

Nome e cognome: \_\_\_\_\_

Classe: \_\_\_\_\_

Liceo Scientifico “A. Vallisneri”  
Prova scritta di matematica

**Esercizio 1 (20 punti).** Si consideri il triangolo individuato dalle rette di equazione

$$y = -x, \quad y = 2x - 6, \quad \text{e} \quad x + 2y - 3 = 0.$$

- (a) Rappresentare il triangolo e determinare le coordinate dei suoi vertici.
- (b) Calcolare perimetro e area del triangolo.
- (c) Rappresentare e descrivere la regione di piano individuata dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y > -x \\ y > 2x - 6 \\ x + 2y - 3 > 0 \end{cases}.$$

**Esercizio 2 (15 punti + 3).** Si consideri il triangolo di vertici  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 2)$  e  $C = (0, 6)$ .

- (a) Determinare le coordinate dei punti medi dei lati.
- (b) Determinare le equazioni delle rette che contengono le tre altezze e le coordinate dell'ortocentro del triangolo.
- (c) Determinare i piedi delle tre altezze.
- (3) Dimostrare per via analitica che i punti medi dei lati e i piedi delle altezze appartengono ad un'unica circonferenza (detta *circonferenza di Feuerbach*).

**Esercizio 3 (20 punti).** Il quadrilatero  $ABCD$  è un trapezio isoscele. È noto che gli estremi della base maggiore sono  $A = (0, 0)$  e  $B = (8, 0)$ , che l'altezza del trapezio misura 4 e che la diagonale  $AC$  è contenuta nella retta di equazione  $4x - 5y = 0$ .

- (a) Dopo aver rappresentato gli elementi noti, determinare le coordinate di tutti i vertici del trapezio.
- (b) Dimostrare che il trapezio è circoscrivibile ad una circonferenza.
- (c) Un volta individuate le coordinate del centro  $O$  e la misura del raggio della circonferenza inscritta, scrivere l'equazione cartesiana di tale circonferenza.

**Esercizio 4 (15 punti).** Si consideri la famiglia di rette di equazione

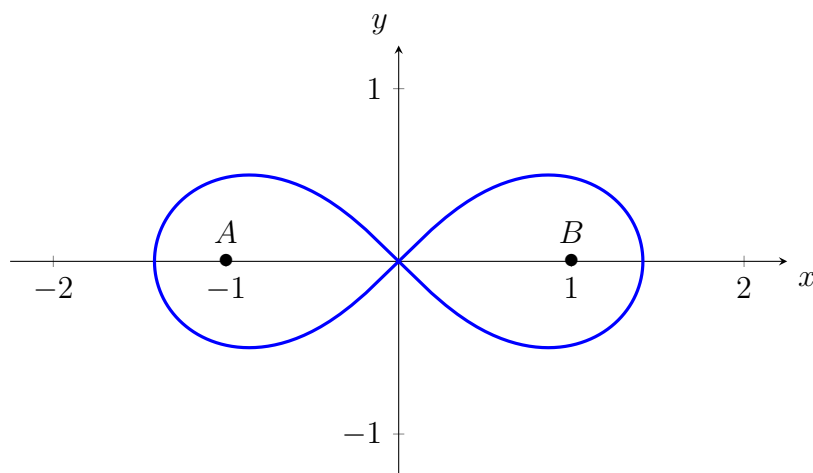
$$(k + 1)x - (k + 2)y + 2 = 0,$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Determinare per quali valori di  $k$  la retta soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) passa per il punto  $P = (-2, 4)$ ;
- (b) passa per il punto  $Q = (2, 2)$ ;
- (c) è parallela all'asse delle ordinate;
- (d) è perpendicolare all'asse delle ordinate;
- (e) è parallela alla retta di equazione  $4x + 2y - 3 = 0$ ;
- (f) intersechi l'asse delle ascisse in un punto di ascissa negativa e l'asse delle ordinate in un punto di ordinata positiva.

**Esercizio 5 (5 punti).** Una *lemniscata* è una curva piana che ha la forma di un otto orizzontale. Una delle più note è la cosiddetta lemniscata di Bernoulli (vedi figura sottostante), che è definita come luogo geometrico nel modo seguente: dati due punti  $A$  e  $B$ , la lemniscata di Bernoulli è l'insieme di punti tali che il prodotto delle distanze da  $A$  e da  $B$  è pari a metà della distanza fra  $A$  e  $B$ .

- (a) Siano  $A = (-1, 0)$  e  $B = (1, 0)$ , come in figura. Dimostrare che l'equazione cartesiana della lemniscata di Bernoulli è  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ .
- (b) Determinare i punti di intersezione della curva con l'asse delle ascisse.



Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5

Voto: \_\_\_\_\_