

Nome e cognome: _____

Classe: _____

Liceo Scientifico “A. Vallisneri”
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (15 punti). Risolvere in \mathbb{R} i seguenti sistemi di equazioni e scrivere il loro insieme delle soluzioni:

(a)
$$\begin{cases} (2-x)^2 - (x-1)(x+1) = 5y + 24 \\ (x-1)^3 + 4y - 2 = x^2(x-3) + 4y - 6 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + \frac{y}{\sqrt{2}-1} = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 2(x-y) = 3(x-y+1) \\ \frac{1}{6}x - 2 - \frac{x-y}{3} = \frac{1}{6}y \end{cases}$$

Esercizio 2 (5 punti). Risolvere in \mathbb{R} il seguente sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + z = 13 \\ x - y - z = 13 \end{cases}$$

Esercizio 3 (10 punti). Risolvere in \mathbb{R} il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2 - 4y^2} - \frac{1}{2y - x} = \frac{2}{x - 2y} \\ 8x - 4y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 4 (10 punti). Discutere le soluzioni della seguente famiglia di sistemi di equazioni al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (2-a)x - y = 1 \\ 3x - (a+2)y = 3 \end{cases}.$$

In ciascun caso si scriva l'insieme delle soluzioni del sistema.

Esercizio 5 (10 punti). Si consideri un rettangolo $ABCD$ i cui lati misurano $\overline{AB} = 3\ell$ e $\overline{BC} = \ell$, dove $\ell > 0$. Si prolunghi AB dalla parte di B .

- (a) Determinare la posizione di un punto P sul prolungamento di AB e di un punto Q sul lato BC in modo che l'area del triangolo APQ superi di $\frac{1}{2}\ell^2$ l'area del triangolo BQP e che l'area del trapezio $AQCD$ sia il triplo dell'area del triangolo BQP .
- (b) In corrispondenza della soluzione del punto precedente, disegnare la figura corrispondente e calcolare l'area del pentagono $APQCD$.

Esercizio 6 (10 punti). Tre fratelli comprano una vigna per 100 ghinee. Il più giovane dice che potrebbe pagarla tutta da solo se il secondo gli desse metà di quanto ha; il secondo dice che se il più vecchio gli desse soltanto un terzo del suo denaro, potrebbe comprare la vigna da solo; da ultimo, il più vecchio chiede solo un quarto del denaro del più giovane per pagare la vigna da solo. Quanto denaro ha ognuno?

[Tratto dal testo *Algebra di Eulero*]

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: _____