Lezione 6

Maria Stella Gelli

21 ottobre 2009

Proposizione 1.
- $f \in C^k \cap X \Leftrightarrow |c_n| = o(\frac{1}{n^{k+1}})$
- $f \in C^k \cap X \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k}|c_n|^2 < \infty$
- Sia $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^k||c_n| < \infty \Rightarrow f \in C^k$

Proposizione 2. In particolare $|c_n| \leq ce^{-\delta|n|}$ $\delta > 0$ Se assumiamo che $\exists\delta > 0$ tale che verifica le ipotesi precedenti allora vale che la f è analitica. (Cioè coincide con una serie di potenze)

Dimostrazione. Si consideri $g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definite come serie di potenze

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^n$$

convergono in un disco in $\mathbb{C}$ di raggio R con $R \leq e^{\delta}$ g_1, g_2 sono analitiche anche in un intorno di ∂B con B disco unitario in $\mathbb{C}$.
Allora $f(x) = g_1(e^{ix}) + g(e^{-ix})$ e $z = e^{ix} \Rightarrow z^n = e^{inx}$, $z = e^{-ix} \Rightarrow z^n = e^{-inx}$. □

Esercizio 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, f \in X$ e a_n, b_n coefficenti di Fourier reali, tali che $|a_n| + |b_n| \leq e^{-\delta n}$ con $n \in \mathbb{N}$ allora f è analitica reale.

Esercizio 2.
- Sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{-n}}{\sqrt{n!}} \sin(nx)$ calcolare $\|f\|_2$.
- analogamente per $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \cos(nx)$

Suggerimento: si utilizza la disuguaglianza $\|f\|_2^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ (Bessel) che vale se $f \in X \cap C^1$, e per dimostrare che le funzioni sono C^1 uso le proposizioni precedenti riguardanti la sommabilità.
In realtà vale la seguente

Proposizione 3 (Uguaglianza di Bessel)**.** $\forall f \in X$ allora $\|f\| =_2^2= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$

Dimostrazione. Abbiamo già che $\|f\|_2 \geq (\sum |c_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, dobbiamo dimostrare l'altra disuguaglianza. Inoltre se $f \in X$ è anche un polinomio trigonometrico cioè $f(x) = \sum_{n\in\mathcal{I}} c_{ne^{inx}}$, con $\mathcal{I}$ finito, allora è vero che $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathcal{I}} |c_n|^2$. Abbiamo inoltre che la classe $\mathcal{P}$ dei polinomi è densa in X rispetto alla $\|\cdot\|_\infty$.

Data $f \in X$ allora vogliamo trovare f_N che sia polinomio trigonometrico tale che questa tende in norma a f. Per densità allora $\exists\{f_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tali che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ per $N \to \infty$ e questo implica la convergenza in norma 2.
Inoltre vale che $\forall f \quad \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.
Sia $g = f_N - f$ e siano $c_n(g)$ i suoi coefficenti di Fourier.
Allora $(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|g\|_\infty$ e quindi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^N - c_n|^2 \to 0$.
Mi manca soltanto da dimostrare (*Esercizio per casa*) che la precedente implica che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^N|^2 \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. □

Esercizio 3. Discutere (e risolvere) la seguente equazione:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t > 0, x \in [-\pi, \pi] \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & t \geq 0 \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi) & t \geq 0 \\ u(0, x) = \cos(x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u_t(0, x) = \sin(x) & x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{1}$$

Suggerimento: sappiamo che esiste una soluzione C^2 che verifica le formule di qualche lezione fa.

Esercizio 4. Discutere (e risolvere) la seguente equazione:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & t > 0, x \in (-\pi, \pi) \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & t \geq 0 \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi) & t \geq 0 \\ u(0, x) = \cos(x) + 2\sin(2x) & x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{2}$$