Lezione 1

Giovanni Alberti

21 ottobre 2009

Contenuto:

- Serie di Fourier e applicazioni: risoluzione dell'equazione del calore e delle onde
- Trasformata di Fourier con applicazioni (trasforma equazioni differenziali alle derivate parziali in equazioni di tipo algebrico)
- Integrazione su superfici (K-forme e Stokes)
- Funzioni armoniche
- Integrazione secondo Lebesgue

Nota 1: l'integrazione secondo Lebesgue non serve nei punti precedenti del contenuto del corso ed è per questo che viene messa alla fine, si sottointende che lo strumento non verrà utilizzato prima, verrà anch'esso trattato nel corso di **Istituzioni di Analisi**.
Nota 2: nel corso spesso faremo uso di strumenti più avanzati e non dimostrati che verranno dimostrati nel corso di **Istituzioni di Analisi**.

Prerequisiti del corso:

- Algebra Lineare
- Analisi del secondo anno:
  Completezza C^0
  Integrali su curve e superfici (campi di vettori Teorema di Stokes e della Divergenza)
  Potenziale di un campo di vettori
  teorema del Dini e della funzione implicita
  riepilogheremo durante il corso: Compattezza in spazi metrici e teorema di Ascoli Arzelà, Integrazione su curve e superfici, teorema di Stokes e della Divergenza, Teorema di Weierstrass
- Topologia
- Analisi complessa: metodo dei residui

Libri di Testo:

- da trovare testi su analisi di Fourier e funzioni armoniche
- forse ci saranno degli appunti
- Integrazione su superfici e integrazione secondo Lebesgue (ref. Fleming Function of several variables)
- Esercizi e appunti in rete: `www.unipi.it/ alberti`

Per iscriversi alla mailing list inviare un messaggio di posta elettronica all'indirizzo `galberti1@dm.unipi.it` con oggetto contenente mailing list Analisi, nel testo aggiungere nome cognome e matricola.

Orario:
Lu 11-13 Alberti aula A1
Ma 16-18 dipende aula F
Ve 14-16 Gelli aula A1

Modalità esame:
Compitini + orale nei primi due appelli.
Scritto + orale nella medesima sessione.
Negli scritti *non* possono essere utilizzati i libri di testo.
Ci sono 5 appelli + i compitini.

Ricevimento: vedi homepage.

1 Serie di Fourier

Parte complessa

Domanda 1: E' possibile scrivere una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ di periodo 2π come $f(x) = \sum a_n^{inx}$? Domanda 2: Calcolare a_n

Parte reale

Domanda 1': Stessa cosa ma $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$
Domanda 2': Calcolare a_n e b_n
Usando le seguenti uguaglianze

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \tag{1}$$

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \quad e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx) \tag{2}$$

si può passare dalla risposta di una domanda all'altra, risponderemo nel caso complesso e poi ci ricondurremo all'altro usando le precedenti formule.
Un'altra questione interessante è il perché utilizziamo proprio le funzioni seno e coseno per dare una diversa formulazione di ogni funzione. Tratteremo questo argomento più avanti. Adesso introduciamo l'insieme delle funzioni sulle quali lavoreremo:

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\, continue\, e\, 2\pi - periodiche\}$$

è spazio normato con norma $\|f\|_x := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Definiamo anche

$$X' = \{f : [-\pi, +\pi] \to \mathbb{C}\, continue \,|\, f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

$$X'' = \{f : K \to K\, continue\}\ K = [-\pi, +\pi]/\{\pi = -\pi\}.$$

Osserviamo che i tre insiemi appena definiti rappresentano le stesse funzioni.

Definizione 1. Il prodotto scalare indotto dalla norma precedente definita è:

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\bar{g(x)}dx$$

Osservazione 1. Il precedente è un prodotto scalare (hermitiano)

Dimostrazione. **Esercizio**, devono essere verificate

- Linearità in f e antilinearità in g
- $< f, f >\leq 0 \forall f$
- $< f, f >= 0 \Rightarrow f = 0$

□

Teorema 1. $\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale massimale in X. Massimale si intende rispetto all'inclusione.

Se è verificato il seguente teorema allora dobbiamo avere che

Definizione 2. I coefficenti di Fourier di $f \in X$ sono esattamente

$$c_n := < f, e^{inx} > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Teorema 2. Se $f \in C^1 \cap X$ allora $\sum_{-\infty}^{+infty} c_n e^{inx}$ converge totalmente (cioè $\sum |c_n| < -\infty$) e vale $f(x)$.

Osservazione 2. L'ipotesi $f \in C^1$ è necessaria. $(\exists f \in X | \sum a_n e^{inx}$ non converge)

Osservazione 3. $\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$ non è una base ortonormale. Ma non esiste una base ortonormale di X.

Dimostrazione. Consideriamo $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{inx}$, questa appartiene a X ma non può essere scritta come combinazione lineare di elementi di $\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

Sappiamo che ogni spazio vettoriale ammette una base, anche in dimensione infinita (Lemma di Zorn), però in spazi di dimensione infinita il concetto di base non serve a molto, in spazi di dimensione infinita si usano basi di Hilbert (non verranno definite in questo corso). Abbiamo comunque che $\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Hilbert.

Osservazione 4. La norma associata al prodotto scalare definito prima (che chiameremo norma L^2) non è uguale alla norma del sup. Non è nemmeno equivalente (non inducono la stessa topologia, infatti X con la norma del sup è completo, con questa norma no).

Osservazione 5. La norma L^2 e la norma del sup non sono nemmeno equivalenti (cioè non inducono la stessa topologia sullo spazio X).

Dimostrazione. Lo spazio X dotato della norma del sup è uno spazio completo invece con la norma L^2 non lo è (verifica per *Esercizio* che la successione nella Figura 1 (da inserire :)) è di Cauchy ma non converge con la norma L^2). $\square$

Allo stesso modo possiamo definire anche le seguenti norme (norme L^p con $1 \leq p < \infty$)

Definizione 3.

$$\|f\|_p = (\int |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposizione 1. Delle precedenti solo la norma L^2 deriva da un prodotto scalare.

Dimostrazione. Utilizzeremo le seguenti uguaglianze che valgono per ogni prodotto scalare (hermitiano)

$$Re < f, g >= \frac{\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2}{4} \tag{3}$$

$$Im < f, g >= \frac{\|if + g\|_2^2 - \|if - g\|_2^2}{4} \tag{4}$$

La cui verifica è lasciata per *Esercizio.* Se la norma del sup o le norme L^P inducessero un prodotto scalare la sua formula potrebbe essere ottenuta utilizzando le precedenti disuguaglianze. Sostituendo però le norme otteniamo qualcosa che non verifica le ipotesi di prodotto scalare. □