetere il procedimento di prima. Usiamo $(\mathbb{RP}^\infty)^2$.

$H^*((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\underset{\dim=1}{x,y}]$ (per Künneth). Vorremmo però i coefficienti in $\mathbb{Z}$.

$H^0((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ perché connesso e $H^i((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}) = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x^2,y^2] \oplus (x^2y+xy^2)\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x^2,y^2]\right)_i$

per TCU e guardando la serie di Poincaré

$H^*((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ha serie di Poincaré (ridotta) $\frac{1}{(1-t)^2}-1$

Il pezzo in fondo ha serie $\frac{1}{(1-t^2)^2} + \frac{t^3}{(1-t^2)^2} - 1$ ← tolgo l'H^0.

TCU ci dice che

$$0 \to \underbrace{Ext(H^{i+1}((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})}_{\substack{\cong \\ H^{i+1}((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z})\otimes \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}}} \to H^i((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}) \to H^i((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z})\otimes \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \to 0$$

Quindi $\frac{1}{(1-t)^2} - 1 = \underbrace{\left(\frac{1}{(1-t^2)^2} - 1 + \frac{t^3}{(1-t^2)^2}\right)(1+t^{-1})}$ ← nell' H^{i+1} devo scendere di 1

ok $\longmapsto$

$$\left(\frac{1+t^3}{(1-t^2)^2} - 1\right)\left(\frac{1+t}{t}\right) = \frac{(1+t^3-1+2t^2-t^4)(1+t)}{(1-t^2)^2\, t} =$$

$$= \frac{(1+t)(-t^3+t^2+2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{\cancel{t^3}+t^2+2t-t^4+\cancel{t^3}+2t^2}{(1-t^2)^2} =$$

$$= \frac{t^2+2t+1}{(1-t^2)^2} - \frac{t^4-2t^2+1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} - 1$$

Quello che possiamo fare adesso è considerare

$$H^i((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^i((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}) \quad \text{iniettiva}$$

Quindi adesso $f:(\mathbb{RP}^\infty)^2 \to K(\mathbb{Z},n)$, $f^*(\alpha) = \beta \neq 0$
$\in H^n((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z})$
$\cap$
$H^n((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$

(Vedo $\beta \in H^n((\mathbb{RP}^\infty)^2;\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$)

Dunque $\beta^k \neq 0 \ \forall k$, da cui $\alpha^k \neq 0$.

(In realtà ci serviva scoprire che c'era roba in grado dispari, quindi potevamo usare Kunneth su $\mathbb{Z}$)

DOMANDA: $\alpha \in H^n(X;\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$. $\alpha^2 = 0$? $\exists X : \alpha^2 \neq 0$?

Se $\alpha^2 \neq 0$ per qualche X allora in $H^*(K(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}},n),\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$ $\exists \bar{\alpha}$ cl. fond. è t.c. $\bar{\alpha}^2 \neq 0$.

$f: X \to Y$

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;R) & \xrightarrow{f^*} & H^n(X;R) \\ \alpha & \longmapsto & f^*(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha^2 & \longmapsto & f^*(\alpha^2) = (f^*(\alpha))^2 \end{array}$$

L'operazione $\wedge 2$ è naturale.

Ci chiediamo chi sono le mappe $H^i(-,G) \xrightarrow{\theta} H^j(-,G')$ che fanno commutare diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^i(X,G) & \xrightarrow{\theta} & H^j(X,G') \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ H^i(Y,G) & \xrightarrow{\theta} & H^j(Y,G') \end{array}$$

In particolare, dato θ, è definita su

$$\begin{array}{ccc} H^i(K(G,i),G) & \xrightarrow{\theta} & H^j(K(G,i),G') \\ \Psi & & \Psi \\ \text{cl. fond.} \to \alpha & \longmapsto & \theta(\alpha) \end{array}$$

A questo punto, scegliendo $f: X \to K(G,i)$ in modo tale che $f^*(\alpha) = \omega$, si ha

$$\begin{array}{ccc} H^i(X,G) & \xrightarrow{\theta} & H^j(X,G') \\ \omega & \longmapsto & f^*(\theta(\alpha)) \end{array}$$

Quindi ogni $\beta \in H^j(K(G,i),G')$ definisce una θ naturale $\theta: H^i(-,G) \to H^j(-,G')$

Dunque le operazioni coomologiche di tipo (i,j,G,G') corrispondono a $H^j(K(G,i),G')$.

COROLLARIO: $\nexists$ operazioni coomologiche non nulle per $j<i$.

Sia R anello, $K_n := K(R,n)$. $f: X \to K_n$, $g: Y \to K_m$

$$X \times Y \xrightarrow{f\times g} K_n \times K_m \xrightarrow{\pi} K_n \times K_m /_{K_n \vee K_m} = K_n \wedge K_m \xrightarrow{\mu} K_{n+m}$$

con $\mu: K_n \wedge K_m \to K_{n+m}$ definita così:

$K_n \wedge K_m$ è $(m+n-1)$-connesso e $\pi_{m+n}(K_n \wedge K_m) = H_{m+n}(K_n \wedge K_m) =$
$= H_m(K_m) \otimes H_n(K_n) = R \otimes R$

R anello, quindi il prodotto definisce $R \otimes R \to R = \pi_{m+n}(K_{m+n})$

Dunque abbiamo una mappa $\pi_{m+n}(K_n \wedge K_m) \to \pi_{m+n}(K_{m+n})$, che quindi dà una μ come richiesto.

Esempio: $K_n = K(\mathbb{Z},n)$ ha come n-scheletro S^n

$K_n \wedge K_m$ ha come $(n+m)$-scheletro $S^n \wedge S^m = S^{m+n} \hookrightarrow K_{m+n}$

Questo ci fa definire il prodotto in coomologia. Per vedere la commutatività del prodotto si guarda $S^n \wedge S^m \to S^m \wedge S^n$ che ha grado $(-1)^{mn}$, da cui la formula in coomologia.

TORRI DI POSTNIKOV

Def X sp. top. puntato. Una torre di Postnikov è $X \to X_3 \to X_2 \to X_1$ t.c. $X \to X_n$ è isom. per π_i $\forall\ i \leq n$ e $\pi_i(X_n) = 0$ per $i > n$.

Esempio: $X_1 = K(\pi_1(X),1)$?

OSS. $X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1}$ può essere sostituita con fibraz. a meno di sp. omotop. equiv.

Quindi $F_m \hookrightarrow X_m \xrightarrow{p_m} X_{m-1}$ $\quad F_m$ è un $K(\pi_m(X), m)$

Possiamo sostituire F_m con CW-compl. e studiare $H_*(X)$.

Def limite inverso

$\varprojlim X_m$ è il sottoinsieme di $\prod_m X_m$ ~~delle~~ successioni $(x_i)_i$ t.c. $f_i(x_i) = x_{i-1}$

(Stessa cosa per gruppi...)

<u>PROPOSIZIONE</u>: $\ldots \to X_m \to \ldots \to X_2 \to X_1$ succ. di fibrazioni. Allora

$\lambda: \pi_i(\varprojlim X_i) \to \varprojlim(\pi_i(X_m))$ è surgettivo

Inoltre λ è iniettivo se $\pi_{i+1}(X_m) \to \pi_{i+1}(X_{m-1})$ è surgettivo per m abbastanza grande.

DIM: • Un elemento di $\varprojlim(\pi_i(X_m))$ è una successione di applicaz. $[f_m: (S^i, *) \to (X_m, *)]$ tali che $p_m: X_m \to X_{m-1}$ manda $[f_m] \overset{p_m}{\longmapsto} [f_{m-1}]$

cioè $p_m f_m \sim f_{m-1}$. Posso sollevare l'omotopia grazie alla fibrazione che ci dà una f_m' tale che $p_m f_m' = f_{m-1}'$

Induttivamente abbiamo trovato un elemento

$(f_m') \in \pi_i(\varprojlim X_m)$, $\qquad \lambda[(f_m')_m] = ([f_m])_m$

• I limiti inversi non cambiano se dimentichiamo una lista finita di termini iniziali ("m grande" = sempre)

Sia $f: S^i \to \varprojlim X_m$ banale in $\varprojlim \pi_i(X_m)$. $\exists F_m: D^{i+1} \to X_m$ tale che $F_m|_{\partial D^{i+1}} = f_m$ (componente su X_m)

Su ∂D^{i+1} vale $p_m F_m = F_{m-1}$

Quindi possiamo definire $g_{m-1}: S^{i+1} \to X_{m-1}$ fatta come

$p_m F_m$ S^{i+1} F_{m-1}. Per surgettività di $\pi_{i+1}(X_m) \to \pi_{i+1}(X_{m-1})$ si solleva (w.r.t. D^{i+1}_{dx}) a g_m tale che $p_m g_m \sim g_{m-1}$

Con omotopia in (S^{i+1}, D^{i+1}_{sx}), il D^{i+1} di sinistra è $p_m F_m$. Posso supporre $g_m|_{D^{i+1}_{sx}} = F_m$. $\quad g_m|_{D^{i+1}_{dx}}$ è omotopia per f_m, cioè è la mia nuova F_m', tale che $p_m F_m' = F_{m-1}$. Le (F_m') che costruisco sono omotopia in $\varprojlim X_m$, ovvero $f \sim 0$

$f = (f_m)_m : S^i \to \varprojlim X_m$

<u>COROLLARIO</u>: Con le ip. della proposizione vale che, data una torre di Postnikov,

$X \to \varprojlim X_m$ è equivalenza omotopica debole.

DIM: $\pi_i(X) \to \pi_i(\varprojlim X_m) \to \varprojlim \pi_i(X_m)$ è isomorfismo perché $\pi_i(X) \cong \pi_i(X_m)$ per m grande $(m \geq i)$

OSS. Se vogliamo una approssimazione di una torre di Postnikov fino ad altezza m possiamo fare come segue: costruisco X_m incollando celle a X per uccidere $\pi_{m+1}(X_m)$ (cioè incollo $(m+2)$-celle). Questo non cambia $\pi_i(X)$ per $i \leq m$

Allo stesso modo incollo $(m+k)$-celle per uccidere $\pi_{m+k-1}(X)$.

Otteniamo $X \hookrightarrow X_m$ che induce isomorfismo su $\pi_i(X) \to \pi_i(X_m)$ per $i \leq m$

Da X_m costruisco X_{m-1} incollando $(m+1)$-celle per uccidere $\pi_m(X_m)$.

Continuiamo allo stesso modo per avere $X \to X_m \to \ldots \to X_1$ inclusioni

Partendo dal basso sostituisco gli spazi per ottenere fibrazioni.

• Calcoliamo $H^*(K(\mathbb{Z}, m); \mathbb{Q})$ e $H^*(K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, m); \mathbb{Q})$: (ci piacerebbe i coeff. in $\mathbb{Z}$)

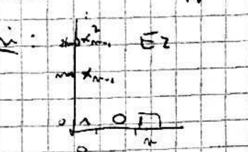
<u>LEMMA</u>: $H^*(K(\mathbb{Z}, m); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[x_m] & \text{se } m \text{ pari} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[y_m] & \text{se } m \text{ dispari} \end{cases}$

DIM: $\Omega K(\mathbb{Z}, m) \to PK(\mathbb{Z}, m) \sim *$ Quindi si fa induttivamente:

$K(\mathbb{Z}, m-1)$ $\qquad \downarrow$ $\qquad K(\mathbb{Z}, m)$

<u>$m=1$</u> e <u>$m=2$</u> li sappiamo già.

<u>$m-1$ pari</u>:



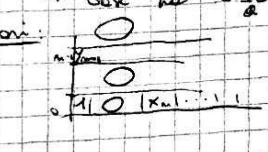
E_∞ deve essere banale, quindi x_{m-1} deve morire. Può farlo solo se nel riquadro c'è un certo y_m (e solo lui).

$d_m x_{m-1} = y_m \quad$ ma $d_m(x_{m-1}^k) = y_m x_{m-1}^{k-1}$

Nella prima riga, a dx di y_m non c'è nulla: qualsiasi altra cosa deve essere raggiunta da qualcosa, ma sulla colonna m ci sono solo immagini di differenziali, per cui $d_m(x_{m-1} y_m) = 0$

$\Rightarrow$ Base ha $\Lambda_{\mathbb{Q}}[y_m]$ come coom.

<u>$m-1$ dispari</u>:



Ragionamento simile, si trovano tutti gli x_m^k che danno $\mathbb{Q}[x_m]$.

Lemma: $\tilde{H}^*(K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$. Inoltre $\tilde{H}^{n+1}(K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è il primo gruppo non banale.

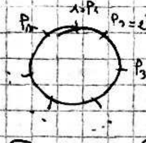
Def Spazi di Lens: $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$. Definiamo $L_{2n-1}(m) := S^{2n-1} / \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \circlearrowright$ dato da $v \mapsto e^{\frac{2\pi i}{m}} v$

↳ DIM:

(COSTRUZIONE)

Esempio: $S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}^n$, $\theta \longmapsto (0, \dots, 0, \theta)$. $S^{2n-3} \subseteq \mathbb{C}^{n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$). Scelgo $j = 1, \dots, m$

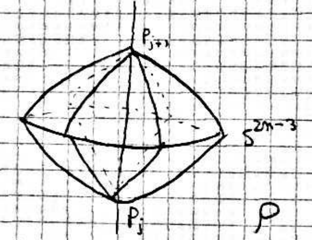


e collego p_j con tutti i punti di S^{2n-3} con archi, cioè

$\cos\theta\,(0, \dots, 0, e^{\frac{2\pi i (j-1)}{m}}) + \sin\theta\,\underbrace{(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)}_{\in S^{2n-3}}$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Fissato j, l'unione degli archi è una palla B_j^{2n-2}. $\partial B_j^{2n-2} = S^{2n-3}$

Se collego tutti i punti tra p_j e p_{j+1} in S^1 con S^{2n-3} otteniamo una palla B_j^{2n-1} con $\partial B_j^{2n-1} = B_j^{2n-2} \cup B_{j+1}^{2n-2}$



Ogni calotta è B_j^{2n-2} (e B_{j+1}^{2n-2}) e tutta la lente è B_j^{2n-1}

Il gruppo $\langle p \rangle$ manda S^{2n-3} in sé, p manda p_j in p_{j+1} e $\widehat{p_j p_{j+1}}$ in $\widehat{p_{j+1} p_{j+2}}$

$p: B_j^{2n-1} \to B_{j+1}^{2n-1}$

$p: B_j^{2n-2} \to B_{j+1}^{2n-2}$

Quindi quozientando viene che quel disegno è un dominio fondamentale, con identificazioni al bordo (non c'è, al quoziente, bordo)

Quindi $\overline{\partial B_j^{2n-1}} = 0$, mentre $\overline{\partial B_j^{2n-2}} = \overline{S^{2n-3}} = S^{2n-3}/_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = L_{2n-3}(m)$

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agisce ruotando ma questo va in sé

Quindi $L_{2n-1}(m)$ ha 1 cella per ogni dimensione tra 0 e $2n-1$, quindi

$$0 \to \underset{2n}{} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \underset{2n-1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot m} \underset{2n-2}{\mathbb{Z}} \to \dots \to \underset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot m} \underset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{0}{\mathbb{Z}}$$

da cui $H^*(L_{2n-1}(m); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 2n-1,\ k = 0 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & k \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Facendo l'unione infinita si ha $H^i(L_\infty(m); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } i = 0 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{per } i \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$L_\infty(m) = S^\infty / \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ quindi è un $K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$

Per costruire gli altri si usa fibrazione $\Omega K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 2) \to PK(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 2) \sim *$, con $\Omega K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 2) \simeq K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$ e $PK(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 2) \to K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 2)$

Nella SS. E_2: $\begin{array}{|l} 0 \\ \mathbb{Q} \; ? \; ? \; ? \end{array}$ ← devono essere tutti zero

im diventano isomorfismi (essendo torsione muore con $\mathbb{Q}$)

Per induz. si ha che tutte le coomologie sono tutte nulle. Vedendo la SS. su $\mathbb{Z}$ per induz. allo stesso modo si chiude anche la seconda tesi.

TOPA - LEZIONE 20

COROLLARIO: Se H abeliano finito, $\tilde{H}^*(K(H, n); \mathbb{Q}) = 0$ e $\tilde{H}^i(K(H, n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} H & \text{per } i = n+1 \\ 0 & \text{per } i \leq n \\ ? & \text{altrimenti} \end{cases}$

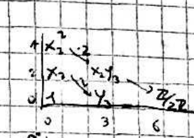
Esempio: $S^3 \longrightarrow X^4$, $\searrow$ X^3 (Postnikov). $X_3 = K(\pi_3(S^3), 3) = K(\mathbb{Z}, 3)$

$X_4 = ?$ Sappiamo che $K(\pi_4(S^3), 4) \hookrightarrow X_4 \twoheadrightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$

Facendo S.S. di coom. su $\mathbb{Z}$ per la solita fibrazione $K(\mathbb{Z}, 2) \to PK(\mathbb{Z}, 3) \to K(\mathbb{Z}, 3)$

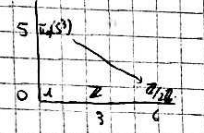
$H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_2]$

si deduce che



Vedremo che $\pi_4(S^3)$ è di torsione

Quindi nella SS per la fibraz. su X_3 si ha



Usando le caratteristiche di Postnikov si deduce che $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [...]

CLASSI DI SERRE

Sia $\mathcal{C}$ classe di gruppi abeliani, come ad esempio $\mathcal{FG}$ (fin. gen.), $\mathcal{T}_p$ (di p^k-torsione per k generico), $\mathcal{F}_p$ (gruppi finiti in $\mathcal{T}_p$) ..

PROPOSIZIONE: Data $0 \to A \to B \to C \to 0$ esatta corta di gruppi abeliani. Allora A, C sono in $\mathcal{C} \iff B \in \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ una di quelle sopra.

Def $\mathcal{C}$ è classe di Serre se soddisfa la proposizione.

TEOREMA: Se X è sp. top. sempl. conn. Allora $\pi_n(X) \in \mathcal{C}$ $\forall n > 0$ se e solo se $H_n(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ $\forall n > 0$.

Esempio: $H_*(S^1 \vee S^2)$ è fin. gen. ma $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ non è fin. gen.

Quindi sempl. connesso è un'ipotesi necessaria.

Def $f: G \to H$ omo di gruppi abeliani è $\mathcal{C}$-isomorfismo se $\ker f \in \mathcal{C}$, $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{C}$.

TEOREMA ($\mathcal{C}$-HUREWICZ). Se $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ per $i < n$, $\pi_1(X) = 0$, allora $h: \pi_n(X) \to H_n(X)$ è $\mathcal{C}$-isom.

LEMMA: Se $F \hookrightarrow X \twoheadrightarrow B$ è fibrazione di Serre con B sempl. conn. Se 2 tra F, X, B hanno $H_* \in \mathcal{C}$, allora anche per il terzo vale la stessa cosa.

DIM: $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B \in \mathcal{C}$ e $\operatorname{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$

Caso 1: $\boxed{F, B \Rightarrow X}$. $E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) = H_p(B) \otimes H_q(F) \oplus Tor(H_p(B), H_q(F))$
$(p,q) \neq (0,0)$

$\Rightarrow E^2_{p,q} \in \mathcal{C} \Rightarrow E^r_{p,q} \in \mathcal{C} \quad \forall (p,q) \neq (0,0)$

$\Rightarrow E^\infty_{p,q} \in \mathcal{C} \quad \forall (p,q) \neq (0,0)$. $E^\infty_{p,m-p}$ sono quozienti successivi di

$0 \subseteq F^0_m \subseteq F^1_m \subseteq \ldots \subseteq F^m_m = H_m(X)$. Per induzione $H_m(X) \in \mathcal{C}$ perché

$0 \to F^i_m \to F^{i+1}_m \to F^{i+1}_m / F^i_m \to 0$

Caso 2: $\boxed{F, X \Rightarrow B}$

Partendo dall'ultima osservazione di prima i filtrati stanno in $\mathcal{C}$, quindi i quozienti, quindi $E^\infty_{p,q} \in \mathcal{C} \quad \forall (p,q) \neq (0,0)$

Per induz. se $H_p(B) \in \mathcal{C}$ per $0 < p < k \Rightarrow E^2_{p,q} \in \mathcal{C}$ per $p < k$
$(p,q) \neq (0,0)$

Infatti per r: $E^r_{p,q} \in \mathcal{C}$ per $p < k$ $(p,q) \neq (0,0)$. (induz. su r a scendere)
abbastanza grande

$0 \to E^{r+1}_{k,0} \to E^r_{k,0} \to \operatorname{Imd}^r \to 0$

$\ker d^r \in \mathcal{C}$ $\quad \in \mathcal{C}$ Quindi $H_k(B) \in \mathcal{C}$. $\quad (H_1(B) = 0 \in \mathcal{C})$

LEMMA: $\pi \in \mathcal{C} \Rightarrow H_i(K(\pi, n)) \in \mathcal{C}$ per ogni $n, i > 0$

DIM: Già visto per $K(G,1)$ con $G \in \mathfrak{FG}$ e $G \in \mathfrak{F}_p$.

Usiamo la fibrazione $\Omega K(G,n) \to PK(G,n) \sim *$
$\downarrow$
$K(G,n)$

e il lemma precedente per le classi $\mathfrak{FG}$ e $\mathfrak{F}_p$ e n generico

Se $G \in \mathcal{T}_p$ ci serve una base per l'induzione. [...]

- Vogliamo costruire $K(G,1)$ per G arbitrario:

EG definito con simplessi $[g_0, \ldots, g_n]$ dove $g_i \in G$ e facce $[g_0, \ldots, \check{g}_i, \ldots, g_n]$. EG è contrattile:

infatti $x \in [g_0, \ldots, g_n]$ lo spostiamo verso $[e]$ lungo il segmento in $[e, g_0, \ldots, g_n]$ (Contrazione, $x = e$ viene spostato lungo $[e,e] \neq [e]$ quindi e non resta fisso)

Prendiamo azione libera di G su EG diagonale

$g \cdot [g_0, \ldots, g_n] = [gg_0, \ldots, gg_n] \quad \Rightarrow BG := EG/G$ è tale che
$\pi_1(BG) = G$, $\pi_k(BG) = 0 \quad \forall k > 1$

Notazione: i simplessi di BG: $[g_0, g_0 g_1, \ldots, g_0 g_1 \cdots g_n] \sim [e, g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 \cdots g_n]$

Lo scriviamo $[g_1 | g_2 | \ldots | g_n]$.

$\partial [g_1 | g_2 | \ldots | g_n] = [g_2 | g_3 | \ldots | g_n] \cup [g_1 | \ldots | g_i g_{i+1} | \ldots | g_n]$

Questo oggetto è funtoriale: $f: G \to H$ omo di gruppi induce $Bf: BG \to BH$ omo di complessi

[...] Sia $X = K(\pi, 1)$, $\pi \in \mathcal{T}_p$.

$G < \pi \Rightarrow G \in \mathcal{T}_p$. $\quad x \in H_k(K(\pi,1))$
rappresentato da catena finita
Servono finiti elementi in π

$\Rightarrow x \in H_k(K(G,1))$ con $G < \pi$ fin. gen. $(G \in \mathfrak{F}_p)$

$\Rightarrow H_k(K(\pi,1)) \in \mathcal{T}_p$ perché ogni elemento ha ordine finito potenza di p
finito

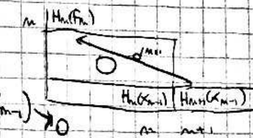
DIM: Usiamo Postnikov $\ldots \to X_n \to \ldots \to X_1$ con

$F_n = K(\pi_n(X), n) \to X_n \to X_{n-1}$ fibraz. $\quad \pi_i(X) \in \mathcal{C} \ \forall i \Rightarrow H_i(X_n) \in \mathcal{C}$
$\forall n$
$\forall i$

Ma $H_i(X_n) = H_i(X) \ \forall i \leq n \quad \Rightarrow H_i(X) \in \mathcal{C} \quad \forall i \leq n$

$\pi_n(X) \to H_n(X)$ $\qquad$ Usiamo $F_n \to X_n \to X_{n-1}$

$\pi_n(X_n) \to H_n(X_n)$



$H_{n+1}(X_{n-1}) \xrightarrow{d^{n+1}} H_n(F_n) \xrightarrow{h} H_n(X_n) \to H_n(X_{n-1}) \to 0$

$E^\infty_{0,n}$

Se $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ per $i < n \Rightarrow \pi_i(X_{n-1}) \in \mathcal{C} \ \forall i$

$\Rightarrow H_{n+1}(X_{n-1}) \in \mathcal{C}$, $H_n(X_{n-1}) \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow H_n(F_n) \xrightarrow{h} H_n(X_n)$ è $\mathcal{C}$-isom
$\pi_n(X)$

OSS. Abbiamo dunque mostrato che
$\pi_n(X) \in \mathcal{C} \ \forall n > 0 \Rightarrow H_n(X) \in \mathcal{C} \ \forall n > 0$

Viceversa se sappiamo che $H_i(X) \in \mathcal{C} \ \forall i < n$, avendo $\mathcal{C}$-isom $H_n \cong_{\mathcal{C}} \pi_n$ anche $\pi_n \in \mathcal{C}$. ...

Esempio: $H_m(S^n)$ è fin. gen. $\forall m, n$

TEOREMA (SERRE)

$\pi_m(S^n)$ è gruppo finito $\forall m$ eccetto: $m = n$ e $m = 2n-1$ nel caso n pari

In questi casi $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $\pi_{2n-1}(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
(n pari)

DIM: • n dispari:

$\ldots \to X_{n+2} \to X_{n+1} \to X_n = K(\mathbb{Z}, n)$. Uso $H^*(-; \mathbb{Q})$ per mostrare che $\tilde{H}^*(F_{n+k}, \mathbb{Q}) = 0$

$K(\pi_{n+2}(S^n), n+2) = F_{n+2}$, $K(\pi_{n+1}(S^n), n+1) = F_{n+1}$

Considero

$F_{n+1} \to X_{n+1} \to S^n$. $E_\infty \Rightarrow H^i(X_{n+1}) \cong H^i(S^n) \quad \forall i \leq n+1$
ha un $\mathbb{Q}$ in dim n, quindi $E_2^{n,0} = \mathbb{Q}$ non viene ucciso

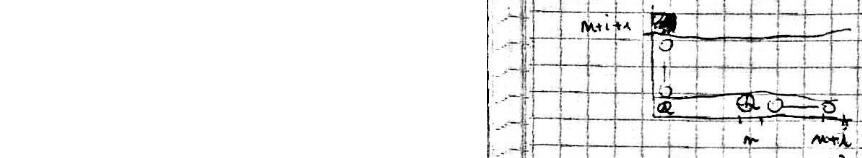
ovvero $d^{n+1} = 0$

Se $E_2^{0,n+1} = \mathbb{Q}^k$ lui sopravviverebbe nel termine E_∞, ma $H^{n+1}(S^n) = 0 \rightsquigarrow k=0$

$\Rightarrow H^{n+1}(F_n, \mathbb{Q}) = 0$ ovvero $\pi_{n+1}(F_n)$ è finito (di tors. fin. gen.)

Per i passi successivi:

$$F_{n+i+1} \to X_{n+i+1} \to X_{n+i}$$



Se $E_2^{0,n+i+1} = \mathbb{Q}^k$ sopravvive ...

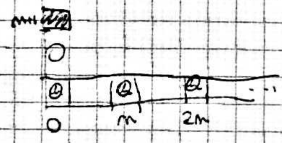
$H^{n+i+1}(S^n) = 0 \Rightarrow k=0$.

$\Rightarrow \forall i \;\; \pi_{n+i}(S^n)$ è finito

- <u>n pari:</u>

Come prima, però $X_n = K(\mathbb{Z},n)$ ha coomologia diversa da prima (è polinomiale)

$F_{n+1} \to X_{n+1} \to X_n$



Come prima $E_2^{0,n+1} = 0$

$\Rightarrow \pi_{n+1}(S^n)$ è finito

In E_∞ però le copie di $\mathbb{Q}$ nella prima riga devono morire

La stessa induzione funziona sempre tranne per $F_{2n-1} \to X_{2n-1} \to X_{2n-2}$

Per circa le stesse motivazioni di sempre si ottiene $H_{2n-1}(F_{2n-1}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

$\overset{\shortparallel}{\pi_{2n-1}(S^n) \otimes \mathbb{Q}}$

Il problema ~~nasce~~ è al grado $2n-1$ quando al passo successivo (se non lo uccidessi con un $\mathbb{Q}$ in $E_2^{0,2n-1}$ al passo dopo avrei problemi)

Per i passi successivi non c'è più niente da uccidere, quindi tutto nullo ....

[...]

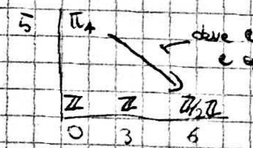
- Tornando a calcolare $\pi_4(S^3)$:

$$\dots \to X_5 \to X_4 \to X_3 = K(\mathbb{Z},3)$$

$K(\pi_4(S^3), 4) = F_4$ — sappiamo che è finito (come anche π_5)

$H^4(F_4, \mathbb{Z}) = 0$

$H^5(F_4, \mathbb{Z}) = \pi_4(S^3)$



deve essere isom. e quindi $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$H^4(X_4) \cong H^4(S^3)$

$H^5(X_4) \cong H^5(S^3)$

$\shortparallel$

0