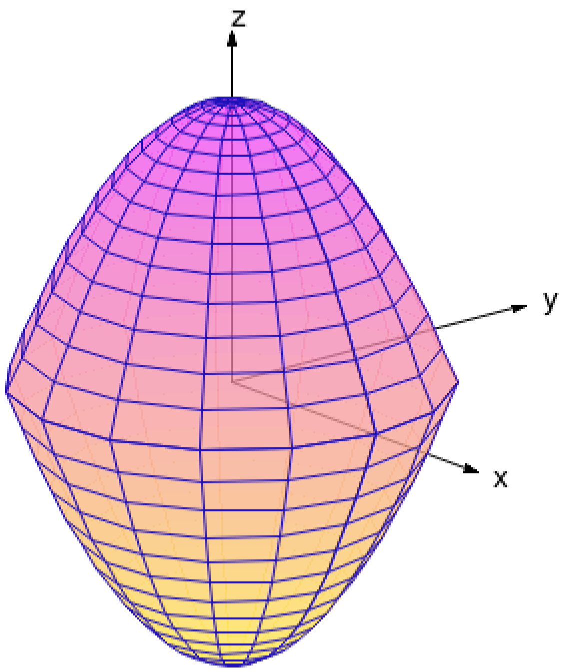
Soluzioni degli esercizi di Analisi 2 e Complementi di Analisi Matematica (A.A. 2015–2016) – prof. V. Magnani

Foglio 7

Esercizio 3

Sia $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2 \right\}$. Si tracci il grafico di tale insieme e si calcoli l'area di $\partial\Omega$.

Soluzione Potendo scrivere $f(x, y) = 2\left(1 - (x^2 + y^2)\right)$ e $\Omega = \{ |z| < f(x, y) \}$, vediamo che $\partial\Omega$ è il "guscio" costituito da due paraboloidi simmetrici l'uno dell'altro rispetto al piano xy, con asse coincidente con l'asse z e vertici in $(0, 0, \pm 2)$.



Dividiamo la superficie in due falde (la superiore e la inferiore) $\partial\Omega = \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ che si intersecano nella circonferenza unitaria contenuta nel piano xy. Sono entrambe cartesiane: Σ_1 è il grafico di f e Σ_2 di $-f$, ristrette al dominio $D^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$. Per ogni falda (consideriamo per esempio Σ_1) abbiamo quindi "gratis" la parametrizzazione cartesiana $\sigma : D^2 \to \Sigma_1$ data da

$$\sigma : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)) = \left(x, y, 2 - 2\left(x^2 + y^2\right)\right),$$
$$D\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4x & -4y \end{pmatrix}, \quad \nu = \frac{\sigma_x \times \sigma_y}{\|\sigma_x \times \sigma_y\|} = \frac{(4x, 4y, 1)}{\sqrt{16(x^2+y^2)+1}}.$$

Una parametrizzazione migliore (che sfrutti la simmetria assiale della superficie) si ottiene componendo la precedente con il diffeomorfismo delle coordinate polari $p(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$; cosicché si ha

$$\eta = \sigma \circ p : [0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (\rho, \theta) \mapsto \left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2(1-\rho^2)\right),$$
$$D\eta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ -4\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \frac{\eta_\rho \times \eta_\theta}{\|\eta_\rho \times \eta_\theta\|} = \frac{\left(4\rho^2\cos\theta, 4\rho^2\sin\theta, \rho\right)}{\rho\sqrt{16\rho^2+1}}.$$

Usando questa seconda parametrizzazione l'integrale da calcolare si semplifica parecchio, poiché $\|\eta_\rho \times \eta_\theta\|$ è la derivata di

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{32}\left(16\rho^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}},$$

cosicché calcoliamo rapidamente

$$m_2(\Sigma) = 2m_2(\Sigma_1) = 2\int_{\Sigma_1} \|\eta_\rho \times \eta_\theta\| d\eta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{16\rho^2+1}\, d\rho d\theta =$$
$$= 4\pi\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{32}\left(16\rho^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{12}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Esercizio 4

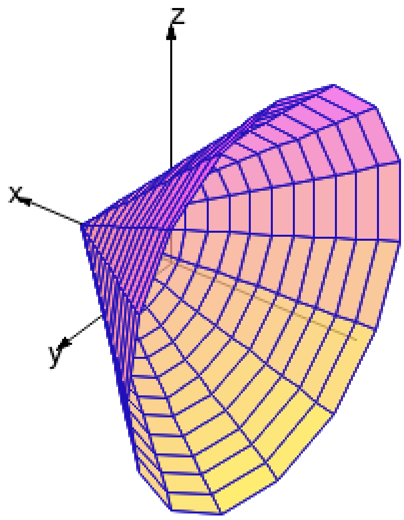
Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} : y^2 + z^2 - (x-1)^2 = 0, |x| \leq 1\right\}$$

ed il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(xyz + yz, xz + x^4, 2x^2yz\right)$.

1. Si tracci un grafico qualitativo di tale insieme.
2. Calcolare $\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma$, dove ν è la normale che orienta Σ ed è rivolta verso l'esterno di tale insieme.

Soluzione (1) Σ è la porzione di cono con asse x e vertice in $(1, 0, 0)$ compresa tra i due piani $\{ x = \pm 1 \}$; dunque abbiamo solo una falda.



(2) Calcoliamo $\operatorname{rot} F = \left(2x^2z - x, xy + y - 4xyz, z + 4x^3 - xz - z\right)$ e Σ è cartesiana dato che $x = f(y,z) = 1 - \sqrt{y^2+z^2}$, quindi abbiamo la parametrizzazione $\sigma(u,v) = (f(u,v,),u,v)$; imponendo la condizione sul dominio si trova che è $2D^2$, e vale $\sigma\left(\partial(2D^2)\right) = \partial\Sigma$. Vediamo che c'è il punto singolare $\sigma : (0,0) \mapsto (1,0,0)$ (ma notare che *non* è di frontiera!), e che la normale è orientata correttamente:

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = \left(1, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)/\|.\|.$$

Per il bordo cerchiamo $[0,2\pi] \xrightarrow{\eta} \partial(2D^2) \xrightarrow{\sigma} \partial\Sigma$ orientata bene e poi prendiamo $\gamma = \sigma \circ \eta$; osserviamo che γ' sta nel piano xz:

$$\begin{aligned} \eta &= (2\cos\theta, 2\sin\theta) \\ \gamma &= (-1, 2\cos\theta, 2\sin\theta). \\ \gamma' &= (0, -2\sin\theta, 2\cos\theta) \end{aligned}$$

Possiamo controllare la correttezza dell'orientazione calcolando $\Pi_{yz}(\nu) \times \gamma' = e_x$. Usando Stokes calcoliamo

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle, d\sigma = \int_{+\partial\Sigma} \langle F, \tau\rangle dl = \int_0^{2\pi} \langle F\circ\gamma, \gamma'\rangle d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \langle (0, 1 - 2\sin\theta, 6\cos\theta\sin\theta), \gamma'\rangle d\theta = 4\pi.$$

Esercizio 5

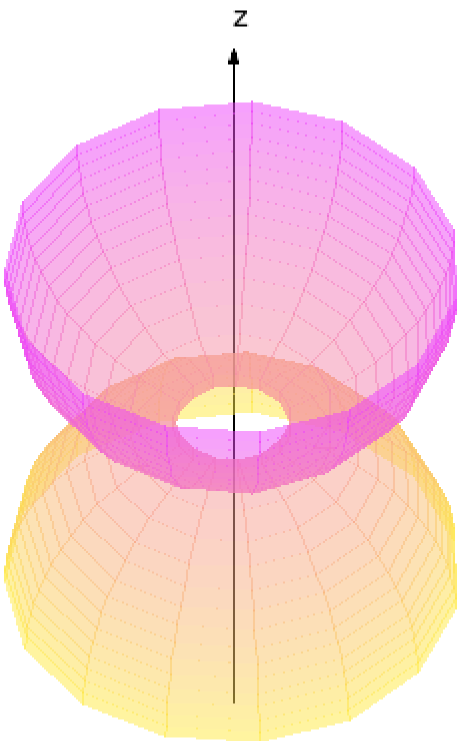
Sia $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2-|z|-\frac{3}{4} < 0 \, , \ |z| < \frac{1}{2} \right\}$. Sia

$$\Sigma = \partial\Omega \setminus \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| = \frac{1}{2} \right\}$$

e ν la normale esterna di Σ. Dato $F(x,y,z) = (y-z, x+z, z)$, calcolare

$$\Phi(F, \Sigma, \nu).$$

Soluzione La regione Ω è il solido di rotazione con asse z costituito da due tronchi di paraboloide simmetrici rispetto al piano xy, che ivi si intersecano in un disco di raggio $\sqrt{3}/2$ ed hanno per basi due dischi di raggio unitario alle quote $z = \pm 1/2$. La superficie Σ è costituita dunque dalle due falde Σ_1 e Σ_2 di tronchi di paraboloide superiore e inferiore, e coincide col bordo bordo $\partial\Omega$ ma privato dei due dischi orizzontali (sia D_1 il disco superiore e D_2 quello inferiore).



Abbiamo dunque

$$\partial\Omega = \Sigma \cup D_1 \cup D_2 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup D_1 \cup D_2,$$

dove le unioni sono digiunte a meno di insiemi di superficie nulla (le tre circonferenze). Possiamo applicare il Teorema della divergenza

$$\Phi(F, \Sigma, \nu) + \Phi(F, D_1, \nu_1) + \Phi(F, D_2, \nu_2) = \Phi(F, \partial\Omega, \nu) = \int_\Omega \operatorname{div} F dV,$$

e poiché $\operatorname{div} F = 1$ otteniamo

$$\Phi(F, \Sigma, \nu) = m_3(\Omega) - \Phi(F, D_1, \nu_1) - \Phi(F, D_2, \nu_2).$$

Parametrizziamo la regione superiore Ω_1 delimitata da Σ, D_1 e il piano xy; in coordinate cilindriche abbiamo $\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$ e $\Omega_1 = \varphi(A)$, dove il dominio del diffeomorfismo è

$$A = \left\{ 0 \le \rho \le \sqrt{\frac{3}{4} + z(1-z)}, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le \frac{1}{2} \right\},$$

e $J_\varphi = |\det D\varphi| = \rho$. Calcoliamo il volume della regione superiore:

$$m_3(\Omega_1) = \int_{\Omega_1} dV = \int_{\Omega_1} dxdydz = \int_A \rho\, d\rho d\theta dz =$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{4}+z(1-z)}} dz = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} + z - z^2\right) dz = \frac{11}{24}\pi,$$

da cui poi ricaviamo $m_3(\Omega) = 2m_3(\Omega_1) = \frac{11}{12}\pi$. Calcoliamo i flussi attraverso i due dischi orizzontali parametrizzati con $\sigma_{1,2} : D^2 \ni (\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \pm\frac{1}{2}) \in D_{1,2}$, le cui normali sono $\nu_{1,2} = (0,0,\pm1)$:

$$\Phi(F, D_1, \nu_1) = \int_{D_1} \langle F, \nu_1\rangle d\sigma_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((\rho\sin\theta - \frac{1}{2})\cdot 0 + (\rho\cos\theta + \frac{1}{2})\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) d\rho d\theta = \pi,$$
$$\Phi(F, D_2, \nu_2) = \int_{D_2} \langle F, \nu_2\rangle d\sigma_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((\rho\sin\theta + \frac{1}{2})\cdot 0 + (\rho\cos\theta - \frac{1}{2})\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot (-1)\right) d\rho d\theta = \pi,$$

cosicché in conclusione $\Phi(F, \Sigma, \nu) = \frac{11}{12}\pi - \pi - \pi = -\frac{13}{12}\pi$.

Esercizio 7

Consideriamo la superficie triangolare

$$\Sigma = \{\, (x,y,z) \ : \ x + 2y + 3z = 1 \ , \ x,y,z \geq 0 \,\}\,.$$

1. Sia γ la curva C^1 a tratti che percorre interamente ed una sola volta il bordo $\partial\Sigma$ passando prima per $(1,0,0)$, poi per $(0,1/2,0)$. Calcolare la circuitazione $\int_\gamma ydx - xdy + ydz$.

2. Data ν normale a Σ tale che abbia seconda componente positiva e dato $F(x,y,z) = (x-y, y+z, x+y)$, calcolare il flusso $\Phi(F,\Sigma,\nu)$.

Soluzione (1) Perché Σ è un triangolo: è un piano (obliquo) intersecato con un ottante; allora i vertici stanno sugli assi coordinati e sono

$$P_1 = (1,0,0), \quad P_2 = (0,1/2,0), \quad P_3 = (0,0,1/3).$$

Possiamo parametrizzare i tre segmenti di bordo

$$\gamma_1(t) = \left(1-t, \frac{t}{2}, 0\right),\ \gamma_2(t) = \left(0, \frac{1-t}{2}, \frac{t}{3}\right),\ \gamma_3(t) = \left(t, 0, \frac{1-t}{3}\right),$$
$$\gamma_1' = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right),\ \gamma_2' = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right),\ \gamma_3' = \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right)$$

ed effettuare il calcolo diretto

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega + \int_{\gamma_3}\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + 0 = -\frac{5}{12},$$

oppure applicare il teorema di Stokes calcolando invece

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle G, \tau\rangle dl = \int_\Sigma \langle \operatorname{rot} G, \nu\rangle ds,$$

dove $G(x,y,z) = (y,-x,y)$ è il vettore dei coefficienti di ω, τ è la tangente alla curva γ e ν la normale alla superficie Σ orientata in accordo con τ. Parametrizziamo il triangolo Σ come grafico di una funzione: possiamo ad esempio ricavare la coordinata x in funzione delle y, z dall'equazione definente di Σ trovando $x = 1 - 2y - 3z$ da cui la parametrizzazione cartesiana

$$\begin{aligned}
&B = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z \le \frac{1}{3}(1-2y), 0 \le y \le \frac{1}{2} \right\}, \\
&\eta : B \ni (y,z) \mapsto (1-2y-3z, y, z) \in \Sigma, \\
&\|\eta_y \times \eta_z\| = \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

Ovviamente questa non è l'unica parametrizzazione possibile: un'altra possibilità è vedere il triangolo Σ come grafico di una funzione delle (x,y):

$$\begin{aligned}
&T = \left\{ 0 \le y \le \frac{1}{2}(1-x), 0 \le x \le 1 \right\}, \\
&\sigma : T \ni (x,y) \mapsto \left(x, y, \frac{1}{3}(1-x-2y) \right) \in \Sigma, \\
&\|\sigma_x \times \sigma_y\| = \frac{\sqrt{14}}{3}.
\end{aligned}$$

Al di là della parametrizzazione che scegliamo, poiché il rotore e la normale sono costanti

$$\operatorname{rot} G = (1,0,-2), \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),$$

il calcolo richiesto è piuttosto rapido:

$$\int_\gamma \omega = \int_\Sigma \langle \operatorname{rot} G, \nu \rangle ds = \int_\Sigma -\frac{5}{\sqrt{14}} ds = -\frac{5}{\sqrt{14}} \cdot m_2(\Sigma) = -\frac{5}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{12} = -\frac{5}{12}.$$

(2) Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\Phi(F,\Sigma,\nu) = \int_\Sigma \langle F, \nu \rangle ds = \int_B (\langle F, \nu \rangle) \circ \eta \cdot \|\eta_y \times \eta_z\| dydz = \\
= \int_T (\langle F, \nu \rangle) \circ \sigma \cdot \|\sigma_x \times \sigma_y\| dxdy = \frac{5}{27}.
\end{aligned}$$

Esercizio 11

Consideriamo il campo vettoriale $F(x,y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ e l'aperto

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, y - x < 1, y > 0 \right\}.$$

Consideriamo la curva C^1 a tratti Γ, la cui immagine è $\partial\Omega$ e che percorre interamente tale frontiera in senso antiorario ed una sola volta. Calcolare

$$\int_\Gamma F.$$

Soluzione Manipolando le equazioni che definiscono l'insieme Ω si vede che coincide con la regione racchiusa tra l'asse delle ascisse e le rette di equazioni $y = 1 - x$ e $y = 1 + x$, ossia il triangolo di vertici

$$P_1 = (-1, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (0, 1).$$

Parametrizziamo i segmenti con

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) = P_1 + t(P_2 - P_1) = (2t - 1, 0), &\quad \gamma_1' = (2, 0) \\ \gamma_2(t) = P_2 + t(P_3 - P_2) = (1 - t, t), &\quad \gamma_2' = (-1, 1) \\ \gamma_3(t) = P_3 + t(P_1 - P_3) = (-t, 1 - t), &\quad \gamma_3' = (-1, -1), \end{aligned}$$

per $t \in [0, 1]$. Possiamo dunque calcolare $\int_\Gamma F = \int_{\Gamma_1} F + \int_{\Gamma_2} F + \int_{\Gamma_3} F$ dove Γ_i è il sostegno della curva γ_i:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} F = \int_0^1 \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1' \rangle dt = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} (2t-1)^2 \\ (2t-1)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2 \int_0^1 (2t-1)^2 dt = \frac{2}{3}; \\ &\int_{\Gamma_2} F = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}; \\ &\int_{\Gamma_3} F = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Quindi in conclusione $\int_\Gamma F = \frac{2}{3}$.

Foglio 8

Esercizio 3

Stabilire se è vero che per ogni intero positivo n l'insieme

$$\Sigma_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z - z^3 x^2 - y^n = 0 \right\}$$

è una 2-superficie di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione Σ_n è lo 0-livello di $f_n(x, y, z) = z - z^3 x^2 - y^n$, che ha gradiente

$$\nabla f_n = \left(-2xz^3, -ny^{n-1}, 1 - 3x^2 z^2 \right),$$

è definita ovunque ed è di classe C^∞ perché è un polinomio.

Se $|x|, |z| < 3^{-1/4}$ allora $\frac{\partial f_n}{\partial z} > 0$, quindi per il Teorema del Dini Σ_n è localmente grafico di $z = \varphi(x, y)$. D'altronde nell'altro caso abbiamo $\frac{\partial f_n}{\partial x} < 0$, cosicché sempre per il Teorema del Dini $x = \psi(y, z)$ localmente su Σ_n.

Dunque φ e ψ sono carte (di classe C^∞) per Σ_n che dunque è una 2-varietà per ogni n.

Esercizio 5

Si consideri il seguente sistema non lineare in quattro variabili

$$\begin{cases} x^4 - y^4 + z^2 = 1 \\ tx^5 - xt^5 + x = 1 \end{cases}$$

1. Provare che esistono infinite soluzioni del sistema che siano arbitrariamente vicine alla soluzione $P = (1, -1, 1, 1)$, rappresentandole come grafico ed evidenziando la scelta delle variabili indipendenti.

2. Stabilire se esistono altre scelte di variabili per rappresentare le soluzioni sufficientemente vicine a P.

Soluzione (1) Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema; si può vedere S come il luogo degli zeri della funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x^4 - y^4 + z^2 - 1 \\ tx^5 - xt^5 + x - 1 \end{pmatrix},$$

che ha matrice jacobiana

$$Df(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 4x & -4y & 2z & 0 \\ 5tx^4 - t^5 + 1 & 0 & 0 & x^5 - 5xt^4 \end{pmatrix}.$$

Siccome quest'ultima nel punto P assume il valore

$$Df(P) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ed il minore costituito dalle ultime due colonne è invertibile (perché ha determinante -8), per il Teorema del Dini abbiamo che esistono un intorno U di $(x, y) = (1, -1)$, un intorno V di $(z, t) = (1, 1)$ ed un'unica funzione $g : U \to V$ di classe C^∞ (la stessa di f) tale che

$$S \cap (U \times V) = \{ \, (z, t) = g(x, y) \; : \; (x, y) \in U \, \},$$

ossia S è localmente il grafico di g, le cui variabili indipendenti sono x e y. Infine $S \cap (U \times V)$ è un intorno di P in S contenente infiniti punti.

(2) Si, esistono altre scelte possibili per le variabili indipendenti con cui rappresentare S come grafico vicino a P. Ad esempio scegliendo la prima e seconda colonna di $Df(P)$ si ottiene un minore invertibile e con lo stesso argomento di (1) si esprimono le (x, y) in funzione delle variabili indipendenti (z, t). Altre scelte possibili sono:

colonne di $Df(P)$	1 e 3	1 e 4	2 e 4
var. indipendenti	y, t	y, z	x, z

Esercizio 7

Si consideri l'insieme

$$M = \left\{ \, (x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \, , \; x^2 + y^2 = 1 \, \right\},$$

ovvero l'intersezione di una sfera tridimensionale e di un cilindro tridimensionale.

1. Dimostrare che M è una superficie in $\mathbb{R}^4$, evidenziandone in particolare la dimensione.

2. Determinare lo spazio tangente T_pM per ogni $p = (p_x, p_y, p_z, p_t) \in M$, sia come sistema di equazioni che in forma parametrica.

Soluzione (1) Invece di vedere M come luogo di zeri della funzione $(x,y,z,t) \mapsto (x^2+y^2+z^2+t^2-1, x^2+y^2-1)$, osserviamo che sostituendo l'equazione del cilindro in quella della sfera si ottiene $z^2+t^2=0 \iff z=t=0$, quindi M è contenuta in un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^4$. Possiamo infatti riscrivere

$$M = \left\{ (x,y,z,y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2+y^2=1 \ , \ z=0 \ , \ t=0 \right\}.$$

M è il luogo di zeri della funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ definita da

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

che ha matrice jacobiana

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia A il minore di Df ottenuto eliminando la seconda colonna e B quello ottenuto eliminando la prima. Siccome i punti di M verificano $\|(x,y)\| = 1 \neq 0$, ne segue che almeno uno tra A o B è sempre invertibile. Supponiamo ad esempio $\det A \neq 0$ nel punto $p \in M$[1]. Allora pel Teorema del Dini esistono due intorni $U =]p_y-\delta, p_y+\delta[$ e $V = V(p_x,p_z,p_t)$ ed esiste unica $\varphi \in C^\infty(U,V)$ tale che M è localmente grafico di φ, ossia:

$$M \cap (U \times V) = \{ (\psi(y), y, 0, 0) \ : \ y \in U \},$$

dove abbiamo indicato $\varphi(y) = (\psi(y), 0, 0)$.

Lo stesso argomento mostra che nell'intorno dei punti su cui il minore B è invertibile M è localmente grafico di una funzione della variabile x.

Ciò dimostra che M è una varietà regolare di dimensione 1.

(2) Scriviamo T_pM come sistema di equazioni, ciò che corrisponde a vedere la varietà M come luogo di zeri (della funzione f). Le equazioni sono $Df(p)\cdot(\mathbf{x}-p) = \mathbf{0}$, ossia il sistema

$$\begin{cases} p_x(x-p_x) + p_y(y-p_y) = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Per avere le equazioni in forma parametrica si può procedere considerando M come immagine o come grafico di una funzione.

Nel primo caso dobbiamo trovare una parametrizzazione di M. Facilmente, $M = \gamma([0,2\pi])$, dove

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0, 0), \quad \gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0, 0).$$

Allora

$$T_pM = p + \operatorname{span}\{\gamma'(\theta_p)\} = \{ (\cos\theta_p - \lambda\sin\theta_p, \sin\theta_p + \lambda\cos\theta_p, 0, 0) \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Nel secondo caso M è il grafico della funzione implicita; supponiamo come sopra che nel punto $p \in M$ si abbia $\det A \neq 0$. Dal Teorema del Dini abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}(p) = -A^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(p) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2p_x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2p_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_y}{p_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(p_y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[1] Osserviamo che il punto p è della forma $p = (p_x, p_y, p_z, p_t) = (p_x, p_y, 0, 0)$.

e lo spazio T_pM coincide con lo spazio tangente al grafico di φ nel punto p, ossia:

$$T_pM = p + \operatorname{span}\{(\psi'(p_y), 1, 0, 0)\} = \left\{ \left(p_x - \lambda \frac{p_y}{p_x}, p_y + \lambda, 0, 0 \right) \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 8

Consideriamo l'insieme $M = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + e^y + z^2 = 1, \ t^2 + \sin x = 0 \right\}$. Provare che M è una superficie di dimensione due in $\mathbb{R}^4$.

Soluzione M è l'insieme degli zeri della funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y, z, y) = \begin{pmatrix} x^2 + e^y + z^2 - 1 \\ t^2 + \sin(x) \end{pmatrix},$$

che ha matrice jacobiana

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & e^y & 2z & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix},$$

ed è di classe C^∞.

Se $t \neq 0$ allora il minore formato dalla seconda e quarta colonna di Df ha determinante $-2te^y \neq 0$, quindi per il Teorema del Dini $(y, t) = \varphi(x, z)$ localmente su M, quindi una 2-varietà.

Se invece $t = 0$ allora $x = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, quindi il minore formato dalle prime due colonne di Df è invertibile e si conclude (con lo stesso argomento usato nel caso $t \neq 0$) che M è localmente una 2-varietà.

Abbiamo dimostrato che M è una 2-superficie immersa in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 10

Si consideri l'equazione $1 + z^2 + y^2 + \log\left(1 + \cos^2 x\right) = e^{x - \frac{\pi}{2}}$.

1. Si provi che esistono $B(0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\varphi : B(0, \delta) \to \mathbb{R}$ tali che i punti $(\varphi(y, z), y, z)$ siano soluzioni dell'equaione data per ogni $(y, z) \in B(0, \delta)$ e $\varphi(0, 0) = \frac{\pi}{2}$.
2. Stabilire se la φ considerata al punto precedente ha un punto critico nell'origine ed in tal caso determinarne la natura.

Soluzione (1) L'insieme delle soluzioni dell'equazione data (sia S) coincide con l'insieme degli zeri di $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ data da

$$f(x, y, z) = e^{x - \frac{\pi}{2}} - y^2 - z^2 - \log(1 + \cos^2 x) - 1,$$

che ha gradiente

$$\nabla f = \left(e^{x - \frac{\pi}{2}} + \frac{2 \cos x \sin x}{1 + \cos^2 x}, 2y, 2z \right).$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 0, 0) = 1$, ed il punto $(\pi/2, 0, 0) \in S$, allora pel Teorema del Dini esiste un intorno U di $(y, z) = (0, 0)$ ed un intorno V di $x = \pi/2$ ed una funzione $\varphi : U \to V$ tale che

$$S \cap (U \times V) = \{ \, (\varphi(y, z), y, z) \ : \ (y, z) \in U \, \}.$$

(2) Sempre dal Teorema del Dini abbiamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(y,z),y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y,z) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(y,z),y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z)},$$

ed eseguendo il calcolo troviamo $\nabla\varphi(0,0) = (0,0)$ cioè l'origine è un punto stazionario per φ.

Lo sviluppo di Taylor di φ in $(y_0, z_0) = (0,0)$ mostra che

$$\varphi(y,z) - \varphi(0,0) = \varphi(y,z) - \frac{\pi}{2} = \nabla\varphi(0,0)\cdot(y,z) + O\left(\|(y,z)\|^2\right) = O\left(\|(y,z)\|^2\right), \tag{1}$$

che possiamo sostituire nell'equazione data ottenendo

$$1 + \|(y,z)\|^2 + \log\left(1 + \cos^2\varphi(y,z)\right) = e^{\varphi(y,z)-\frac{\pi}{2}}. \tag{2}$$

Inoltre dalla equazione (1) segue $\sin\left(\varphi(y,z) - \frac{\pi}{2}\right) = O\left(\|(y,z)\|^2\right)$, che possiamo utilizzare nella (2) ricavando

$$1 + \|(y,z)\|^2 + \log\left(1 + O\left(\|(y,z)\|^2\right)^2\right) = 1 + \|(y,z)\|^2 + O\left(\|(y,z)\|^4\right) = e^{\varphi(y,z)-\frac{\pi}{2}}.$$

Sviluppando con Taylor il secondo membro

$$e^{\varphi(y,z)-\frac{\pi}{2}} = 1 + \varphi(y,z) - \frac{\pi}{2} + O\left(|\varphi(y,z) - \pi/2|^2\right) = 1 + \varphi(y,z) - \frac{\pi}{2} + O\left(\|(y,z)\|^4\right)$$

otteniamo

$$\varphi(y,z) = \frac{\pi}{2} + \|(y,z)\|^2 + O\left(\|(y,z)\|^4\right),$$

da cui infine si deduce che il punto $(0,0)$ è di minimo per φ.

Una via alternativa alla precedente per risolvere il punto (2) consiste nell'usare la formula data dal Teorema del Dini per le derivate della funzione implicita; notiamo però che questa strada richiede lunghi calcoli molto faticosi!

Calcoliamo le derivate seconde di φ, ad esempio

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 / \frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}.$$

Dopo altri due lunghi calcoli per $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}$ alla fine la matrice hessiana di φ nel punto $(y,z) = (0,0)$ è

$$H_\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

che è definita positiva, quindi l'origine è un punto di minimo per φ.

Esercizio 12

Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$M_\lambda = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = 1 \ , \ x^2 + y^2 = \lambda \right\}$$

è una 1-superficie di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione Consideriamo il cilindro con asse y e raggio 1

$$C = \{ x^2 + z^2 = 1 \}$$

ed il cilindro con asse coincidente con l'asse z e raggio $\sqrt{\lambda}$

$$N_\lambda = \{ x^2 + y^2 = \lambda \}$$

cosicché $M_\lambda = C \cap N_\lambda$.

Se $\lambda < 0$ allora $N_\lambda = \emptyset \implies M_\lambda = \emptyset$. Se $\lambda = 0$ allora N_0 coincide con l'asse z e

$$M_0 = \{ (0, 0, 1) \ , \ (0, 0, -1) \} ,$$

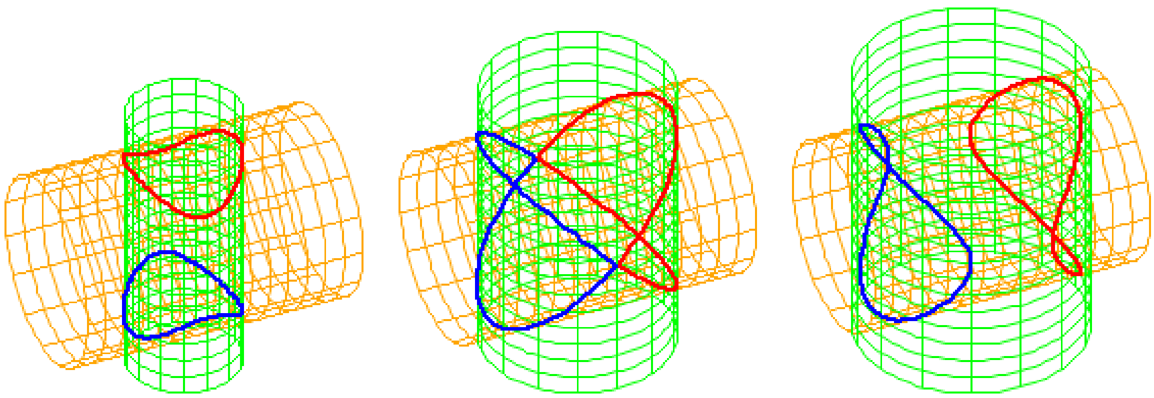
che non è una 1-superficie regolare.

Supponiamo allora $\lambda > 0$. Possiamo vedere M_λ come il luogo degli zeri della funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + z^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

che ha matrice jacobiana

$$Df(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix} .$$



Esplicitando le variabili y (dall'equazione di N_λ) e z (dall'equazione di C) rispetto alla x possiamo "riscrivere"[2] la matrice jacobiana

$$Df(x) = 2 \begin{pmatrix} x & 0 & \pm\sqrt{1 - x^2} \\ x & \pm\sqrt{\lambda - x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

di cui calcoliamo i minori A, B, C che si ottengono eliminando rispettivamente la prima, seconda e terza colonna: a meno di un fattore ± 2, irrilevante pei nostri scopi, abbiamo

$$A = \sqrt{(1 - x^2)(\lambda - x^2)}, \quad B = x\sqrt{1 - x^2}, \quad C = x\sqrt{\lambda - x^2}.$$

Osserviamo che A si annulla per $x = \pm 1, \pm\sqrt{\lambda}$, ma a seconda dei casi c'è comunque *una sola coppia* di soluzioni:

[2] l'abuso di notazione sta nel fatto che in realtà non si tratta di *una* funzione $Df(x)$ ma di *quattro*, una per ogni scelta dei segni

- se $\lambda = 1$ le due coppie coincidono e $A = 0 \iff x = \pm 1$.
- se $\lambda < 1$ allora dall'equazione di N_λ otteniamo $x^2 \leq \lambda < 1$, quindi $A = 0 \iff x = \pm\sqrt{\lambda}$.
- se $\lambda > 1$ allora dall'equazione di C ricaviamo $x^2 \leq 1 < \lambda$, quindi $A = 0 \iff x = \pm 1$.

Esaminando i vari casi,

- se $\lambda < 1$ allora uno tra i minori A e B è non singolare;
- se $\lambda > 1$ allora uno tra i minori A e C è non singolare;

e quindi M_λ è una 1-superficie regolare per $0 < \lambda \neq 1$.

Resta il caso $\lambda = 1$, in cui tutti e tre i minori A, B, C sono singolari sui punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$. Non possiamo però invertire il Teorema del Dini, ossia dedurre "automaticamente" che per $\lambda = 1$ non abbiamo una 1-superficie regolare; dobbiamo dimostrarlo. Per fare ciò osserviamo che le soluzioni delle equazioni che definiscono M_1 sono definite dalle quattro coppie di equazioni

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{1 - x^2} \\ z = \pm\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

quindi scegliendo per esempio $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$ abbiamo le quattro curve

$$t \mapsto (t, \pm\sqrt{1 - x^2}, \pm\sqrt{1 - x^2}), \quad t \mapsto (t, \mp\sqrt{1 - x^2}, \pm\sqrt{1 - x^2})$$

che si incontrano tutte e quattro nel punto $(1, 0, 0)$ per $t = 0$ con direzioni tangenti diverse. Ne deduciamo che il punto $(1, 0, 0)$ non può essere un punto regolare di una 1-superficie, e un ragionamento analogo si può fare per il punto $(-1, 0, 0)$.

Concludendo, M_λ non è una 1-superficie regolare per $\lambda = 1$.

Esercizio 13

Si consideri l'equazione $e^z + y \sin z + y^2 - 2y - x^2 = 0$.

1. Si provi che esiste $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y - 1)^2 < \delta \right\}$ con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo e un'unica $\varphi \in C^\infty(B)$ tale che i punti $(x, y, \varphi(x, y))$ siano soluzioni dell'equazione data per ogni $(x, y) \in B$ e $\varphi(0, 1) = 0$.
2. Stabilire se il punto $\xi^0 = (0, 1)$ è un punto critico di φ. In tal caso stabilire se è di massimo, di minimo, di sella o nessuno di questi, dando un'argomentazione della risposta.

Soluzione (1) L'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ delle soluzioni dell'equazione data coincide ovviamente con il luogo di zeri della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞

$$f(x, y, z) = e^z + y \sin z + y^2 - 2y - x^2$$

la quale ha gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = (-2x, \sin z + 2y - 2, e^z + y \cos z) .$$

Sia $p \in S$ il punto $p = (0, 1, 0) = (p_x, p_y, p_z)$; osserviamo che B è la palla di centro $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ e raggio δ. Poiché $\nabla f(p) = (0, 0, 2)$, cioè $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, pel Teorema del Dini abbiamo che esiste un intorno U di (p_x, p_y) ed un intorno V di p_z ed un'unica funzione $\varphi : U \to V$ tale che $\varphi(p_x, p_y) = p_z$ e

$$S \cap (U \times V) = \{ (x, y, \varphi(x, y)) \ : \ (x, y) \in U \} ;$$

inoltre φ è nella stessa classe di continuità di f. Infine U è un aperto che contiene (p_x, p_y) quindi contiene anche B a patto di scegliere $\delta > 0$ abbastanza piccolo.

(2) Prendiamo $\xi^0 = (0, 1)$, osserviamo che $\xi^0 = (p_x, p_y) \in B \subseteq U$. Ricordiamo che il Teorema del Dini fornisce un'espressione esplicita per le derivate parziali della funzione implicita; nel nostro caso le seguenti valgono per $(x, y) \in U$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\nabla\varphi(\xi^0) = \left(-\frac{0}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (0, 0),$$

ossia che ξ^0 è un punto stazionario per φ. Calcolando le derivate successive si trova la matrice hessiana

$$H_\varphi(\xi^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che è indefinita perché ha un autovalore negativo ed uno positivo; quindi ξ^0 è un punto di sella per φ.

Foglio 9

Esercizio 3

Stabilire l'esistenza di punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2}$$

sull'insieme $D = \left\{ (x, y) \ : \ x \neq 0, x^2 + (y - 2)^2 \leq 1 \right\}$ e nel caso determinarli.

Soluzione L'insieme D è un disco chiuso con centro $(0, 2)$ e raggio 1 privato del diametro verticale. Dalla equazione ricaviamo in particolare che D è contenuto in un quadrato:

$$x^2, (y-2)^2 \leq 1 \iff |x|, |y - 2| \leq 1 \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} .$$

Il gradiente della funzione

$$\nabla f = \left(-\frac{2y}{x^3}, \frac{1}{x^2}\right)$$

non si annulla mai sulla parte interna di D, quindi se f ha massimi e minimi su D, questi si trovano sulla frontiera.

Osserviamo che $f(x, y) \to +\infty$ per $(x, y) \to (0, y_0)$, perché

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{y}{x^2} = y_0 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Applicando il Teorema di Lagrange otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -\frac{2y}{x^3} = 2\lambda x \\ \frac{1}{x^2} = 2\lambda(y - 2) \\ x^2 + (y - 2)^2 = 1, x \neq 0 \end{cases}$$

La prima equazione implica $\lambda \neq 0$ perché $x, y \neq 0$ in D. Dividendo la prima per la seconda $1/(y-2) = \lambda x^2$ otteniamo

$$\frac{\lambda x}{\lambda x^2} = -\frac{2y}{x^3}(y-2) \iff x^2 = -2y^2 + 4y,$$

da cui segue in particolare $y \in [1, 2]$. Sostituendo l'equazione appena trovata nella definente

$$x^2 + (y-2)^2 = -y^2 + 4 = 1 \iff y = \pm\sqrt{3},$$

ma avevamo già visto che $y > 0$ quindi l'unica possibile soluzione è $y_0 = \sqrt{3}$.

Infine, essendo $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{4y - 2y^2}$ abbiamo le ascisse dei punti critici $p_0 = (x_0, y_0)$ e $p_1 = (x_1, y_0)$ che sono

$$x_{0,1} = \pm\sqrt{4\sqrt{3} - 6}.$$

In entrambi casi il valore del moltiplicatore è lo stesso:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2(4\sqrt{3} - 6)(\sqrt{3} - 2)}.$$

Siccome i punti $(x_{0,1}, y_0, \lambda_0)$ sono stazionari liberi per L, abbiamo che $(x_{0,1}, y_0)$ sono stazionari vincolati per f; e sono di minimo per l'argomentazione precedente.

Esercizio (dal compito del 04/07/05)

Al variare di $a, b, c > 0$ si determinino il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = \sin(xyz),$$

sull'insieme

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \right\}.$$

Soluzione Poiché M ha parte interna vuota in $\mathbb{R}^3$, applichiamo subito il metodo di Lagrange. M è il luogo di zeri della funzione

$$g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1, \quad \nabla g = 2(ax, by, cz).$$

Studiamo l'immagine di C per la funzione $h(x, y, z) = xyz$, per poi valutare come si comporta $f = \sin h$. Abbiamo $\nabla h = (yz, xz, xy)$ ed imponendo $\nabla h = \lambda \nabla g$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} yz = 2\lambda ax \\ xz = 2\lambda by \\ xy = 2\lambda cz \\ ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \end{cases}.$$

Distinguiamo i casi. Se $\lambda = 0$ le prime tre equazioni $yz = xz = xy = 0$ implicano che si annulli una coppia di componenti x, y, z (e l'altra no); sostituendo nella quarta equazione otteniamo i sei punti

$$p_{1,2} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0\right), \quad q_{1,2} = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{b}}, 0\right), \quad \left(0, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{c}}\right),$$

sui quali $h = 0 \implies f = 0$.

Se invece $\lambda \neq 0$ possiamo moltiplicare le equazioni

$$\begin{cases} ax = \frac{yz}{2\lambda} \\ by = \frac{xz}{2\lambda} \\ cz = \frac{xy}{2\lambda} \end{cases}$$

rispettivamente per x, y, z $(\star)$ e sommarle ottenendo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{3}{2}\frac{xyz}{\lambda} \iff h(x,y,z) = \frac{2}{3}\lambda.$$

Sostituendo nelle precedenti $(\star)$ otteniamo

$$ax^2 = by^2 = cz^2 = \frac{1}{3},$$

da cui gli otto punti

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3a}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3b}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3c}}\right),$$

i quali sono di massimo o di minimo per h su M a seconda della parità dei segni:

$$\min_M h = -\frac{1}{\sqrt{27abc}}, \quad \max_M h = \frac{1}{\sqrt{27abc}}.$$

Siccome M è connesso, la sua immagine tramite h è il connesso

$$I := h(M) = \left[-\frac{1}{\sqrt{27abc}}, \max_M h = \frac{1}{\sqrt{27abc}}\right],$$

da cui deduciamo che

$$f(M) = \sin(h(M)) = \sin I.$$

Quindi, in conclusione, se $1/\sqrt{27abc} < \pi/2$ allora

$$-\min_M f = \max_M f = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{27abc}}\right),$$

mentre se $1/\sqrt{27abc} \geq \pi/2$ allora

$$-\min_M f = \max_M f = 1.$$

Esercizio 5

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$, $w \in S \cap \Omega$ un punto k-regolare di $S \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$ e sia $g = (g_1, \ldots, g_{n-k}) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n-k})$ una funzione definente S intorno a w. Provare che w è un punto critico di f ristretta a S se e solo se il rango della seguente matrice non è massimo

$$A = \begin{pmatrix} \nabla f(w) \\ \nabla g_1(w) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-k}(w) \end{pmatrix}.$$

Soluzione Intorno al punto w, S è una k-superficie regolare; in particolare

$$Dg(w) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(w) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-k}(w) \end{pmatrix}$$

ha rango massimo $n-k$. Allora la matrice A ha rango massimo $(n-k+1)$ se e soltanto se $\nabla f(w)$ è linearmente indipendente dai $\nabla g_i(w)$. Quindi, se esiste $(0, \mathbf{0}) \neq (\mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-k}$ tale che $(\mu, \lambda) \cdot A = \mu \nabla f(w) + \lambda Dg(w) = \mathbf{0}$ allora dev'essere $\mu \neq 0$, altrimenti avremmo una combinazione lineare delle righe di $Dg(w)$, contro il fatto che ha rango massimo.

Per il Teorema di Lagrange il punto w è critico per f su S se e soltanto se

$$\begin{cases} \nabla f(w) = \lambda Dg(w) \\ g(w) = 0 \end{cases}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$, e per quanto appena visto la prima equazione equivale a dire che $\nabla f(w)$ è linearmente indipendente dalle righe di $Dg(w)$.

Esercizio 10

Consideriamo l'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ dei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

1. Provare che C è una curva regolare compatta.
2. Determinare i punti critici di f su C ed i corrispettivi moltiplicatori di Lagrange.
3. Determinare il massimo ed il minimo di $f(x, y, z) = xy$ su C.

Soluzione (1) La prima delle equazioni che definiscono C è quella di un piano, la seconda è quella della sfera S^2. Sostituendo la prima $y = 1 - x$ nella seconda otteniamo che C è il luogo di zeri della funzione

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 2x + z^2 \\ x + y - 1 \end{pmatrix},$$

che ha matrice jacobiana

$$Dg = \begin{pmatrix} 4x - 2 & 0 & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il minore formato dalle ultime due colonne è singolare se e solo se $z = 0$; nel qual caso il minore formato dalle prime due colonne è invertibile. Infatti sarebbe singolare solo per $x = 1/2$, in tal caso l'equazione del piano implicherebbe $y = 1/2$, ma $(1/2, 1/2, 0) \notin C$.

Ne deduciamo, dal Teorema del Dini, che C è una curva regolare. C è un insieme compatto in quanto chiuso (luogo di zeri di una funzione continua) e limitato ($C \subseteq S^2$).

Risolviamo i punti (2) e (3). C è il luogo di zeri della funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y - 1 \end{pmatrix}, \quad Dh = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando il metodo di Lagrange abbiamo il sistema $\nabla f = (\lambda, \mu) \cdot Dh$, ovvero

$$\begin{cases} y = 2\lambda x + \mu \\ x = 2\lambda y + \mu \\ 0 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi. Se $\lambda = 0$ le prime due equazioni forniscono $x = y = \mu$, che insieme all'equazione del piano fornisce $\mu = 1/2$ e infine dall'equazione della sfera ricaviamo $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Abbiamo ottenuto i due punti

$$p_{1,2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (\lambda, \mu) = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad f(p_1) = f(p_2) = \frac{1}{4}.$$

Se invece $\lambda \neq 0$ dalla terza equazione deduciamo $z = 0$, e sostituendo l'equazione del piano $y = 1 - x$ in quella della sfera $x^2 + y^2 = 1$ ricaviamo

$$2x(x-1) = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \implies y = 0 \\ x = 0 \implies y = 1 \end{cases}.$$

Abbiamo così trovato altri due punti

$$q_1 = (1, 0, 0), \quad q_2 = (0, 1, 0), \quad (\lambda, \mu) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \quad f(q_1) = f(q_2) = 0.$$

In conclusione: q_1 e q_2 sono di minimo per f su C, mentre p_1 e p_2 sono di massimo per f su C.