

CORREZIONE ESERCIZI DEL FOGLIO 4

Esercizio 1. Sia W il seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 :

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Al variare del parametro k , trovare la dimensione e una base del sottospazio ortogonale W^\perp .

Soluzione

$$\dim W^\perp = 3 - \dim W, \quad 2 \leq \dim W \leq 3$$

↑
i primi due vettori sono
linearmente indipendenti

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 6k - 4 = 6(k-1)$$

Se $k=1$, allora le colonne sono lin. DIPENDENTI $\leadsto \dim W = 2$

Se $k \neq 1$, allora le colonne sono lin. INDIPENDENTI $\leadsto \dim W = 3$

$\leadsto W = \mathbb{R}^3$

Quindi

$$\dim W^\perp = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k=1 \\ 0 & , \text{ se } k \neq 1 \end{cases} \longrightarrow \text{la base \u00e8 (convenzionalmente) data dall'insieme vuoto}$$

$$k=1) \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ generico} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2y - z$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = x + 3z$$

$$W^\perp \text{ \u00e8 dato dal sistema } \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = -3z = -6y \end{cases}$$

$$\text{quindi } W^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Altra strada:
(per $k=1$)

Trova un'equazione cartesiana per W

si ottiene imponendo che il rango di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 3 & z \end{pmatrix}$$

sia 0 (Gauss oppure $\det = 0$)

svolgendo i calcoli, si trova

$$-6x + y + 2z = 0, \text{ cioè}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -6x + y + 2z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

! \rightarrow W è il sottospazio dei vettori di \mathbb{R}^3 ortogonali a $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$= \left(\text{Span} \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right)^\perp$$

Poiché $U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, si ha $W = U^\perp$, quindi

$$W^\perp = (U^\perp)^\perp = U.$$

Esercizio 2. Trovare una base ortonormale del seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 4y + 2z = 0 \right\}.$$

Soluzione

1. Troviamo una base di W .

$$3x = 4y - 2z \quad \leadsto \quad x = \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z$$

Il generico vettore di W è dato da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4/3 y - 2/3 z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= y \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$W = \text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right) = \text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_2} \right).$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

2. la ortormalizziamo con Gram-Schmidt.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \langle u_1, u_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-8}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 32/25 \\ 24/25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18/25 \\ 24/25 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base ortogonale di W . Una base ortonormale di W è data da $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\}$, $\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{15\sqrt{29}} \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 75 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 :

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare lo spazio ortogonale W^\perp e trovarne una base. **ORTONORMALE**

Soluzione

Risultato: W^\perp è il sottospazio di \mathbb{R}^4 descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_4 = -2x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_2 - x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$W^\perp = \text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_2} \right).$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}_{2/3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \langle v_2, \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle v_2, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2$$

$$\left[\text{OSS. } \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle v_2, v_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{3} v_1 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \right]$$

$$\|u_2\|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} (4 + 9 + 4 + 16) = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Una base ortonormale di } W^\perp \text{ è data da } \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11/3}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 4. Trovare basi ortonormali di autovettori delle seguenti matrici simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione (matrice A)

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 4-t & 2 & 0 \\ 2 & 7-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t) \det \begin{pmatrix} 4-t & 2 \\ 2 & 7-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t) [(4-t)(7-t) - 4] \\ &= (1-t) (t^2 - 11t + 24) \\ &= (1-t) (t-8)(t-3) \leadsto \text{Autovaleurs: } 1, 3, 8 \end{aligned}$$

Autovettori:

$$\lambda = 1)$$

$$A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\lambda = 3)$$

$$A - \lambda I = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

$$V_3 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 8)$$

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$V_8 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Una base di \mathbb{R}^3 di autovettori per A è data da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ortogonali
($-2+2=0$)

Si vede "a mano" che questi sono tra loro ortogonali.

Una base ORTONORMALE di \mathbb{R}^3 di autovettori per A è data da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un Teorema non visto* afferma che, per una matrice simmetrica, gli autovettori relativi ad autovalori **DISTINTI** sono ortogonali:
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori, $v_1 \in V_{\lambda_1}, v_2 \in V_{\lambda_2} \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

*In realtà è una conseguenza diretta del Teorema Spettrale

Soluzione (matrice B) [TUTORATO DEL 30/04/25]

$$P_B(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (3-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = (3-t)((2-t)^2 - 1) = (3-t)(1-t)(3-t)$$

\leadsto Autovalori 1, 3
 moltep. 1, 2

Autovettori:

$\lambda = 1$

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$\lambda = 3$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ y, z \text{ libere} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad \text{Notare che } \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0.$$

\leadsto Come prima, una base ortogonale di \mathbb{R}^3 di autovettori per B è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una base ORTONORMALE è quindi data da: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizi "per casa" (Tratti dallo scritto del 02/03/24)

Esercizio 1. Consideriamo in \mathbb{R}^3 il sottospazio V generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il sottospazio W generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Sia V^\perp il sottospazio ortogonale di V per il prodotto scalare standard (stessa notazione per W).

- (1) Calcolare la dimensione del sottospazio $V^\perp \cap W$.
- (2) Calcolare la dimensione del sottospazio $V^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $v \mapsto Av$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Esiste una base di \mathbb{R}^3 dove la matrice di ϕ diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

Se sì, trovare tale base, se no, scrivere NO nel riquadro e motivare la risposta sul foglio.

- (2) Stessa domanda con la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$