



Dipartimento
di Matematica
Università di Pisa

APPUNTI DEL CORSO DI **ANALISI MATEMATICA I**

A cura di Chiara Di Sano
c.disano1@studenti.unipi.it

Rielaborazione delle lezioni dei prof.
M. Novaga
C. Carminati
A.A. 2021-2022

Concetti chiave

- Insiemi
- funzioni tra insiemi

In questa lezione

- linguaggio: connettivi logici, insiemi e operazioni tra insiemi
- funzioni

Definizione Un **insieme** è una collezione di elementi su cui è possibile fare delle operazioni ($\cup, \cap, \setminus, \dots$) ed è possibile dire sempre se $x \in A$.

elemento¹ \hookrightarrow insieme
 degli insiemi

Ci vuole attenzione per evitare paradossi della teoria degli insiemi

ES L'insieme di tutti gli insiemi non è un insieme

Connettivi logici $P(x)$, $P(x, y, \dots)$ sono affermazioni che riguardano gli elementi di un insieme e si chiamano **predicati**.

ES x è pari, $x \leq y$

Possono essere V o F a seconda dei valori x, y, z, \dots

Quando le variabili hanno un valore definito oppure sono quantificate

(\forall, \exists) si parla di **proposizione**.

ES 2 è pari, $2 > 3$, $\forall x \in \mathbb{N}$ x è pari

V F F

Quantificatori $\forall \equiv$ per ogni, $\exists \equiv$ esiste, $\exists! \equiv$ esiste ed è unico

I connettivi logici servono a costruire predicati complessi a partire da predicati semplici. Essi sono:

- \vee o $P(x) \vee Q(x)$
- \wedge e $P(x) \wedge Q(x)$

- \neg non $\neg P(x)$

Osservazione:

- $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
 - $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
 - $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- } distributive
- $\neg(\forall x P(x)) = \exists x \neg P(x)$
 - $\neg(\exists x P(x)) = \forall x \neg P(x)$

Nelle dimostrazioni per assurdo nego la tesi.

Altri connettivi sono:

- \Rightarrow \equiv implica $P(x) \Rightarrow Q(x)$
- \Leftrightarrow \equiv se e solo se $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

Notazioni: $\emptyset \equiv$ insieme vuoto, $A \subseteq B : \{x \in B \mid P(x)\} = A$, $A \supseteq B$
 \downarrow A è contenuto in $B = A$ sottoinsieme di B \downarrow A contiene B

CLASSI E INSIEMI

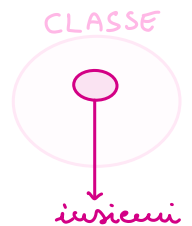
Paradosso di Russell: ad es. l'insieme delle tazze da tè
 $\{A \text{ insieme} \mid A \notin A\} = B$ mi chiedo $B \in B$?

- se $B \in B$ per definizione vale $B \notin B$, per la proprietà che caratterizza B
- allora $B \notin B$, ma allora sempre per definizione $B \in B$

Quindi $B \in B$ è indecidibile $\Rightarrow B$ non è un insieme.

Troviamo una via di uscita mettendo delle condizioni:

ES l'insieme di tutti gli insiemi è una classe



Nota Gli elementi di un insieme si esprimono attraverso una definizione assiomatica dei predicati.

Operazioni le operazioni servono per passare da insiemi ad altri insiemi

- $\cap \equiv$ intersezione $A \cap B = \{x \text{ t.c. } x \in A \wedge x \in B\}$ (ricorda \wedge)
- $\cup \equiv$ unione $A \cup B = \{x \text{ t.c. } x \in A \vee x \in B\}$ (ricorda \vee)
- $\setminus \equiv$ differenza $A \setminus B = \{x \text{ t.c. } x \in A \wedge x \notin B\}$

- $\Delta \equiv$ differenza simmetrica $A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$
 $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $A \times B \equiv$ prodotto cartesiano $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Proprietà

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$
- $A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$
- Se si consideriamo solo sottoinsiemi di U si indica con
 $A^c = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \neg(x \in A)\}$ (ricorda !)
 \hookrightarrow complementare di A
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ } distributive
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

INSIEMI NUMERICI

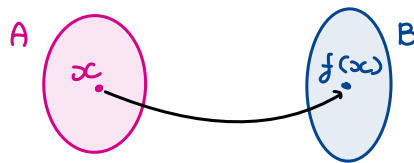
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ definisco \mathbb{N} assiomaticamente tramite Peano \hookrightarrow numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ numeri interi
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ numeri razionali
 $\mathbb{N} \hookrightarrow$ salto logico, ci sono dei buchi
- $\mathbb{R} =$ numeri reali
- $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$ numeri complessi \hookrightarrow unità immaginaria

FUNZIONI TRA INSIEMI

$$f: A \rightarrow B$$

dominio \hookrightarrow codominio

f è una mappa che associa ad ogni $x \in A$ un unico $f(x) \in B$



- $f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\} \subseteq B \equiv \text{Im}(f)$
- $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B \equiv$ grafico di f
 $\Gamma \subseteq A \times B$ t.c. $\forall x \in A \exists ! y \in B$ t.c. $(x, y) \in \Gamma \Rightarrow \exists f$ t.c. $\Gamma = \Gamma_f$
- f è **iniettiva** $f: A \rightarrow B$ se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ NO!

- f è **surgettiva** se $f(A) = B$
- f è **bigettiva** se è iniettiva e suriettiva
- $C \subseteq A$ $f: A \rightarrow B$ $f|_C: C \rightarrow B$
↳ restrizione di f a C
 $x \rightarrow f(x)$

Osservazione

- $f: A \rightarrow f(A) \subseteq B$ f è sempre surgettiva
- f bigettiva $f: A \rightarrow B$ è invertibile cioè $\forall y \in B \exists! x \in A$ t.c. $f(x) = y$
 $f^{-1}: B \rightarrow A$ f^{-1} è l'**inversa** di f
 $f^{-1}(y)$

FUNZIONE COMPOSTA

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C \quad g \circ f: A \rightarrow C \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$\text{se } f \text{ è invertibile } f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

ASSIOMA DELLA SCELTA

A insieme $I \equiv$ insieme di indici $A_i \subseteq A \quad \forall i \in I$

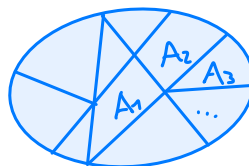
famiglia di sottoinsiemi indicizzati di A

$\{A_i\}_{i \in I}$ si dice **partizione** di A se:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_i A_i = A$$

$$\Rightarrow \exists B \subseteq A \text{ t.c. } \textcircled{\text{A.C.}} B \cap A_i = x_i \quad \forall i$$



Oss: $f: A \rightarrow I$ è surgettiva definire la partizione di A .

$P = \{ \{f^{-1}(i)\}_{i \in I} \}$ dove $f^{-1}(i) = \{x \in A : f(x) = i\}$. Viceversa, data una partizione c'è sempre una funzione $f(x) = i$ $P \xleftrightarrow{\text{biun.}} \{f \text{ surg}\}$
↳ $P = \{A_i\}_i$

Riformulazione $\forall f: A \rightarrow B$ surgett. $\exists g: B \rightarrow A$ iniett. t.c. $f \circ g = \text{id}_B$.

Vale anche il viceversa: se $f: A \rightarrow B$ è iniett. $\Rightarrow \exists g: B \rightarrow A$ surg. t.c. $g \circ f = \text{id}_A$

Esercizio 1:

$$\exists f: A \rightarrow B \text{ iniett. } \wedge \exists g: B \rightarrow A \text{ iniett.}$$

equiv.

$$\exists g: B \rightarrow A \text{ suriett. } \wedge \exists f: A \rightarrow B \text{ suriett.}$$

equiv.

$$\exists f: A \rightarrow B \text{ iniett. } \exists h: A \rightarrow B \text{ suriett.}$$

Es 2: Teorema di Bernstein

$$\exists f: A \rightarrow B \text{ iniett. } \wedge \exists g: B \rightarrow A \text{ iniett.}$$

$$\Leftrightarrow \exists h: A \rightarrow B \text{ big. (Dimostrarlo)}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

INSIEMI DELLE PARTI DI A $\mathcal{P}(A) = \{ B : B \subseteq A \}$

È NATURALMENTE DEFINITA $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ INIETTIVA

Axiom of choice $f(x) = \{x\} \quad \forall x \in A$

Viceversa usando AC, esiste una funzione di scelta

$f : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ surgettiva t.c. $f(B) \in B \quad \forall B \subseteq A$

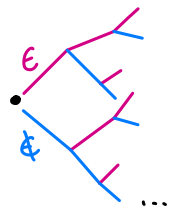
OSS In generale $\mathcal{P}(A)$ è più grande di A.

Se A ha n elementi. Qual'è $|\mathcal{P}(A)|$?

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n > n$$

Spiegazione 1:

Ne esistono altre



∀ elemento scelgo $x \in \epsilon$ o δ

Relazioni su un insieme A

$R(x, y)$ PREDICATO $x, y \in A$

① Relazioni di equivalenza:

○ $R(x, x) \quad \forall x$ Riflessiva

○ $R(x, y) \Rightarrow R(y, x) \quad \forall x, y$ Simmetrica

○ $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z) \quad \forall x, y, z$ Transitiva

R rel. d'equiv. si scrive $x \sim y \Leftrightarrow R(x, y) \Leftrightarrow R(y, x)$
 $y \sim x$

$\forall x$ è def $[x] = \{ y : x \sim y \} \subseteq A$

CLASSE DI EQUIVALENZA

$\{[x]\}_{x \in A}$ è una PARTIZIONE di A

$\mathbb{L} A / \sim$ INSIEME QUOZIENTE di A

② Relazioni d'ordine

○ $R(x, x) \quad \forall x$ Riflessiva

○ $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$ Antisimmetrica

○ $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow R(x, x)$ Transitiva

Es. $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$

$$R(B, C) = B \subseteq C \quad B, C \in \mathcal{P}(A)$$

La relazione d'ordine è TOTALE se $\forall x, y \quad R(x, y) \vee R(y, x)$.

Altrimenti è PARZIALE.

Si indica $x \leq y$ la relazione $R(x, y)$.

$B \subseteq A$ si dice una CATENA se $R|_B$ è totale, cioè se $\forall x, y \in B \quad x \leq y \vee y \leq x$.

Lemma di Zorn (Equivalente di AC)

[Def $x \in (A, \leq)$ è MASSIMALE se $x \leq y \Rightarrow x = y$
Def x è un MAGGIORANTE per $B \subseteq A$ se $y \leq x \quad \forall y \in B$]

Se $A \neq \emptyset$ e $\forall B \subseteq A$ catena $\exists x_B$ maggiorante per $B \Rightarrow \exists \bar{x}$ massimale in A .

Def (A, \leq) Tot. ord. è BEN ORDINATO se $\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset$

\exists un minimo, cioè $\exists x \in B$ t.c. $x \leq y \quad \forall y \in B$

Es \mathbb{N} è ben ord, ma $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ no.

Principio di induzione su \mathbb{N}

Dato $P(x)$ predicato, $P(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow P(0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

UTILITÀ: È spesso più facile dimostrare $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

OSS $P(n) \quad \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow P(n_0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \quad \forall n \geq n_0$

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\underbrace{(1+x)^n}_{P(n)} \geq 1 + nx \quad \forall n \quad x > -1$$

• $P(0): (1+x)^0 = 1 \geq 1$

hp ind.

• Suppongo che valga $(1+x)^n \geq 1 + nx$ e guardo $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq$
 $\geq (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \quad \hat{=} \quad P(n+1)$

Cardinalità ($|A|$, $\#A$, $c(A)$)

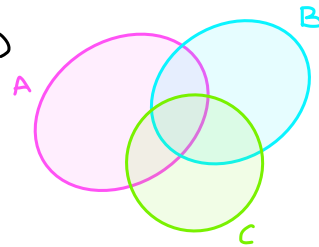
A finito, $|A|$ = numero di elementi

$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ più complicato (FORMULA DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



In generale dati A, B

$|A| = |B|$ se $\exists f: A \rightarrow B$ bigettiva

$|A| \leq |B|$ se $\exists f: A \rightarrow B$ iniettiva o equival. se $\exists f: B \rightarrow A$ surgettiva

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$ (Teor. di Bernstein)

$R(A, B): |A| \leq |B|$ è una relazione d'ordine.

$\tilde{R}(A, B): |A| = |B|$ è una relazione d'equivalenza.

$|A|$ è identif. con la classe di eq. di A per \tilde{R} .

Prop R è un buon ordinamento

Def A infinito è numerabile se $|A| = |\mathbb{N}|$, cioè possiamo scrivere $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Oss $|\mathbb{N}|$ è la cardinalità infinita più piccola

Teo A infinito $\Rightarrow \exists B \subseteq A$ numerabile

Dim $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ funzione di scelta $f(B) \in B; \forall B \subseteq A$

Scelgo $a_0 \in A$ e dati $\{a_0, \dots, a_n\}$ posso $a_{n+1} = f(A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}) \in A \Rightarrow B = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
NUMERABILE

Oss $\forall A \quad |A| \leq \mathcal{P}(A)$

Teo (Cantor) $|A| < \mathcal{P}(A)$ cioè $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

Cor $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è infinito NON numerabile

Dim. Per assurdo $\exists f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ bigettiva.

$B = \{x: x \notin f(x)\} \subseteq A$ se c'è la big. è un insieme che ha senso

$\bar{x}: \begin{cases} f^{-1}(B) \\ f(\bar{x}) \in B \end{cases}$ DOMANDA: $\bar{x} \in B$? \rightarrow NON SI PUÒ DIRE $\rightarrow \nexists f^{-1} \rightarrow$ ASSURDO \downarrow

□

PROBLEMI DI CONTEGGIO (CALCOLO COMBINATORIO)

$$I_n = \{k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n\} = \{1, \dots, n\}$$

- "Strutture" su insiemi finiti:
- operazioni booleane \cap \cup complementare ecc
 - Soluz. di problemi con una proprietà particolare
 - prodotti cartesiani
 - funzioni
 - $\mathcal{P}(X)$

PROBLEMI CLASSICI

$$|\mathcal{P}(\{a, b, c\})| = 8$$

- Problema dei compleanni

"Qual'è la probabilità che tra 100 persone ne esistano almeno due che compiono gli anni lo stesso giorno?" $\sim 1 - \frac{1}{3^{100}}$ (MOLTO ALTA)

- Quanti sono gli anagrammi della parola "CIAO" 24

- " " " " " " "BABBO" 20 $\{A, B\}$

- Quante sono le stringhe di 10 caratteri su un alfabeto binario? 2^{10}

- Quante sono le stringhe ... tali che il blocco AA non compare mai?

- Quante sono le funzioni tra $I_n \rightarrow I_n$: - quante iniettive?

- quante surgettive? (FACILE)

↓
- str. crescenti? (PIÙ COMPLICATO)

- deb. crescenti?

$$|\mathcal{P}(\{a, b, c\})| = 8$$

#0: \emptyset , #1: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, #2: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, #3: $\{a, b, c\}$

Notazione: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Es $\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ NB $0! = 1$

Esercizio $\sum_{j=1}^n j = ?$

$$X = \bigsqcup_{j=1}^f A_j \Rightarrow |X| = \sum_{j=1}^f |A_j|$$

$$X = \cup A_j$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

X è unione disgiunta degli A_j

A_j è una PARTIZIONE di X

OSS: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$|A \cup B \cup C| = ?$$

Se $\psi: X \rightarrow Y$ bigettiva allora $|X| = |Y|$

$$|X| = n \quad \mathcal{T} = \{A, B\} : A \subseteq B \subseteq X \} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$$

$$|\mathcal{T}| = ? \quad \text{soluz: } 3^n$$

$\downarrow \downarrow$
 $\mathcal{P}(X)$

dimostrare per induzione

creare una bigettione tra insiemi di stesso #

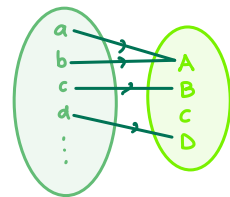
$$\psi: X \rightarrow Y$$

ψ manda una partizione su X

$$X = \bigsqcup_{y \in Y} \psi^{-1}(\{y\}) \quad |X| = \sum_{y \in Y} |\psi^{-1}(\{y\})|$$

$$|X| = 1 + 3 + 1 + 0$$

$$\underbrace{\psi^{-1}(B)}_{\text{controimmagine di } B} = \{x \in X : \psi(x) \in B\}$$



$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned}} \right\} \text{ induce una partizione su } \mathcal{P}(X)$$

EQUIPOTENZA $|X| = |Y|$

FIBRA COSTANTE Se $\psi: X \rightarrow Y$ e $\exists m \in \mathbb{N} : |\psi^{-1}(\{y\})| = m \Rightarrow |X| = m |Y|$

Strutture su insiemi finiti:

$$Y = Y_1 \times \dots \times Y_n = \{(y_1, \dots, y_n) : y_i \in Y_i\} \quad |Y| = |Y_1| \cdot \dots \cdot |Y_n|$$

Induzione $P(1)$ è vera $\pi: Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow Y_n$

$$\begin{aligned} &\text{fibra} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto y_n \\ &\uparrow \in Y_n \\ &|\pi^{-1}(y)| = |Y_1 \times \dots \times Y_{n-1}| = |Y_1| \cdot \dots \cdot |Y_n| = m \quad |Y| = m \quad |Y_m| = |Y_1| \cdot \dots \cdot |Y_n| \end{aligned}$$

X, Y insiemi finiti $\{f: I_m \rightarrow Y\} \xrightarrow{\sim} \underbrace{Y \times \dots \times Y}_{|X|=m}$

x esercizio: mostrare che è una bijezione

$$f \mapsto (f(1), \dots, f(n))$$

$$|\{f: I_m \rightarrow Y\}| = |Y|^m \quad (\text{in generale: } |\{f: X \rightarrow Y\}| = |Y|^{|X|})$$

ES: $\mathcal{P}(X) \leftrightarrow \{f: X \rightarrow \{0, 1\}\}$ mostrare che è una bijezione

$$A \mapsto X_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{A \subseteq X : |A| = k\}$$

05-10-2021 Setione 4 Prof. Novaga

INSIEMI NUMERICI

• $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $+$: addizione
• \cdot : moltiplicazione

- ELEMENTO NEUTRO ($a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$)

- COMMUTATIVE ($a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$)

- ASSOCIATIVE ($(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$)

- DISTRIBUTIVE ($a \cdot (b+c) = ab + ac$)

• $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

- GRUPPO (COMMUTATIVO) CON IL $+$

$$\forall x \exists (-x) \text{ t.c. } x + (-x) = 0$$

• $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ GRUPPO PER \cdot

\mathbb{Q} si dice CAMPO (o corpo commutativo)

Oss in \mathbb{Q} possiamo risolvere $ax+b=0$ $a, b \in \mathbb{Q}$ ma in generale non le equazioni di II grado.

ES
 $x^2 = 2$

NON HANNO SOL IN \mathbb{Q}

$$x^2 = -1$$



$$x^2 = 2 \quad x = ?$$

1

Se per assurdo $x = p/q$ $p/q \in \mathbb{N}$ posso supporre che p e q non abbiano

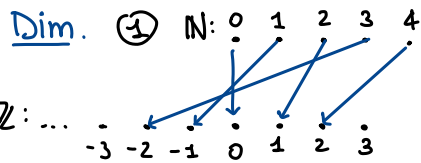
fattori comuni := $\text{C.p., q} = 1$. Sia $\frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \text{ è pari} \\ q \text{ è dispari} \end{cases}$

Ottengo $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q \text{ è PARI, assurdo}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \rightarrow \text{numerabile}$
 $\mathbb{Q} = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{numerabile}$ } $\begin{cases} \text{l'unione e il prodotto} \\ \text{cartesiani sono degli} \\ \text{invarianti} \end{cases}$

Prop. ① \mathbb{Z} è NUMERABILE

② \mathbb{Q} è NUMERABILE



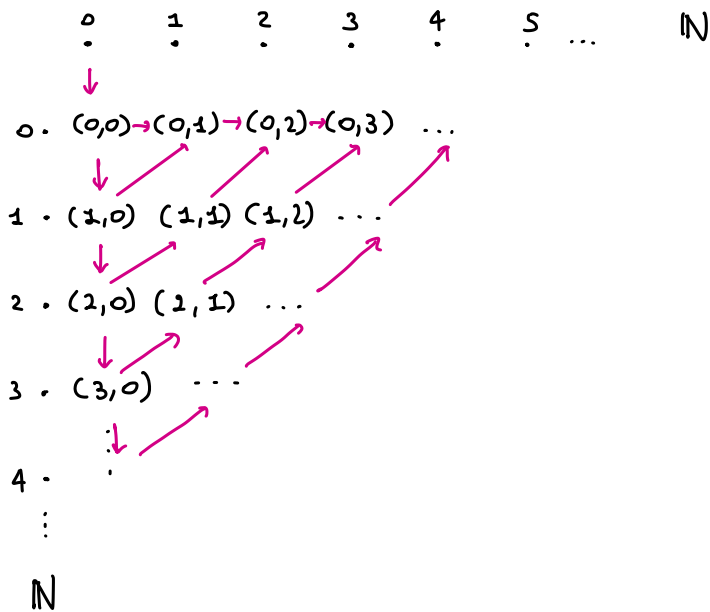
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ bigettiva

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ pari} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

② Basta vedere che $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è numerabile, infatti $\exists f(p, q) = \frac{p}{q}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ surgettiva, ma $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è come $\boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

PROCEDIMENTO DIAGONALE



□

Oss \mathbb{Q} è un CAMPO ORDINATO

$<$ è un ORDINE TOTALE

$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a+c < b+c \quad \forall c \\ ac \leq bc \quad \forall c \geq 0 \end{cases}$$

NUMERI REALI

I numeri reali sono un campo ordinato con una proprietà in più:

La COMPLETTEZZA \exists elemento separatore, \exists estremo superiore

Oss Questa non è la completezza degli spazi metrici

3 ELEMENTO SEPARATORE:

$\forall A, B$ sottoinsiemi del campo \mathbb{R} ,

- $x \leq y \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad \forall y \in B$

• $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \leq z \leq y \quad \forall x \in A \text{ e } \forall x \in B$$

Conseguenza:

Def. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, x è un **MAGGIORANTE** per A se $x \geq y \quad \forall y \in A$

Def. Il più piccolo dei maggioranti (se c'è) si chiama ESTREMO SUPERIORE di A [$\sup A \in \mathbb{R}$]

Formulazione equivalente:

$A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato (cioè \exists maggiorante)

$$\Rightarrow \exists \sup A \in \mathbb{R}$$

Teorema: I kali esistono e sono unici a meno di isomorfismo

Dim (Traccia):

bucco di \mathcal{Q} : due insieme, uno più piccolo dell'altro, due sunitte che partizionano \mathcal{Q}

Esistenza:

Def: Una sezione di Dedekind di \mathbb{Q} è una partizione di \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} = A \cup B$ t.c.

$$A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset \text{ e } x < y \quad \forall x \in A \text{ e } y \in B$$

sau serviette "disjuncte"

[illegible]

Prendo 2 sezioni per cui non c'è il max in A, cioè $\nexists x \in A \text{ t.c. } x \geq y \quad \forall y \in A$.
Voglio dare una struttura di campo ordinato su A e B
sezioni

Dato $q \in \mathbb{Q}$

la sezione $A_1 = \{x \in \mathbb{Q}, x < q\}$

$B_1 = \{x \in \mathbb{Q}, x > q\}$

corrisponde al numero razionale q

$\mathbb{Q} \xrightarrow{\text{big}} \text{sezioni}$

C'è una struttura di ordine

$(A, B) \leq (A', B') \Leftrightarrow A \subset A'$ ORDINE TOTALE

Usando l'inclusione si estendono le operazioni a tutte le sezioni

Il campo risultante è unione crescente di sezioni che è comunque una sezione

Unicità

Dim (Traccia): campo \mathbb{K}

• 1 è l'elemento neutro di $\cdot \rightarrow \exists \mathbb{N} \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \exists \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \Rightarrow \boxed{\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}}$ \uparrow si identifica con le sue sezioni

$x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R} \quad x = \underbrace{\bigcup}_{\text{sezione}} (A, B) \in \mathbb{R} \quad A = \{y \in \mathbb{Q} : y < x\}$

Questione di cardinalità

le semirette di \mathbb{Q} infinite non lineari a sinistra

Oss: $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = [0, 1]^{|\mathbb{N}|} \xrightarrow{\text{big}} \{f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\} \leftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 \hookrightarrow # del continuo

Dim. $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{big}} \{(A, B) \text{ sez. di Dedekind senza max. di } A\}$

\downarrow si immergono iniettivamente

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

\updownarrow
 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\Rightarrow |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Viceversa, cerco $g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2\}\} \rightarrow A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 2 \text{ se } n \in A, f(n) = 0 \text{ se } n \notin A$
 \hookrightarrow poiché sono in base 3, non metto 1 per avere l'iniettività

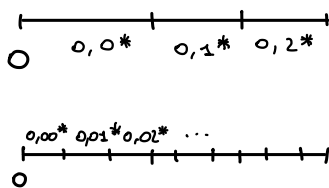
E data f definisco $g(f) = 0, f(1)f(2)f(3) \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$

0, 2002202...

$$0, f(1)f(2)f(3)\dots \in \mathbb{R}$$

lo leggo/definisco in base 3 cioè divido l'intervallo $(0,1)$ in 3 parti

$$0 \leq g(f) \leq 1$$



divido di nuovo in 3

in questo modo codifico e decodifico in base 3
→ ogni num. ottenuto con g lo "traduco" in \mathbb{R}

Si verifica che g è iniettiva $g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ perché non c'è ambiguità

$$|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

↳ Tutti i numeri tra 0 e 3 in cui non compare mai 1

$$\boxed{\text{Insieme di Cantor}} = \text{Im}(g) \quad \text{e} \quad |\text{Ins. di Cantor}| = |\text{Im } g|$$

07-10-21

Settimane 5

Prof. Carminati

$$\mathcal{P}(X) = \{ A \text{ t.c. } A \subseteq X \mid \text{se } |X| = n$$

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

$$\text{Calcolare } \mathcal{P}_k(X) \equiv \text{ sottoinsiemi di } X \text{ di } \#K = \{ A \subseteq X \mid |A| = k \}$$

$$\mathcal{P}(a,b,c) = \underbrace{\{\emptyset\}}_{\mathcal{P}_0(X)}, \underbrace{\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}}_{\mathcal{P}_1(X)}, \underbrace{\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}}_{\mathcal{P}_2(X)}, \underbrace{\{\{a,b,c\}\}}_{\mathcal{P}_3(X)}$$

$$C_{n,k} \equiv |\mathcal{P}_k(I_n)| \equiv \text{comb. semplici di ordine } k \text{ su un insieme di } n \text{ elementi}$$

Proprietà:

$$1) C_{n,0} = C_{0,n} = 1 \quad \text{riflessiva}$$

$$2) C_{n,k} = C_{n,n-k} \quad \text{simmetrica} \rightsquigarrow \mathcal{P}_k(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{n-k}(X) \quad \text{complementare}$$

$$3) \sum_{k=0}^n C_{n,k} = 2^n \quad \text{perché} \rightsquigarrow \mathcal{P}(X) = \bigsqcup_{0 \leq k \leq n} \mathcal{P}_k(X)$$

$$4) \text{ Prop. di ricorrenza } C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}$$

$$\mathcal{P}_k(I_n) = \{ A \in \mathcal{P}_k(I_n), n \notin A \} \cup \{ A \in \mathcal{P}_k(I_n), n \in A \}$$

$$|\mathcal{P}_k(I_n)| = |\mathcal{P}_k(I_{n-1})| + |\mathcal{P}_{k-1}(I_{n-1})|$$

$$\text{Proposizione} \quad C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Dice. La formula è vera per $k=0$ e per $k=n$ (i casi estremi).

Procedo per induzione su k per $0 < k < n$.

$P(1)$ è vera (x esercizio)

$$P(n-1) \Rightarrow P(n) : P(n) = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \forall k \text{ t.c. } 0 < k < n \text{ tesi}$$

Uso ④

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1} \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k-1)!}$$

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)k!(n-1-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

□

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se } k < 0 \vee k > n \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Esercizio

$\binom{n}{k}$ rispetta le proprietà ①, ②, ③, ④

1) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n, \forall k \in \mathbb{Z}$

3) $\sum \binom{n}{k} = 2^n$

4) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Formula del binomio di Newton

Come si esprime la n -esima potenza del coefficiente binomiale?

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Dimo. Per induzione su n

$P(1)$ è vera.

$$P(n-1) \Rightarrow P(n)$$

hp ind.

$$(A+B)^n = (A+B)(A+B)^{n-1} \stackrel{\uparrow}{=} (A+B) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k B^{n-1-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^{k+1} B^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k B^{n-k} =$$

faccio un cambio d'indice: $h = k+1$ e $h = k$

$$= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{h-1} A^h B^{n-h} + \sum_{h \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{h} A^h B^{n-h} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left[\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} \right] A^h B^{n-h} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left[\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} \right]}_{\text{prop. 4}} A^h B^{n-h} =$$

$$= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \binom{n}{h} A^h B^{n-h}$$

Nota: A, B devono stare in un anello commutativo. Se così non fosse avrei:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB$$

$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = AAA + AAB + ABA + ABB + BAA + BAB + BBA + BBB$$

• Se l'anello non è commutativo $(A+B)^n$ ha 2^n elementi:

$$(A+B)^n = \sum_{\varepsilon \in \Pi} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \text{ dove } \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \quad \Pi = \{A, B\}^n$$

• $\binom{n}{k}$ è il numero di addendi di (x) che contribuiscono ad $A^k B^{n-k}$

ES $(A+B+C)^5$ = somma su 3 addendi, se contiamo quale è il coeff. di $A^2 B^2$ coincide con gli anagrammi di BACCA.

Esercizio: $C_0 : \{ (A, B) \mid A \subseteq B \subseteq X \mid |Y| = n \}$

$$C_0 \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$$

$$C_0 = \bigsqcup_{B \in \mathcal{P}(X)} \{ (A, B) : A \subseteq B \}$$

$$|C_0| = \sum_{B \in X} |\{ (A, B) : A \subseteq B \}| = \sum_{B \subseteq X} 2^{|B|} = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \stackrel{\text{Binomio di Newton}}{=} (1+2)^n$$

Domande (es 1):

Quante sono $\{ f: I_n \rightarrow I_m \text{ t.c. } f \text{ è strettamente crescente} \}$? \rightarrow Sono in biiezione con $\mathcal{P}_n(I_m)$

f è strettamente crescente $\stackrel{\text{def}}{\iff} k_1 < k_2 \rightarrow f(k_1) < f(k_2) \quad \forall k_1, k_2$

$$\begin{array}{ccc} f & \{ f: I_n \rightarrow I_m \text{ t.c. } f \text{ è strettamente crescente} \} = SC & |SC| = \binom{m}{n} \\ \downarrow & \downarrow & \\ f(I_n) & \mathcal{P}_n(I_m) & \end{array}$$

Es 2 $I_{n,j}(I_n, I_m) = \{ f: I_n \rightarrow I_m \text{ t.c. } f \text{ è iniettiva} \}$ per il 1° ho m possibilità
per il 2° ho $m-1$ " ...
 $|I_{n,j}(I_n, I_m)| = m(m-1) \dots (m-n+1) = \binom{m}{n} n!$

Per ind su n : $n=1 \rightarrow |I_{n,j}| = m$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad I_{n,k} = \{ f \in I_{n,j}(I_k, I_n), f(n) = k \} \stackrel{\text{big}}{\sim} I_{n,j}(I_{n-1}, I_{n-1})$$

$$I_{n_j}(I_k, I_n) = \bigsqcup_{1 \leq k \leq n} J_k \quad |f_k| = \binom{m-1}{n-1} (n-1)! \text{ lp ind.} \quad \text{Nota: } |I_{n_j}(I_n, I_n)| = n! \text{ } \leftarrow \text{permutazioni}$$

$$|I_{n_j}| = m \binom{m-1}{n-1} (n-1)! = \frac{m!}{n(n-1)!(m-n)!} n(n-1)! = \binom{m}{n} n!$$

08-10-2021 Lezione 6 Prof. Corradi

PROBLEMI DI COLLOCAZIONE:

Come mettere n oggetti in n celle

	AMM	NON AMM.	
DIST	n^k	$\binom{n}{k} k!$	DISPOSIZIONI
INDIST	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	
	CON RIPETIZIONI	SEMPlici	COMBINAZIONI

OGGETTI $\begin{cases} \text{DISTINGUIBILI} \\ \text{INDISTINGUIBILI} \end{cases}$

RIPETIZIONI $\begin{cases} \text{AMMESSE} \\ \text{NON AMMESSE} \end{cases}$

$C_{(n,k)}^* \equiv \text{COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI}$

$$\binom{n}{k} = \left| \left\{ f: I_k \rightarrow I_n \text{ strett. crescenti} \right\} \right|$$

$$C_{(n,k)}^* = \left| \left\{ f: I_k \rightarrow I_n \text{ debolmente crescenti} \right\} \right|$$

$\hookrightarrow j_1 < j_2 \Rightarrow f(j_1) \leq f(j_2)$

$$f \text{ è debolmente crescente} \leadsto g(j) = f(j) + j - 1$$

$$g: I_k \rightarrow I_{n+k-1}$$

g strett. crescente (somma di una funz. str. crescente e una deb. crescente)

$$C_{(n,k)}^* = \left| \left\{ g: I_k \rightarrow I_{n+k-1} \text{ strett. crescenti} \right\} \right| \quad \exists \text{ una bijezione}$$

IL PROBLEMA DEI COMPLEANNI

$$\phi: I_k \rightarrow I_{365}$$

Quante sono le f . iniettive su tutte le possibili funzioni?

Prob. che non ci siano compleanni coincidenti $\frac{\binom{365}{k} k!}{365^k} \xrightarrow{\text{f. iniettive}} \text{tutte le funz.}$

ANAGRAMMI

NAVE 4! anagrammi

$$B_1 A B_2 B_3 O \quad \frac{5!}{3!} \quad "$$

$$\begin{matrix} \{A, B, O\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ m_A=1 \quad m_B=3 \quad m_O=1 \end{matrix}$$

Parola di lunghezza n su $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ di compare con molt. m_i $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^n m_i = n \quad |\text{anagrammi}| = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!} \quad A^2 B^3 C^5 \quad (A+B+C)^{10}$$

Esercizio: mostrare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(suggerimento: cercare interpretazione combinatoria)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \binom{n}{k} \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\sum k(k-1) \binom{n}{k} \quad k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

$$a_j \quad 1 \leq j \leq n \quad \prod_{j=1}^n (1+a_j) = \sum_{k=0}^n \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \prod_{j \in J} a_j \quad \left. \begin{array}{l} \text{dim per ind} \\ \text{(esercizio)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{se } a_j = a \quad \forall j \\ = a^n \\ \text{addendi} \end{array}$$

$$\sum_{i \in J_1 < J_2 < \dots < J_k \leq n} a_{j_1} \cdots a_{j_k}$$

FORMULA DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

$$n=3 \quad |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad \text{funzione caratteristica dell'insieme } A$$

$$X \doteq \bigcup_{j=1}^n A_j$$

$$\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$$

Nota: $\prod \emptyset = 1$

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^n (1 - \chi_{A_j}(x)) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \prod_{j \in J} \chi_{A_j}(x) \quad \text{funzione caratteristica dell'intersezione}$$

$$\begin{array}{l} \text{cioè } x \notin A_j \\ \uparrow \\ 0 = \sum_{x \in X} \varphi(x) = \sum_{x \in X} 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} (-1)^k \sum_{j \in J} \chi_{A_j}(x) \end{array}$$

$$0 = |X| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

Calcolo delle funzioni surgettive

$$|X| = k \quad |Y| = n$$

$$\mathcal{F}(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y\} \quad |\mathcal{F}(X, Y)| = n^k$$

$$S(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ t.c. } f \text{ surg}\}$$

$$N = \mathcal{F} \setminus S \quad |S| = |\mathcal{F}| - |N|$$

$$f \in N \Leftrightarrow \exists y \in Y : y \notin f(X)$$

$$N = \bigcup_{y \in Y} a_y \quad a_y = \{f: X \rightarrow Y \text{ t.c. } y \notin f(X)\}$$

$$a_{y_1} \cap a_{y_2} = \{f: X \rightarrow Y \text{ t.c. } \{y_1, y_2\} \cap f(X) = \emptyset\}$$

$$\bigcap_{y \in H} a_y = \{f: X \rightarrow Y \text{ t.c. } H \cap f(X) = \emptyset\} = \{f: X \rightarrow Y \setminus H\} \quad H \subset Y$$

$$\left| \bigcap_{y \in H} a_y \right| = (n - |H|)^k$$

$$\left| \bigcup a_j \right| = \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} \sum_{N \subset \mathcal{P}_h(Y)} (n-h)^k = \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} \binom{n}{h} (n-h)^k$$

$$S(X, Y) = n^k + \sum_{h=1}^n (-1)^h \binom{n}{h} (n-h)^k$$

$$k \geq n$$

$$= \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} (n-h)^k$$

A, B insiemi infiniti

$$|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|) \quad (\text{Lemma di Zorn})$$

ES $\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R} \rightsquigarrow |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}| \quad \forall n$

Ipotesi del continuo (Cantor):

$E \subset \mathbb{R}$ infinito

\hookrightarrow (è indipendente dagli assiomi)

$$\Rightarrow \underbrace{|\mathbb{E}| = |\mathbb{N}|}_{\text{numerabile}} \quad \text{o} \quad \underbrace{|\mathbb{E}| = |\mathbb{R}|}_{\text{più che numerabile}}$$

Proprietà archimedea di \mathbb{R}

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad 0 < x < y \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad nx > y$$

Dim. Se fosse falso $\Rightarrow n \leq \frac{y}{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ cioè \mathbb{N} e \mathbb{Q} avrebbero un maggiorante in \mathbb{R} \downarrow

Oss. \exists campi ordinati non archimedei (non completi)

- Reali non standard

- $\mathbb{Q}(x), \mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \right\}$, P, Q polinomi $\{$ CAMPI DI FRAZIONI

- Esiste un campo ordinato "universale" NUMERI SURREALI

Prop. \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} cioè $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y \quad \exists z \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < z < y$

Dim. $y - x > 0$

$n \in \mathbb{N}$ t.c. $n(y-x) > 1$ cioè $\frac{1}{n} < y-x$. Supponiamo $x > 0$. Se fosse $x=0$ $\frac{1}{n}$ va bene.

Prendo $K = \max \left\{ j \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \frac{j}{n} \leq x \right\}$, in particolare $\frac{K}{n} \leq x < \underbrace{\frac{K+1}{n}}_{\substack{= \\ z \in \mathbb{Q}}} \leq x + \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n} \cdot K$

Radici n-esime

$\forall y > 0$ e $n \in \mathbb{N} \quad \exists$ sempre $\underbrace{z \in \mathbb{R}}_{z > 0}$ t.c. $x^n = y$

$x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ radice n-esima di y

Come si trova?

$x = \sup \{ z \quad \text{t.c.} \quad z^n \leq y \}$ va verificato che $x^n = y$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad (x-\varepsilon)^n \leq z^n \leq y < (x+\varepsilon)^n \iff (x-\varepsilon)^n \leq x^n \leq (x+\varepsilon)^n$
 \hookrightarrow molto piccolo $\hookrightarrow z$ appartiene all'insieme

Binomio di Newton
 $(a-b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

$$\begin{array}{ccccccc} & | & & | & & | & \\ \hline (x-\varepsilon) & x^n & y & (x+\varepsilon)^n & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\Rightarrow |x^n - y| \leq (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (x+\varepsilon)^k (x-\varepsilon)^{n-1-k} \quad (\varepsilon < 1)$$

$$\leq \varepsilon (2n(x+1)^{n-1}) = C \cdot \varepsilon \Rightarrow x^n = y$$

Dal fatto $0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n$ segue l'unicità della radice $x^{1/n}$

Valore assoluto

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

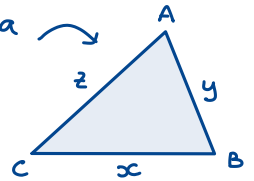
$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Verifica:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

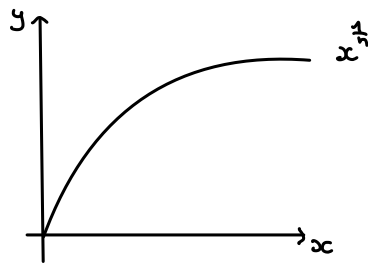
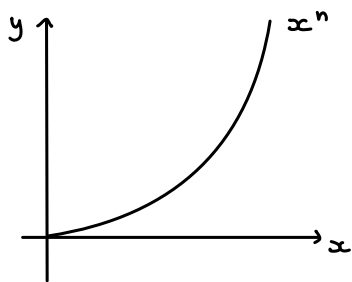
$$|yx| = |y||x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{disuguaglianza triangolare}$$



C'è un'estensione agli elementi di $\mathbb{R}^n = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{vettori}})$

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{norma di } x$$



Oss: n dispari: posso risolvere $x^n = y$ anche per $y < 0$, ponendo $x = (-\tilde{x})^{1/n}$, \tilde{x} soluzione di $x^n = y$

Potenze in \mathbb{R} Come definiamo a^b con $a, b \in \mathbb{R}$ $a > 0$?

① $b \in \mathbb{Q}$, cioè $b = \frac{j}{n}$ $j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$a^b = (a^{1/n})^j = \begin{cases} (a^{1/n})^j & j > 0 \\ 1 & j = 0 \\ \frac{1}{(a^{1/n})^{-j}} & j < 0 \end{cases}$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\cdot) a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

$$\cdot) (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

$$\cdot) a^b > 0, a^0 = 1, 1^b = 1$$

$$\cdot) a > 1 \quad b_1 < b_2 \Rightarrow a^{b_1} < a^{b_2} \quad (x \rightarrow a^x \text{ crescente})$$

In generale se $b \in \mathbb{R}$ posso:

$$\cdot) a = 1, 1^b = 1$$

} Verificare

$$\cdot) a > 1 \quad a^b = \sup \{ a^q, q < b, q \in \mathbb{Q} \}$$

$$\cdot) a < 1 \quad a^b = \inf \{ a^q, q < b, q \in \mathbb{Q} \}$$

Si verifica che continuano a valere le proprietà algebriche. Inoltre si ha

$$a > 1 \Rightarrow a^b = \inf \{ a^q : q \in \mathbb{Q}, q > b \}$$

$$a < 1 \Rightarrow a^b = \sup \{ a^q : q \in \mathbb{Q}, q > b \}$$

Oss: $f(x) = a^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{ z \in \mathbb{R}, z > 0 \}$ è un isomorfismo tra $(\mathbb{R}, +)$ e (\mathbb{R}^+, \cdot)

Numeri complessi

$x^2 = -1$ non ha senso in \mathbb{R} . Prendo $i^2 = -1$ ^{unità immaginaria}. Considero $\mathbb{R} \cup \{i\}$.

i genera il campo dei NUMERI COMPLESSI. $\mathbb{C} = \{ a + bi : a, b \in \mathbb{R} \}$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$\cdot) (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ \mathbb{C} è un ^(abeliano) gruppo rispetto a $+$

$\cdot) (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un gruppo per \cdot

$\Rightarrow \mathbb{C}$ è un campo che estende \mathbb{R}

Dato $a + ib$ il numero $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ è il suo inverso per \cdot .

$$a + ib \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + (ab)i - (ab)i + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Notazione: Dato $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$

$a = \operatorname{Re}(z)$ PARTE REALE

$b = \operatorname{Im}(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$\bar{z} = a - ib$ CONIUGATO DI z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ MODULO DI z

$$\cdot |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\cdot |zw| = |z| \cdot |w|$$

$$\cdot |z + w| \leq |z| + |w|$$

In particolare:
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \\ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{cases}$$

Numeri Complessi

Estensione di \mathbb{R} aggiungendo i tale che $i^2 = -1$ genera \mathbb{C}

$\mathbb{C} := \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ è un campo, con le operazioni $+$, \cdot

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

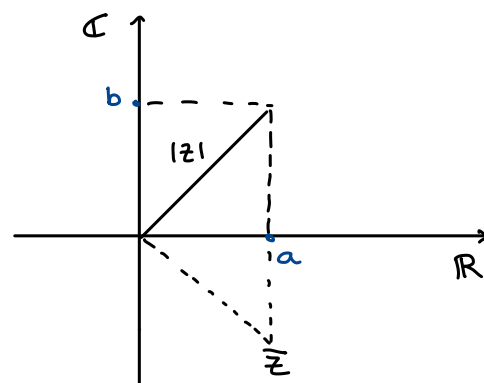
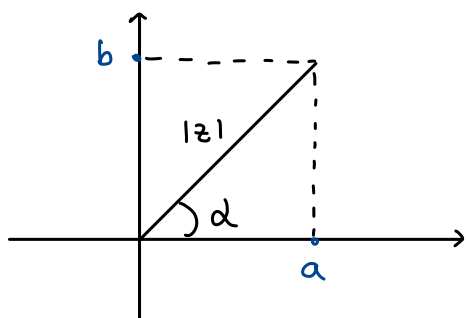
INVERSO MOLTIPLICATIVO: $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Oss: Si può definire un ordine totale (non completo)

$$a+bi \leq c+di \text{ se } a < c \text{ o } a=c \text{ e } b \leq d$$

$$z \in \mathbb{C} \quad z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty) \quad \begin{cases} |z \cdot w| = |z| |w| \\ |z+w| \leq |z| + |w| \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA

$$\alpha = \arctg(z) \text{ è tc}$$

$$b = |z| \sin \alpha \text{ e}$$

$$a = |z| \cos \alpha$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \arctg(z) \text{ è definito a meno di multipli di } 2\pi$$

Notazione: $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$ si dice argomento principale di z

PROPRIETÀ:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$$

$$\rho_1 = |z_1|$$

$$\rho_2 = |z_2|$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \text{Arg}(z_1)$$

$$\alpha_2 = \text{Arg}(z_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Verifica: $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)$

In particolare

$$z = p(\cos d + i \sin d)$$

$$z^n = p^n (\cos(nd) + i \sin(nd)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (\cos d + i \sin d)^n = \cos(nd) + i \sin(nd)$$

PONIAMO:

$$e^{id} = \cos d + i \sin d$$

$e = 2,718\dots$ numero di Nepero

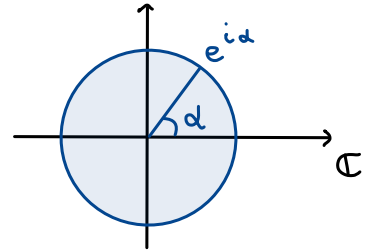
$$z = p e^{id} \quad \text{RAPPR. ESPONENZIALE}$$

$$e^{id}: \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Per estensione poniamo:

$$e^z = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b) \quad z = a + ib \in \mathbb{C}$$

$$e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{isomorfismo di gruppi}$$



Radici n^{e} di $w \in \mathbb{C}$

Cerchiamo soluzioni in \mathbb{C} di $z^n = w$

$$w = |w| e^{i\alpha} \quad z = |z| e^{i\beta} \quad z^n = |z|^n e^{in\beta} \quad \alpha = \arg(w)$$

$$|z|^n e^{in\beta} = |w| e^{i[\arg(w) + 2k\pi]} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \arg(z) = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{t.c. } \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

\downarrow n soluzioni distinte

Caso $w = 1$, radici dell'unità

$$w = 1 \cdot e^{0i + 2k\pi i}$$

$$z = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

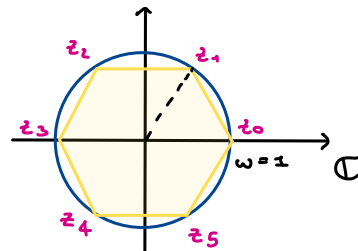
Più in generale, dato

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad a_i \in \mathbb{C}$$

\exists sempre una soluzione $P(\bar{z}) = 0$. \rightarrow Teorema fondamentale dell'algebra

In particolare possiamo scrivere $P(z) = (z - \bar{z}) Q(z) \quad \deg Q = n-1$

$$z^n = 1$$



Poligono inscritto
nella circonferenza
unitaria

$$P(z) = a_n (z-z_1) \dots (z-z_n) \quad z_i \in \mathbb{C} \text{ soluzioni di } P(z)=0$$

Possibilmente coincidenti

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z-z_j)^{d_j} \quad \text{Fattorizzazione di } P \text{ in } \mathbb{C}$$

$$K \leq n \quad d_j \in \mathbb{N} \text{ molteplicità di } z_j, \sum_{j=1}^n d_j = n$$

Oss: Non è vero in \mathbb{R} , dove però si può decomporre $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

$$\text{come } P(x) = a_n \prod_{j=1}^k P_j(x)$$

$$P_j(x) = \begin{cases} x - x_j \\ x^2 + a_j x + b_j \end{cases} \quad \sum_j \deg P_j = n$$

Def: Si dice che \mathbb{C} è algebricamente chiuso

Oss: $P(z)=0 \quad \deg P=2$ cioè $P(z)=az^2+bz+c \quad a,b \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Oss: Il teorema non vale per $P(z, \bar{z})=0$

Es: $z \cdot \bar{z} + 1 = 0$ non ha soluzioni

DISTANZA, INTORNI, TOPOLOGIA IN \mathbb{R} e \mathbb{R}^n

Cos'è una distanza su un insieme E

$d: E \times E \rightarrow [0, +\infty)$ è una **DISTANZA** se:

- $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in E$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$ *simmetrica*
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad \forall x, y, z$ *disuguaglianza triangolare*

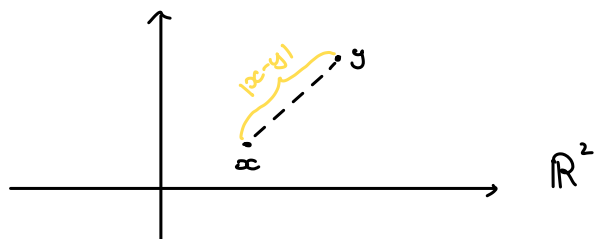
(E, d) si dice uno **SPAZIO METRICO**

Es: $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$



ESERCIZIO: $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p)$ $p \in (0, +\infty)$

$d(x, y) = |x - y|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$ è una distanza se $p \geq 1$

Def: Dato (E, d) spazio metrico $B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$

si dice **PALLA** di raggio r con centro x .

Def: (E, d) spazio metrico, $A \subseteq E$, $x \in A$, A si dice un **INTORNO** di x se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$

Oss: (E, d) s.m. $E' \subseteq E \Rightarrow (E', d)$ s.m.

Def: (E, d) s.m. $A \subseteq E$ A si dice **APERTO** se A è intorno di ogni suo punto, cioè $\forall x \in A \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$.

A si dice **CHIUSO** se $E \setminus A$ è aperto.

Prop. Detta $\mathcal{A} = \{A \subseteq E : A \text{ aperto}\}$ si ha che

① $\emptyset, E \in \mathcal{A}$

② $\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti, anche infinita, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

③ $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ (NON è vera per \cap infinite)

15-10-2021 lezione 9 Prof. Carminati

Esercizio:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

↓

sottoinsiemi di ordine n in un insieme di $\# 2n$

$$= |\mathcal{P}_n(I_{2n})| \quad \mathcal{P}_n(I_{2n}) = \bigsqcup_{k=0}^n \{A \in \mathcal{P}_n(I_{2n}) : |A \cap I_n| = k\}$$

$$I_{2n} = \{1, 2, \dots, 2n\} \quad \begin{array}{c} \text{I}_n \qquad \qquad \text{I}_n \\ \hline 1 \qquad \quad n \quad n+1 \qquad 2n \end{array}$$

$$\{A \in \mathcal{P}_n(I_{2n}) : |A \cap I_n| = k\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_k(I_n) \times \mathcal{P}_{n-k}(I_n)$$

\downarrow $\xrightarrow{\psi}$ $A \longmapsto (A \cap I_n, I_n' \setminus A)$ ha n elementi

$$|\{A \in \mathcal{P}_n(I_{2n}) : |A \cap I_n| = k\}| = |\mathcal{P}_k(I_n)| |\mathcal{P}_{n-k}(I_n)| = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

$$\text{Quindi } \binom{2n}{n} = |\mathcal{P}_n(I_{2n})| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Esercizio $A_n = \{ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n : \varepsilon_i \in \{a, b\}, \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \neq aa \ \forall i \in 1, \dots, n \}$

$$A_n = \begin{matrix} a \\ \downarrow^2 \\ A_{n-2} \end{matrix} \sqcup \begin{matrix} b \\ \downarrow^2 \\ A_{n-1} \end{matrix}$$

$g_n = |A_n|$ soddisfa una relazione di ricorrenza

$$g_n = g_{n-2} + g_{n-1}$$

$$A_1 = \{a, b\}$$

$$A_2 = \{ab, ba, bb\}$$

$$A_3 = \{aba, bab, bba, abb, bbb\}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

sequenza di Fibonacci

Scrivo ora l'espressione analitica di g_n :

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \quad (L) \quad \text{cerco soluzioni di L in forma esponenziale}$$

$$g_n = \lambda^n$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \quad n=2 \quad \lambda^2 = \lambda + 1 \quad \lambda_{+,-} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

verificare x es.

Chiamo $\lambda_+ = \alpha_n$, $\lambda_- = \beta_n$ sono soluzioni di (L) $\Rightarrow A\alpha_n + B\beta_n$ è sol di L

Cerco A e B che soddisfano le condizioni iniziali oltre alla ricorrenza

Condizioni iniziali: $g_n(0) = 1$, $g_n(1) = 2$

$$g_n = A\lambda_+^n + B\lambda_-^n \quad \text{chiedo che } g_n \text{ soddisfi } g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \text{ e che } g_0 = 1 \text{ e } g_1 = 2$$

$$A + B = 1$$

$$A\lambda_+ + B\lambda_- = 2$$

$$A \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2$$

$$A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 4$$

$$\underbrace{A+B}_{=1} + \sqrt{5}(A-B) = 4$$

$$\sqrt{5}(A-B) = 3 \rightarrow A-B = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$2A = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_+^2$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_-^2$$

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_+^n - \lambda_-^n)$$

Successioni definite per ricorrenza

a_1, a_2, a_3, \dots Successione = seq. infinita di elem. di un insieme a val. in X

Una successione è succ: $\mathbb{N} \rightarrow X$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \equiv \text{form. esplicita}$$

regola ricorsiva \leadsto Data $f: X \times \mathbb{N} \rightarrow X$ e $d \in X$

$$\begin{cases} a_0 = d \\ a_{n+1} = f(a_n, n) \end{cases} \quad \text{successione definita per ricorrenza}$$

ES $n!$ è una succ. definita per ricorrenza

$$f: X \times \mathbb{N} \rightarrow X \quad a_0 = 1$$

$$X = \mathbb{N} \quad d = 1$$

$$(x, n) \mapsto x(n+1) \quad a_{n+1} = \underbrace{a_n(n+1)}_{f(a_n, n)}$$

ES $f(x, n)$ successioni autonome
 \hookrightarrow non dipende da n

Il caso precedente si può ricondurre in questa cornice.

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad f: X \rightarrow X$$

$$X \ni d = (1, 2) \text{ punto di partenza}$$

$$(x, y) \mapsto (y, x+y) \quad \bullet a_0 = (1, 2) \quad \bullet a_1 = (2, 3) \quad \bullet a_2 = (3, 5)$$

C'è un parallelismo tra eq. differenziali e successioni definite per ricorrenza

Esempio

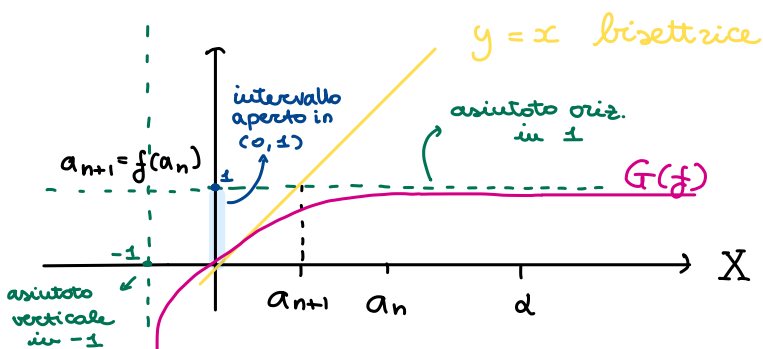
$$\begin{cases} a_0 = d > 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$X := (0, +\infty)$$




$\leadsto a_n$ è decrescente

$$\inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

2 modi di lavorare

- Formula esplicita \rightarrow non sempre possibile
- Studio qualitativo \rightarrow meno informazioni

Ora dovrei riportare a_{n+1} sulle ordinate per ottenere a_{n+2}

Mi basta prendere la bisettrice perché in essa un punto ha ordine uguale all'ascissa. $a_{n+2} = f(a_{n+1})$  ottengo una spezzata

la bisettrice è tangente al grafico della curva.

a_n è sempre ben definita $f(X) \subset X$

$a_n > 0$ (per induzione)

se $x > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < x \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \leadsto a_n$ è sempre decrescente

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq 0$ 0 è un minorante, l'inf è il max dei minoranti

In effetti $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$.

Per assurdo: $\inf a_n = \delta > 0$

$$f(\delta') = \delta, \quad \frac{\delta'}{1+\delta'} = \delta \quad \delta = \delta\delta' + \delta$$

$$\delta' > \delta \quad \delta' > \max \quad \delta' = \frac{\delta}{1+\delta} > \delta \quad \delta = \inf = \max \text{ dei minoranti per tutti gli elementi della successione}$$

δ' non è più un minorante per tutti gli elementi della successione

$\Rightarrow \exists \bar{n}$ per cui la successione scende rispetto a δ' : cioè $\exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < \delta'$

Ma allora $a_{\bar{n}+1} = f(a_{\bar{n}}) < f(\delta') = \delta$ Assurdo perché $a_{\bar{n}+1}$ è sceso rispetto a $\delta \Rightarrow \delta$ non è un minorante. \hookrightarrow

$$a_0 = d$$

$$a_1 = \frac{d}{1+d}$$

$$a_2 = \frac{\frac{d}{1+d}}{1 + \frac{d}{1+d}} = \frac{d}{1+2d}$$

$$a_3 = \frac{\frac{d}{1+2d}}{1 + \frac{d}{1+2d}} = \frac{d}{1+3d}$$

\vdots

$$a_n = \frac{d}{1+nd} \rightarrow \text{Si dimostra formalmente per induzione.}$$

Esercizio: Trovare una formula esplicita per $\begin{cases} a_0 = d \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \quad \begin{matrix} f(x) = Ax + B \\ A, B \in \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R} \end{matrix}$

Metrica e Topologia

E insieme $d: E \times E \rightarrow [0, +\infty)$

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

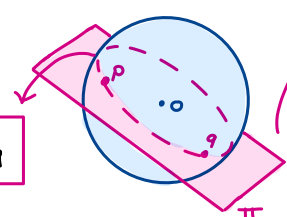
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *disuguaglianza triangolare*

Esempi: $E = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$

$E = \mathbb{C}$ $d(z, w) = |z - w|$ *modulo*

$E = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ $d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

$E = S \subseteq \mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$
sfera unitaria

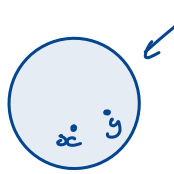
$p, q \in S$
 $\pi \cap S = C_{p,q}$

 π piano individuato da $p, q, 0$, $\mathbb{R}^3 \ni 0 = (0, 0, 0)$
 $d(p, q) =$ lunghezza arco più corto tra p e q
 distanza geodetica sulla sfera

$\begin{cases} x \in E \\ r > 0 \end{cases} \quad B_r(x) := \{ y \in E : d(x, y) < r \}$ palla di centro x e raggio r

A **INTORNO** di x se $\exists x \in E, r > 0$ t.c. $B_r(x) \subset A$

A **APERTO** se A è intorno di ogni $x \in A$

Oss: se $r > 0$ $B_r(x)$ è un insieme aperto se $y \in B_r(x) \Rightarrow d(x, y) < r$


 $z \in B_\delta(y) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r - \delta \quad r - \delta \text{ con } \delta > 0$
 $B_\delta(y) \subset B_r(x)$

A **chiuso** se $E \setminus A$ è aperto.

Proprietà: i) \emptyset, E sono aperti

ii) Se A_j aperti, $j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j$ è aperto

iii) Se A_1, \dots, A_e aperti $\Rightarrow \bigcap_j A_j$ è aperto

Dim. i) verifica diretta

ii) $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \Rightarrow \exists \bar{j} \in J : x \in A_{\bar{j}} \Rightarrow \exists r : B_r(x) \subset A_{\bar{j}} \subset \bigcup_{j \in J} A_j$

$$\text{iii)} \quad x \in \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j \Rightarrow x \in A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad \exists x_j : B_{r_j}(x) \subset A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}, \quad r \doteq \min A_j$$

$$B_r(x) \subset A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j$$

Oss: Questo risultato non è vero per intersezioni infinite

Esempio: $A_j = (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$ $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{0\}$

$(A_j \subseteq \mathbb{R}) \quad j \in \mathbb{N}$

Oss: Può capitare che metriche diverse definiscano la stessa topologia

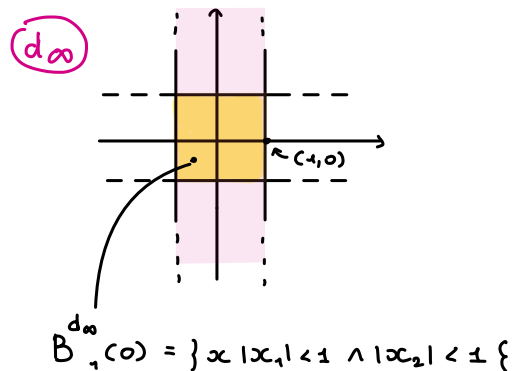
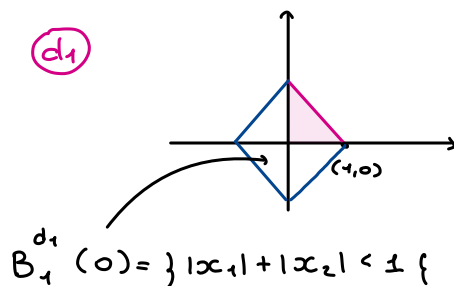
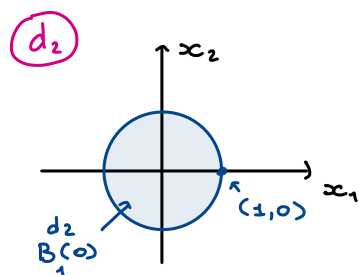
Esempio: $E = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$
 $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2}$$

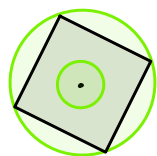
$$d_1(x, x') = \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|$$

$$d_{\infty}(x, x') = \max\{|x_i - x'_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Queste distanze definiscono la stessa topologia su E in \mathbb{R}^2 .



la topologia indotta da d_1 e d_2 è la stessa perché $B_r^{d_2} \subset B_r^{d_1}(x) \subset B_r^{d_2}(x)$



Dentro una palla tonda riesco sempre a mettere una a forma di losanga e viceversa.

Proprietà dei chiusi

i) \emptyset, E sono chiusi

ii) A_j chiusi $\forall j \in J \Rightarrow \bigcap_{j \in J} A_j$ è chiuso

iii) A_1, \dots, A_{ℓ} chiusi $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$ è chiuso

Dim: A_j chiuso $\forall j \Rightarrow A_j^c$ aperto $\forall j$

$$\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)^c = \bigcup_{j \in J} A_j^c \leftarrow \text{aperto perché unione di aperti}$$

$$\begin{aligned} & \psi \\ x & \Rightarrow x \notin \bigcap_{j \in J} A_j \Rightarrow \exists j : x \in A_j^c \Rightarrow x \in \bigcup_{j \in J} A_j^c \end{aligned}$$

$(\bigcup_{j=1}^e A_j)^c = \bigcap_{j=1}^e A_j^c$ è aperto perché int. finita di aperti

Def: x è **INTERNO** ad A $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$

$$x \text{ è ESTERNO ad } A \stackrel{\text{def}}{=} \exists r > 0 : B_r(x) \subset A^c \quad x \text{ è interno a } A^c$$

x è di **FRONTIERA** per A $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists r > 0 \begin{cases} B_r(x) \cap A \neq \emptyset \\ B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$ x non è né interno né esterno

$$\text{int}(A) \doteq \{x : x \text{ interno ad } A\}$$
$$\partial A \doteq \{x : x \notin \text{int}(A) \wedge x \notin \text{int}(A^c)\} = \{x : x \text{ di frontiera per } A\}$$
$$E = \text{int}(A) \sqcup \partial A \sqcup \text{int}(A^c) \quad \text{unione disgiunta}$$

Esempio: $\text{Br}(x) = \text{int}(\text{Br}(x))$

$$\partial B_r(x) = \{y : d(x, y) = r\}$$

Oss: i) A aperto $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$

ii) $\text{int}(A)$ è un aperto

iii) $\text{int}(A)$ è il più grande aperto contenuto in A

Dim: i) è la definizione di aperto

$$\text{ii) Se } x \in \text{int}(A) \Rightarrow B_r(x) \subset A \Rightarrow \forall y \in B_r(x) \exists r_1 > 0 : B_{r_1}(y) \subset A \Rightarrow B_r(x) \subset \text{int}(A)$$

\uparrow
 $B_r(x)$ è aperta

iii) $\left. \begin{array}{l} A' \subseteq A \\ A \text{ aperto} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x \in A' \exists r B_r(x) \subset A' \subseteq A \Rightarrow x \in \text{int}(A)$, di conseguenza $A' \subset \text{int}(A)$ \square

Def: ADERENZA

$$x \text{ è ADERENTE ad } A \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$\bar{A} = \{$ insieme di punti aderenti ad $A \}$ chiusura di A

Prop: $\bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial A$ Oss: $A \subset \bar{A}$

Dire: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \notin \text{int}(A^c) \Leftrightarrow x \in (\text{int}(A^c))^c$

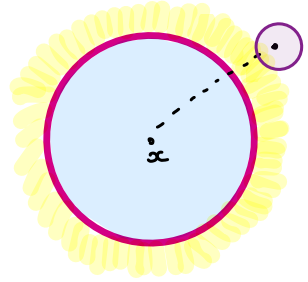
Oss: $\bar{A} = \{x \in E : d(x, A) = 0\}$

dove $d(x, A) \doteq \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$ $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists$ punti di A ^{vicini a x arbitrariamente}

- se A è chiuso $A = \bar{A}$

$$\rightarrow \{x \in E : d(x, A) = 0\}$$

- $\bar{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$ ← NB: questi sono insiemi aperti



- \bar{A} è il più piccolo chiuso contenente A

Def: x è di accumulazione per A se $\forall r > 0 \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

Oss: Se x è di accumulazione $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A

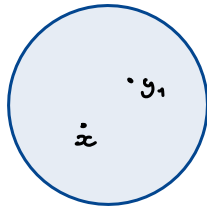
diversi da x .

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = \frac{1}{2} d(x, y_1)$$

\vdots

$$r_n = \frac{1}{2} d(x, y_n)$$



$$y_1 \in B_{r_0}(x) \setminus \{x\} \cap A$$

$$y_2 \in B_{r_1}(x) \setminus \{x\} \cap A$$

\vdots

$$y_n \in B_{r_{n-1}}(x) \setminus \{x\} \cap A$$

$$y_{n+1} \in B_{r_n}(x) \setminus \{x\} \cap A$$

Infatti se per un centro x_0 ce ne fosse solo un numero finito, potrei prendere un raggio $r_1 < r_0$, in modo che la palla $B_{r_1}(x_0)$ non contenga nessun elemento di A ($\neq x$) e quindi x non sarebbe d'accumul.

Def x si dice isolato se non è di accumulazione

Esercizio: $\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n \in \mathbb{N}_+, m \in \mathbb{N}_+ \} \subset \mathbb{R}$

Determinare i punti di accumulazione

Esercizio: $A \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_j, b_j)$

Ogni aperto è unione al più numerabile di intervalli disgiunti.

21-10-2021 Sezione 11 Prof. Carminati

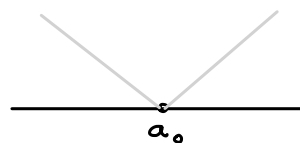
(E, d) spazio metrico con d distanza

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$$

Esempi:

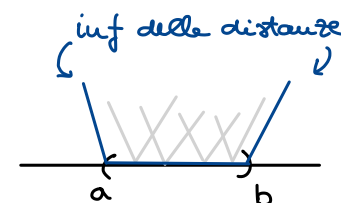
$$d(x, a_0)$$

$$E = \mathbb{R}$$



$$E = \mathbb{R}^2 \quad \text{una specie di caso } \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ "si immerge"}$$

$$A = (a, b)$$



$$A = \mathbb{Z}$$



Grafici delle funzioni distanza

Def ρ -intorno di A , $A_\rho := \{ x \in E : d(x, A) < \rho \}$

Esercizio. A_p è aperto. Verificare $A_p = \bigcup_{a \in A} B_p(a)$

Domanda: È sempre vero che $\overline{A_p} = \{x \in E : d(x, A) \leq p\}$?
↳ chiusura di A_p

Risposta: Preso \mathbb{R} con la distanza euclidea è vero, in generale è falso
ma vale un'inclusione: $\overline{A_p} \subset \{x \in E : d(x, A) \leq p\}$ Formare un controes.

Proprietà della distanza:

$$(i) a_0 \in E \quad |d(x, a_0) - d(y, a_0)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

$$(ii) A \subset E \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Sono interessato a questa funzione: $d: E \rightarrow [0, +\infty)$
 $x \mapsto d(x, A)$

Def $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ φ è L-lipschitz $\stackrel{\text{def}}{\iff} |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in E$ (*)

NB:
(Sopra avrei $\varphi(x) = d(x, A)$ $L=1$ la distanza da A è una funzione 1-Lip)

$$(*) \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(y) \leq L d(x, y) & \forall x, y \in E \\ -\varphi(x) + \varphi(y) \leq L d(x, y) & \forall x, y \in E \end{cases} \quad |a| \leq b \iff \begin{cases} a \leq b \\ -a \leq b \end{cases}$$

Basta verificarne una e scambiando x e y si ottiene l'altra
(Questo è vero per la simmetria della distanza: $d(x, y) = d(y, x)$)

Dim (Prop) (i) Basta verificare $d(x, a_0) - d(y, a_0) \leq d(x, y) \quad \forall x, y$

$$d(x, a_0) \leq d(x, y) + d(y, a_0) \quad \text{per la dis. triangolare} \quad \text{implica la tesi}$$

↳ Per quanto detto sopra

perché è l'inf

$$d(x, A) - d(y, a) \stackrel{\boxed{a \in A}}{\leq} d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

non dipende da $a \in A$

$$d(x, A) \leq d(y, a) + d(x, y) \quad \forall a \in A$$

solo fissati

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a) \quad \forall a \in A$$

è un minorante per $d(y, a)$: $a \in A$

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf \{d(y, a) : a \in A\} (= d(y, A))$$

↳ l'inf è il massimo dei minoranti

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Esercizio: Mostrare che $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

"l'aderenza dell'aderenza di A coincide con l'aderenza di A"

Ricordiamo:

punti che $\notin \text{int}(A^c)$ $\xrightarrow{\bar{A}}$ il più piccolo chiuso contenente A
(E, d) sp. metrico $A \subseteq E$, $\text{int}(A) \sqcup \partial A \rightarrow$ frontiera di A
 $\xrightarrow{\bar{A}}$ il più grande aperto contenuto in A

x è di accumulazione per A se $\forall r > 0 \quad B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$

(equivalentemente $B_r(x) \cap A$ ha infiniti elementi) ✓

$D(A) = A' = \{x \in E : x \text{ è di accumulazione per } A\}$

Esercizio: • $\bar{A} = A \cup A'$

• A chiuso $\Leftrightarrow A \supseteq A'$

• $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

• $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ma può valere l'inclusione stretta

Def $a \in A$ si dice ISOLATO se $a \notin A'$

A si dice DISCRETO se tutti i punti sono isolati

A si dice DENSO se $\bar{A} = E$

Esempi $A = (a, b)$ $A' = [a, b]$ $\partial A = \{a, b\}$

\mathbb{N} : $\mathbb{N}' = \emptyset$ $\text{int } \mathbb{N} = \emptyset$ $\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$ tutti i punti sono isolati

$\rightarrow \mathbb{N}$ è DISCRETO, idem \mathbb{Z}

\mathbb{Q} : $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R}

⊛ perché? una spiegazione è la cardinalità: \mathbb{Q} è numerabile, un intervallo ha cardinalità del continuo ($= |\mathbb{R}|$). Quindi \mathbb{Q} non può contenere un intervallo.

Esercizio (difficile): \mathbb{Q}^* : Esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\partial A = A = A'$

(suggerimento: sì)

Topologia e ordine in \mathbb{R} :

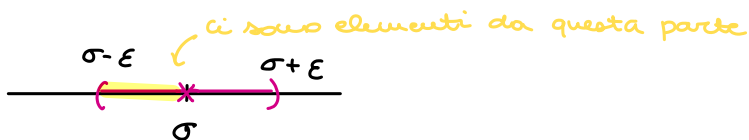
Prop: $A \subseteq \mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$), $\sigma \doteq \sup A < +\infty$ (Vale enunciato analogo per $\inf A$)

$\sigma \notin A \Rightarrow \sigma$ è punto di accumulazione per A

Def: $\sigma = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma \geq a \quad \forall a \in A & \text{i) mi dice che } \sigma \text{ è un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a_0 \in A : \sigma - \varepsilon < a_0 & \text{ii) mi dice che } \sigma \text{ è superato da un } a \in A \end{cases}$

se $\varepsilon > 0$ fissato $\exists a \in A : \sigma - \varepsilon \leq a \leq \sigma$
(ii) (i)

$$\sigma \notin A \Rightarrow \exists a \in A: \sigma - \varepsilon < a < \sigma$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B_\varepsilon(\sigma) \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$$

non è più difficile di dimostrare che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R}

Prop: $G \subseteq \mathbb{R}$, $G \neq \{0\}$, G sottogruppo additivo di \mathbb{R} (es: $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Q}$...)
 $\hookrightarrow G$ è soggetto alla rel. d'ordine

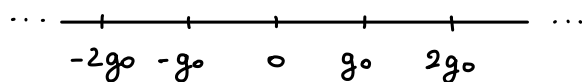
$$g_0 := \inf G \cap (0, +\infty)$$

$\hookrightarrow g_0 \in G$ essendo sgrp additivo

NB: l'inf può non appartenere all'insieme

$$\begin{cases} g_0 = 0 & \Rightarrow \overline{G} = \mathbb{R} \quad "G \text{ è denso in } \mathbb{R}" \\ & \hookrightarrow \text{es: } G = \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_0 > 0 & \Rightarrow G = g_0 \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot g_0 : k \in \mathbb{Z}\} \\ & \hookrightarrow G \text{ è chiuso es: multipli di } \pi \end{cases}$$



Cor: i) \mathbb{Q} è denso $\rightarrow \inf \{q \in \mathbb{Q}, q > 0\} = 0$

comb lineari di $\sqrt{2}$ a coef interi

ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{k + h\sqrt{2} : k, h \in \mathbb{Z}\}$ è denso in \mathbb{R}

Dim (Prop): II caso: $g_0 = \inf G \cap (0, +\infty)$ $g_0 > 0$

Allora $g_0 \in G$ perché se così non fosse $g_0 \in G' \Rightarrow g_0 < g_1 < g_2 < 2g_0$ $g_1, g_2 \in G$
 \hookrightarrow di acc per G
 \hookrightarrow pt. di acc. di G

abbiamo visto
che può $\notin G$
 $\in G \cap (0, +\infty)$

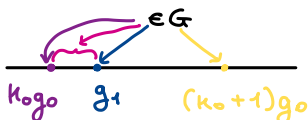
$$0 < g_2 - g_1 < g_0 \Rightarrow g_1 < g_2 < 2g_0 \Rightarrow 0 < g_2 - g_1 < 2g_0 - g_1 < g_0 \quad \text{Assurdo} \quad (g_2 - g_1 \in G)$$

$$G \supset g_1 \mathbb{Z}$$

Vale l'1 = Per assurdo: $\exists g_1 \in G \setminus g_0 \mathbb{Z} \Rightarrow \exists k_0$ tale che $k_0 g_0 < g_1 < (k_0 + 1)g_0$

$$g_1 - k_0 g_0 \in G \cap (0, +\infty)$$

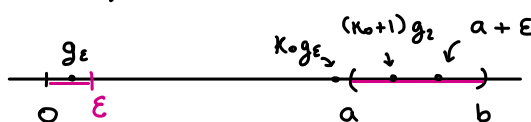
$$g_1 - k_0 g_0 < g_0 \quad \text{assurdo}$$



I caso: $g_0 = 0$ $g_0 \notin G \cap (0, +\infty) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists g_2 \in G \cap (0, \varepsilon)$

G denso $\Leftrightarrow \forall (a, b) \subset \mathbb{R}$ $(a, b) \cap G \neq \emptyset$ SPG $a > 0$

Scelgo $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ $g_\varepsilon \in G \cap (0, \varepsilon)$



G gruppo $\Rightarrow G \supset g_\varepsilon \mathbb{Z} = \{k g_\varepsilon : k \in \mathbb{Z}\}$

\hookrightarrow sup. illimitato

$\{k \in \mathbb{N} : k g_\varepsilon < a\}$ è un insieme finito e non vuoto

$k_0 = \max$

$$(k_0 + 1)g_\varepsilon > a \quad (k_0 + 1)g_\varepsilon = k_0 g_\varepsilon + g_\varepsilon < k_0 g_\varepsilon + \varepsilon < a + \varepsilon < b$$

$$\Rightarrow (k_0 + 1)g_\varepsilon \in (a, b) \cap G$$

Esercizio: $T = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \}$ chi sono i punti di accumulazione?
 naturali positivi

Prop: $T' = \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^* \cup \{0\} \right\}$ (0 è accumulato dagli elementi $\frac{2}{n}$)

insieme dei
pt. di acc.

D

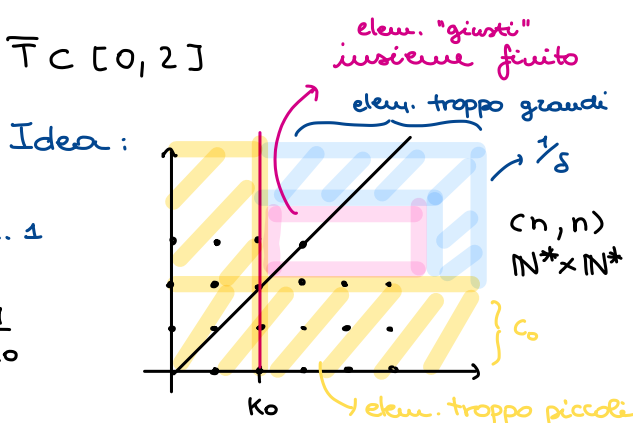
su un insieme sta in un chiuso tutti
i pt. di accumulazione stanno in quel chiuso

$$k \in D \Rightarrow k \in T' \quad (\text{per es.}) \quad T \subset [0, 2] \quad T' \subset \overline{T} \subset [0, 2]$$

$x \in (1, 2]$ non è di accumulazione

$$T \cap (1, 2] = \left\{ 1 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{come pt. di acc. ha solo l'el. 1}$$

$$x \in [0, 1], \quad x \notin D \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{k_0+1} < x < \frac{1}{k_0}$$



22-10-2021

Lezione 12

Prof. Caracciolo

Esercizio: $T = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$ $T' = \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^* \cup \{0\} \right\}$

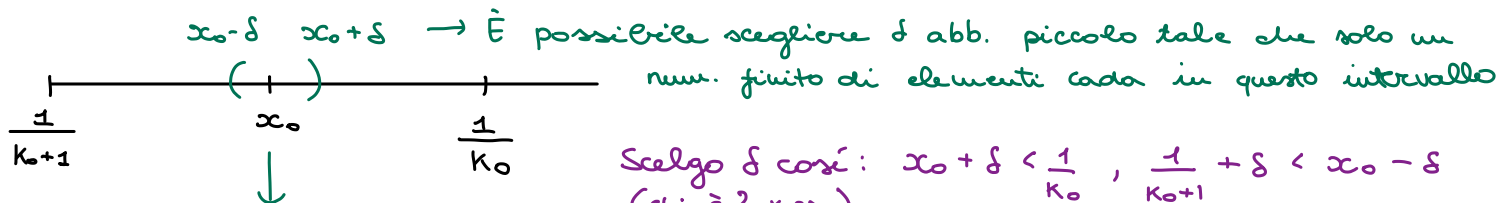
① $D \subseteq T'$ facile

② Se $x \notin D \Rightarrow x \notin T'$

$T' \subset [0, 2]$; non ci sono pt. di acc. in $(1, 2]$ facile

Se $x_0 \in (0, 1) \setminus D \Rightarrow x_0$ non è di accumulazione

Strategia: Se $x_0 \in (0, 1) \setminus D$, $\exists k_0$ t.c. $\frac{1}{k_0+1} < x_0 < \frac{1}{k_0}$



Scelgo δ così: $x_0 + \delta < \frac{1}{k_0}$, $\frac{1}{k_0+1} + \delta < x_0 - \delta$
(chi è? x es.)

Voglio "scartare" un numero finito di elementi, alcuni troppo grandi,
altri troppo piccoli, così da avere un numero finito di elementi.

$T = \text{Im}(\varphi)$ posso pensare T in questo modo

$\varphi: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

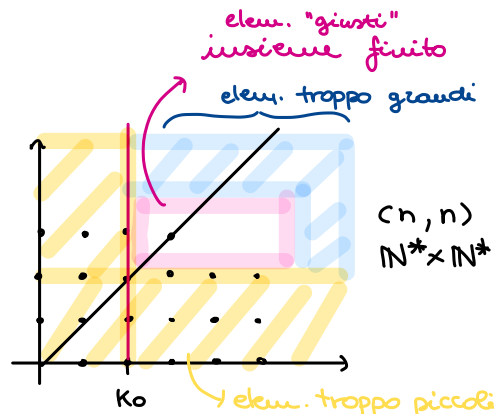
$(n, m) \mapsto \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

$C_0 = \{(n, m) : n \leq k_0 \vee m \leq k_0\}$

$C_1 = \{(n, m) : (n > k_0 \wedge m \geq 1/\delta) \cup (m > k_0 \wedge n \geq 1/\delta)\}$

$C_2 =$ tutti gli altri

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = C_0 \cup C_1 \cup C_2$



Le conditioni C_0 e C_1 individuano quattro strisce, due verticali e due orizz.

$$\begin{aligned} \varphi(C_0) &\subset \left[\frac{1}{k_0}, 2\right] & (n, m) \in C_0 & \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{k_0} > x_0 + \delta \\ \varphi(C_1) &\subset \left[0, \frac{1}{k_0+1} + \delta\right] & (n, m) \in C_1 & \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k_0+1} + \delta < x_0 - \delta \end{aligned}$$

} è all'intervallo che ho scelto $(x_0 + \delta, x_0 - \delta)$

$T \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \varphi(C_2)$ ← solo un numero finito

⇒ x_0 non è di accumulazione per T

 0

Esercizi • $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ } generico chiuso che contiene $A \cap B$

↓
minimo chiuso contenente $A \cap B$

* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

⊗ $A \cap B \subset \overline{A}$
 $A \cap B \subset \overline{B}$

$B = B_r(x)$
 $A = B^c \rightarrow A \cap B = \emptyset$
 $\overline{A \cap B} = \partial B = \partial A$

• $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow$ ovvia per lo stesso motivo di sopra

$\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall r > 0 \exists B_r(x) \cap A \neq \emptyset \\ \text{oppure} \\ \forall r > 0 \exists B_r(x) \cap B \neq \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow \forall r > 0 \exists B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \overline{A \cup B}$

• $\overline{A} = A \cup A'$ $\overline{A} \supset A \cup A'$ $A \subset \overline{A}$
 $A' \subset \overline{A}$ A chiuso $\Leftrightarrow A \supset A'$

$\overline{A} = A \cup \underbrace{\partial A}_{= (\partial A \cap A') \cup (\partial A \setminus A')} = A \cup A'$ $A = \overline{A} = A \cup A'$

punti isolati

• $A \subset \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ aperto} \\ \neq \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow A$ è unione di una famiglia numerabile di aperti disgiunti

$x_0 \in A \quad \mathcal{J}_{x_0} = \{ J \subset A : x_0 \in J, J \text{ è un intervallo aperto} \}$

$J_{x_0} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{x_0}} J$ è $\left\{ \begin{array}{l} \text{un intervallo aperto} \\ \text{contiene } x_0 \\ J_{x_0} \subset A \end{array} \right.$

$y \in J_x \Rightarrow J_y \supset J_x \Rightarrow x \in J_y \Rightarrow J_x = J_y$ $J_x \cap J_y \neq \emptyset$
 \Downarrow
 $\Rightarrow J_x = J_z = J_y$

$A = \bigcup_{x \in A} J_x = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}} J_x$

J_{x_0} fissato $\rightsquigarrow q_0 = \min \{ q \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z} \cap J_{x_0} \neq \emptyset \}$

$\frac{p_0}{q_0}$ elemento di $\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \cap J_{x_0} \}$ che dista meno da 0

$J_{x_0} \rightsquigarrow \frac{p_0}{q_0}$ $\tilde{\mathbb{Q}} =$ razionali ottenuti in questo modo a partire da J_{x_0} ($x_0 \in A$)

$\tilde{\mathbb{Q}}$ è numerabile $A = \bigcup_{r \in \tilde{\mathbb{Q}}} J_r$

NUMERI COMPLESSI

$$z \in \mathbb{C} \quad \begin{matrix} z = a+ib \\ \bar{z} = a-ib \end{matrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

$$\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

trasformazione dei complessi

$$\phi: \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\delta}{\gamma} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

ma spesso "finisce" in \mathbb{Q}

se $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ allora ϕ conserva $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ cioè $\phi: \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$
 $\hookrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma > 0$ \hookrightarrow semipiano superiore
 $\text{Im } z > 0 \Rightarrow \text{Im } \phi(z) > 0$ se $\alpha\delta \neq \beta\gamma$
 ϕ big. (verifica)

$$= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{(\alpha z + \beta)(\overline{\gamma z + \delta})}{(\gamma z + \delta)(\overline{\gamma z + \delta})}$$

$$\overline{\gamma z + \delta} = \gamma \bar{z} + \delta \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\alpha \gamma z \bar{z} + \beta \gamma \bar{z} + \alpha \delta z + \beta \delta}{|\gamma z + \delta|^2} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \beta \gamma (a - ib) &= \beta \gamma a - i \beta \gamma b \\ \oplus \frac{\alpha \delta (a + ib)}{\gamma \delta} &= \frac{\alpha \delta a + i \alpha \delta b}{\gamma \delta} \\ \otimes &= a(\alpha \delta + \beta \gamma) + i b(\alpha \delta - \beta \gamma) \end{aligned}$$

$$\text{Im } \phi(z) = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{|\gamma z + \delta|^2} \cdot \underbrace{\text{Im}(z)}_b$$

Esercizio: $\psi(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$ verificare che $\psi: \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ \hookrightarrow disco unitario

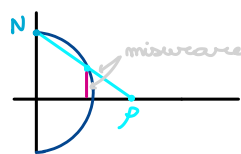
Verificare $\text{Im}(z) > 0 \Rightarrow |\psi(z)| < 1$ + che è una bijezione.

Idea: I complessi sono un piano bidimensionale,

possiamo identificarli come il piano x, y in

un sistema tridimensionale.

Es: Scrivere la big. in coordinate polari



Il polo nord lo penso come un punto all'infinito

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} S \setminus N$$

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} S \quad e \quad \phi(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$$

$$\phi: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \quad \text{continue}$$

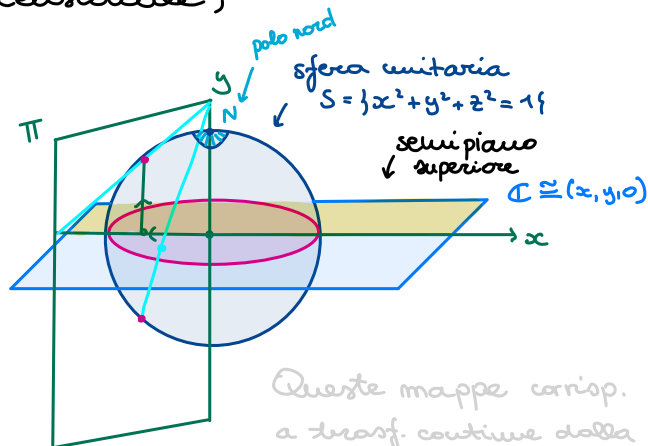
per la topologia indotta su \mathbb{C} dall'identificazione con S

Risolvere: $z^2 = \bar{z}$

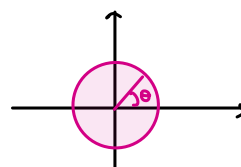
forma
cartesiana
 \downarrow
somme

forma
polare
 \downarrow
prodotti

$$z = a + ib = (a^2 + b^2) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$



Queste mappe corrisp. a transf. continue dalla sfera nella sfera



($z=0$ è sol)

$$z^3 = \bar{z} z = |z|^2$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

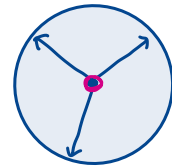
$$\rho^3 e^{i3\theta} = \rho^2$$

$$\rho = a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\rho e^{i3\theta} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ 3\theta = 0 + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2}{3}\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

→ 3 sol geom. distinte



4^a sol
"dimenticata"

Esercizi 1) Scomporre $x^4 + 1$ come prodotto

$$x^4 + 1 = q_1(x) q_2(x)$$

$$q_i \in \mathbb{R}[x]$$

$$i = 1, 2$$

$$\deg(q_i) = 2$$

2) Calcolare $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k}$

$$1) x^4 + 1 = \prod_{i=1}^4 (x - \xi_i)$$

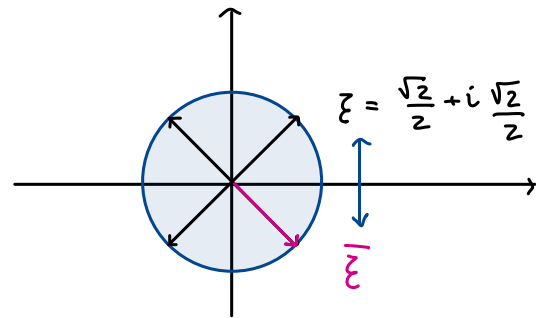
ξ_i sono le 4 soluzioni di $z^4 = -1$

$$\rho^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{a+ib} \\ & (z - \frac{a}{\xi})(z - \bar{\xi}) = (z-a)^2 + b^2 \\ & \left[\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$



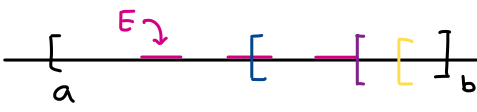
26-10-2021

lezione 13

Prof. Novaga

TEOREMA DI BOLZANO-WEIRSTRASS

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO e di CARDINALITÀ INFINITA $\Rightarrow E$ ha punti di ACCUMULAZIONE

Dim: $n=1$  $E \subseteq [a, b]$ (idea: restringiamo sempre di più l'intervallo)

Costruiamo iterativamente $[a_j, b_j] \subseteq [a_{j+1}, b_{j+1}]$ $a_0 = a, b_0 = b$

$$|b_j - a_j| = \frac{b-a}{2^j} \quad \text{t.c. } E \cap [a_j, b_j] \text{ ha cardinalità infinita}$$

Notazione: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo CHIUSO

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo APERTO

$$\bigcap_j [a_j, b_j] = \bar{x} \in \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = \sup_j a_j = \inf_j b_j$$

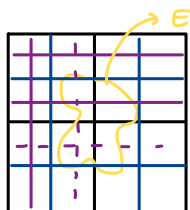
Si ha che \bar{x} è un punto di accumulazione per E , infatti $\forall \varepsilon > 0$

$[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \ni [a_j, b_j]$ DEFINITIVAMENTE in j , cioè $\exists j_0$ tale che

$$[a_j, b_j] \subseteq [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \quad \forall j > j_0$$

Oss: Non è detto che $\bar{x} \in E$

$n > 1$ la dimostrazione è analoga



$E \subseteq Q_0$ M-CUBO. Divido Q_0 in 2^n cubi di lato metà e scelgo Q_1 t.c. $E \cap Q_1$ ha cardinalità infinita.

$$\Rightarrow Q_j \subseteq Q_{j-1}, \quad L_j = \frac{L_0}{2^j} \text{ lunghezza dello spigolo di } Q_j$$

Oss: Non è vero in spazi metrici generali

ES: E CHIUSO $\Leftrightarrow \partial E \subseteq E$

E CHIUSO $\Leftrightarrow \partial E \subseteq E$ dove $\partial E = \{x : x \text{ punto di accumulazione di } E\}$
 \nearrow derivato di E
 $\circ E'$

$$\partial E = \emptyset \Leftrightarrow E \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$$

LIMITI DI FUNZIONI

E, F spazi metrici

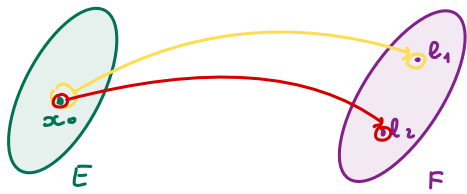
$f: E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ funzione

x_0 punto di accumulazione di E . Si dice che f ha limite $l \in F$ per $x \rightarrow x_0$ se $\forall V$ intorno di l in F $\exists U$ intorno di x_0 in E tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$ (Posso prendere U, V palle).

Oss: • Il limite non dipende da $f(x_0)$

Non è importante se f sia definita o meno in x_0 , importa solo ciò che accade in un intorno di quel punto.

• Il limite l si indica $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ed è UNICO (se esiste)



dove mandiamo la palla più piccola? ^{intersezione}

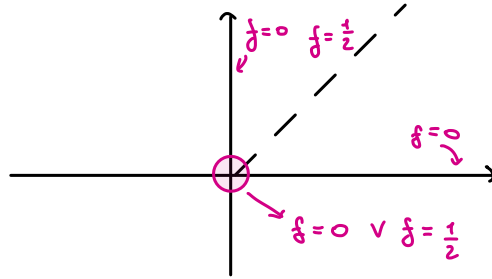
Non possiamo mandarla in $l_1 \in l_2$

ESEMPLI:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

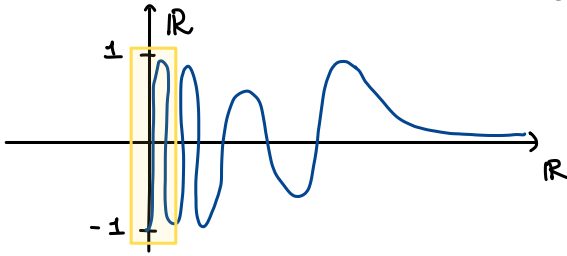
$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)?$

↓
NON ESISTE



$$x=y \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



Per le funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è conveniente considerare $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ^{\mathbb{R} esteso}

Si può estendere la definizione ponendo

$$U \text{ intorno di } +\infty \Leftrightarrow \exists x \text{ t.c. } y \in U \quad \forall y > x$$

$$U \text{ intorno di } -\infty \Leftrightarrow \exists x \text{ t.c. } y \in U \quad \forall y < x$$

\Rightarrow Sono definiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ e i limiti possono essere $\pm\infty$

ES: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$

PROPRIETÀ DEI LIMITI IN $\overline{\mathbb{R}}$

TEO (Permanenza del segno): $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ (vale anche $l = +\infty$)

$$\Rightarrow \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } f(y) > 0 \quad \forall y \in U$$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \quad l, m \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \odot \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$ avviene quando otteniamo $\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$

FORME INDETERMINATE

$\odot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \ell \cdot m$ avviene quando abbiamo $0 \cdot \infty$

Con le convenzioni: $\pm \infty \pm \infty = \pm \infty$, $(\pm \infty) \cdot (\pm \infty) = +\infty$
 $\pm \infty + c = \pm \infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

$\odot m \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ avviene $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ (FORMA INDETERMINATA)

con la convenzione $\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & c > 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$

$\odot m = 0$, se $g(x) > 0$ in $U \setminus \{x_0\}$ e $\ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \end{cases}$

se $g(x) < 0$ si invertono i segni

Oss: $\ell = m = 0$ abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Oss: I limiti di funzione includono i limiti di successione

Def: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in E se $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow E$ t.c. $a_n = f(n)$
 $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

È definito $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in E \Leftrightarrow \forall V$ int. di ℓ in $E \exists U$ int. di $+\infty$

t.c. $f(n) \in V \quad \forall n \in U \cap \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in V \quad \forall n > n_0$

DEF Una succ. a_n t.c. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in E$, $a_n \rightarrow \ell$ si dice **convergente** in \mathbb{R}^n .

Se $E = \overline{\mathbb{R}}$ e $\ell = \pm \infty$, si dice **divergente**.

ES: $C \subseteq E$ sp. metrico è chiuso $\Leftrightarrow \forall a_n$ succ. in C con $a_n \xrightarrow{E} x \Rightarrow x \in C$
 \hookrightarrow chiusura per successioni

28-10-2021 lezione 14 Prof. Novaga

Prop: $f, g: E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 pt. di acc. di E . $f \leq g$ in un intorno di x_0

$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g = m \Rightarrow \ell \leq m$

Dim: Detta $h = g - f \geq 0$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} h = m - \ell$.

Suppongo per assurdo $m - \ell < 0 \Rightarrow$ (per un. segno) $h(x) < 0$ in un int. di x_0

$\Rightarrow g < f$ in un int. di x_0 ASSURDO

Teorema (2 carabinieri)

$$f, g, h : E \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f \leq h \leq g$ in un intorno di x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = l \in \bar{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h = l$$

Dim caso $l = +\infty$: $\forall V$ intorno di $+\infty$ del tipo $(a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in V \quad \forall x \in U$, cioè $f(x) > a \quad \forall x \in U$

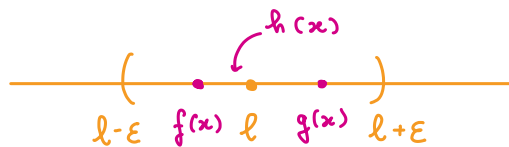
$$\Rightarrow h(x) \geq f(x) > a \quad \forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = +\infty$$

caso $l = -\infty$: analogo

caso $l \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon \exists U$ intorno di x_0 : $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ e $g(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in U$

$$\Rightarrow h(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Graficamente:



$$\text{Cor 1} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$\text{Dim} \quad (\Leftarrow) \quad \begin{array}{ccc} -|f(x)| & \leq f(x) & \leq |f(x)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array} \Rightarrow f(x) \text{ va a } 0 \text{ per il teorema}$$

$$(\Rightarrow) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \forall \varepsilon \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c. } f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow |f(x)| \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$\text{Cor 2} \quad f, g : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad |g(x)| \leq M \text{ in un int. di } x_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

Dim : $-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$ in un intorno

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} M|f(x)| = 0 \Rightarrow \text{per il teorema (2 carab.)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

COMPATTEZZA

Def E spazio topologico \rightarrow include tutti gli spazi metrici

① E si dice COMPATTO se per ogni RICOPRIMENTO APERTO di E, cioè

$$\forall [\Omega_i]_{i \in I} \text{ FAMIGLIA DI APERTI } \text{ t.c. } E \subseteq \bigcup_i \Omega_i \Rightarrow \exists \Omega_1, \dots, \Omega_N \text{ t.c. } E \subseteq \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$$

↓
SOTTORICOPRIMENTO FINITO

② E si dice numerabilmente compatto se vale la proprietà precedente

$$\forall I \text{ indice } (E \text{ COMPATTO} \Rightarrow E \text{ NUMERABILMENTE COMPATTO})$$

③ E si dice SEQUENZIALMENTE COMPATTO se $\forall x_n$ successione in E

$$\exists x_{n_k} \text{ SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE in E, cioè } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x \in E$$

Teorema Se E è metrico : ① \Leftrightarrow ② \Leftrightarrow ③ (①, ②, ③ equivalenti)

OSS: In generale ① $\not\Leftrightarrow$ ③, ③ $\not\Leftrightarrow$ ① e ② $\not\Leftrightarrow$ ①

Prop: E sp. metrico compatto, $F \subseteq E$ chiuso $\Rightarrow F$ sp. metrico compatto

Dim: $x_n \in F \subseteq E$, $\exists x_{n_k} \rightarrow x \in E \Rightarrow (F \text{ chiuso}) x \in F$

Prop: E metrico, $F \subseteq E$ compatto $\Rightarrow F$ chiuso e limitato

[F limitato significa $F \subset B_r(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$]

Dim. ○ F chiuso. Se per assurdo F non è chiuso $\Rightarrow \exists x_0$ pt di acc di F,
 $x_0 \notin F$ $\exists x_0 \rightarrow x_0, \dots, x_n \in F \Rightarrow (F \text{ cpt}) \underline{x_{n_k} \rightarrow x_1 \in F}$ ma $x_1 = x_0 \leadsto$

○ F limitato. Per assurdo F non limitato \Rightarrow dato $x_0 \in F$, $F \not\subset B_n(x_0) \forall n \in \mathbb{N}$

Definiamo $x_1 \in F \setminus B_1(x_0)$,
" $x_2 \in F \setminus B_{d(x_0, x_1)+1}(x_0)$ } quindi $x_n \in F \setminus B_{d(x_0, x_{n-1})+1}(x_0)$

la successione x_n verifica $d(x_n, x_m) \geq 1 \quad \forall n \neq m$

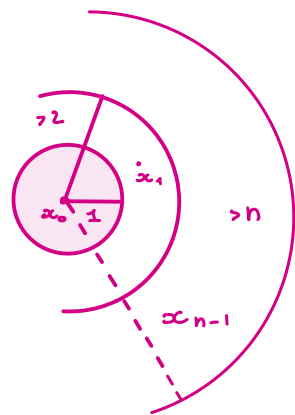
lo stesso vale per x_{n_k} sottosuccessione $\Rightarrow x_{n_k}$ non può convergere.

Oss: In generale \exists spazi E metrici e sottoinsiemi $F \subseteq E$ chiusi, limitati, ma non compatti.

ES: $\ell_\infty = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ successioni limitate} \}$

$a_n \in \mathbb{R}$ e $|a_n| \leq M \quad \forall n$ spazio vettoriale su \mathbb{R}

$\|x\| = \sup_n |x_n|$ norma di $x \in \ell_\infty$



Le palle $\overline{B_R}(x) = \{y \in \ell_\infty : \|x-y\| \leq R\}$ sono chiusi e limitati non cpt.

Basta prendere, in $B_1(0)$, la successione $x_n = (0, \dots, \underbrace{1}_{n^{\text{a}} \text{ posizione}}, \dots, 0, \dots)$.

Teo: $F \subset \mathbb{R}^n$ CHIUSO e LIMITATO $\Rightarrow F$ COMPATTO

Dim. $x_n \in F$ successione

① $\exists x \in F$ t.c. $x_n = x$ per infiniti n (frequentemente) $\Rightarrow \exists x_{n_k} = x \quad \forall k$

② Altrimenti, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è INFINITO e LIMITATO ^(B.W.) $\Rightarrow \exists$ pt. di accumulazione

$x \in \mathbb{R}^n$ per $\{x_n\}_n \Rightarrow$ si ottiene $x_{n_m} \rightarrow x \in F$ (F chiuso)

Teo E sp. metrico, $F \subseteq E$ compatto infinito $\Rightarrow F$ ha un punto di accumulazione che appartiene ad F .

Dim. Sia x_n succ. in F t.c. $x_n \notin \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x \in F$
 $x_{n_k} \neq x \quad \forall k \Rightarrow x$ è di accumulazione per F .
↓ compattezza

FUNZIONI CONTINUE

Def: $f: E \rightarrow F$ E, F sp. metrici $x_0 \in E$, f si dice CONTINUA in x_0 se
 $\circ x_0$ è pt. isolato

$\circ x$ è di accumulazione e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in F$

Oss: Dalla def. di limite, f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall V$ intorno di $f(x_0)$

$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(U) \subseteq V$.

Def: f si dice continua su $E' \subseteq E$ se è continua $\forall x_0 \in E'$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

$f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue in x_0 , allora

$\circ f \pm g$ cont. in x_0

$\circ f \cdot g$ cont. in x_0

$\circ g(x_0) \neq 0$, f/g cont. in x_0

$\circ c \cdot f$ cont. in $x_0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Teo (Perim. segue) $f(x)$ cont. in x_0 con $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U$ intorno di x_0 t.c.

$f(x) > 0$ (risp $f(x) < 0$) $\forall x \in U$

Oss L'insieme delle funzioni continue $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ che si indica con $C(E)$ o $C^0(E)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (di dim infinita).

Teorema di composizione di f continue (o sostituzione nei limiti)

$f: E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ E, F sp. metrici, x_0 pt. di accumulazione, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

$g: F \rightarrow G$ continua in y_0

\Rightarrow la funzione $g \circ f: E \setminus \{x_0\} \rightarrow G$ ha limite in x_0 e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0)$,

cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$ (sostituzione $y = f(x)$).

Dim Sia V intorno di $g(y_0) \Rightarrow \exists U$ intorno di y_0 tale che $g(U) \subseteq V$

$\Rightarrow \exists W$ intorno di x_0 tale che $f(W) \subseteq U \Rightarrow (g \circ f)(W) \subseteq V$

Cor Se ho $f: E \rightarrow F$ continua in x_0
 $g: F \rightarrow G$ continua in $f(x_0)$ $\Rightarrow g \circ f$ continua in x_0

23-10-2021 Lezione 15 Prof. Carminati

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (E, d) spazio metrico

Def: f L-Lip $\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq L d(x, y)$

Prop: f L-Lip $\Rightarrow f$ continua

Dim: Basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

per il valore assoluto per definizione
 $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq L d(x, x_0)$

Passo al limite:

$\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} L |x - x_0| = 0$

Applico il teorema dei due carabinieri: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ restrizione di f a U

Def: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ f loc. Lip $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in E \exists L > 0 \exists U$ intorno di a t.c. $f|_U$ è L-Lip

Prop: f loc. lip. su $E \Rightarrow f$ è continua

Dim: $a \in E \exists U$ int. di a t.c. $f|_U$ è L-lip $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f$ continua
 $\exists L > 0$

Es: $x \mapsto \sqrt{x}$ (i) non è Lip su $[0, +\infty)$ (e nemmeno su $(0, +\infty)$)

(ii) è loc. Lip. su $(0, +\infty)$ ed è continua su $[0, +\infty)$

$$[(i)] \quad f \text{ è } L\text{-lip} \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L \quad \forall x \neq y \quad (*)$$

la condizione $(*)$ non è verificata su tutto $[0, +\infty)$ infatti prendendo

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad y = 0 \quad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \quad \text{quindi } (*) \text{ non è verificata}$$

Oss: $f(x) = \sqrt{x}$ è L -lip su $[a, +\infty)$ $a > 0$ con $L = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \leq \frac{|x - y|}{2\sqrt{a}} \quad \begin{cases} \sqrt{x} \geq \sqrt{a} \\ \sqrt{y} \geq \sqrt{a} \end{cases}$$

ii) se $x_0 > 0$, l'intervallo $[a, +\infty)$ è intorno di x_0 su cui f è L -lip, $a \doteq x_0/2$

$$L = \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \text{ è loc. Lip. su } (0, +\infty)$$

Esercizio: Verificare che:

$z \mapsto 1/z$ è loc lip su \mathbb{C}^* (è L -Lip su $|z| \geq r$ con $L = 1/r^2$)

$z \mapsto z^2$ è loc lip su \mathbb{C} (" " " $|z| \leq r$ con $L = 2r$)

ma non sono lip nel loro dominio.

La proprietà di Lip. non è stabile per operazioni algebriche. (Es: x L -lip, $x \cdot x = x^2$ NO)

Oss: Somma e prodotto di funz. continue è continua

(ma prod. di funz. Lip. può non essere Lip.)

Prop (somme e prodotto di funzioni con limite finito) x_0 pto di accumulazione.

$g, f: E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l + m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = l \cdot m$$

Def: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall V$ intorno di $l \exists U$ int di x_0 t.c. $f(U \setminus \{x_0\}) \subset V$ (L)

Oss: È equivalente a chiedere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } f(U \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(l) \quad (L')$$

$(L) \Rightarrow (L')$ perché $B_\varepsilon(l)$ è un intorno di l

$(L') \Rightarrow (L)$ perché qui l'intorno di l contiene una palla $B_\varepsilon(l)$, $\varepsilon > 0$

Dimo (Prop.) \oplus fisso $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \exists U_1 \text{ intorno di } x_0 : f(U_1 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(l) \\ \exists U_2 \text{ " " " : } g(U_2 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(m) \end{cases}$$

$U \doteq U_1 \cap U_2$ è ancora intorno di x_0

$$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = l + r_1 \quad |r_1| < \varepsilon/2 \\ g(x) = m + r_2 \quad |r_2| < \varepsilon/2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) + g(x) = l + m + \overbrace{r_1 + r_2}^r$$

$$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) + g(x) \in B_\varepsilon(l+m)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U : (f+g)(U \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(l+m)$$

Per il limite del prodotto, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = l \cdot m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)g(x) - l \cdot m| = 0$

$$0 \leq |f(x)g(x) - l \cdot m| \leq |f(x)g(x)| + |lg(x) + lg(x) - l \cdot m|$$

$$\begin{array}{c} \leq \underbrace{|f(x) - l|}_{\downarrow 0} \underbrace{|g(x)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{è limitato} \\ \text{in un intorno} \\ \text{di } x_0}} + \underbrace{|l| |g(x) - m|}_{\substack{\downarrow \\ x \rightarrow x_0 \\ 0}} \\ \hline \underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow 0} \end{array}$$

Prodotto di funz. infinit. per funz. limitata e infinitesimo.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)g(x) - l \cdot m| = 0$$

Oss: Il risultato in questa forma copre anche il caso delle successioni

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è semplicemente una funzione definita su $E = \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto a_n \end{array} \quad x_0 = +\infty$$

Gli intorni di ∞ sono gli insiemi che contengono una semiretta

$$[n_0, +\infty) \cap \mathbb{N}.$$

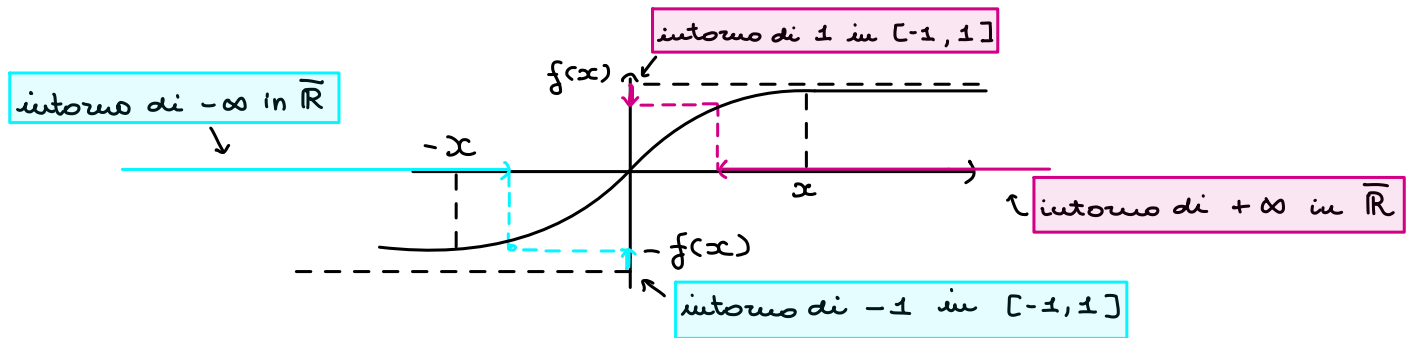
$\exists U$ intorno di ∞ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in U \leftarrow$ Formulazione generale

$$\exists \bar{n} \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \leftarrow \text{Forma particolare nel caso delle successioni}$$

Es: $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $\varphi: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1, 1)$

È continua, bigettiva, strett. crescente

Suggerimento: $f(x) = -f(-x)$ (\therefore funzione dispari \Rightarrow assume valori simmetrici rispetto l'origine), esaminare prima il caso $x > 0$ e poi sfruttare la simmetria.



La topologia in $\overline{\mathbb{R}}$ è definita in modo da "rispecchiare" quella su $[-1, 1]$

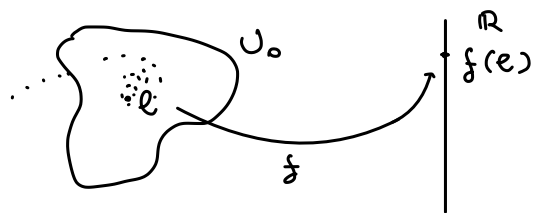
Se riscrivessimo la dimostrazione del punto \oplus vista sopra gli intorni

U_1 e U_2 sarebbero: $U_1 = \{n \geq n_1\}$, $U_2 = \{n \geq n_2\}$

$$U = U_1 \cap U_2 = \{n \geq \max\{n_1, n_2\}\} \quad \{ \quad \dots \}$$

LIMITI DI SUCCESSIONI

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ e $f: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$
Formulazione di c) nel caso delle successioni
 $\Rightarrow \exists n_0: f(a_n)$ è ben definita $\forall n \geq n_0$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(l)$
intorno di l
continua in l



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow \forall$ intorno U di $l \exists \bar{n}: a_n \in U \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow$ buone def. di $f(a_n)$ per $n \geq \bar{n}$

teoria \Rightarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(l)$
di comp.

Esercizio: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\begin{cases} a_0 = a \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

l è un punto fisso per f

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $l = f(l)$

TOOL KIT (Strumenti per il calcolo dei limiti)

a) operazioni algebriche

b) due carabinieri

b') infinitesima \times limitata è infinitesima

c) composizione con funz. continue

Limiti di successioni: esempi

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

È vero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ no (vale solo se $a_n > 0$ defn.)

$$\text{Se } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n \text{ non converge}$$

dividere o moltiplicare per questo è uguale

Infatti $a_{2n} \rightarrow +\infty$ mentre $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$

$$a_n = a^n$$

$a \in \mathbb{R}$ fissato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \nexists & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dim.

$$\boxed{a > 1} \quad a = 1 + \delta \text{ con } \delta > 0$$

$$\begin{array}{ccc} (1 + \delta)^n & \stackrel{②}{\geq} & 1 + n\delta \geq n\delta \\ \downarrow & \text{Bernoulli} & \downarrow \\ +\infty & & +\infty \end{array} \quad n \rightarrow \infty$$

$a = 1$ e $a = 0$ banali

$$\boxed{0 < |a| < 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0$$

NB: $1/|a| > 1$

↪ $+\infty$ per il punto prec.

Esercizi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^2} \quad a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 2^n}{n^n}$$

Prop: Se $(a_n)(b_n)$ sono succ. a termini positivi (i.e. $a_n > 0 \forall n$, $b_n > 0 \forall n$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0 (*)$$

Allora $a_n \geq c b_n \quad \forall n \geq n_0$ (con $c = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$)

Dim. (*) $\Leftrightarrow a_{n+1} b_n \geq b_{n+1} a_n \quad \forall n \geq n_0$
 \Downarrow
 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq \frac{a_n}{b_n} \quad \forall n \geq n_0$

Posto $r_n \doteq \frac{a_n}{b_n}$ abbiamo $r_{n+1} \geq r_n \quad \forall n \geq n_0$ quindi $r_n \geq r_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ovvero $\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \quad \forall n \geq n_0$

\downarrow
 $a_n \geq c b_n \quad \forall n \geq n_0$

Applicazione: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^2} \quad (a > 1)$

Fissiamo b A.C. $1 < b < a$ (p.es. $b = \frac{a+1}{2}$)

Poniamo $a_n \doteq b^n$, $b_n \doteq n^2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1 \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \rightarrow 1$$

Quindi $\exists n_0$ t.c. $\frac{b_{n+1}}{b_n} < b \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq c b_n \quad \forall n \geq n_0$
 $b^n \geq c n^2 \quad \forall n \geq n_0$

$$\frac{a^n}{n^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{b^n}{n^2} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot c \quad \forall n \geq n_0$$

$\downarrow \begin{matrix} n \rightarrow \infty \\ +\infty \end{matrix}$ $\left(\frac{a}{b}\right) > 1$

Pertanto per il th dei due carabinieri (in questo caso ne basta 1)

si ha: $\frac{a^n}{n^2} \rightarrow +\infty$

02-11-2021 lezione 16 Prof. Novaga

FUNZIONI CONTINUE IN SPAZI METRICI

Prop: $f: E \rightarrow F$ continua in $x_0 \in E \Leftrightarrow \forall x_n \xrightarrow{n} x_0$ si ha $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

Dim: Per esercizio.

Oss: Non vale in uno spazio topologico generale

TEOREMA DI WEIRSTRASS

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua, E sp. metrico compatto

$\Rightarrow f$ ammette MASSIMO e MINIMO in E cioè $\exists x_m, x_n \in E$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n) \quad \forall x \in E$$

OSS: Si applica a $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se E è chiuso e limitato

Dim: Mostriamo che $\exists x_m$ di MINIMO.

Sia $\ell = \inf_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e sia $y_n \in f(E)$ con $y_n \rightarrow \ell$

$y_n = f(x_n)$, $x_n \in E$. E compatto $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x_m \in E$

f continua $\Rightarrow f(x_m) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = \ell$

x_m è di MINIMO. Analogo per x_n di MASSIMO.

SUCCESSIONI DI CAUCHY

E sp. metrico, x_n successione in E

x_n si dice di CAUCHY se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$

OSS: $\circ x_n \rightarrow x \in E \Rightarrow x_n$ è di CAUCHY

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } d(x_n, x) < \varepsilon/2 \quad \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \\ d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \end{array} \right]$$

$\circ x_n$ di Cauchy $\Rightarrow x_n$ è limitata

Oss: In generale possono esistere succ. di Cauchy non convergenti

ES: $E = \mathbb{Q}$ $x_n \in \mathbb{Q}$ $x_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ è di CAUCHY

Prop: $E = \mathbb{R}^n$, x_n di C. $\Rightarrow x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

Dim: x_n di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}_n$ è LIMITATO

\Rightarrow Caso ① $\{x_n\} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ FINITO

Cauchy
 $\Rightarrow x_n = \bar{x}_i \quad \forall n$ abb. grande $\Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x}_i$

Caso ② $\{x_n\}$ INFINITO $\Rightarrow \exists x$ di ACCUMULAZIONE

$\Rightarrow \exists x_{n_k} \xrightarrow{k} x \quad \Rightarrow \text{Cauchy} \quad x_n \rightarrow x$

In fatti $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$

$\exists k_\varepsilon \text{ t.c. } |x_{n_k} - x| < \varepsilon \quad \forall k > k_\varepsilon$

$\Rightarrow |x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ dove scelgo

$K > K_\varepsilon$ tale che $n_K > n_\varepsilon$

Def: lo spazio metrico E è completo se tutte le succ. di Cauchy in E convergono.

Oss: \mathbb{R}^n è completo, \mathbb{Q} non è completo,

↙ E sp. metrico compatto $\Rightarrow E$ è completo

In questo corso questa nozione è importante

Oss: \exists campi ordinati e completi (in questo senso) $\neq \mathbb{R}$ (es. $\mathbb{R}(x)$)

Però \mathbb{R} è l'unico campo ordinato, completo e archimedeo.
↳ vieta gli infinitesimi

Oss: Un altro modo per costruire \mathbb{R} è $\mathbb{R} = \{x_n \in \mathbb{Q} \text{ di CAUCHY}\} / \sim$

$\{x_n\} \sim \{y_n\}$ se $(x_n - y_n) \xrightarrow{n} 0$

Es: $E = C^0([0,1]) = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$

spazio vettoriale $d(f,g) = \max_{[0,1]} |f-g|$ DISTANZA

$\Rightarrow E$ sp. metrico completo (VA DIMOSTRATO)

Def: E spazio vettoriale (su \mathbb{R}) è normato se $\exists \|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

○ $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$

○ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

○ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x \in E$

○ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (SUBADDITIVITÀ)

Oss: E sp. normato è metrico ponendo $d(x,y) = \|x-y\|$

Def: E spazio normato è uno spazio di Banach se, come spazio metrico, è completo.

Es: \mathbb{R}^n , $C^0([0,1])$, $C^0(K)$ con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto sono spazi di Banach

SUCCESSIONI IN \mathbb{R} , LIMITE NOTEVOLE

$$\left[\begin{array}{l} \text{CRITERIO DEL RAPPORTO: } a_n > 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \\ x > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty \end{cases} \end{array} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n} x \geq 0 \right]$$

Segue dal confronto di a_n con $(x \pm \varepsilon)^n$ e dal fatto che $x^n \rightarrow 0$ per $x \in [0, 1)$ e $x^n \rightarrow +\infty$ per $x > 1$. **VERIFICA PER ES.**

Applicazioni:

• $x_n = \frac{n^a}{a^n}$ $a > 0$ chiedere questo e come chiedere chi va a ∞ più velocemente
 $a > 1$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \frac{a^n}{a^{n+1}} = \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_0\right)^a \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \quad a^n \xrightarrow{n} \infty \text{ più vel.}$$

• $x_n = \frac{a^n}{n!}$ $a > 1$ $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, $n! \rightarrow +\infty$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0 \quad n! \rightarrow \infty \text{ più velocemente}$$

• $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{dove } e = \underbrace{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{NUMERO DI NEPERO}} = 2,71 \dots = e$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0 \quad n^n \rightarrow \infty \text{ più vel.}$$

Quindi, per n grande, si ha $n^a \ll a^n \ll n! \ll n^n$ $a > 0$, $a > 1$

Verifichiamo che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge.

Prop: x_n monotona, cioè $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n$ o $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n$,

x_n LIMITATA $\Rightarrow x_n$ CONVERGE

Dim: $\{x_n\}$ ha un punto di accumulazione

x_n crescente, l'unico punto di accumulazione è $\sup x_n$

$$\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x = \sup x_n \Rightarrow x_n \xrightarrow{n} x$$

Viceversa, x_n decrescente $\Rightarrow x_n \rightarrow \inf x_n$

Prop: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata (converge ad $e > 2$)

Dim. ① x_n crescente

$$x_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = x_n$$

② x_n limitata, in particolare $x_n < 3 \quad \forall n$

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)}_{< 1} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$$

osserviamo che

$$\begin{cases} \textcircled{1} & k! \geq 2^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \textcircled{2} & \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1 \end{cases}$$

← DA RICORDARE

$$x_n < 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \stackrel{\textcircled{2}}{=} 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n$$

Restano da vedere ① e ②

① Per induzione $k! \geq 2^{k-1}$

• $k=1$ $1 \geq 1$ ok

• $k=2$ $2 \geq 2$ ok

• $k > 2$ supp. $(k-1)! \geq 2^{k-2} \Rightarrow k! \geq 2(k-1)! \geq 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$

② Segue dalla formula:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$
$$= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

Ponendo $a=1, b=x$

Oss: Dalla disug. $x_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ si ha

$$e \leq \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

In realtà si ha proprio $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

LIMITI DI SUCCESIONI E FUNZIONI

$$\odot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underset{\text{DEF}}{\uparrow} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underset{\text{DEF}}{\uparrow} = e \in \mathbb{R}$$

Oss: Dall'uguaglianza $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ si può vedere (va dimostrato)

$$e \notin \mathbb{Q}, \text{ cioè } e \neq \frac{p}{q} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

$$\odot \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{per criterio del rapporto}$$

$$\odot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n n!}{n^n} \quad x > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} (n+1)!}{x^n n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{x^n n!}{n^n} = \begin{cases} \infty & x > e \\ 0 & x \in (0, e) \end{cases}$$

Vale la formula di Stirling per $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{VA DIMOSTRATA}$$

Dove $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow \infty$ se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{e^n n!}{n^n} \sim \lim_n \sqrt{2\pi n} = +\infty$$

— 0 —

Siano P, Q polinomi, $P(n) = \sum_{k=0}^N a_k n^k$, $Q(n) = \sum_{k=0}^M b_k n^k$, $N = \deg P$, $M = \deg Q$

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_n \frac{a_N n^N}{b_M n^M} = \frac{a_N}{b_M} \lim_n n^{N-M} = \begin{cases} \text{seg} \left(\frac{a_N}{b_M}\right) \infty & N > M \\ a_N / b_M & N = M \\ 0 & N < M \end{cases}$$

$$\text{Infatti } P(n) = a_N n^N \left(1 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} \frac{1}{n^{N-k}}\right)$$

$$Q(n) = b_M n^M \left(1 + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{b_k}{b_M} \frac{1}{n^{M-k}}\right)$$

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_n \frac{a_N n^N}{b_M n^M} \cdot \underbrace{\lim_n \frac{1 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} \frac{1}{n^{N-k}}}{1 + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{b_k}{b_M} \frac{1}{n^{M-k}}} \rightarrow 1}_{=1}$$

Nei limiti conta solo il termine che va a ∞ più velocemente o quello che va a 0 più lentamente.

$$\odot \lim_n a^{1/n} \quad a > 0$$

$$a=1 \quad a^{1/n} = 1$$

$$a > 1 \quad a^{1/n} \text{ DECRESCENTE} \quad a^{1/n} > 1 \quad \forall n \Rightarrow \exists \lim_n a^{1/n} = l \geq 1 \text{ e si ha}$$

$$a^{1/n} \geq l \quad \forall n \Rightarrow a \geq l^n \quad \forall n \Rightarrow l = 1$$

Analogamente, se $a \in (0, 1)$, $a^{1/n}$ è crescente, $a^{1/n} < 1 \quad \forall n$ e $\lim_n a^{1/n} = 1$

— o —

Utilizzando la monotonia, gli stessi risultati valgono per limiti di funzioni, in particolare:

$$x^d \ll a^x \ll x^x \quad \text{per } x \rightarrow \infty \quad d > 0, a > 1$$

cioè:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^d}{a^x} = 0 \quad \forall d > 0 \quad a > 1$$


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = 0 \quad \forall a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} a_N/b_n \cdot \infty & N > M \\ a_N/b_m & N = M \\ 0 & N < M \end{cases} \quad \text{con}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^M b_k x^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left[\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1} \right]$$



SIMBOLI DI LANDAU

Notazione utile nei limiti

Def Data $f(x)$ t.c. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

DEF $o(f)$ per $x \rightarrow x_0$ come l'insieme delle funzioni $g(x)$ (o una generica funzione)

↳ o piccolo

$$\text{t.c. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ES: $x_0 = 0 \quad f(x) = x^d \quad d \geq 0$

$g \in o(f)$ o $g = o(f)$ è una f. che va a zero più rapidamente di x^d

In particolare $x^\beta = o(x^d)$ se $\beta > d$.

Se invece $x_0 = +\infty \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha)$ se $\beta < \alpha$

In particolare $P(x)$ è un polinomio:

$$P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = a_N x^N + o(x^N) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$P(x) = a_0 + o(1) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Def: $O(f)$, per $x \rightarrow x_0$, è l'insieme delle funzioni g t.c. $\exists C > 0$ e U int. di x_0 t.c. $|g(x)| \leq C|f(x)| \quad \forall x \in U, x \neq x_0$.
↳ O grande

In particolare $o(f) \subseteq O(f)$

$$\underline{\text{ES}}: x^\beta = O(x^\alpha) \begin{cases} \text{per } x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \beta \geq \alpha \\ \text{per } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \beta \leq \alpha \end{cases}$$

$$P(x) = O(x^N) = a_N x^N + O(x^{N-1}) \text{ per } x \rightarrow \infty$$

VALGONO LE SEGUENTI REGOLE:

- 1) $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
- 2) $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$
- 3) $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- 4) $o(f) + o(g) = o(\max(|f|, |g|))$
- 5) $O(f) + O(g) = O(\max(|f|, |g|))$

$$\underline{\text{ES}}: o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

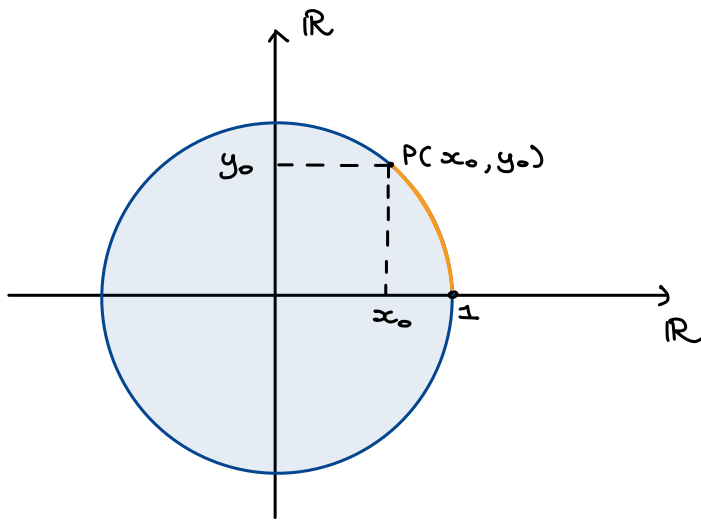
$$o(x^\alpha) + o(x^\beta) = \begin{cases} o(x^\alpha) & x \rightarrow \infty \\ o(x^\beta) & x \rightarrow 0 \end{cases} \quad \alpha > \beta$$

$$\underline{\text{Oss}}: f + o(f) \sim f \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$\frac{f + o(f)}{g + o(g)} \sim \frac{f}{g} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}$$

LIMITI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

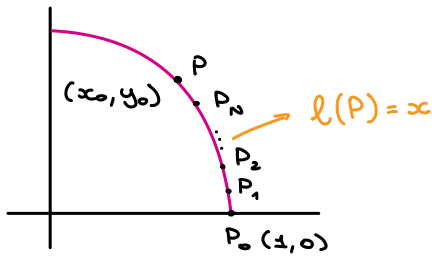


$$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

cerchio unitario

$l(P)$ = lunghezza dell'arco
tra $(1, 0)$ e P



$$l(P) \stackrel{\text{DEF}}{=} \sup_{\{P_i\}_i} \sum_{i=1}^N |P_{i+1} - P_i|$$

Dato $x \in [0, 2\pi)$ $\exists!$ $P \in S^1$ t.c. $l(P) = x$

$l(P) = (x_0, y_0)$ definiamo $\sin(x) = x_0$ e $\cos(x) = y_0$

Estendiamo $\sin(x)$ e $\cos(x)$ a funzioni 2π periodiche su \mathbb{R} ,
cioè $\sin(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} \sin(x_0)$ dove $x_0 \in [0, 2\pi)$ è t.c. $x = x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

e lo stesso per $\cos(x)$.

Def alternativa

Def. la funzione $e^{ix} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ omo di gruppi
 $\Rightarrow \cos(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} \text{Re}(e^{ix})$ $\sin(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} \text{Im}(e^{ix})$

Dove e^{ix} è: ① L'omomorfismo di periodo minimo 2π con $\text{Im}(e^i) > 0$

$$\textcircled{2} e^{ix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

\uparrow
LIMITE IN \mathbb{C}

Dalla definizione otteniamo $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$

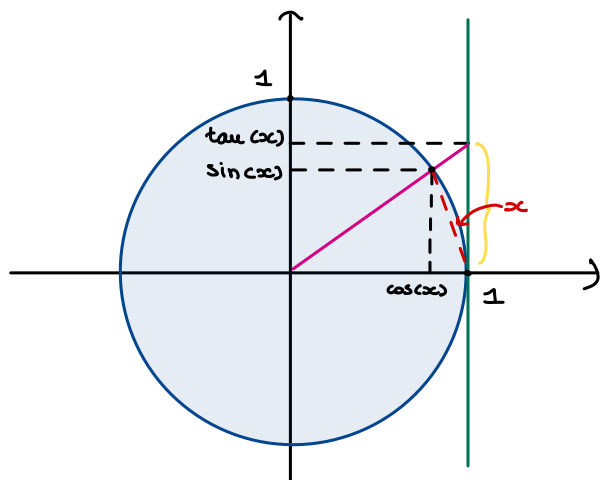
$\Rightarrow \sin(x)$ e $\cos(x)$ sono funzioni continue infatti si ha:

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sin(x), \quad \cos(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x)$$

Si ha inoltre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, cioè $\sin(x) = x + o(x)$

Questo segue dalle disuguaglianze $\sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 \downarrow
 VA DIMOSTRATA

$$x \in [0, \pi/2)$$



Dividendo per $\sin(x)$ si ottiene

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$
 1 1

Conseguenze:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + o(x)$$

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

infatti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 - \cos^2(x)}^{\sin^2(x)}}{x^2(1 + \cos(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

05-11-2021 lezione 18 Prof. Carminati

Esercizi per casa:

1) $a = 2020^{2021}$ $b = 2021^{2020}$ $\max\{a, b\} = ?$

2) Determinare sup & inf di $A := \{ \sqrt[n]{n} : n \geq 2 \}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n + 3^n}$ _____ o _____

Prop: Se $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{(>)}{\leq} \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \exists c > 0 : a_n \stackrel{(>)}{\leq} c b_n \quad (x \text{ es.})$$

a_n succ. data

b_n termine di paragone $\rightarrow b_n = b^n$ $\frac{b_{n+1}}{b_n} = b$

Cor: Se $a_n > 0$

i) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b \quad \forall n \geq n_0 \quad \exists c : a_n \leq c b^n \quad \forall n \geq n_0$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora $\forall b > l \quad \exists n_0, c$ t.c. $a_n \leq c b^n \quad \forall n \geq n_0$

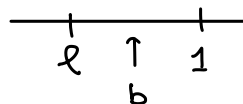
Oss: se $l < 1$ posso scegliere $b \in (l, 1)$ ottenendo che $a_n \rightarrow 0$
con velocità esponenziale.

Dim: i) deriva da prop. precedente con $b_n = b^n$

ii) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < b \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, b)$ definitivamente

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ definitivamente (e si conclude con (i))

Oss: basta prendere $b = \frac{l+1}{2}$



Cor: Se $a_n > 0$

i) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b \quad \forall n \geq n_0 \quad \exists c > 0 : a_n \geq c b^n \quad \forall n \geq n_0$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora $\forall b < l \quad \exists n_0, c$ t.c. $a_n \geq c b^n \quad \forall n \geq n_0$

Oss: se $l > 1$ posso scegliere $b \in (1, l)$ ottenendo che $a_n \rightarrow +\infty$
con velocità esponenziale.

Dim. x esercizio:

Es: $a_n = \binom{2n}{n} a^n$ con $a > 0$ fissato

Discutere il comportamento di a_n al variare di $a > 0$

(Oss: $\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n$)

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} a^n \quad (2n)! \neq 2(n)!$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} a^{n+1} \cdot \frac{n!^2}{(2n)! a^n} & a^{n+1} &= a \cdot a^n \\ & & (2n+2)! &= (2n+2)(2n+1)(2n)! \\ & & (n+1)! &= (n+1)n! \\ &= \frac{a(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2a \cdot \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow 4a \\ & & \frac{2n+2}{n+1} &= \frac{2(n+1)}{n+1} = 2 \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto: $4a < 1 \Leftrightarrow a < 1/4 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

$4a > 1 \Leftrightarrow a > 1/4 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow \infty$

E se $a_n = 1/4$? $\leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Provo a confrontare a_n con $b_n = n^{-\alpha}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Se $0 < \alpha < 1/2$ allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ definitivamente} \quad (*)$$

Infatti $(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\exists n_0 : \text{è vera } \forall n \geq n_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{n} \left(\underbrace{\frac{1}{2} - \alpha}_{>0} + o(1) \right) \\ \uparrow \\ \text{infinitesimo} \end{array} \right.$$

$(*) \Rightarrow \exists c: 0 \leq a_n \leq c b_n = c n^{-\alpha} \text{ con } \alpha \in (0, 1/2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
es: $\alpha = 1/3$

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad 2 < e < 3$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} \geq 1 + n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
Bernoulli

$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq \left[1 + \frac{1}{n} \cdot n\right]^n \geq 2^n \rightarrow \infty$

$1 \leq \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} < [e]^{\frac{1}{n}}$
2 carab. $\downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 1$

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 $[] = a_{n^2}$
 $a_n \nearrow \Rightarrow a_{n^2} \nearrow$

(c) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e \text{ per } x \rightarrow +\infty \quad (x \in \mathbb{R})$
definitivamente

$t \in \mathbb{R}$ fissato $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{t}}\right]^t \quad n \rightarrow \infty \quad 1 + \frac{t}{n} \rightarrow 1 \quad 1 + \frac{t}{n} > 0 \text{ definiti.}$

$$(t > 0) \quad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{t}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \leftarrow \text{uso la formula (C) con } x = \frac{n}{t}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-volte}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^x \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ serve che } a > 0$$

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{n}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = e$$

$$\text{Quindi } \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow e^t \text{ perché } x \mapsto x^t \text{ è continua su } (0, +\infty)$$

lo stesso risultato vale per $t < 0$ (per esercizio)

$$\left[\text{Sugg: mostrare che } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ usando il cambio di variabile } t = -(x+1) \right]$$

$$\text{Da } \underbrace{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n}_{\geq 1 + n\left(\frac{t}{n}\right) = 1+t} \rightarrow e^t \text{ segue } e^t \geq 1+t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\uparrow \text{ definit.} \quad \geq 1 + n\left(\frac{t}{n}\right) = 1+t \quad \text{Bernoulli} \rightarrow a > -1 \quad (1+a)^n \geq 1+nd$$

$$e^{-t} \geq 1-t \rightarrow \boxed{e^t \leq \frac{1}{1-t}}$$

$$1-t > 0 \quad e^{-t} \cdot e^t = 1$$

Proprietà di $\exp(x) = e^x$

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$1) e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$2) e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2') e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$$

$$3) e^x \text{ è str. crescente (quindi inj)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

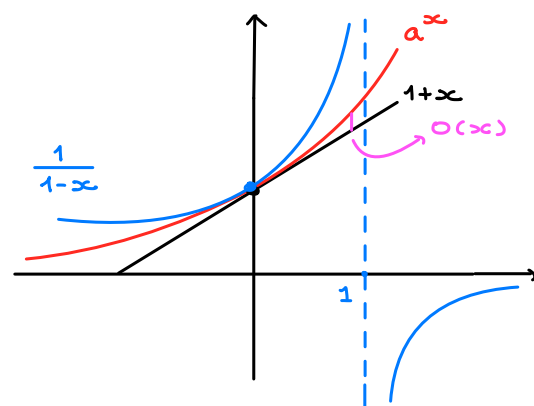
$$5) \exp \text{ è continua } (\Rightarrow \text{surgettività su } (0, +\infty))$$

$$[\text{es: } \forall a \in \mathbb{R} \quad \exp \text{ è } L\text{-lip su } (-\infty, a] \text{ con } L = e^a]$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ ovvero } e^x = 1+x + \boxed{o(x)} \text{ per } x \rightarrow 0$$

Dim: 1), 2), 2'), 4) già visti (sopra o a lezione)

$$\text{se } x > x_0 \Rightarrow e^x - e^{x_0} = e^{x_0} (e^{x-x_0} - 1) > 0$$



$$\textcircled{F} \rightarrow h \leq e^h - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 \quad \text{se } h \text{ piccolo, } \lim_{h \rightarrow 0} e^h - 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{tende a zero}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x - e^{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} (e^{x-x_0} - 1) = 0 \Rightarrow \exp \text{ è continuo}$$

Riprendendo \textcircled{F} otengo:

$$h \leq e^h - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h} \quad (\text{con } |h| < 1)$$

$$0 \leq \underbrace{e^h - 1 - h}_{w(h)} \leq \frac{h}{1-h} - h = \frac{h^2}{1-h}$$

$$e^h = 1 + h + w(h) \text{ con } w(h) = o(h) \text{ per } h \rightarrow 0$$

$$\text{infatti } 0 \leq \frac{w(h)}{h} \leq \frac{h}{1-h} \text{ per } h \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

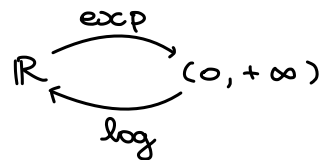
$$e^h = 1 + h + o(h) \Rightarrow e^h - 1 = h + o(h)$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \quad \text{perché } \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$\exp: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (0, +\infty)$ bigettiva \Rightarrow esiste l'inversa: $\log \doteq \exp^{-1}$

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\log t} = t \quad \forall t \in (0, +\infty)$$



\uparrow
inversa
iniettiva

Proprietà:

1) $\log: (0, +\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ è strettamente crescente continua,

2) $\log(1) = 0$,

3) $\log t > 0 \Leftrightarrow t > 1$,

4) $\log(t \cdot s) = \log t + \log s$,

5) $\log(t) \leq t - 1 \quad \forall t > 0$

Oss: $\exp_a(x) := e^{x \log a}$, $\exp_a(x) = a^x$

09-11-2021

Lezione 19

Prof. Carminati

ES 2020^{2021} vs 2021^{2020}

$$n^{n+1} > (n+1)^n \text{ per quali } n \text{ è vera?}$$

$$\xrightarrow{\div n^n} n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$n \geq 3 \Rightarrow n \geq 3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow n^{n+1} > (n+1)^n$$

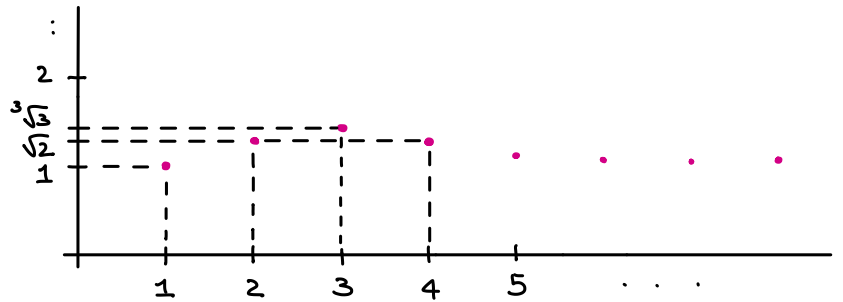
_____ o _____

$$A = \{ \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{a_n} : n \geq 2 \} \quad \sup A = ? \quad \inf A = ?$$

a_n è str. decrescente per $n \geq n_0$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq n_0$

$$\Leftrightarrow (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \text{ vera per } n \geq 3$$

n	$\sqrt[n]{n}$
1	1
2	$\sqrt{2} \sim 1,41$
3	$\sqrt[3]{3} \sim 1,44$
4	$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$
5	$\sqrt[5]{5} \sim 1,38$
...	...



$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 8 < 9$$

$$\sup A = \sqrt[3]{3}$$

$$\inf A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (*)$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0 : a_n < 1 + \delta \quad \forall n \geq n_0$$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \delta \Leftrightarrow n < (1 + \delta)^n \Leftrightarrow 1 < \frac{(1 + \delta)^n}{n}$$

definitiv. vera perché $\frac{(1 + \delta)^n}{n} \rightarrow +\infty \quad \forall \delta > 0$

_____ o _____

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n + 3^n} = ?$$

$$\sqrt[2n]{3^n} \leq \sqrt[2n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[2n]{2 \cdot 3^n}$$

$$\text{perché } 3^n = (\sqrt{3})^{2n}$$

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \sqrt[2n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \leq \sqrt{3} \underbrace{\sqrt[2n]{2}}_1$$

per i carabinieri

_____ o _____

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\left[\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n/t} \right]^t \begin{cases} t > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ t < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \end{cases}$$

$$x = \frac{n}{t}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right)^{-x-1+1}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \quad y \doteq -(x+1)$$

— o —

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot e^{-t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^d e^{-t} = 0 \quad \begin{matrix} d \leq 0 \\ d > 0 \end{matrix}$$

$$\hookrightarrow \textcircled{d > 0} \quad (t e^{-t/d})^d \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t/d} = 0$$

— o —

FUNZIONE LOGARITMO

$$\log: (0, +\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

Proprietà: 1) $\log(t \cdot s) = \log t + \log s$

$$\hookrightarrow \log t = -\log \frac{1}{t} \quad \leq = \frac{1}{t}$$

2) $\log t \leq t - 1 \quad \forall t > 0$

$$\hookrightarrow \log(1+d) \leq d \quad \forall d > -1$$

$$\begin{cases} t = e^x \\ s = e^y \end{cases}$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\log e^{xy} = \log(e^x \cdot e^y)$$

$$\begin{cases} x = \log t \\ y = \log s \end{cases}$$

$$\log t + \log s = x + y = \log(t \cdot s)$$

2) $e^x \geq 1+x \quad t=e^x \quad x=\log t$

$$t \geq 1 + \log t$$

$$\log t \leq t - 1$$

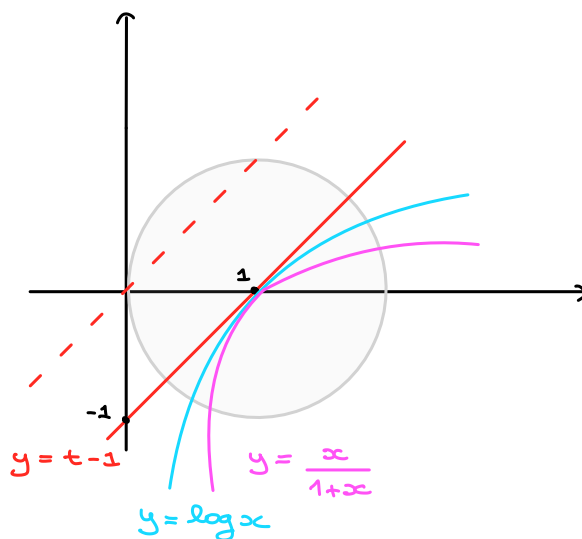
$$\log(1+d) \leq d \quad \forall d > -1 \quad *$$

$$-\log(1+d) = \log\left(\frac{1}{1+d}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{1+d} - 1\right) = \log\left(1 - \frac{d}{1+d}\right) \leq -\frac{d}{1+d} \quad *$$

$$\frac{d}{1+d} \stackrel{(\cdot)}{\leq} \log(1+d) \stackrel{(\cdot)}{\leq} d$$

\log è strettamente crescente (perché inversa di una strettamente cresc.)

e continua (è L-lip $\forall \varepsilon > 0$ su $[\delta, +\infty)$ con $L = \frac{1}{\delta}$)



Se $x, y \in [\delta, +\infty)$ SPG $x < y$

$$0 < \log y - \log x = \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{y-x}{x}\right) \stackrel{(\dots)}{\leq} \frac{y-x}{x} \leq \frac{y-x}{\delta}$$

$$|\log y - \log x| \leq \frac{1}{\delta} |y-x| \quad \forall x, y \in [\delta, +\infty)$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$ (x es, usando la def di limite)

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (ii) $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$\frac{x}{1+x} - x \leq \log(1+x) - x \leq x - x = 0$$

$$-\frac{x^2}{1+x} \leq \underbrace{\log(1+x) - x}_{o(x)} \leq 0 \quad (\forall x > -1) \quad o(x) = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x + o(x) = x + o(x) \quad (ii)$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\downarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (i)$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$ cambio $t = -\log x$, $x = e^{-t}$ NB: $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0 \quad (\text{visto prima})$$

va ad ∞ più velocemente

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^d \log x = 0 \quad \forall d > 0$

$x > 0$

$d > 0$

$$x^d \log x = \frac{1}{d} x^d \log x^d \quad x^d = y \rightarrow 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{d} y \log y = 0 \quad \text{ci riconduciamo al caso di prima}$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-d} \log x = 0 \quad \forall d > 0$ $y = \frac{1}{x}$, si risolve come prima

• $a^x = e^{x \log a} \quad a > 0, a \neq 1$

$$\log_a \text{ inversa di } a^x \rightarrow \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$a^{\frac{\log x}{\log a}} = e^{\left(\frac{\log x}{\log a}\right) \log a} = e^{\log x} = x$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\log(1+x)}{\log a}}{x} = \frac{1}{\log a} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x} = 1$$

$$a^x = e^{x \log a}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log x} - 1}{x \log x} \cdot \log x = -\infty$$

$$\frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{d \log(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{d \log(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} d$$

$d \log(1+x) \rightarrow 0$

~ o ~

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$H_n \nearrow$

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

\vdots

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \quad x = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$(A) \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k$$

$$(T) \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \left[\log(k+1) - \log k \right] \stackrel{(*)}{=} \log(n+1) - \log(1)$$

SOMMA TELESOPICA: $(*)$ Prop: $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ (per induzione)

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \stackrel{(A)}{=} \sum_{k=1}^n \log(k+1) - \log k \stackrel{(T)}{=} \log(n+1)$$

$$H_n \geq \log(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Prop: $\exists \delta \in (0, 1)$ tale che $H_n = \log n + \delta + o(1) \quad n \rightarrow +\infty$

Dim. $\delta_n \doteq H_n - \log n$

$$\delta_{n+1} < \delta_n \Leftrightarrow \delta_{n+1} - \delta_n < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \stackrel{(\bullet)}{\leq} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{vera}$$

δ_n è decrescente $\Rightarrow \delta_n \leq \delta_1 = 1$

δ_n è positiva, infatti: $\delta_n = H_n - \log n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \geq \log(n+1) - \log n > 0$

Es: Verificare che $\delta \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} \delta_n > 0$

Sugg: si ponga $\beta_n \doteq H_n - \log(n+1)$; verificare che β_n è crescente,
 $\beta_n < \gamma_n \quad \forall n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$, $\beta_1 = 1 - \log 2 > 0$

11-11-2021 lezione 20 Prof. Novaga

LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

LIMITE DESTRO E SINISTRO

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ $E \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ pt. di acc. di E

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{E \cap (x_0, +\infty)}$$

↓
LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{E \cap (-\infty, x_0)}$$

↓
LIMITE SINISTRO

OSS: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = l \Leftrightarrow \forall V$ int. di $l \exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

↓
INT. DESTRO DI x_0

Analogamente per $x \rightarrow x_0^-$.

OSS: Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f = l \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f = l$ non è vero il viceversa

ES: $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (f non è continua in $x=0$)

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f = -1$$

PROP: Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l^\pm$ e $l^- = l^+ \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

DIM: Sia $l := l^+ = l^- \quad \forall V$ int. di l ,

↓
DEF

$$\exists \varepsilon^\pm \text{ t.c. } f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon^-, x_0) \text{ e } \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon^+)$$

$$\Rightarrow f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \text{ dove } \varepsilon = \min(\varepsilon^-, \varepsilon^+).$$

PROP: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ monotona, cioè $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (crescente)

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \text{ (decrescente),}$$

$\Rightarrow \forall x_0$ (dove essere punto di acc.) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm)$ e

$$f \text{ crescente} \Rightarrow f(x_0^+) \geq f(x_0^-), \quad f \text{ decrescente} \Rightarrow f(x_0^+) \leq f(x_0^-)$$

DIM: $E \cap (-\infty, x_0)$ e x_0 pt. di acc. di $E \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow x_0 = \sup E$

f crescente $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{E \cap (-\infty, x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \sup f(x) \quad x \in E \cap (-\infty, x_0)$

f decrescente $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f = \inf f(x) \quad x \in E \cap (-\infty, x_0)$

La stessa cosa si ha per $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

DISCONTINUITÀ DI f

$f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{disc}(f) = \{x \in E \text{ t.c. } f \text{ non è continua in } x\}$
 $x \in \text{disc}(f)$:

⊙ f ha una disc. eliminabile se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f \neq f(x_0)$

ES: $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

⊙ f ha una disc. a salto (I SPECIE) se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l^\pm$ ma $l^+ \neq l^-$

ES: $f(x) = \text{sgn}(x)$

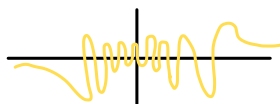
OSS: Le f monotone hanno solo dis. a salto

⊙ f ha una disc. di II specie se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f = l^\pm \in \bar{\mathbb{R}}$,
 $l^+ \neq l^-$ e almeno uno dei due è $\pm \infty$

ES: $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1/x & x \neq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f = \pm \infty$

⊙ f ha una disc. di III specie se $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f$ o $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f$

ES: ⊙ $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \sin(1/x) & x \neq 0 \end{cases}$



⊙ $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

FUNZIONE DI DIRICHLET

$\text{disc}(f) = \mathbb{R}$ e non esiste nessun limite

⊙ $f(x) = \begin{cases} 1/q & x = p/q \in \mathbb{Q}, (p,q)=1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

tutte le disc. sono eliminabili e $\text{disc}(f) = \mathbb{Q}$, $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ devo ved.

che $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f = 0$ cioè $\forall N \exists \delta$ t.c. $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap \{ \frac{p}{q} : q \leq N \} = \emptyset$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{1}{N} \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$$

• $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e disc. solo su \mathbb{Q} (le disc. sono a salto)

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{2^n} X_{(q_n, +\infty)}(x), \quad X_{(q_n, +\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x > q_n \\ 0 & x \leq q_n \end{cases} \quad \mathbb{Q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

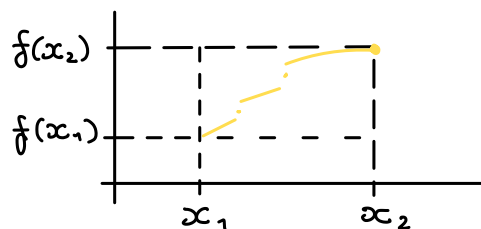
$$f \text{ crescente} \quad 0 \leq f(x) \leq \sum_n \frac{1}{2^n} = 1 \quad \forall x \quad \text{disc}(f) = \mathbb{Q}$$

Oss: f monotona $\Rightarrow \text{disc}(f)$ è numerabile.

Infatti sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e siano $x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in E$

$$\Rightarrow \sum_{x \in \text{disc}(f) \cap [x_1, x_2]} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(x_2) - f(x_1) < +\infty$$

$\Rightarrow \text{disc}(f) \cap [x_1, x_2]$ è numerabile



Abbiamo usato:

$$\sum_{i \in I} a_i < +\infty, \quad a_i > 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow I \text{ è finito o numerabile}$$

$$\text{infatti} \quad I = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} I_N \quad I_N = \{i \text{ t.c. } a_i \geq \frac{1}{N}\} \quad I_N \subseteq I_{N+1}$$

$$\frac{1}{N} |I_N| \leq \sum_{i \in I_N} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i < +\infty \Rightarrow |I_N| < +\infty \quad \forall N$$

$\Rightarrow I$ è numerabile

DEF: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 pt. di acc. di E , diciamo che f ha limite superiore in x_0 uguale a $l \in \mathbb{R}$, e scriviamo $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$,

$$\text{se} \quad \begin{cases} l = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ l = +\infty \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } \lim_n f(x_n) = +\infty \\ l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } \lim_n f(x_n) = l \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c. } f(x) < l + \varepsilon \quad \forall x \in U$$

Def. analoga per $\liminf_{x \rightarrow x_0} f$.

Si ha.

$$\forall x_0 \in E \text{ punto di accumulazione} \quad \exists \liminf_{x \rightarrow x_0} f \text{ e } \limsup_{x \rightarrow x_0} f$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f = \inf_{U \text{ int. di } x_0} \sup_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) \geq \sup_U \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f$$

OSS: f ha limite in $x_0 \Leftrightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f = \limsup_{x \rightarrow x_0} f$

OSS: Date f, g si ha:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (f+g) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f + \limsup_{x \rightarrow x_0} g$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} (f+g) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f + \liminf_{x \rightarrow x_0} g$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (-f) = -\liminf_{x \rightarrow x_0} f$$

ES. $a_n = (-1)^n \quad \limsup_n a_n = 1 > \liminf_n a_n = -1$

$$b_n = (-1)^{n+1} \quad a_n + b_n = 0$$

$$0 = \limsup_n (a_n + b_n) < \limsup_n a_n + \limsup_n b_n = 2$$

DEF: $f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in E$

$$\text{osc}(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & x_0 \text{ è isolato} \\ \limsup_{x \rightarrow x_0} f - \liminf_{x \rightarrow x_0} f \geq 0 & x_0 \text{ è pt. di acc.} \end{cases}$$

OSS: $\text{osc}(f)(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 \in \text{disc}(f)$

$$\text{disc}(f) = \bigcup_n E_n \quad E_n = \{x \in \text{disc}(f) : \text{osc}(f)(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

Questi insiemi E_n sono chiusi (DA VERIFICARE)

$\Rightarrow \text{disc}(f)$ è unione numerabile di insiemi chiusi

(non tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R} hanno questa proprietà)

Domanda: $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tc $\text{disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

No, perché $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non si può scrivere come unione di num. chiusi.

Infatti, se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_n E_n$, E_n chiusi avrei $\text{int}(E_n) \subseteq \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset \quad \forall n$

\Rightarrow aggiungendo i punti razionali avrei che $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$, F_n chiuso, $\text{int}(F_n) = \emptyset$.

Teorema (Baire): E sp. metrico completo, $F_n \subseteq E$ chiusi a parte interna

vuota, $F = \bigcup_n F_n \Rightarrow \text{int}(F) = \emptyset$ in particolare $F \neq E$

12-11-2021

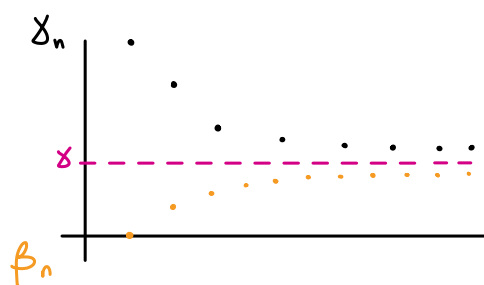
lezione 21

Prof. Carminati

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{somma armonica} \quad H_n \geq \log(n+1)$$

$\delta_n = H_n - \log n \geq 0$, δ_n è str. decrescente $\Rightarrow \delta_n \rightarrow \delta \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$

$\delta \in [0, 1)$, in realtà $\delta > 0$: basta vedere che posto $\beta_n = H_n - \log(n+1)$ si ha β_n è str. decrescente (oss: $\beta_n \rightarrow \delta$, $\delta_n - \beta_n = \log(n+1) - \log n = \log(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 0$)



$$\Rightarrow \delta > \beta_1 = 1 - \log 2 > 0$$

$1 < 2 < e \Rightarrow \log 2 < 1$

$\delta_n \searrow \delta$
 \hookrightarrow converge decrescendo

$$H_n - \log n = \delta_n = \delta + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow H_n = \log n + \delta + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

Applicazioni: i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \log 2$

ausloge

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$

(sugg: trovare formule asintotiche per la somma dei rec. dei pari e " " " " " dispari)

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \log 2n + \delta + o(1) - \log n - \delta - o(1) \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

sono due funz. diverse!

$$= \log\left(\frac{2n}{n}\right) + o(1) \quad \text{non si semplificano perché avrà comunque "resto" infinitesimo!}$$

$$= \log 2 + o(1)$$

Prop (Somme telescopiche):

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \quad \text{con } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ succ.}$$

Dim: Per induzione su n

$n=1$ $a_2 - a_1 = a_2 - a_1$ vera

$\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$ $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + (a_{n+1} - a_n) =$
 $\stackrel{\text{hp ind}}{=} \cancel{a_n - a_1} + \cancel{a_{n+1} - a_n} = a_{n+1} - a_1$

Applicazioni: i) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ è l'opposto \nearrow

ii) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ è superiormente limitata

$$ii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{(h+1)^2} \leq 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Oss: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$ NON BANALE (serve il calcolo diff.)

Usando le stesse tecniche è possibile trovare stime per $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

Prop: $\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1) \text{ per } n \rightarrow \infty$

Dim: $a_n \doteq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, a_n è decrescente, infatti $a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Rationalizzo: $-\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Oss: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$0 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq a_n - a_{n+1} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$0 \leq a_n - a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$ $\Rightarrow a_n$ è inf. limitata, infatti: $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - a_k$

$$\geq a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

somma telesc. $\geq \underbrace{a_1}_{-\frac{1}{\sqrt{1}}} + \frac{1}{\sqrt{1}} - 1$

$$\geq -2 + \frac{1}{\sqrt{1}} \geq -2$$

$\Rightarrow a_n \searrow \alpha \geq -2 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1) \text{ per } n \rightarrow \infty$

Somme telescopiche e progressioni geometriche:

$$z \in \mathbb{C} \quad (z-1) \sum_{k=0}^n z^k = z^{n+1} - 1$$

Questa è una somma telescopica

$$(z-1) \sum_{k=0}^n z^k = \sum_{k=0}^n (z^{k+1} - z^k) = z^{n+1} - z^0 = z^{n+1} - 1$$

Oss: $A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k} \rightsquigarrow \text{es: } A^2 - B^2 = (A-B)(A+B), A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

Oss: Vale anche se A e B sono due oggetti di una stessa algebra commutativa

(Ad esempio due matrici in GL_n)

Prop (Cesaro): Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ succ. a val. complessi

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

Dim: $\alpha_n \doteq a_n - l \quad a_n \rightarrow l \Leftrightarrow \boxed{\alpha_n \rightarrow 0}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - l) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) - l \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow l$$

$$\alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \rightarrow 0$$

Fisso $\varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall k \geq \bar{n} \quad |d_k| < \varepsilon \quad n > \bar{n}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\bar{n}} \alpha_k + \frac{1}{n} \sum_{k=\bar{n}+1}^n \alpha_k, \text{ se } n > \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \left(\frac{M}{n} < \varepsilon \right), \text{ quindi}$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| \leq \frac{|M|}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=\bar{n}+1}^n |d_k|}_{\text{somma di } n-\bar{n} \text{ addendi } < \varepsilon} < \frac{|M|}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Cor: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ succ. positiva ($a_n > 0$). Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Applicazioni: i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$ ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$

i) Calcolo $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{4n+2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$

~~*~~ Potrebbe esistere $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ma non il limite del rapporto

$$a_n = \begin{cases} 2^n & n \text{ pari} \\ n 2^n & n \text{ dispari} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 2 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2(n+1) & n \text{ pari} \\ 2/n & n \text{ dispari} \end{cases} \end{cases}$$

Dim (Cor): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

$$\alpha_n \doteq \log a_n; \log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \log a_n = \frac{1}{n} \alpha_n$$

$$\log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log a_{n+1} - \log a_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$$

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad \frac{1}{n} \alpha_n = \frac{1}{n} \alpha_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + \log l$$

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \log \frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{CESARO}} \log l$$

$$\text{cioè } \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} \log a_n}_{\log \sqrt[n]{a_n}} = \log l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

□

Esercizio: Mostrare che in generale (per $a_n > 0$) valgono le disug.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Es per casa: Determinare tutti i pol. $p \in \mathbb{R}[x]$ t.c.: $1 - x^2 \leq p(x) \leq 1 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = A + Bx$$

$$\begin{cases} x_0 = p \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

scrivere esplicitamente x_n

$$x_0 = p$$

$$x_1 = A + Bp$$

$$x_2 = A + BA + B^2 p$$

$$x_3 = A + BA + B^2 A + B^3 p$$

CONGETTURA

$$x_n = A \sum_{k=0}^{n-1} B^k + B^n p$$

Dim: Per induzione

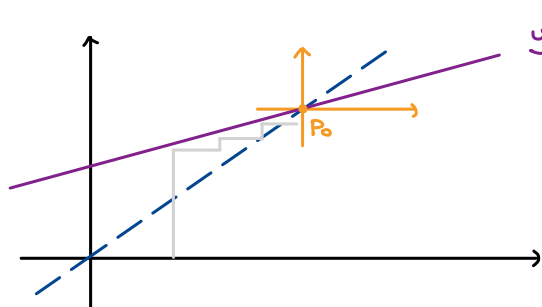
PB) OK

$$\begin{aligned} \text{PI: } n \Rightarrow n+1) \quad x_{n+1} &= A + Bx_n = A \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} B^{k+1} \right) + B^{n+1} p \\ &= A \left(1 + \sum_{k=0}^n B^k \right) + B^{n+1} p \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B^k = \frac{B^n - 1}{B - 1} \quad \text{se } B \neq 1 \quad \text{e di conseguenza } x_n = A \frac{B^n - 1}{B - 1} + B^n p.$$

$$\text{Se } B = 1: x_n = nA + p$$

— o —



$$y = Ax + B$$

$$y_n \doteq x_n - p_0$$

$$A + Bp_0 = p_0$$

$$y_{n+1} = B y_n$$

16-11-2021

lezione 22

Prof. Carminati

$$a_n > 0 \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \left[\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad \text{allora } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \right]$$

dimostriamo questa

— o —

Ritorniamo sul limsup:

$$\text{Def: } i) \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} l = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ l = +\infty \rightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } \lim f(x_n) = +\infty \\ l \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \exists x_n \rightarrow x_0 : \lim f(x_n) = l \\ \forall \varepsilon > 0 \exists U \text{ intorno di } x_0 : f(x) < l + \varepsilon \\ \forall x \in U \setminus \{x_0\} \end{cases} \end{cases}$$

con x_0 pt. di acc.

$$f(x) < l + \varepsilon \\ \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

$$ii) \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_U \sup_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) \quad \text{con } x_0 \text{ pt. di acc. e } U \text{ intorno di } x_0$$

Proprietà di limsup e liminf:

$$a) \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (\text{visto a lezione})$$

$$b) f \leq g \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (\text{banale})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow l = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Oss: In generale la disug. in (a) può essere stretta:

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1} \quad \limsup a_n + b_n = 0 < \limsup a_n + \limsup b_n = 1 + 1$$

Prop (Analogo di (a)): Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Esercizio: Enunciare e dimostrare analoghe proprietà sul liminf.

Dim (caso $l \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$):

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i) \exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } g(x_n) \rightarrow m$$

$$ii) \forall \varepsilon > 0 \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c. } g(x) < m + \varepsilon/2 \quad \forall x \in U$$

$$i)' \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + g(x_n) = l + m$$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \text{ intorno di } x_0 \text{ su cui } |f(x) - l| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in V$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) < l + \varepsilon/2 \quad \forall x \in V$$

$$ii)' \text{ Se } x \in U \cap V \Rightarrow f(x) + g(x) \leq l + \varepsilon/2 + m + \varepsilon/2 = l + m + \varepsilon$$

$$i)' + ii)' \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l + m$$

Prop: Se $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φ continua in l e str. cresc.

$$\text{Allora } \limsup_{x \rightarrow x_0} \varphi \circ f(x) = \varphi(l)$$

$$\text{Dim: } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow l \xRightarrow{\text{cont. di } \varphi} \varphi(f(x_n))$$

Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c. } \varphi(f(x)) < \varphi(l) + \varepsilon \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$

$$\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists \delta > 0 : |y - l| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(l)| < \varepsilon \rightsquigarrow \varphi(y) < \varphi(l) + \varepsilon$$

$$\forall y \in B_\delta(l)$$

$$\delta > 0 \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c. } f(x) < l + \delta/2 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

$$\varphi(f(x)) < \varphi(l + \delta/2) < \varphi(l) + \varepsilon$$

monotonia di φ $\hookrightarrow l + \delta/2 \in B_\delta(l)$

Mostriamo che se $a_n > 0$ allora $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (H)

Questo equivale a mostrare $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (A)

Questo vale per la prop. sopra (con $\varphi(y) = \log(y)$)

Consideriamo il caso in cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sigma \in \mathbb{R}$

Dim: Dato $\varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} < \sigma + \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$

$$\text{Sia } n > \bar{n} \cdot \log a_n = \log a_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}}^{n-1} (\log a_{k+1} - \log a_k) = \log a_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}}^{n-1} \log \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$\frac{1}{n} \log a_n \leq \frac{\log a_{\bar{n}}}{n} + \frac{(n-\bar{n})}{n} (\sigma + \varepsilon) = \frac{\log a_{\bar{n}}}{n} + \left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right) (\sigma + \varepsilon)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n \leq \sigma + \varepsilon \quad (@)$$

la disug. (@) vale $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_n \leq \sigma$

□

Lemma (Fekete): Sia $a_n \geq 0$ $a_{n+m} \leq a_n + a_m$

Allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.
 def: a_n è sub-additiva

Dim: $a_2 \leq a_1 + a_1 \leq 2a_1$

$$a_n \leq n a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{per induzione})$$

Quindi $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \in [0, a_1]$

$$\sigma = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \text{ t.c. } \frac{a_{\bar{n}}}{\bar{n}} < \sigma + \varepsilon$$

Fissato $\varepsilon > 0, n > \bar{n}$ def. come sopra $n = k\bar{n} + r \quad k \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq \bar{n}$

$$a_n = a_{k\bar{n}+r} \leq a_{k\bar{n}} + a_r \leq k a_{\bar{n}} + a_r, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{k}{n} \frac{a_{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{a_r}{n}$$

$$M = \max \{a_0, \dots, a_{\bar{n}}\}$$

$$\frac{a_n}{n} \leq \left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right) (\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n} \quad \frac{k\bar{n}}{n} = \frac{n-r}{n} \leq 1 - \frac{\bar{n}}{n}$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right) (\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n} \right] = \sigma + \varepsilon$$

la disug. è vera $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sigma$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} = \sigma$$

$\uparrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{k}$ con l'intervallo di σ

$$\sigma \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sigma \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \sigma$$

Applicazione interessante:

Oss/Es (*): Sia A matrice $n \times n$ a coef. reali, definiamo la norma:

$$\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|, \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

sia $a_n = \log \|A^n\|$, si verifica che a_n è una succ. subadditiva

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{\|A^n\|} \text{ e quindi esiste anche:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leftarrow \text{Raggio spettrale della matrice } A$$

— 0 —

Successioni definite per ricorrenza

Prop: $\begin{cases} x_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ con $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f str. crescente continua

Allora esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e se $\ell \in \mathbb{R}$ si ha che $\ell = f(\ell)$

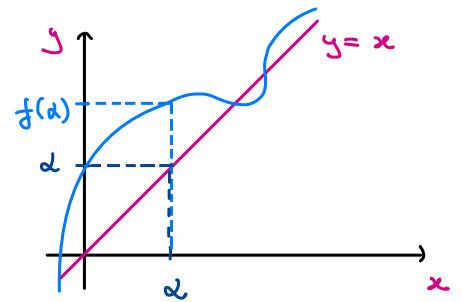
Il limite esiste perché sotto queste ipotesi la successione è monotona

Dim: Se $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow x_n = \alpha \quad \forall n$

Se $f(\alpha) > \alpha: \alpha \in U = \{x: f(x) - x > 0\}$ aperto

$$a \doteq \inf_{V^-} \{a' \leq \alpha: [a', \alpha] \subset U\} \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$b \doteq \sup_{V^+} \{b' \geq \alpha: [\alpha, b'] \subset U\} \quad b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$



Oss: Se a (risp. b) è finito $\Rightarrow f(a) = a$ (Es: Vale anche se a e/o $b \notin \mathbb{R}$)

$$\text{Se } a' \in V^- \Rightarrow f(a') - a' > 0 \Rightarrow f(a) - a \geq 0$$

$$\text{Se } f(a) - a > 0 \Rightarrow \exists I \text{ intorno di } a: f(a') - a' > 0 \quad \forall a' \in I \Rightarrow a \text{ non è } \inf V^-$$

$$\text{Se } a < x < b \Rightarrow \underbrace{f(a)}_{f \text{ str. cr.}} < \underbrace{f(x)}_a < \underbrace{f(b)}_b \Rightarrow a < f(x) < b \rightsquigarrow f: (a, b) \rightarrow (a, b)$$

$$\Rightarrow x_n \in (a, b) \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (per ind)}, \quad x_{n+1} = f(x_n) > x_n \Rightarrow x_n \text{ mon. crescente}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n \rightarrow b < +\infty \Rightarrow \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\ell)$$

$$\ell \in [a, b], \ell \geq \alpha \Rightarrow \ell = b$$

$$\text{Se } b = +\infty \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty \text{ (se no } x_n \rightarrow \ell \in [\alpha, +\infty) \text{ con } \ell = f(\ell) \rightsquigarrow)$$

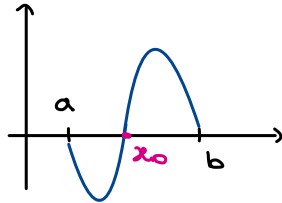
□

Funzioni continueTeorema degli zeri:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$ (segni opposti)

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = 0$.

Graficamente:



Deriva dal teorema di permanenza del segno

Dim: Supp. $f(a) < 0$ e sia $x_0^* = \sup \{x \text{ t.c. } f(x) < 0\} \Rightarrow f(x_0) = 0$

Infatti, se fosse $f(x_0) < 0 \exists \varepsilon$ t.c. $f(x) < 0$ in $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ \vee (contr. *)

Analogamente, $f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ \vee (contraddice la def.)

Cor (Valori intermedi): (Dim per esercizio)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua \Rightarrow

- $f([a, b]) \supseteq [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$
 - $f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$
- } una funzione cont. manda intervalli in intervalli

Generalizzazione:

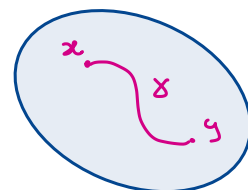
Def: E spazio metrico (va bene topologico) è:

• scomesso se $\exists A, B \subseteq E$ aperti non vuoti t.c. $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$
cioè se ha "due pezzi"

• connesso se non è scomesso

• connesso per archi se $\forall x, y \exists \gamma: [a, b] \rightarrow E$ continua t.c. $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

gli archi sarebbero curve, graficamente:



Oss: $E \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

E connesso $\Leftrightarrow E$ connesso per archi

$\Leftrightarrow E$ intervallo, semiretta o \mathbb{R}

Oss: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, cioè $\forall x, y \in E \ [x, y] = \{ \lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1] \} \subseteq E$,
connesso per archi.

Teorema: $f : E \rightarrow F$ continua, E, F sp. metrici

1) E connesso $\Rightarrow f(E)$ connesso

2) E connesso per archi $\Rightarrow f(E)$ connesso per archi

Dim: 1) Supp. (per assurdo) $f(E)$ sconnesso, cioè $f(E) \subseteq A \cup B$,
 A, B aperti in F , $f(E) \cap A \neq \emptyset$, $f(E) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
 $\Rightarrow E$ sconnesso \downarrow ↑
↑
APERTI

2) E connesso per archi, $y_1, y_2 \in f(E)$, siano $x_1, x_2 \in E$ t.c.
 $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2) \Rightarrow \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow E$ cont., $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$
 $\Rightarrow \exists \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow f(E)$ $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ cont., $\tilde{\gamma}(0) = y_1, \tilde{\gamma}(1) = y_2$
 $\Rightarrow f(E)$ connesso per archi.

Prop: E con. per archi $\Rightarrow E$ connesso

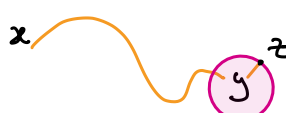
Dim: Supp. E sconnesso, $E = A \cup B$ e siano $x \in A, y \in B$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$
continua con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y \Rightarrow \gamma([0, 1]) \subseteq A \cup B = E \Rightarrow$ è sconnesso
Assurdo poiché $[0, 1]$ è connesso e γ è continua.

Sono equivalenti? In generale no, ma in alcuni casi sì.

Oss: E connesso $\Rightarrow \begin{cases} E \text{ con. per archi} \\ E \text{ connesso} \end{cases}$

Prop: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso $\Rightarrow E$ connesso per archi (quindi vale \Leftrightarrow)

Dim: $x \in E$, $A = \{ y \in E \text{ t.c. } \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow E \text{ cont.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}$

$\Rightarrow A$ aperto. Graficamente: 
 $\Rightarrow E \setminus A$ aperto $\Rightarrow E = A \cup (E \setminus A)$ connesso $B_r(y) \subseteq E$

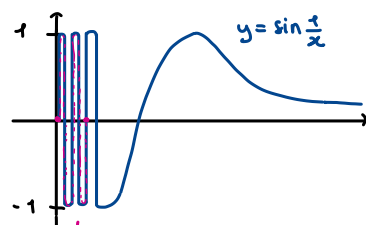
$\Rightarrow E \setminus A = \emptyset \Rightarrow E$ con. per archi

Non è detto che valga per i chiusi (tranne in \mathbb{R})

Oss: $\exists C \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto (quindi, in particolare, chiuso) tale che

C connesso ma non per archi.

Esempio: $C = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\} \cup \left(\bigcup_{|y| \leq 1} (0, y) \right)$
seguito verticale



li posso congiungere solo tramite l'arco $\sin \frac{1}{x}$ che non è continuo

$\Rightarrow C$ è chiaramente connesso ma non per archi

Oss: $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che manda connessi in connessi (= intervalli)

ma non sono continue. ES: $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ma le discontinuità sono solo di questo tipo

Teo: $f: E \rightarrow F$ cont, E sp. metrico compatto $\Rightarrow f(E)$ compatto

Dim: y_n successione in $f(E)$, $x_n \in E$ t.c. $f(x_n) = y_n$

E cpt $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x \in E \Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(E)$ cioè $f(E)$ è comp.
 f. cont.

Cor (Weirstrass):

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua, E compatto $\Rightarrow f$ ammette max e min

Dim. $f(E) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ chiuso e limitato $\Rightarrow \inf f(E) = \min f(E) = \min f$
 $\Rightarrow \sup f(E) = \max f(E) = \max f$

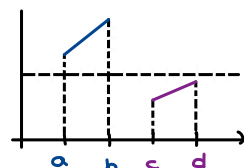
Oss: Non è vero il viceversa, ma ci sono funzioni che mandano compatti in compatti ma non sono continue: $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Esercizio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che manda connessi in connessi e compatti in compatti $\Rightarrow f$ continua

Teorema: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, I intervallo, f è invertibile (= iniettiva)

$\Leftrightarrow f$ è str. monotona (crescente o decrescente)

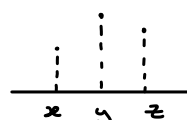
Oss: Serve I intervallo, altrimenti, se ne fossero due:



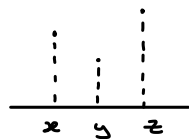
Dim: f str. monotona $\Rightarrow f$ iniettiva

f iniettiva e (per assurdo) non str. monotona. $\exists x < y < z \in I$ t.c.

$f(x) < f(y)$ e $f(z) < f(y)$ Graficamente:



oppure $f(x) > f(y)$ e $f(z) > f(y)$ Graficamente:



Consideriamo il primo caso (l'altro è analogo)

Posso supporre $f(x) < f(z) < f(y)$ (il caso $f(z) < f(x) < f(y)$ è analogo)

Per il teorema dei valori intermedi $f([x, y]) \supseteq [f(x), f(y)] \ni f(z)$

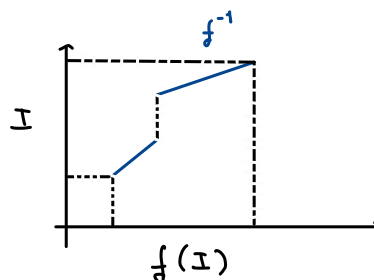
$\Rightarrow \exists z' \in (x, y) \text{ t.c. } f(z) = f(z') \Rightarrow f$ non è iniettiva \searrow

Cor: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile, I intervallo $\Rightarrow f^{-1}$ continua

Dim: f invertibile $\Rightarrow f$ str. monotona

$\Rightarrow f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ str. monotona

$\Rightarrow f^{-1}$ può avere solo disc. a salto



Ma se c'è una disc. a salto $\Rightarrow f(I) = I$ non è connesso \searrow

Cor: $\arcsin(x) = \left(\sin(x) \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$ è continua (e str. crescente)

$\arccos(x) = \left(\cos(x) \Big|_{[0, \pi]} \right)^{-1}$ è continua

$\log_a(x) = (a^x)^{-1}$ è continua

$\arctan(x) = \left(\tan(x) \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$ è continua

13-11-2021

lezione 24

Prof. Carminati

Esercizi per casa:

1) $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \left[\text{sugg: } f(x) = (f(x) + g(x)) + (-g(x)) \right]$
e sfruttare la subadd. di \limsup

2) Data (x_n) definita da $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \end{cases}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ e determinare l

ii) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - l)$

3) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - n - 1}{n^3 - 5n + 1} \right)^n$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Es: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n} \right)^n$

$$1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)$$

$$\frac{2n^2+1}{2n^2+n} = \frac{2n^2+n}{2n^2+n} - \frac{1}{n} \left(\frac{n^2-n}{2n^2+n} \right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)} \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (\text{pausa})$$

Lemma: $\left(1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^a$

$$\left(1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \exp\left(n \log\left(1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \stackrel{*}{=} \exp(a + o(1)) \rightarrow e^a$$

$$\begin{aligned} *) n \log\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}(a + o(1))}_x\right) &\stackrel{**}{=} n \left(\frac{1}{n}(a + o(1)) \right) \left(1 + o(1) \right) = \\ &= a + o(1) + a \cdot o(1) + [o(1)]^2 = a + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$**) \log(1+x) = x + o(x) = x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Torniamo al limite originario:

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Lemma}} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Es: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}_{*}^{\frac{1}{x^2}}$

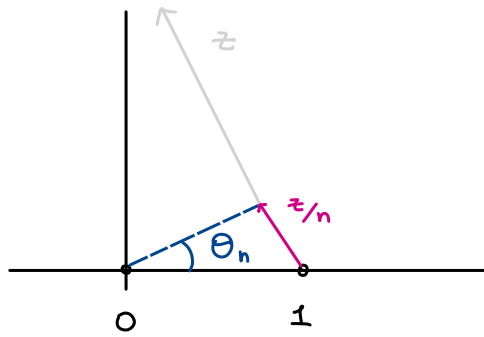
$$*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = x^2 \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2} \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2} \left[-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \rightarrow e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Es: $\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$ con $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = \alpha + i\beta$
 $e^{\alpha} \cdot e^{i\beta}$

Oss/Es: $\omega_n \rightarrow \omega^*$ in $\mathbb{C} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \rho_n \rightarrow 0 \\ \rho^* = 0 \end{matrix} \right) \vee \left(\rho_n \rightarrow \rho^* \text{ e } \theta_n \rightarrow \theta^* \right)$
 $\omega_n = \rho_n e^{i\theta_n}$
 $\omega^* = \rho^* e^{i\theta^*}$
a meno di multipli di 2π



$$1 + \frac{z}{n} = \rho(n) e^{i\theta(n)}$$

$$\rho_n = \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\theta_n = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}\left(1 + \frac{z}{n}\right)}{\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \right)$$

↑
per $n \gg 1$

$$\theta_n = \arctan \left(\frac{\beta/n}{1 + \alpha/n} \right) = \arctan \left(\frac{\beta}{n} \cdot \frac{1}{1 + \alpha/n} \right) \quad \text{se } \operatorname{Re}\left(1 + \frac{z}{n}\right) > 0$$

$$\theta_n = \arctan \left(\frac{\beta}{n} \cdot (1 + o(1)) \right) \quad \rho_n = \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\rho(n) e^{i\theta_n}\right)^n = \boxed{\rho(n)^n} \cdot e^{i n \theta(n)}$$

$$\bullet \left(\rho(n)\right)^n = \sqrt{\left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\alpha$$

$$\bullet n\theta_n = n \arctan \left(\underbrace{\frac{\beta}{n}}_{x_n} (1 + o(1)) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n \left(\underbrace{\frac{\beta}{n}}_{x_n} (1 + o(1)) (1 + w(x_n)) \right)$$

uso lo sviluppo con $x = \frac{\beta}{n} (1 + o(1)) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

$$= \beta (1 + o(1)) (1 + o(1)) = \beta (1 + o(1))$$

$$* \arctan x = x + o(x) = x(1 + w(x)) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$

$$n\theta_n \rightarrow \beta, \quad \text{per il criterio visto sopra.} \quad \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\alpha \cdot e^{i\beta}$$

$$* \text{ Per dimostrarlo basta verificare che } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\text{Basta porre } y := \arctan x \Rightarrow x = \tan y \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Attenzione: $\tan(\arctan x) = x$

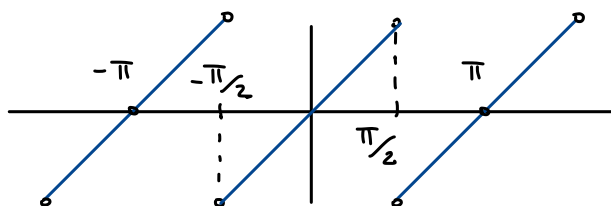
$$\arctan(\tan x) = x \quad \text{solo se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) \doteq \arctan(\tan x)$$

\tan è π -periodica

$$\arctan = \left(\tan \Big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \right)^{-1}$$

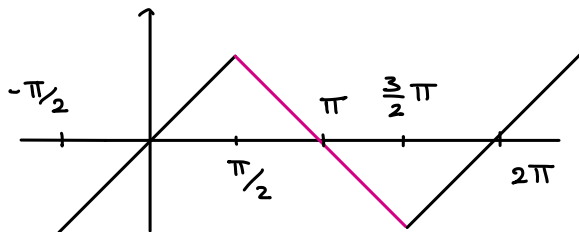
↪ inversa
insiemistica



$$g(x) = \arcsin(\sin x)$$

g è 2π -periodica

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



Es: Mostrare che $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è biettiva da \mathbb{R} in \mathbb{R}

Dim: inj: $x \mapsto 2x^3$ è str. crescente
 $x \mapsto 3x - 3$ è str. crescente $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ è str. crescente} \Rightarrow f \text{ è inj.} \end{array} \right.$

surj: Oss: se $p \in \mathbb{R}[x]$ $gr(p)$ dispari $\Rightarrow Im(p) = \mathbb{R}$

$$p(x) = ax^{2m+1} + o(x^{2m+1}) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (\text{e anche per } x \rightarrow -\infty)$$

$$\text{SPG } \alpha > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^{2m+1} + o(x^{2m+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2m+1} (\underbrace{a}_{\alpha} + o(1)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$$

Quindi se $y_0 \in \mathbb{R} \quad \exists b > 0$ t.c. $p(b) > y_0$, $\exists a < 0$ t.c. $p(a) < y_0$

p continua su $[a, b] \Rightarrow$ Assume tutti i valori in $[p(a), p(b)] \ni y_0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]: p(x_0) = y_0$

Es: Mostrare che se $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua allora $\exists \alpha \in [0, 1]$ t.c. $f(\alpha) = \alpha$

$$\sum_{k \in T} \binom{n}{k} = \circledast \quad T \doteq 3\mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{Z} : k = 3h \text{ con } h \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

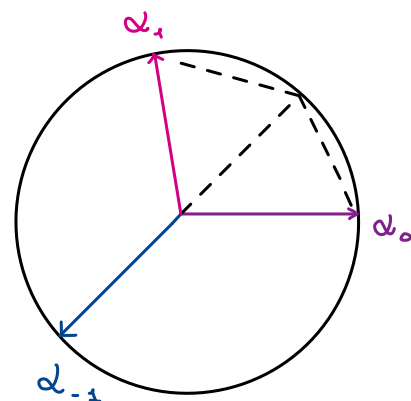
$$\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k = \underbrace{\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}_{1 + \alpha_1}^n = (-\alpha_{-1})^n = \left(e^{i\pi} e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{3}n}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^k = e^{-i\frac{\pi}{3}n}$$

$$\delta(k) \doteq \frac{1}{3} \left(\underbrace{1}_{\alpha_0} + \underbrace{\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k}_{\alpha_1} + \underbrace{\left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^k}_{\alpha_{-1}} \right)$$

$$\circledast = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta(k) = \frac{1}{3} (\bullet + \bullet + \bullet)$$

$$= \frac{1}{3} \left[2^n + e^{i\frac{\pi}{3}n} + e^{-i\frac{\pi}{3}n} \right] = \frac{1}{3} \left[2^n + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right]$$



$$z^3 - 1 = 0$$

$$(z - \alpha_0)(z - \alpha_1)(z - \alpha_{-1})$$

□

SERIE

Una serie è una somma formale di elementi di uno spazio vettoriale metrico V (tipicamente \mathbb{R} o \mathbb{C}). $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$

Le quantità $S_n = \sum_{n=n_0}^N x_n \in V$ si dicono **SOMME PARZIALI**. ($N \geq n_0$)

Def: La serie converge a $x \in V \Leftrightarrow S_n \rightarrow x$ per $N \rightarrow \infty$

Nel caso $V = \mathbb{R}$ distinguiamo 3 comportamenti:

- **SERIE CONVERGENTE** $\Leftrightarrow S_N \rightarrow x \in \mathbb{R}$, $N \rightarrow +\infty$
- **SERIE DIVERGENTE A $\pm \infty$** $\Leftrightarrow S_N \rightarrow \pm \infty$, $N \rightarrow +\infty$
- **SERIE NON CONVERGENTE**

OSS: $V = \mathbb{C}$, $\sum x_n$ $x_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$

La serie converge in $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ convergono $\sum a_n$, $\sum b_n \in \mathbb{R}$ e nel caso si ha $\sum x_n = \sum a_n + i \sum b_n$. (Ci concentreremo sulle serie in \mathbb{R})

Esempi: $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ **SERIE ARMONICA**

($\alpha > 0$) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ **SERIE ARMONICA GENERALIZZATA**

$x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ **SERIE GEOMETRICA**

DUE DOMANDE:

① La serie converge? (Criteri generali)

② A quanto converge? (Più difficile)

Prop: $\sum x_n$ converge $\Leftrightarrow \{S_N\}_N$ converge $\Leftrightarrow S_N$ è di Cauchy

↳ **Criterio di Cauchy:** $(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \tau_c \left| \sum_{n=N+1}^M x_n \right| = |S_M - S_N| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq n_\varepsilon$

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ e consideriamo $S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} > \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k}$

$= \frac{1}{2^k} (2^k - 2^{k-1}) = \frac{1}{2} \Rightarrow S_N$ non è di Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Non converge in \mathbb{R}

⇒ Dato che S_N è crescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$\sum x_n$ si dice a termini positivi se $x_n \geq 0 \quad \forall n$, cioè se S_N è crescente

⇒ due sole possibilità:

① S_N è limitata e $\sum_n x_n = \sup_N S_N \in \mathbb{R}$

② $S_N \rightarrow +\infty$ e $\sum_n x_n = +\infty$

Prop (Condizione necessaria)

$$\sum_n x_n = S \in \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_N \xrightarrow{n} S \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n} S - S = 0$$

Esempio: $\sum_n (-1)^n$ Non converge

Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ SERIE GEOMETRICA

$$S_N = \sum_{n=0}^N x^n = \begin{cases} N+1 & x=1 \\ \frac{1-x^{N+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Sappiamo che } \begin{cases} x^n \rightarrow 0 & |x| < 1 \\ x^n \rightarrow +\infty & x > 1 \\ x^n \text{ non conv.} & x \leq -1 \\ x^n = 1 & x = 1 \end{cases}$$

Otteniamo che $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$ Riesco a trovare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = +\infty \quad \text{se } x \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ non converge se } x \leq -1$$

Esempio: (serie telescopiche)

a_n successione convergente, $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = a - a_0$$

$$S_0 = a_1 - a_0, S_1 = a_1 - a_0 + a_2 - a_1, S_2 = a_2 - a_0 + a_3 - a_2, \dots, S_N = a_{N+1} - a_0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} a - a_0$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad a_n \rightarrow a = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)(n+2)} = -1$$

$$\text{cioè } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{\text{⊗}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{⊗ cambio di indice}$$

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Prop (Confronto):

$$0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0 \quad (\text{definitivamente in } n)$$

$$\circ \sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty$$

$$\circ \sum_{n=0}^{\infty} y_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty$$

Dici: $0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0$

$$S_N = \sum_{n=0}^N x_n, \quad T_N = \sum_{n=0}^N y_n \quad \text{sao successioni crescenti per } N \geq n_0,$$

quindi o convergono o divergono a $+\infty$, e si ha $S_N - S_{n_0} \leq T_N - T_{n_0}$.

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{=1} = 2$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

Cioè $\sum \frac{1}{n^2}$ converge a $S \in (1, 2)$

A quanto converge? ($\pi^2/6$)

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ DIVERGE} \\ \alpha = 2 \text{ CONVERGE} \end{array} \right\} \text{GIÀ VISTO} \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 2 \quad n^{\alpha} > n^2, \quad \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^2} \xrightarrow{\text{CFR}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \\ \alpha < 1 \quad n^{\alpha} < n, \quad \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{CFR}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty \end{array} \right.$$

Cosa succede per $\alpha \in (1, 2)$?

Prop (Criterio di condensazione):

$$x_n \geq 0, \quad x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k} \quad (2^{k_0} \geq n_0)$$

Applicazione:

$$\sum_k \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \sum_k 2^k \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} < +\infty$$

← SERIE GEOMETRICA

$$\sum_k \frac{2^k}{(2^k)^{\alpha}} = \sum_k \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_k \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^k < +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$$

Esempio: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{n \log(n)^{\alpha}} \sim \frac{1}{n} \text{ per } n \rightarrow +\infty$

Per condensazione: $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \sum_k \frac{2^k}{2^k (\log 2 \cdot k)^{\alpha}} = \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \sum_k \frac{1}{k^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$

Dim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

$$y_k = \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+2}} x_n, \quad x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \frac{1}{2} \left(2^{k+1} x_{2^{k+1}} \right) = 2^k x_{2^{k+1}} \leq y_k \leq 2^k x_{2^k}$$

Per confronto: $\sum y_k$ converge $\Leftrightarrow \sum 2^k x_{2^k}$ converge

25-11-2021

lezione 26

Prof. Novaga

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$$a_n > 0, b_n > 0$$

$a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$, cioè $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora $\sum a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum b_n < +\infty$

Dim. Per $\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ t.c. $(1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n \quad \forall n \geq n_\varepsilon$. Per il confronto segue la tesi.

Oss: È sufficiente che $\exists c, C > 0$ t.c. $c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C \quad \forall n$ suff. grande,

cioè che $0 < \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < +\infty$

Esempi:

$$\textcircled{1} \sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \left[\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]^2 \sim \frac{1}{n^{2\alpha}} \text{ per } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \sum_n \frac{[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}](\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sim \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

"si comporta come"

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} (a^{1/n} - 1) \sim \textcircled{+} \sum \frac{1}{n} = \textcircled{+} \infty$$

$$a > 0 \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad n \rightarrow +\infty$$

\uparrow
sgn(log a)

$$(a^x - 1) \sim (\log a) \cdot x \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\textcircled{4} \sum \frac{x^n}{n!} (= e^x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \frac{x^n}{n} \sim \frac{(x \cdot e)^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

in particolare $\left|\frac{x^n}{n!}\right| < \frac{1}{2^n}$ per n suff. grande

$$\Rightarrow \sum_n \frac{x^n}{n!} < +\infty \quad \forall x > 0$$

CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE (CFR CON LA SERIE GEOMETRICA)

RAPPORTO: $a_n > 0 \quad \forall n$

$$\textcircled{1} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \quad \text{definit. in } n \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{definitivamente in } n \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \quad \sum_n a_n = +\infty$$

Dim: $\textcircled{1} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \quad \text{per } n \geq n_0$

$$a_{n_0+1} \leq r a_{n_0}, \quad a_{n_0+k} \leq r^k a_{n_0} \quad n = n_0 + k$$

$$a_n \leq r^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}\right) \cdot r^n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\sum_n r^n < +\infty \xrightarrow{\text{CFR}} \sum_n a_n < +\infty$$

$\textcircled{2}$ ovvio

OSS: se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow r < 1 \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

$$r > 1 \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$$

$$r = 1 \Rightarrow \boxed{?}$$

ES: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \rightarrow 1 \quad \forall \alpha > 0$

RADICE: $a_n \geq 0 \quad \forall n$

$$\textcircled{1} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq r < 1 \quad \text{Def. in } n \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad (\Leftrightarrow a_n \geq 1) \quad \text{Def. in } n \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

In particolare se $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = r \Rightarrow \begin{cases} r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty \\ r > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ r = 1 \Rightarrow \boxed{?} \end{cases}$

Dim: $\textcircled{1} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq r \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq r^n \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_n r^n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

PRODUTTORIE:

$a_n > 0 \quad \forall n$ possiamo chiederci se "converge" $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{\text{DEF}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\prod_{n=1}^N a_n \right)$

dove $\prod_1^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{N-1} \cdot a_N$

Prop. $\prod_n (1+a_n) \quad a_n \geq 0$ converge $\Leftrightarrow \sum a_n$ converge

Dim. $\prod_1^N (1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n)$

$$= 1 + \sum_1^N a_n + \sum_{1 \leq i < j}^N a_i a_j + \sum_{1 \leq i < j < k}^N a_i a_j a_k \dots + \prod_1^N a_n \geq 1 + \sum_1^N a_n$$

$$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) = \lim_N \prod_1^N (1+a_n) \geq 1 + \sum a_n$$

quindi $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \prod_1^{\infty} (1+a_n) = +\infty$.

Voglio ottenere l'altra implicazione:

$$\log \left(\prod_1^N (1+a_n) \right) = \sum_1^N \log(1+a_n) \leq \sum_1^N a_n$$

Oss: $\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) \leq e^{\sum_1^N a_n} \Rightarrow \lim_N \prod_1^N (1+a_n) = e^{\sum_1^{\infty} a_n}$ (e^{+\infty} = +\infty) quindi $\sum a_n < +\infty \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) < +\infty$

Oss: $\prod_n \left(1 + \frac{1}{n^d}\right) < +\infty \Leftrightarrow d > 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \sim \sum_n (\sqrt[n]{n} - 1) \sim \sum_n \frac{\log n}{n} = +\infty$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ESEMPIO: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} \right) \rightarrow$ Serie geometrica

$p_1 < p_2 < \dots < p_i$ numeri primi

$$n = \prod_{k=1}^N p_{i_k}^{n_k} \rightarrow \text{multiplicità di } p_{i_k}$$

$$\prod_i \sum_k \frac{1}{p_i^k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right)$$

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1} \sim \sum_i \frac{p_i}{p_i - 1} - 1 = \sum_i \frac{1}{p_i - 1}$$

$$\text{Quindi } \sum_i \frac{1}{p_i} \sim \sum_i \frac{1}{p_i - 1} \sim \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$

Più in generale, dato $d > 0$, $\sum_i \frac{1}{p_i^d} \sim \sum_n \frac{1}{n^d} < +\infty \Leftrightarrow d > 1$

ESEMPLI: $\log n! \sim \log \left[\left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \right] = n \log n - n + \frac{1}{2} \log(2\pi n) \sim n \log n$

$$d > 0 \quad \sum_n \frac{\log n!}{n^d} \sim \sum_n \frac{n \log n}{n^d} = \sum_n \frac{\log n}{n^{d-1}} \Rightarrow \sum_n \frac{\log n!}{n^d} = \begin{cases} < +\infty & d > 2 \\ +\infty & d \leq 2 \end{cases}$$

$$d > 0 \quad 2^{n^d} = 2^{(n^d)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^d}} \quad \text{vediamo i due casi possibili}$$

$$d \geq 1 \Rightarrow n^d = n \cdot n^{d-1} \geq n \Rightarrow 2^{n^d} \geq 2^n \Rightarrow \sum \frac{1}{2^{n^d}} \leq \sum \frac{1}{2^n} = 2$$

$$d \in (0, 1) \text{ è vero che } \frac{1}{2^{n^d}} < \frac{1}{n^2} \text{ def in } n?$$

$$\text{cioè } 2^{n^d} > n^2 \text{ def. , cioè passando ai logaritmi } \log(2^{n^d}) = n^d \cdot (\log 2) > 2 \log n$$

$$\text{def. , cioè } \frac{n^d}{2 \log n} > \frac{2}{\log 2} \text{ def. ? } \underline{\text{Sì}}, \text{ dato che } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^d}{\log n} = +\infty \quad \forall d > 0$$

26-11-2021 lezione 27 Prof. Carminati

$$\bullet \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$$

$$f(x) = [f(x) + g(x)] + (-g(x))$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] + \overbrace{\limsup_{x \rightarrow x_0} (-g(x))}^{-\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)} \text{ da cui la tesi. } \square$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n - 1}{n^2 - 5n + 2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = e^4$$

$$\frac{n^2 - n - 1}{n^2 - 5n + 2} = 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{4n^2 - 3n}{n^2 - 5n + 2} = 1 + \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

— 0 —

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} \quad \textcircled{*} a_n > 0 \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

$$a_n := \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{(\cancel{n+1})(n+1)^n} \cdot \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n!}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \textcircled{\frac{1}{e}}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^d}{\sqrt[n]{n!}} \right) \quad \text{Per quali } d \in \mathbb{R} \text{ questa serie converge? } \begin{cases} d = 0 & \text{non conv.} \\ d > 0 & \text{non conv.} \\ d < 0 & \text{converge} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \quad a_n \sim \frac{e}{n^{1-d}} \leftarrow \text{formula generalizzata e. } \frac{1}{n^\beta} \quad \beta = 1-d, \text{ converge } \forall \beta > 1$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge per crit. della radice

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$ converge per confronto con $\frac{1}{n^2}$

$$0 \leq \frac{\log n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\log n}{n} \leq c \cdot \frac{1}{n^2} \quad \frac{\log n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\log n}{n} \leq c$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ per quali α converge? $\forall \alpha > 1$: se $\alpha = 1 + 2\delta$ con $\delta > 0$

$$\frac{\log n}{n^{1+2\delta}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \frac{\log n}{n^\delta} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot c \quad \frac{\log n}{n^\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists c > 0 : \frac{\log n}{n^\delta} \leq c$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$ converge? $\sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}} = \frac{n^{1/\sqrt{n}}}{2} = \frac{e^{(\log n)/\sqrt{n}}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge

• $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$ converge o diverge?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ diverge

$\sum_{\substack{n \text{ cubo di} \\ \text{un naturale}}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[8]{8}} + \frac{1}{\sqrt[27]{27}} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[k^3]{k^3}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge

$S = \{n \in \mathbb{N} : \text{la cifra } 0 \text{ non compare nello sviluppo decimale di } n\}$

$S_k = \{n \in S : n \text{ ha } k \text{ cifre}\}$

$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n \in S_1} \frac{1}{n} + \sum_{n \in S_2} \frac{1}{n} + \dots \right)$ Idea: procedere come nella dim. del criterio di condensazione

$0 \leq \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} \leq \frac{9^k}{10^k} \cdot 10 \quad \begin{cases} |S_1| = 9, |S_2| = 9^2, \dots, |S_k| = 9^k \\ n \in S_1: \frac{1}{n} < 1, n \in S_2: \frac{1}{n} < \frac{1}{10}, n \in S_3: \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \end{cases}$

$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} \leq 10 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k \leq 10 \cdot \frac{9}{10-9} = 90$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sqrt[n]{n} - 1 \right]^2$

$\frac{1}{n} \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow e^x - 1 \sim x \quad x \rightarrow 0$

$\left[\sqrt[n]{n} - 1 \right]^2 = \left[e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \right]^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left[\frac{1}{n} \log n \right]^2 \quad \circledast \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \log n \text{ diverge}$

Se $\alpha \leq 1$ la serie diverge

Se $\alpha > 1$ converge sempre : sia $\alpha = 1 + 2\delta \Rightarrow \frac{\delta}{1+2\delta} > 0$

$$0 \leq \frac{(\log n)^{1+2\delta}}{n^{1+2\delta}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \left[\frac{\log n}{n^{\delta/(1+2\delta)}} \right]^{1+2\delta} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot O(1)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \text{ per quali } x \in [0, +\infty) \text{ converge?}$$

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \begin{cases} x > 1 \Rightarrow x^n \rightarrow +\infty & \text{la serie converge} \\ x = 1 \Rightarrow x^n = 1 & \text{la serie diverge} \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 0 & \text{la serie converge} \end{cases}$$

$\sum \frac{1}{x^n}$ converge se $x > 1$

$$\otimes x > 1, x^n \rightarrow \infty \quad \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \sim \frac{1}{x^n}$$

$$\bullet \boxed{\alpha > 0} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} -\log \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \begin{cases} \text{conv. per } \alpha > \frac{1}{2} \\ \text{diverge altrimenti} \end{cases}$$

$$(*) \quad \frac{1}{n^\alpha} := x, \text{ se } n \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0$$

$$* \log \cos x = \log(1 + \overbrace{\cos x - 1}^{x \rightarrow 0}) \sim \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$-\log \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \text{ diverge perche' non e' verificato il criterio necessario}$$

$$\text{Oss: } \binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \text{ esercizio}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} \quad a_n = \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} (n+1)^2 \cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1) \cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{3^n \cancel{(n!)^2}} = \frac{3n^2}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow \frac{3}{4}$$

\Rightarrow la serie converge

SERIE A TERMINI GENERALI

Def: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

- Converge semplicemente se la succ. $S_N = \sum_{n=n_0}^N a_n$ converge per $N \rightarrow \infty$
- Converge assolutamente se la serie a termini positivi $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge

Prop: $\sum a_n$ conv. assolutamente \Rightarrow conv. semplicemente

Dim: Per il crit. di Cauchy

① $\sum a_n$ conv. sempl. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists N_\varepsilon$ t.c. $|\sum_{n=N}^M a_n| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_\varepsilon$

② $\sum a_n$ conv. ass. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists N'_\varepsilon$ t.c. $\sum_{n=N}^M |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N'_\varepsilon$.

Per dis. triangolare $|\sum_{n=N}^M a_n| \leq \sum_{n=N}^M |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N'_\varepsilon$
↑
per hp

$\Rightarrow \sum a_n$ conv. semplicemente

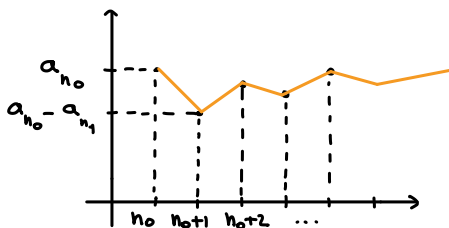
Oss: Non vale il viceversa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv. semplicemente ma non assolutamente, infatti: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Oss: Posso guardare la conv. di $\sum |a_n|$ a cui posso applicare confronto, rapporto, radice

CRITERIO DI LEIBNITZ

Sia $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente e $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora la serie a segni alterni $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (semplicemente)

Dim.



Supponiamo n_0 pari,
 n_0 dispari si fa in modo simile

S_{n_0+2k} è una succ. decrescente in k
 S_{n_0+2k+1} è " " crescente in k } Poiché a_n è decresc.

Inoltre sono limitate, infatti: $S_{n_0+2k} \geq S_{n_0+1}$ e $S_{n_0+2k+1} \leq S_{n_0} \quad \forall k \geq 1$

$S_{n_0+2k} \rightarrow l$ e $S_{n_0+2k+1} \rightarrow l'$ per $k \rightarrow +\infty$ però si ha

$0 \stackrel{hp}{\leftarrow} a_{n+2k+1} = |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}| \rightarrow |l - l'| \rightarrow l = l' \text{ e } \sum (-1)^n a_n \text{ conv. a } l.$

SOMMA PER PARTI DI UNA SERIE PRODOTTO

a_i, b_i successioni in \mathbb{R} o \mathbb{C}

$$\sum_{i=N}^M a_i b_i = \sum_{i=N}^M (a_i - a_{i+1}) B_i + \underbrace{a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}}_{\text{"termini di bordo"}} \quad \text{con } B_i = \sum_{k=i}^i b_k \quad \forall N, M > n_0$$

Dim: $b_i = B_i - B_{i-1} \quad \forall i$, cambio di indici

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^M a_i b_i &= \sum_{i=N}^M a_i B_i - \sum_{i=N}^M a_i B_{i-1} \stackrel{\text{cambio di indici}}{=} \sum_{i=N}^M a_i B_i - \sum_{i=N-1}^{M-1} a_{i+1} B_i = \\ &= \sum_{i=N}^M (a_i - a_{i+1}) B_i - a_N B_{N-1} + a_{M+1} B_M \end{aligned}$$

CRITERIO DI DIRICHLET

a_n, b_n in \mathbb{R} o \mathbb{C}

① $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

② a_n ha variazione limitata, cioè $\sum_n |a_{n+1} - a_n| < +\infty$

③ $B_N = \sum_{n=n_0}^N b_n$ allora $|B_N| \leq C \quad \forall N \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ converge (semplicemente)

Oss: Se $a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ② può essere sostituita con ②' a_n monotona,

infatti se a_n è monotona e limitata si ha:

$$\sum_{n=n_0}^N |a_{n+1} - a_n| = \left| \sum_{n=n_0}^N (a_{n+1} - a_n) \right| = |a_{N+1} - a_{n_0}| \leq C \quad \forall N \text{ e}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \left| \lim_n a_n - a_{n_0} \right| < +\infty$$

Oss: Prendendo $b_n = (-1)^n$ Dirichlet estende Leibnitz

Dim: Per Cauchy devo verificare che $\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \text{ t.c. } \left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq \varepsilon$

$\forall N, M \geq N_\varepsilon$ per la somma per parti, abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| &= \left| \sum_{n=N}^M (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=N}^M |a_n - a_{n+1}| \cdot |B_n| + |a_{M+1}| \cdot |B_M| + |a_N| \cdot |B_{N-1}| \leq \\ &\leq C \left(\sum_{n=N}^M |a_n - a_{n+1}| + |a_{M+1}| + |a_N| \right) \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

se prendo $N, M \geq N_\varepsilon$ dove N_ε è t.c. $\sum_{n=N}^M |a_n - a_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{C}$

e $|a_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$.

Mi vanno bene perché nel primo caso ho che $\sum_n |a_n - a_{n+1}| < +\infty$

e nel secondo ho che $a_n \rightarrow 0$.

VARIANTE: CRITERIO DI ABEL

a_n, b_n in \mathbb{R} o \mathbb{C} tali che

① a_n ha variazione limitata ($\Rightarrow a_n$ converge)

② $\sum b_n$ converge, cioè B_n è convergente $\Rightarrow \sum a_n b_n$ converge

Dim. Variante della precedente

Oss: $\sum |a_n - a_{n+1}| < +\infty \Rightarrow a_n$ è di Cauchy $\Rightarrow a_n$ converge

Infatti $|a_N - a_M| = \left| \sum_{n=N}^{M-1} (a_n - a_{n+1}) \right| \leq \sum_{n=N}^{M-1} |a_n - a_{n+1}| \leq \varepsilon$ se $N, M \geq N_\varepsilon$

SERIE DI POTENZE COMPLESSE

$\sum a_n z^n$ $z \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ serie di potenze in \mathbb{C}

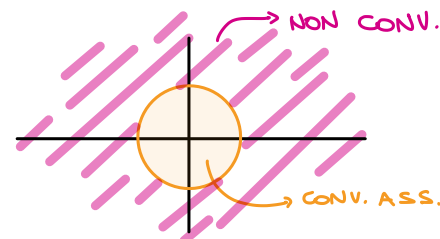
Domanda: Per quali $z \in \mathbb{C}$ converge?

Vediamo la conv. assoluta, cioè guardo $\sum_n |a_n| \cdot |z|^n$

Idea: Uso il criterio della radice \Rightarrow la serie converge se

$\lim_n \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} = |z| \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$: va bene se si ha

$$|z| < R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{RAGGIO DI CONVERGENZA}$$



Osserviamo che se $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow R \geq 1$.

Viceversa se $|z| \cdot \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \limsup_n |z^n a_n| > 1 \Rightarrow z^n a_n \not\rightarrow 0$ e $\sum a_n z^n$ non conv.

Ricapitolando: • $|z| < R \Rightarrow$ converge assolutamente

• $|z| > R \Rightarrow$ non converge ($a_n z^n \not\rightarrow 0$)

Fino qui non serve nessuna ipotesi di a_n . Cosa succede per $|z| = R$?

Applico Dirichlet: $\sum_n a_n z^n = \sum_n (a_n R^n) \left(\frac{z}{R}\right)^n$ osservando che se

$$|z| \leq R \text{ e } |z| \neq R \quad B_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{R}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{R}} \text{ ho che}$$

$$|B_N| \leq \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{R}\right|} \left(1 + \left|\frac{z}{R}\right|^{N+1}\right) \leq \frac{2}{\left|1 - \frac{z}{R}\right|} \quad \forall N$$

Quindi se $a_n R^n \rightarrow 0$ ed ha variazione limitata ottengo che

$\sum a_n z^n$ converge (per Dirichlet) $\forall z$ con $|z| = R$, $z \neq R$.

Il caso $z=R$ va visto a parte.

Oss: R si dice raggio di convergenza della serie di potenze

Esempio: $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$ $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ $R = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (raggio di conv.)

$|z| < 1 \Rightarrow$ conv. assoluta

$|z| > 1 \Rightarrow \frac{z^n}{n} \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ la serie non converge

$$|z|=1, z \neq 1 \Rightarrow |B_N| = \left| \sum_{n=n_0}^N z^n \right| = \left| \frac{1-z^{N+1}}{1-z} - \frac{1-z^{n_0}}{1-z} \right| = \left| \frac{z^{n_0} - z^{N+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

Inoltre $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ed è monotona \Rightarrow ha variazione limitata \Rightarrow

\Rightarrow per Dirichlet $\sum \frac{z^n}{n}$ converge (non assolutamente) $\forall z$ t.c. $|z|=1, z \neq 1$

$z=1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n} = +\infty$ non converge

02-12-2021

Lezione 29

Prof Novaga

Esempio (Serie di Fourier):

$$\sum a_n \sin(nx), \quad \sum a_n \cos(nx) \quad x \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

Si può applicare Dirichlet con $b_n = \sin(nx)$ o $b_n = \cos(nx)$ se a_n è infinitesima o ha variazione limitata va verificato:

$$\left| \sum_{n=0}^N \sin(nx) \right| \leq C \quad \forall N \quad \text{e lo stesso per } \cos(nx).$$

Osserviamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ quindi $\begin{cases} \sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx}) \\ \cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^N \sin(nx) = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^N \underbrace{(e^{ix})^n}_{z, |z|=1} = \begin{cases} \operatorname{Im} \left(\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \right) & \text{se } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\left| \sum_{n=0}^N \sin(nx) \right| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \quad x \neq 2k\pi \quad \forall N, \quad \sum_{n=0}^N \sin(2kn\pi) = 0 \quad \forall N$$

\Rightarrow la serie converge $\forall x$. Nel caso $\sum a_n \cos(nx)$ lo, allo stesso modo, convergenza $\forall x \neq 2k\pi$, invece per $x=2k\pi$ devo studiare la serie $\sum a_n$

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad c_n \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C} \text{ "centro" della serie}$$

$\exists R \in [0, +\infty]$ raggio di convergenza

$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}$ (con la conv. $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$) tale che la serie conv. ass. se $|z - z_0| < R$ e non conv. se $|z - z_0| > R$ **cerchio di convergenza**

La conv. al bordo, cioè per $|z - z_0| = R$, si studia col criterio di Dirichlet o col criterio della conv. assoluta. In ogni caso è def.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$$

Prop: f è continua su $B_R(z_0)$

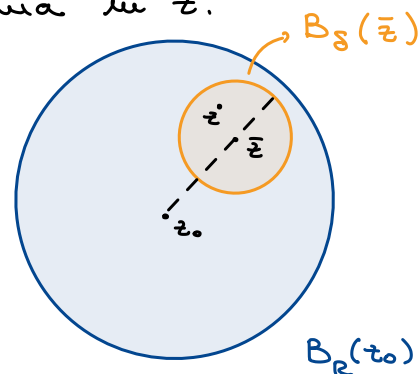
Dim: Sia $\bar{z} \in B_R(z_0)$ voglio vedere che f è continua in \bar{z} .

Sia $\delta > 0$ $B_\delta(\bar{z}) \subseteq B_R(z_0)$, cioè $|\bar{z} - z_0| + \delta < R$.

$\forall z \in B_\delta(\bar{z})$ $\sum c_n (z - z_0)^n$ conv. assol. a $f(z)$

inoltre tale conv. è uniforme in $z \in B_\delta(\bar{z})$.

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \left| f(z) - \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| |z - z_0|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| \underbrace{(|z_0 - \bar{z}| + \delta)}_{R'}^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$



NB: I polinomi $S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n$ convergono uniformemente a $f(z)$ in ogni cerchio $B_{R'}(z_0)$ con $R' < R$. Ora stimiamo:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\bar{z})| &= |S_N(z) - S_N(\bar{z}) + f(z) - S_N(z) + S_N(\bar{z}) - f(\bar{z})| \\ &\leq |S_N(z) - S_N(\bar{z})| + |f(z) - S_N(z)| + |f(\bar{z}) - S_N(\bar{z})| \end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo N_ε t.c. $|f(z') - S_N(z')| < \varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon$.

Lo posso fare $\forall z' \in B_\delta(\bar{z})$ per la conv. uniforme fissato tale N ,

$S_N(z)$ è continua, $\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon$ tale che $|S_N(z) - S_N(\bar{z})| \leq \varepsilon$ se $z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$.

Per tale δ_ε ho quindi $|f(z) - f(\bar{z})| \leq 3\varepsilon \quad \forall z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$

$\Rightarrow f$ è continua in \bar{z} .

Oss: Con la stessa dimostrazione ho che f è uniformemente continua in $B_{R'}(z_0) \quad \forall R' < R$.

Non è detto che lo sia in $B_R(z_0)$.

RIORDINAMENTI

Def: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è un riordinamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bigettiva tale che $b_n = a_{f(n)}$.

Domanda: se $\sum a_n$ converge cosa posso dire di $\sum b_n$?

Teo: $\sum a_n$ converge assolutamente a S

$\Rightarrow \sum b_n$ converge assolutamente, sempre a S

Dim: $b_n = a_{f(n)}$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bigettiva $\forall N \in \mathbb{N} \exists M \geq N$ t.c. $\{a_1, \dots, a_N\} \subseteq \{b_1, \dots, b_M\}$

Fisso $N' \geq M$ e guardo la differenza delle somme parziali:

$$\left| \sum_{n=0}^{N'} (a_n - b_n) \right| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon \text{ se } N \text{ è abbastanza grande.}$$

In generale non è vero se $\sum a_n$ converge semplic. ma non assolut.

$$\text{Sia } S^+ = \sum \max(a_n, 0) \in [0, +\infty]$$

$$S^- = -\sum \min(a_n, 0) \in [0, +\infty]$$

Osserviamo che $\sum a_n$ conv. assolutamente $\Leftrightarrow S^+ < +\infty$.

La somma è $S = S^+ - S^-$.

Prop: $\sum a_n$ converge semplicemente o no assolutamente (quindi $S^+ = S^- = +\infty$)

$\Rightarrow \forall S \in [-\infty, \infty] \exists$ un riordinamento $b_n = a_{f(n)}$ tale che $\sum b_n = S$.

Dim: Per esercizio

Oss: \odot Se $S^+ = +\infty$ e $S^- < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$
 \odot Se $S^- = +\infty$ e $S^+ < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n = -\infty$ } e lo stesso per ogni riordinamento

PRODOTTI DI DUE SERIE

Siano $\sum a_i = S_a$ e $\sum b_j = S_b$ due serie convergenti.

Posso esprimere $(\sum a_i)(\sum b_j)$ come somma di una serie?

$$S_a \cdot S_b = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \right) = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j$$

La serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right)$ si dice prodotto di Cauchy delle due serie.

Teo: Se le serie convergono assolutamente \Rightarrow la serie prodotto $\sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j$ converge assolutamente a $S_a \cdot S_b$.

Dim: So che $\sum_{n=0}^N \sum_{i+j=n} |a_i b_j| \leq \sum_{i=0}^N |a_i| \cdot \sum_{i=0}^N |b_i| \leq T_a \cdot T_b < +\infty$ quindi la serie prodotto converge assolutamente \Rightarrow a meno di riordinamento $\sum_n \sum_{i+j} a_i b_j = \sum_i (a_i \sum_j b_j) = S_a \cdot S_b$.

Oss: Non vale senza l'assoluta convergenza. Se però $\sum a_n$ converge assolut. e $\sum b_n$ conv. sempl. posso dire ancora che la serie prodotto converge a $S_a \cdot S_b$ (Teorema di Mertens).

Applicazione: $f(z) = \sum_n a_n z^n$ $R_a > 0$ raggio di convergenza

$g(z) = \sum_n b_n z^n$ $R_b > 0$ raggio di convergenza

\Rightarrow la serie prodotto $\sum_n c_n z^n = f(z)g(z)$, con $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$, ha raggio di convergenza $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

03-12-2021

Lezione 30

Prof. Carminati

Esercizi per casa:

1) Calcolare $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

2) Sia a_n definita da $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log(1+a_n^2) \end{cases}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

b) Calcolare il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^{-1/n}$

4) $\sum \frac{(-1)^n}{n \log^n n}$ Dire per quali x la serie converge semplicemente e assolutam.

Serie armonica a segni alterni

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge per Leibnitz

Oss: Avevamo visto $H(n) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1)$ per $n \rightarrow +\infty$.

Possiamo prendere anziché $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e otteniamo dunque una funzione

$H(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + o(1)$ per $x \rightarrow \infty$. Se prendiamo $n \doteq \lfloor x \rfloor$ otteniamo

$H(x) = H(n)$, infatti: $0 \leq \log x - \log n < \log n+1 - \log n < \frac{1}{n}$ con $n \leq x < n+1$

Consideriamo $A(n) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k}$ che equivale a

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \boxed{2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k}} \stackrel{k=2h}{=} 2 \sum_{1 \leq h \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{2h} = H\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$A(n) = H(n) - H\left(\frac{n}{2}\right) = \log n + \gamma + o(1) - \left(\log \frac{n}{2} + \gamma + o(1)\right) = \log n \cdot \frac{2}{n} + o(1)$$

$$= \log(2) + o(1) \xrightarrow{\quad \circ \quad} \log 2$$

(Per casa) Calcolare la serie $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = ?$

* $\sum \frac{\sqrt{2^n+3^n}}{(n+1)^2} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ per quali $z \in \mathbb{C}$ converge?

Serie di potenze centrata in 0.

$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$ Raggio di Convergenza $R = \frac{1}{L}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2^n+3^n}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(n+1)^{-2/n}}_{\downarrow 1} \underbrace{\sqrt[n]{2^n+3^n}}_{\downarrow \sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n \rightsquigarrow \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$$

La serie * converge se $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ e non converge se $|z| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Se $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $|C_n z^n| = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \sqrt{2^n+3^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}^n} = \frac{1}{(n+1)^2} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \sim \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum |C_n z^n|$ converge per il criterio del confronto asintotico \Rightarrow

\Rightarrow anche $\sum C_n z^n$ converge.

(S) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{x_n} \quad x_n \rightarrow 0 ? \text{ Si}$

(S) è assolutamente convergente? $\sum |x_n| < +\infty$? No

$$|x_n| = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ non converge}$$

Posso applicare leibnitz? Si: $x_n = (-1)^n a_n$ con $a_n \rightarrow 0$, $a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$,

\sqrt{n} cresc. $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}$ decresc. $\in [0, 1]$, $\sin x$ è cresc. su $[0, 1] \Rightarrow a_n$ è decrescente

$\Rightarrow \sum (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge semplicemente (ma non assolutamente)

per il criterio di leibnitz.

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$ dire se converge

$$x_n = (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}}_{a_n \rightarrow 0}$$

Metodo 1: ~~Per Leibnitz la serie converge.~~ (NO) serve a_n decrescente

Metodo 2: $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)}_{\rightarrow 0(1)} \right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

~~Quindi per il criterio del confronto asintotico converge anche la serie di partenza.~~ (NO) serve $x_n \geq 0$

$$x_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + H(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \text{ La } \sum x_n \text{ diverge positivamente.}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^{n!}$ per quali $z \in \mathbb{C}$ converge? **SERIE DI POTENZE LACUNARIA**

Studio la conv. di $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2^n |z|^{n!}}_{a_n(z)}$

al variare di $z \in \mathbb{C}$.

$$\sum c_k z^k \text{ con } c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n! \quad n \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } k = n! \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = ?$$

Usando il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} |z|^{(n+1) \cdot n!}}{2^n |z|^{n!}} = 2 \cdot |z|^{n(n!)} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } |z| < 1 \\ +\infty & \text{se } |z| > 1 \end{cases}$$

La serie converge se $|z| < 1$ e non converge se $|z| > 1$.

$|z| = 1$? La serie non converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2}}_{x_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty}$$

$\sum |x_n|$ converge? No: $|x_n| \sim \frac{\log n}{n}$

Posso usare Leibnitz: $a_n = \frac{n \log n}{1+n^2}$ $a_n \rightarrow 0$, a_n decrescente def. $\forall n \geq n_0$

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{(n+1) \log(n+1)}{1+(n+1)^2} < \frac{n \log n}{1+n^2} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(n+1)(1+n^2)}{n(1+(n+1)^2)}}_{r_n} < \underbrace{\frac{\log n}{\log(n+1)}}_{s_n} < 1$$

Leibnitz
 \Rightarrow la serie converge

$$r_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)} = \frac{1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

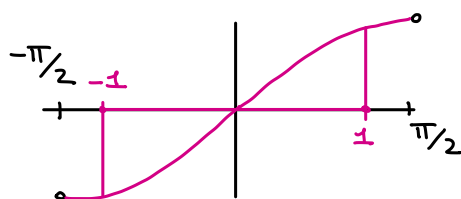
$$s_n = \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1 - \frac{-\log n + \log(n+1)}{\log(n+1)} = 1 - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log(n+1)} = 1 - \frac{1}{n \log n} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$$

$$1 - r_n \sim \frac{1}{n}, \quad 1 - s_n \sim \frac{1}{n \log n}, \quad \text{def. } \frac{1}{n \log n} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - r_n < 1 - s_n \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow r_n < s_n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = -\sin x_n \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ? ; \quad \begin{array}{l} 1) \sum x_n \text{ converge?} \\ 2) \sum x_n \text{ converge assolutamente?} \end{array}$$

Oss: x_n è definita $\forall n$, $|x_n| \leq 1 \quad \forall n$

$$\begin{cases} f(x) = \sin |x| \\ g(x) = |\sin x| \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{sono funzioni diverse} \\ \text{ma coincidono su } [-1, 1] \end{array} \right\}$$



$$a_n = |x_n| \quad a_{n+1} = |x_{n+1}| = |-\sin x_n| = |\sin x_n| = \sin |x_n| = \sin a_n \quad \text{perché } |x_n| \leq 1$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases} \Rightarrow a_n \text{ def. } \forall n \quad 0 \leq a_n \leq 1$$

$$\sin x < x \Rightarrow a_{n+1} = \sin a_n < a_n \quad a_n \text{ decrescente}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \geq 0, \quad l = 0 \text{ perché } 0 \text{ è l'unica soluzione di } l = \sin l \text{ su } [0, 1]$$

Per induzione si mostra che $x_n = (-1)^n a_n$ e quindi possiamo concludere che

$\sum x_n$ converge per il criterio di Leibnitz. □

Suggerimento: $\sum x_n$ non converge assolutamente perché $\sum a_n$ non converge

$$a_n \geq \frac{c}{n} \text{ per qualche valore di } c.$$

07-12-2021

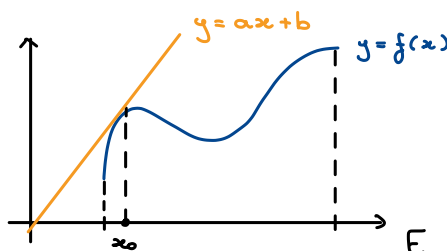
lezione 31

Prof. Novaga

CALCOLO DIFFERENZIALE

$$f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in E$ pt. di accumulazione



Cerchiamo la retta che approssima meglio $f(x)$ vicino a x_0 := RETTA TANGENTE

Cerchiamo $y = ax + b$ tale che $f(x) - (a(x-x_0) + b) = o(x-x_0)$

Se pongo $x = x_0$ ho subito $b = f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) - a(x-x_0) = o(x-x_0)$

Dividendo per $x-x_0$ ottengo $a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$, che possiamo anche indicare come $\frac{df(x_0)}{dx} \in \mathbb{R}$ cioè la **DERIVATA DI f IN x_0** .

Se questo limite esiste f si dice derivabile in x_0 e $f'(x_0)$ è il coeff. della retta tangente al grafico f in $(x_0, f(x_0))$ di eq. $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Oss: f derivabile, cioè $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$ in x_0

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ è continua in x_0

Non è vero il viceversa:

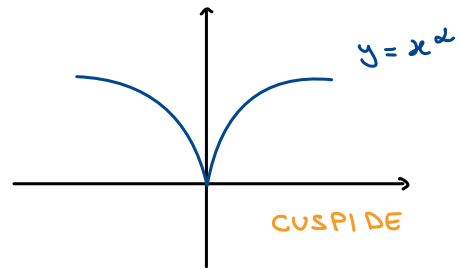
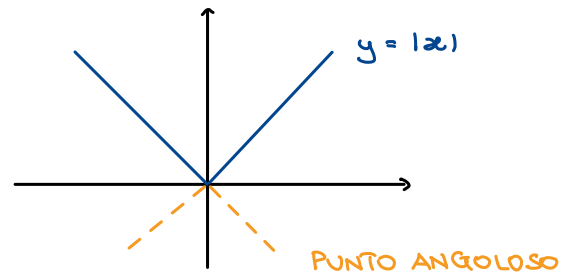
⊙ $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm 1$$

$$\odot f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ (-x)^2 & x < 0 \end{cases}$$

non è derivabile in $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm \infty$$



Facendo il limite destro e sinistro definiamo:

DERIVATA DESTRA: $\frac{df}{dx^+}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

DERIVATA SINISTRA: $\frac{df}{dx^-}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Oss: f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ le derivate destra e sinistra coincidenti

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLA DERIVATA

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari se $f(x) = f(-x)$

è dispari se $f(x) = -f(-x)$

⊙ f pari $\Rightarrow f'$ dispari, f dispari $\Rightarrow f'$ pari ($h = x - x_0$)

supponiamo f pari $\Rightarrow f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \stackrel{\downarrow}{=} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$

f dispari si fa allo stesso modo.

$$\odot (cf)'(x) = c \cdot f'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\odot (f \pm g)' = f' \pm g' \quad \text{additività del limite}$$

$$\odot (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right] \\&= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= g \cdot f' + f \cdot g'\end{aligned}$$

$$\odot f \text{ derivabile in } x \text{ e } f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ deriv. in } x \text{ e } \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-[f(x+h) - f(x)]}{h f(x+h) f(x)} \quad \text{←}$$

Oss: Dalle ultime due proprietà otteniamo

$$\odot \left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{se } g(x) \neq 0$$

CHAIN RULE, DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

f, g g deriv. in x_0 , f deriv. in $g(x_0) \Rightarrow f \circ g$ derivabile in x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Dobbiamo vedere che $f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{?}{=} f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

Sappiamo ① $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \\&\quad \uparrow \text{ usando ①}\end{aligned}$$

DERIVATA DI FUNZIONI ELEMENTARI

$$(c)' = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$(ax+b)' = a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} h^j - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + o(h)}{h} = nx^{n-1}$$

QSS: $P(x)$ pol. di grado $n \Rightarrow P'(x)$ è un pol. di grado $n-1$

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(x)}_{\rightarrow 1} = \cos(x) \end{aligned}$$

$$\cos(x)' = \sin(x)$$

Analogo

$$\begin{aligned} \tan(x)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin(x)' \cos(x) - \sin(x) \cos(x)'}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2 \end{aligned}$$

$$(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0 \quad \left[\text{Più in generale: } \log(|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0 \right]$$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$\log(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \underbrace{\frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{x}$$

$$\odot f \text{ deriv} \Rightarrow (e^f)' = e^f \cdot f'$$

$$\odot f \text{ deriv. e } f > 0 \Rightarrow \log(f)' = \frac{f'}{f}$$

$$\text{Più in generale } f, g \text{ derivabili } f > 0 \Rightarrow f^g = e^{\log(f^g)} = e^{g \log(f)}$$

$$\odot (f^g)' = e^{g \log(f)} \cdot [g \log(f)]' = f^g \left(g' \log(f) + \frac{g f'}{f} \right)$$

Esempi:

$$\odot x^\alpha \quad x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x^\alpha = e^{\alpha \log x} \quad (x^\alpha)' = x^\alpha \cdot (\alpha \log x)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$\odot a^x \quad a > 0 \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow a^x = e^{x \cdot \log a} \quad (a^x)' = a^x (x \log a)' = (\log a) \cdot a^x$$

$$\odot x^x = e^{x \log x} \quad x > 0 \Rightarrow (x^x)' = x^x (x \log x)' = x^x (\log x + 1)$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE INVERSA

f invertibile in un intorno di x_0 e derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $f(x_0)$ e si ha $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Sappiamo $f^{-1}(f(x)) = x$ per x in un intorno di x_0

$$e \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f^{-1}\left(\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}_y\right) = x_0 + x - x_0$$

\downarrow
 $f^{-1}(y_0) \quad y_0 = f(x_0)$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

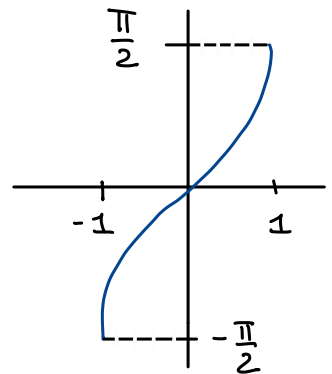
$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + x - x_0 = f^{-1}(y_0) + \frac{y - y_0}{f'(x_0)} + o(y - y_0)$$

$$\text{Quindi} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Oss: Se $f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \pm \infty$

Esempi.

$$y = \sin(x) \quad \arcsin(y) = \sin(x) \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}^{-1}$$



$$\arcsin(y)' = \frac{1}{\sin(x)'} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$$

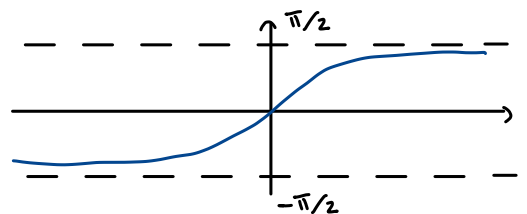
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-y^2}$$

$$\arccos(y)' = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$$

$$\arccos(y) = \cos(x) \Big|_{[0, \pi]}^{-1}$$

$$\arctan(y) = \tan(x) \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}^{-1}$$

$$\arctan(y)' = \frac{1}{\tan(x)'} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$
$$= \frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$



Es per casa:

① Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}$

a) Verificare che f è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ b) Mostrare che $f'(0) = 1$ ma f non è crescente in alcun intorno dell'origine

② Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \log\left(\frac{3+x}{1+2x}\right) & x > 0 \end{cases}$ è derivabile su \mathbb{R}

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 è un punto di **MASSIMO RELATIVO** (o **LOCALE**) di f su A ^{def} \Leftrightarrow

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$$

 x_0 è un punto di **MINIMO RELATIVO** (o **LOCALE**) di f su A ^{def} \Leftrightarrow

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$$

 x_0 è un punto di **MASSIMO ASSOLUTO** (o **GLOBALE**) di f su A ^{def} \Leftrightarrow

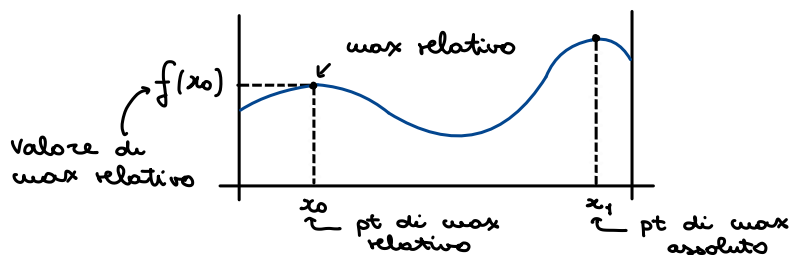
$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

 x_0 è un punto di **MINIMO ASSOLUTO** (o **GLOBALE**) di f su A ^{def} \Leftrightarrow

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

Oss: x_0 punto di max. assoluto $\Rightarrow x_0$ punto di max. relativo.

Non è vero il viceversa.

Teo (CRITERIO DI FERMAT):

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \text{int}(A)$ punto interno, x_0 pt. di massimo o minimo relativo per f su A , f derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Oss: Non vale \Leftarrow : $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ non è pt. di max né di min relativo

Dim: SPG x_0 pt. min relativo

x_0 pt. interno $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : B_{\delta_1}(x_0) \subset A$

x_0 pt. min relativo $\Rightarrow \exists \delta_1 > \delta > 0 \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

Se $x \in B_\delta(x_0) \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad (\text{numeratore } \geq 0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \rightarrow f'(x_0) = 0.$$

□

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ ammette massimo e minimo

i) il pt. max potrebbe coincidere con gli estremi ($x_0 \in \{a, b\}$)

ii) il pt. max potrebbe essere interno $x_0 \in (a, b)$ ma f non deriv. in x_0

iii) il pt. max è interno e f derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Es: $f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$

Determinare inf e sup di f e dire se sono o no max e min

TEOREMA DI ROLLE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua su $[a, b]$, f derivabile su (a, b) ,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

f continua $\Rightarrow f$ ammette massimo e minimo

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) \geq l \geq \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

[caso A] $\max f = \min f \Rightarrow f(x) = l \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

[caso B] $\max f \neq \min f \Rightarrow$ almeno uno dei due è diverso da l

(spg il max) $\exists \xi \in [a, b] \quad f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x) > l \Rightarrow \xi \notin \{a, b\}$

$$\Rightarrow \xi \in (a, b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

per il Teorema
precedente

□

TEOREMA DI DARBOUX

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile su $[a, b]$,

$$f'(a) < 0 \text{ e } f'(b) > 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f'(\xi) = 0$$

Dim: Per Weierstrass f ammette massimo e minimo.

Il punto di minimo ξ deve essere INTERNO : $\xi \in (a, b)$

b non può essere punto di minimo locale $\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \xrightarrow{x \rightarrow b^-}, f'(b) > 0$

Quindi $\frac{f(b) - f(x)}{b - x} > 0$ in un intorno sinistro di b : $[b - \delta, b)$

$$\Rightarrow f(b) - f(x) > 0 \quad \forall x \in (b - \delta, b) \Rightarrow f(b) > f(x) \quad \forall x \in (b - \delta, b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(b)$ non è un punto di minimo

Con un ragionamento analogo segue $f(a)$ non è un punto di minimo

$$\Rightarrow \xi \in (a, b) \rightarrow f'(\xi) = 0$$

Cor: f' manda intervalli in intervalli (per esercizio)

TEOREMA DI LAGRANGE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua su $[a, b]$, f derivabile su (a, b)

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dim:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

• h è continua su $[a, b]$

• h è derivabile in (a, b) , $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

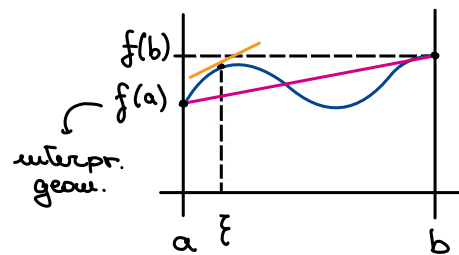
$$h(a) = f(a), \quad h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a)$$

• $h(b) = h(a)$

Posso applicare ad h il th di Rolle:

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) \quad 0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{cioè } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



□

Cor: Se $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

f derivabile in $\text{int}(I)$

i) Se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ è deb. decrescente

ii) Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ è deb. crescente

iii) Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ è costante

Oss: Serve che I sia un intervallo

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad f(-1) = -1 < f(1) = 1$$

f non è decrescente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$

Dim: i) Se $a, b \in I$ con $a < b$ allora $[a, b] \subset I$

Applico Lagrange $\exists \xi \in (a, b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \leq 0$

Pertanto visto che $b - a > 0 \quad f(b) - f(a) \leq 0 \Rightarrow f(b) \leq f(a)$

ii) identica (per esercizio)

iii) Se vale (iii) \Rightarrow vale sia (i) e (ii)

$\Rightarrow f$ è sia deb. crescente che f decrescente $\Rightarrow f$ costante \square

Es di applicazione:

$n \mapsto a_n = \frac{n \log n}{1 + n^2}$ è decrescente $\forall n \geq n_0 \quad (n \in \mathbb{N})$

$\varphi(x) = \frac{x \log x}{1 + x^2}$ è decrescente su $[a, +\infty)$

$a_n = \varphi(n)$ per verificare la decrescenza di $a_n \quad \forall n \geq n_0$ basta verificare la decrescenza di φ su una semiretta positiva

$$\varphi'(x) = \frac{(\log x + 1)(1 + x^2) - x \log x (2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{N(x)}{D(x)} \quad D(x) > 0$$

$$N(x) = \log x + 1 + \cancel{x^2 \log x} + x^2 - \cancel{2} x^2 \log x = -x^2 \log x + o(x^2 \log x) \quad x \rightarrow +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = -\infty \Rightarrow N(x) < 0$ su una semiretta positiva $[a, +\infty)$

$\Rightarrow \varphi$ decrescente su $[a, +\infty)$

Es: Studiare la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

TEOREMA DI CAUCHY

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g continua su $[a, b]$, f, g derivabili su (a, b)
 $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi)$

Cor: Se nelle stesse ipotesi assumiamo anche che $g'(\xi) \neq 0$ su (a, b)

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Oss: Se pongo $g(x) = x$ riottengo Lagrange

Dim: $h(x) \doteq [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$

h è continua su $[a, b]$, h è derivabile su (a, b) e

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

h soddisfa le ipotesi di Rolle

$$h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$\stackrel{||}{h(b)} = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$

$$\Rightarrow \exists \xi: h'(\xi) = 0 \Rightarrow [f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi) \quad \square$$

Esempio/esercizio:

f deriv. in un intorno di 0, $f(0) = 0$, $f'(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$ ($n \geq 1$)

Allora $f(x) = o(x^{n+1})$ per $x \rightarrow 0$.

[Sugg: usare Cauchy con $g(x) = x^{n+1}$]

• Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su I (intervallo) $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in I \quad \text{cioè } f \in M\text{-Lip}$$

10-12-2021

Lezione 33

Prof. Carminati

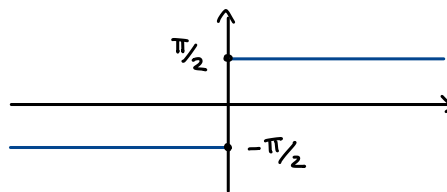
• $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow f = \text{cost}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$



$$\bullet \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{a_n} = (?)$$

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n-1)} \right] \left(-\frac{1}{2} \right) = \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right] \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_2^N a_n &= -\frac{1}{2} \left[\sum_2^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \sum_2^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{N} - 1 \right) \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

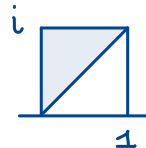
$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-1/n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n n^{-1/n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

L'addendo non è infinitesimo \Rightarrow la serie non converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\log n}{n} (1+i)^n}_{c_n} z^n \quad z \in \mathbb{C}$$

Q1: Raggio di convergenza

Q2: Comportamento al bordo



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad |c_n| = \frac{\log n}{n} |1+i|^n = \frac{\log n}{n} 2^{n/2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n}} \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } z \in \partial B_R(0) \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}$$

$$c_n z^n = \underbrace{\frac{\log n}{n} \cdot (1+i)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}_{b_n} e^{in\theta}$$

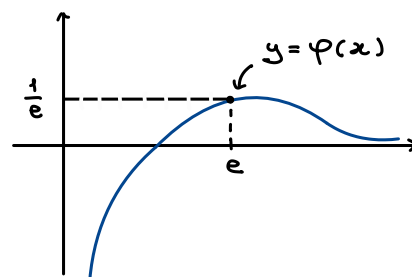
Oss: Se $|z| = R$ la serie non è assolutamente conv. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$

$$\varphi(x) \doteq \frac{\log x}{x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0 \quad \text{per } x > e$$

$$n \mapsto \frac{\log n}{n} \text{ è decrescente per } n \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{\log n}{n} \text{ è a variazione limitata}$$



Per utilizzare Dirichlet devo verificare che b_n è a somma limitata

$$b_n = (1+i)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n e^{i n \theta} = e^{i \pi/4 n} \cdot e^{i \theta n} = e^{i(\pi/4 + \theta)n} \quad 1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i \pi/4}$$

Per quali valori di θ $B_N \doteq \sum_{n=1}^N e^{i(\pi/4 + \theta)n}$ è limitata.

$$\text{Se } \theta \neq -\frac{\pi}{4} \Rightarrow B_N = e^{i(\pi/4 + \theta)} \cdot \frac{1 - e^{i(\pi/4 + \theta)(N+1)}}{1 - e^{i(\pi/4 + \theta)}}$$

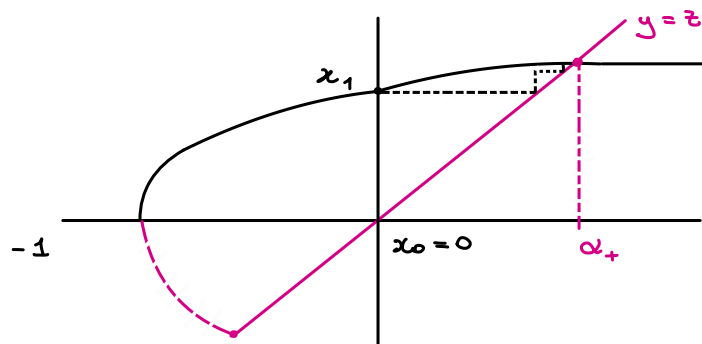
$$|B_N| \leq \frac{2}{|1 - e^{i(\pi/4 + \theta)}|} \quad \text{è limitata uniformemente in } \mathbb{N}$$

Se $\theta = \pi/4$ l'addendo della serie è esattamente $\frac{\log n}{n} \Rightarrow$ la serie diverge \square

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4
x_n	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1+\sqrt{2}}$	$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad \sqrt{1+x} > x \Leftrightarrow \{x < 0\} \cup \{x > 0 \wedge 1+x > x^2\}$$



$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

$$\sqrt{1+x} \geq x \quad \text{se } x \in [-1, \alpha_+]$$

$$f([-1, \alpha_+]) = [0, \alpha_+] \subset [-1, \alpha_+]$$

$$x_0 \in [-1, \alpha_+] \Rightarrow x_n \in [-1, \alpha_+] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{per induzione}$$

$$f(x) \geq x \quad \text{se } x \in [-1, \alpha_+]$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) > x_n \Rightarrow x_n \text{ crescente, } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \leq \alpha_+$$

$$\Rightarrow l = f(l) \Rightarrow l = \alpha_+ \quad \text{con } x_n \rightarrow \alpha_+$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha_+ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \underbrace{(x_n - \alpha_+)}_{-\varepsilon_n} = ?$$

$$\varepsilon_n \doteq \alpha_+ - x_n > 0$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{f(\alpha_+) - f(x_n)}{\alpha_+ - x_n} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha_+} \frac{f(\alpha_+) - f(x)}{\alpha_+ - x} = f'(\alpha_+)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad 0 < f'(\alpha^+) < 1$$

Quindi ε_n converge a zero con velocità esponenziale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 \varepsilon_n = 0$$

Q3: Quanto vale il Raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$?

$R = \frac{1}{f'(\alpha^+)}$ c'è convergenza anche in $|z|=R$ e $z \neq R$ (Dirichlet)

$z = R$ boh! \leadsto assoluta convergenza

$$1 + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{4}\right) + \dots$$

Riordinamento di $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

\oplus	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$
\ominus	$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}\right), \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$

Più in generale:

Suppongo di sommare $p(n)$ addendi positivi
 $q(n)$ addendi negativi \rightarrow con $p(n) + q(n) = n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha \in \mathbb{R} \quad \left(\text{nel caso sopra } \alpha = \frac{2}{3} \right)$$

$$S_n = \sum_{\substack{k \text{ disp} \\ k \leq 2p(n)}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k \text{ pari} \\ k \leq 2q(n)}} \frac{1}{k}$$

$$H(x) \doteq \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + o(1) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \text{ disp} \\ k \leq 2p(n)}} \frac{1}{k} &= H(2p(n)) - \sum_{\substack{k \text{ pari} \\ k \leq 2q(n)}} \frac{1}{k} = \log(2p(n)) + \gamma + o(1) - \left[\frac{1}{2} \log p(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \log p(n) + \frac{\gamma}{2} + \log 2 + o(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} (\log p(n) - \log q(n)) + \log 2 + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{p(n)}{q(n)} + \log 2 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \frac{\alpha}{1-\alpha} + \log 2 \end{aligned}$$

Nel caso da cui siamo partiti $\alpha = 1/2$ e il limite

$$\frac{1}{2} \log \frac{2/3}{1/3} + \log 2 = \frac{3}{2} \log 2$$

Es: Mostrare che $f(x) = \log \frac{x}{1-x}$ si ha $f((0,1)) = \mathbb{R}$

$$e^{-x} = \frac{x}{n} \quad (E) \quad (n \in \mathbb{N}_*)$$

(a) Mostrare che (E) ha un'unica soluzione $\alpha(n)$

(b) Mostrare che $\alpha_n \sim \log n$ per $n \rightarrow \infty$

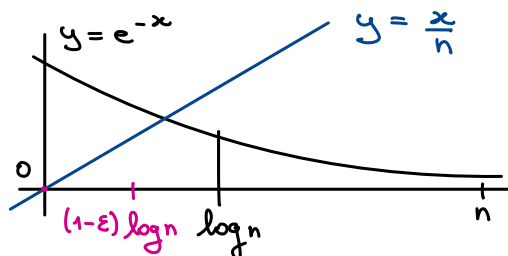
$$\varphi_n(x) = e^{-x} - \frac{x}{n} \quad \varphi_n(\alpha_n) = 0 ?$$

$$\varphi_n(0) = 1 > 0$$

$$\varphi(n) = e^{-n} - 1 < 0 \quad \forall n \geq 1$$

φ_n è continua

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_n(0) > 0 \\ \varphi_n(n) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha_n \in [0, n] \quad \varphi_n(\alpha_n) = 0$$



φ_n è somma di due funzioni strett. decrescenti \Rightarrow è str. decresc.

$$-x = \log x - \log n$$

$$x + \log x = \log n$$

[...]

$$\alpha_n + \log \alpha_n = \log n$$

$$\varphi_n(\log n) = e^{-\log n} - \frac{\log n}{n} = \frac{1 - \log n}{n} < 0 \quad \text{per } n > e$$

$$\Rightarrow \alpha_n \in [1, \log n] \quad \text{per } n > e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\log n} = 1 \quad \alpha_n \leq \log n \quad \frac{\alpha_n}{\log n} \leq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{\alpha_n}{\log n} > 1 - \varepsilon \quad \text{definitivamente} \quad \hookrightarrow \alpha_n > (1 - \varepsilon) \log n$$

$$\begin{aligned} \varphi_n((1 - \varepsilon) \log n) &= e^{(-1 + \varepsilon) \log n} - \frac{(1 - \varepsilon) \log n}{n} \\ &= \frac{n^\varepsilon - (1 - \varepsilon) \log n}{n} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\quad} \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq \bar{n}_\varepsilon$$

$$0 < \varepsilon < 1 \quad n^\varepsilon - (1 - \varepsilon) \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\text{Se } n > \max(e, \bar{n}_\varepsilon) \Rightarrow \varphi_n((1 - \varepsilon) \log n) > 0, \quad \varphi_n(\log n) < 0$$

$$\alpha_n \in [(1 - \varepsilon) \log n, \log n] \quad \forall n > \max(e, \bar{n}_\varepsilon)$$

14-12-2021

Lezione 34

Prof. Carminati

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}}_{x_n} \quad (\alpha > 0)$$

Q: 1) Per quali α converge2) Per quali α converge assolutamente

$$|x_n| = (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha} \sim \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}}$$

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n}$$

$$\sum \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \text{ converge } (\Leftrightarrow \alpha > 1)$$

$$\text{Se } \alpha = 1 + 2\delta \text{ con } \delta > 0 \quad \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \frac{(\log n)^{1+\delta}}{n^{\delta}} \rightarrow 0(1) \quad n \rightarrow \infty$$

$$0 \leq \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \leq \frac{C}{n^{1+\delta}}$$

- la serie converge assolutamente $\forall \alpha > 1$
- Non converge assolutamente se $\alpha \leq 1$
- Se $\alpha \in (0, 1)$ la serie converge semplicemente

Oss: $(\alpha > 0)$ $n \mapsto (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$ è decrescente per $n \geq 3$, è infinitesima

\Rightarrow Per Leibnitz la serie converge anche per $\alpha \in (0, 1]$

$$\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \right) + \dots \text{ converge o diverge?}$$

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1/k^2}{1 - 1/k} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - k} = 1$$

converge
serie telescopica

\uparrow è il riordinamento di una serie assolutamente convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \quad \text{per } |x| < 1$$

\uparrow con la formula del prodotto di serie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}_{\text{nel nostro caso}} \right) x^n$$

vale per $|x| < \min(R_A, R_B)$

— o —

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

F_n succ. dei numeri di Fibonacci

$$F_{n+2} \leq 2 F_{n+1}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n \quad \text{che raggio di convergenza ha?}$$

$$0 \leq F_n \leq 2^n \Rightarrow \text{Raggio di convergenza è positivo}$$

$$\phi(x) = F_0 x^0 + F_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2}$$

$$x\phi(x) = F_0 x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+1}$$

$$x^2\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2}$$

$$\phi(x) - x\phi(x) - x^2\phi(x) = F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(F_{n+2} - F_{n+1} - F_n)}_{\rightarrow 0} x^{n+2}$$

$$\phi(x)(1-x-x^2) = x$$

$$\phi(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \quad \text{per } |x| < R \quad \begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \quad \text{dove } \alpha, \beta \text{ sono radici di } 1-x-x^2=0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$-\frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \quad x \in \{\alpha, \beta\}$$

$$\downarrow$$

$$-x = A(x-\beta) + B(x-\alpha)$$

se vale $\forall x \neq \alpha, \beta$ per continuità vale anche per $x=\alpha$ e $x=\beta$

$$-\beta = B(\beta-\alpha) \Rightarrow B = \frac{\beta}{\alpha-\beta} \quad -\alpha = A(\alpha-\beta) \Rightarrow A = -\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{A}{x-\alpha} = \left(\frac{A}{-\alpha} \right) \frac{1}{1-(x/\alpha)} = -\frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^k$$

Es: Ricavare l'espressione di F_n scrivendo $\sum F_n x^n$ come comb. lineare di due serie geometriche

Esercizio: $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n \quad \forall |x| < \delta \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n$

SVILUPPI IN BASE:

$p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2 \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k} \quad \varepsilon_k \in \{0, \dots, p-1\}$
 $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}^*}$
 $\quad \quad \quad = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$

$p=10$ sviluppi decimali
 $p=2$ sviluppi binari

$\phi: \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow \mathbb{R}$

$\underline{\varepsilon} \longmapsto \phi(\underline{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k}$

$0 \leq \phi(\underline{\varepsilon}) \leq (p-1) \sum_{k=1}^{+\infty} p^{-k} = (p-1) \frac{p^{-1}}{1-p^{-1}} = (p-1) \frac{1}{p-1} = 1$

$0 \leq \phi(\underline{\varepsilon}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \phi(\underline{\varepsilon}) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_k = p-1 \quad \forall k$

$\phi(\underline{\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_k = 0 \quad \forall k$

$\text{Im}(\phi) \subseteq [0, 1] \quad \varepsilon_0 = 0 \quad \begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \lfloor p\alpha_n \rfloor \\ \alpha_{n+1} = p\alpha_n - \lfloor p\alpha_n \rfloor \in [0, 1) \end{cases}$
 $\alpha_0 = \alpha$

Dimostrare per induzione che $\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p^{-k} + p^{-(n+1)} \alpha_{n+1} \quad \forall n \geq 0$

$\alpha_0 = \alpha \quad \alpha = \varepsilon_1/p + p^{-2} \alpha_2$

$\alpha_1 = p\alpha - \lfloor p\alpha \rfloor = p\alpha - \varepsilon_1 \rightsquigarrow \alpha_0 = p^{-1}(\alpha_1 + \varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1}{p} + \frac{\alpha_1}{p}$

Per $n \rightarrow \infty \quad \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p^{-k} = \alpha - p^{-(n+1)} \alpha_{n+1} \longrightarrow \alpha \quad \text{ovvero} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k} = \alpha$

$(\underline{\varepsilon}'), (\underline{\varepsilon}) \in \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}^*}$

$\begin{cases} \varepsilon_k = \varepsilon'_k & \forall k < k_0 \\ \varepsilon_{k_0} > \varepsilon'_{k_0} \end{cases}$

$\Rightarrow \phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}') = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k) p^{-k} \quad (*)$

$|\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}')| \leq (p-1) \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^{-k} = (p-1) \frac{(1/p)^{k_0}}{1-1/p} = \left(\frac{1}{p}\right)^{k_0-1}$

$\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}') \geq (\varepsilon_{k_0} - \varepsilon'_{k_0}) p^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k) p^{-k} \geq (\varepsilon_{k_0} - \varepsilon'_{k_0}) p^{-k_0} - p^{-k_0}$

vale l'uguale $\Leftrightarrow \varepsilon_{k_0} = \varepsilon'_{k_0} + 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon_k = 0 \wedge \varepsilon'_k = p-1 \quad \forall k > k_0 \quad \Rightarrow 0$

Esercizio: $p=2$

- 1) Mostrare che $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \Leftrightarrow \alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 2^{-k}$ con ε_k pre-periodica
- 2) $\alpha = \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$ q dispari $\Leftrightarrow \alpha = \sum \varepsilon_k 2^{-k}$ ε_k periodica
- 3) Se $F(x) = \sum \varepsilon_k x^k$ con $\varepsilon_k \in \{0, 1\} \forall k$ e $F(\frac{1}{2}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi

$$C = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k} \quad \varepsilon_k \in \{0, 2\} \right\}$$

C è chiuso, $\partial C = C$, C non contiene alcun intervallo

$$x_n \in C \quad x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \varepsilon_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{\varepsilon}_k \quad \forall k, \quad x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(n) 3^{-k}$$

Per verificare le altre due proprietà basta vedere che

$$x \in C \quad x = \sum \varepsilon_k 3^{-k}, \quad \tilde{x} = \sum \tilde{\varepsilon}_k 3^{-k} \quad \varepsilon_k \in \{0, 2\}$$

con $\tilde{\varepsilon}_k = \begin{cases} \varepsilon_k & k \leq k_0 \\ 1 & k > k_0 \end{cases}$ allora $\tilde{x} \notin C$ e \tilde{x} può essere reso arbitrariamente vicino a x con k_0 grande

Esercizio: Sia $F: C \rightarrow [0, 1]$ definita da:

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k} \mapsto F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon_k}{2} \right) 2^{-k}$$

- Verificare che F è surgettiva e debolmente crescente
- $\tilde{F}(x) = \sup_{\substack{t \in C \\ t \leq x}} F(t)$, $\tilde{F}(x)$ debolmente crescente, $\tilde{F}(x) = F(x) \forall x \in C$,
 \tilde{F} è continua

16-12-2021

lezione 35

Prof. Novaga

Def: $\odot f: M \rightarrow N$ M, N spazi metrici è Lipschitziana di costante $C > 0$

$$\text{se } d_N(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

$\odot f: M \rightarrow M$ è una contrazione se è Lipschitziana con costante $C < 1$

TEOREMA CONTRAZIONI

M sp. metrico completo, $f: M \rightarrow M$ è una contrazione

$\Rightarrow \exists! \bar{x} \in M$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$ (punto fisso per f). Inoltre $\forall x_0 \in M$ la successione per ricorrenza, $x_{n+1} = f(x_n)$ con dato iniz. x_0 conv. a \bar{x} .

Dim: Il punto fisso \bar{x} (se esiste) è unico.

Infatti, se \bar{x}_1 e \bar{x}_2 sono punti fissi \Rightarrow

$$\Rightarrow d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)) \leq C d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (C < 1) \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

Per l'esistenza di \bar{x} , fissiamo $x_0 \in M$ e consideriamo $x_{n+1} = f(x_n)$

Osserviamo che $d(x_{m+1}, x_n) \leq C d(x_n, x_{n-1}) \leq C^n d(x_1, x_0) \quad \forall n$

Vediamo che x_n è di Cauchy. $\forall m > n$ si ha:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \stackrel{\text{dis. triang.}}{\leq} d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} C^k \\ &\leq C^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} C^j = \frac{d(x_0, x_1)}{1-C} C^n \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_n$ è di Cauchy $\Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x}$

Per vedere che \bar{x} è un punto fisso, passiamo al limite in $x_{n+1} = f(x_n)$,

osservando che una contrazione è continua,

$$\Rightarrow \bar{x} = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$$

ESERCIZI:

① Sia $P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n \quad n \in \mathbb{N}$. Trovare le soluzioni $P(z) = 0$.

$$P(z)(z-1) = (1+z+z^2+\dots+z^n)(z-1) = z^{n+1} - 1 = 0$$

$$z=1 \quad \text{o} \quad P(z)=0$$

$$1 = e^{2k\pi i} \quad k \in \mathbb{Z} \quad z^{n+1} = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

② $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$, $\sum a_n < +\infty$ (LEMMA DI ABEL)

Mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$.

Per condensazione, sappiamo che $\sum 2^k a_{2^k} < +\infty \Rightarrow \lim_k 2^k a_{2^k} = 0$.

Supponiamo per assurdo che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $n_k a_{n_k} \geq \varepsilon$ per una succ.

$n_k \xrightarrow{k} +\infty$. A meno di passare a una sottosuccessione possiamo

supporre $n_{k+1} \geq 2n_k$, $n_k \leq n_{k+1}/2 \quad \forall k$.

Osserviamo che $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_n \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} = (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}} \geq \frac{n_{k+1}}{2} a_{n_{k+1}} \geq \frac{\varepsilon}{2}$
 \uparrow
 a_n decrescente

Questo contraddice il criterio di Cauchy:

$$[\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \sum_{k=n}^m a_k \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq n_\varepsilon]$$

Assurdo, quindi $na_n \xrightarrow{n} 0$.

Oss: $na_n \xrightarrow{n} 0$ e $a_{n+1} \leq a_n \not\Rightarrow \sum a_n < +\infty$, Es: $a_n = \frac{1}{n \log n}$

⊙ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ manda compatti in compatti e intervalli in intervalli.

Devo dimostrare che, data $x_n \rightarrow x_0$, si ha $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.

$K = (\bigcup_n x_n) \cup x_0$ è un compatto, $f(K) = (\bigcup f(x_n)) \cup f(x_0)$ è un compatto

$\Rightarrow f(x_0) = \lim_n f(x_n)$ o la succ. $f(x_n)$ ha un punto di acc. $y_1 \neq f(x_0)$, $y_1 \in f(K)$

Supponiamo per assurdo che esista un tale y_1 .

A meno di passare a una sottosuccessione.

Posso supporre $f(x_n) \xrightarrow{n} y_1 = f(x_{n_1})$.

• Questo può succedere:

$$\text{es: } f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad x_n = \frac{1}{n} \quad \begin{matrix} f(x_n) = 1 = y_1 \\ f(0) = 0 \end{matrix}$$

• Non ho usato che f manda intervalli in intervalli

La stessa proprietà vale per $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ quindi supporre $f(x_n) = y_1 \neq f(x_0) \quad \forall n$

Posso supporre $x_{n+1} \leq x_n$ come in figura.

f manda intervalli in intervalli \Rightarrow supponiamo $y_1 > f(x_0)$

$$f([x_0, x_n]) = I_n \supseteq [f(x_0), y_1] \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{x}_n \in (x_0, x_n) \text{ t.c. } f(\tilde{x}_n) \in (y_1 - \frac{1}{n}, y_1).$$

Otengo una successione \tilde{x}_n tale che $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ e $f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{n} y_1 \neq f(x_0)$

ma $f(\tilde{x}_n) \neq y_1 \quad \forall n \Rightarrow f(\bigcup \tilde{x}_n \cup x_0) = \bigcup f(\tilde{x}_n) \cup f(x_0)$ non è compatto.
 \uparrow CPT

Non contiene y_1 . Assurdo.

Prima prova in itinere.

Esercizio 1. Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$\cos(x/n) = x$$

ha un'unica soluzione (che nel seguito chiameremo x_n).

Mostrare che la successione (x_n) è limitata, e calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \log x_n$$

Esercizio 2. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + i/n)^n}{1 + n^2} z^n.$$

Discutere poi la convergenza sul bordo del disco di convergenza.

Esercizio 3. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$(n^2 + n)^\pi - n^{2\pi} = an^b + o(n^b) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)^\pi - n^{2\pi}}{(\pi - 2 \arctan(n))^\alpha}.$$

DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = f^{(n)} \quad \text{Derivata } n^a \text{ di } f$$

PROP: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A aperto $x_0 \in A$

f è derivabile due volte in x_0 (in un intorno di x_0) allora:

1) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale **stretto** cioè

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), x \neq x_0$$

2) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un massimo locale **stretto**

3) x_0 è un minimo locale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$

4) x_0 è un massimo locale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$

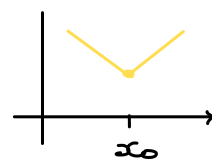
OSS: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ in generale non possiamo dire niente

ES: $f(x) = x^n$ ($n \geq 3$) $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

DIM: 1) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

Quindi per la permanenza del segno $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f \text{ è str. crescente} \\ f'(x) < 0 & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \Rightarrow f \text{ è str. decrescente} \end{cases}$$

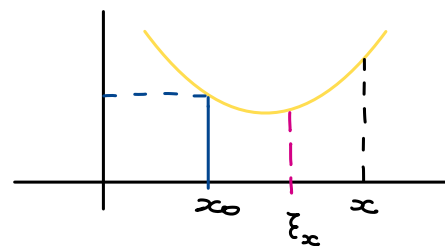


$\Rightarrow x_0$ è minimo locale stretto

2) Si fa come ①

3) x_0 minimo locale per $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$



Per Lagrange $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \exists \xi_x \in (x_0, x)$ t.c.

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x) - f'(x_0)}{\xi_x - x_0} \geq 0$$

4) Si fa come ③

Più in generale si ha:

PROP: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A intorno di x_0 cioè $A = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

f derivabile n volte in x_0 , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad 1 \leq k < n \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Allora:

① n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale stretto

② n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un max locale stretto

③ n dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è str. crescente in un intorno di x_0 ,
quindi x_0 non è max o min

④ n dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ è str. decrescente in un intorno di x_0

DIM: Si dimostra con il polinomio di Taylor, più avanti nel corso

Notazione: $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, si indica con:

$C^n(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabile } n\text{-volte con } f^{(n)} \text{ continua} \}$ sp. vettoriale su cui

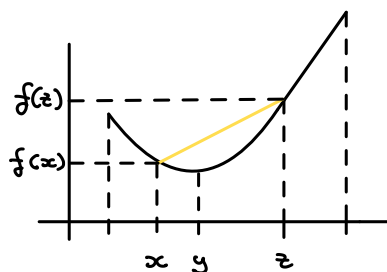
si può mettere la norma: $\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \max_{x \in A} f^{(k)}(x)$

FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

DEF: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, è convessa se

$$\forall x < y < z \text{ si ha } f(y) \leq f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} (y - x)$$

f è concava se $-f$ è convessa.



OSS: la disuguaglianza si può scrivere equiv $y = \lambda x + (1 - \lambda)z \quad \lambda \in [0, 1]$

↓
COMB. CONVESSA
DI x E z

$$f(y) = f(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z) \quad \forall x, z \in I \text{ e } \forall \lambda \in [0, 1]$$

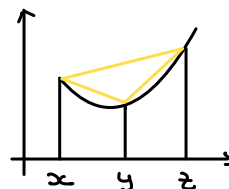
ES: x^n per n pari è convessa, $|x|$ è convessa, x è concava,

C.ES: x^n per $n \geq 3$ dispari non è convessa.

PROP: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $\Rightarrow f$ convessa $\Leftrightarrow f'$ crescente

DIM: \Rightarrow) $x < y < z$

$$(*) \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

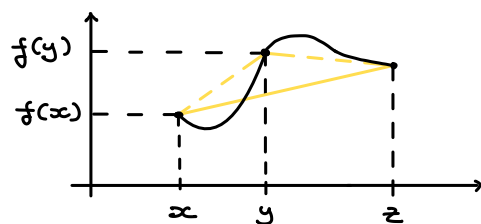


(*) $\underline{y \rightarrow x} \quad f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(z) \Rightarrow f' \text{ è crescente}$

(\Leftarrow) f' crescente, supponiamo per assurdo f non convessa, cioè $\exists x < y < z$ t.c.

$$f(y) > f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} (y - x)$$

In particolare $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$



Per Lagrange $\exists \alpha \in (x, y), \beta \in (y, z)$ t.c. $f'(\alpha) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(\beta)$

Assurdo perché f' deve essere crescente.

COR 1: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte, f convessa ($\Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$)

COR 2: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e derivabile 2 volte in $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

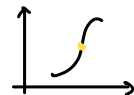
lo stesso vale per f concava con ≤ 0 invece di ≥ 0 .

OSS: Il segno di f'' definisce gli intervalli di convessità e concavità di f

DEF: $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, f derivabile in x_0 , f "cambia concavità"

in x_0 cioè f è convessa in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ e concava in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

o viceversa, allora x_0 si dice punto di flesso per f



DEF: $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ continua in x_0 , cambia concavità in x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow +\infty \text{ o } \rightarrow -\infty \text{ allora } x_0 \text{ è un punto di}$$

flesso a tangente verticale.

PROP: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo aperto, f convessa \Rightarrow

① f continua in I

② $\forall x \in J \quad \exists \underbrace{\frac{df}{dx^-}(x)}_{\text{DERIV. SX}} \leq \underbrace{\frac{df}{dx^+}(x)}_{\text{DERIV. DX}}$

DERIV. SX DERIV. DX

③ $x \leq y \Rightarrow \frac{df}{dx^-}(x) \leq \frac{df}{dx^+}(y)$

④ $\text{disc}\left(\frac{df}{dx}\right) = \text{disc}\left(\frac{df}{dx^\pm}\right)$ insieme numerale di punti angolosi

e f è derivabile $\forall x \notin \text{dis}\left(\frac{df}{dx^\pm}\right)$

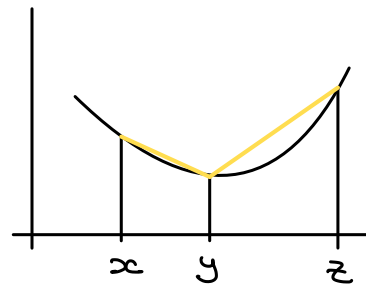
DIM: Basta dimostrare ② e ③

$$x < y < z$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

MONOTONO
CRESCENTE
IN x

MONOTONO
CRESCENTE
IN z



Facendo il limite $x \rightarrow y$ e $z \rightarrow y$ si ha $\frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(y) \Rightarrow ②$

③ Segue dalla monotonia dei rapp. incrementali

03-03-2022

Lezione 38

Prof. Carminati

Teoremi di de L'Hôpital

TEO ($H; \frac{0}{0}$): $x_0 \in \mathbb{R}$, I intorno di x_0 ($x_0 \in I$),

• f, g continue su I , $f(x_0) = g(x_0) = 0$

• f, g derivabili su $I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0 \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

— o —

OSS: Non vale il viceversa (\Leftarrow)

es: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{infinites.} \\ \text{limitata}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-\frac{1}{x^2})}{\cos x}$$

NON ESISTE

$$f(x) = x - \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

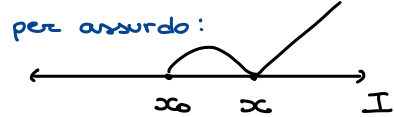
$$g(x) = x^3$$

$$\sin x \sim x \rightarrow \sin x = x + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Si arriva ad un loop logico perché è da qui che sappiamo $(\sin x)' = \cos x$

DIM: OSS: g non si annulla in $I \setminus \{x_0\}$



Perché se $g(x_1) = 0 = g(x_0) \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists c \in (x_0, x_1) \subset I$ per cui $f'(c) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \quad \text{per limite di una composizione}$$

$$\Rightarrow \exists \xi_x \in (x_0, x) \text{ t.c. } \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

TEO $(H, \frac{0}{0}, x_0 = +\infty)$: $f, g \in C((a, +\infty))$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

f, g derivabili su $(a, +\infty)$ $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$

$$\text{Allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

— o —

OSS / esercizio: Non vale (\Leftarrow) ; trovare un controesempio

Dim: $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \tilde{g}(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$

$$\tilde{f}, \tilde{g} \text{ sono continue } (0, \frac{1}{a}), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{g}(t)$$

$$\tilde{f}'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad \tilde{g}'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x = 1/t}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

$$\Rightarrow l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

$x = -\infty$: dim. analoga

TEO $(H, \frac{\infty}{\infty})$: I intorno di x_0 ; $I^* = I \setminus \{x_0\}$

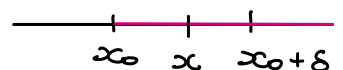
$$f, g \in C(I^*), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

f, g derivabili I^* , $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I^*$

$$\text{Allora } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

DIM: (caso $l \in \mathbb{R}$)

Dimostro $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } l - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, \overbrace{x_0 + \delta}^{x_1})$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

$h(x) = 1 + o(1)$
 $x \rightarrow +\infty$

$$\exists \xi_x \in (x, x_1) \text{ t.c. } \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot h(x)$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq l + \varepsilon$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \geq l - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \varepsilon$$

arbitrarietà di $\varepsilon > 0 \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

□

I casi $l = +\infty$ e $l = -\infty$ per esercizio.

USI & ABUSI

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{USO LEGITTIMO}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty \quad \text{Non è un caso del tipo } \frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty} \quad \text{USO ILLEGITTIMO}$

• $f(x) = x$

$$f'(x) = 1$$

$$g(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \rightarrow \text{De l'Hôpital loop (ATTENZIONE)}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} \xrightarrow{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$

OSS: $\frac{\log(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow 0$

$$\log(1+x) = x + x^2 \left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}}^{f(x)}}{\underbrace{1/x^3}_{g(x)}} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2(1+x^2)}$$

$$g'(x) = -3x^{-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2(1+x^2)}}{-3x^{-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{x + \sin x^2}^{f(x)}}{\underbrace{1+x^2}_{g(x)}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$f'(x) = 1 + 2x \cos x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x^2}{2x}$$

\Rightarrow non ha limite, non posso usare De L'Hôpital

Si fa con i carabinieri:

$$\frac{x-1}{1+x^2} \leq \frac{x + \sin x^2}{1+x^2} \leq \frac{x+1}{1+x^2}$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$$

$$\frac{x \pm 1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$f(x) = (1+x)^{1/x} - e = e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} - e$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}$$

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}}{1} = -\frac{e}{2}$$

⊗
↓
[0/0]

$$f_1(x) = 1 - \log(1+x) - \frac{1}{1+x}$$

$$f_1'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g_1(x) = x^2$$

$$g_1'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{-x}{-1+x} \cdot \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$f(x) = \tan x - x$$

$$f'(x) = \cancel{1} + \tan^2 x - \cancel{1}$$

$$g(x) = x^2 \tan x$$

$$g'(x) = 2x \tan x + x^2 (1 + \tan^2 x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x \tan x + x^2 (1 + \tan^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \frac{x}{\tan x} + \frac{x^2}{\tan^3 x} (1 + \tan^2 x)} = \frac{1}{3}$$

04-03-2022 lezione 39 Prof. Novaga

STUDI DI FUNZIONE

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D = \text{dominio di } f$

OBIETTIVO: Tracciare un grafico qualitativo di f in \mathbb{R}^2

$$\Gamma_f = \{ (x, y) : y = f(x), x \in D \} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{Grafico di } f$$

PASSI PRINCIPALI:

⊙ Dominio massimale di f

⊙ Segno di f

⊙ Simmetrie: **Pari** ($f(x) = f(-x)$), **Dispari** ($f(x) = -f(-x)$),

Periodiche ($f(x+T) = f(x)$, T periodo)

- ⊙ Discontinuità
- ⊙ Limiti agli estremi del dominio (incluso $\pm \infty$)
- ⊙ Asintoti (verticali, orizzontali, obliqui)

⊙ Derivabilità di f

⊙ Discontinuità di f (Punti angolosi, cuspidi, flessi verticali)

⊙ Segno di f' , monotonia di f , massimi e minimi locali

⊙ Derivabilità di f''

⊙ Seguo di f'' , int. di concavità/convessità, flessi, massimi e minimi

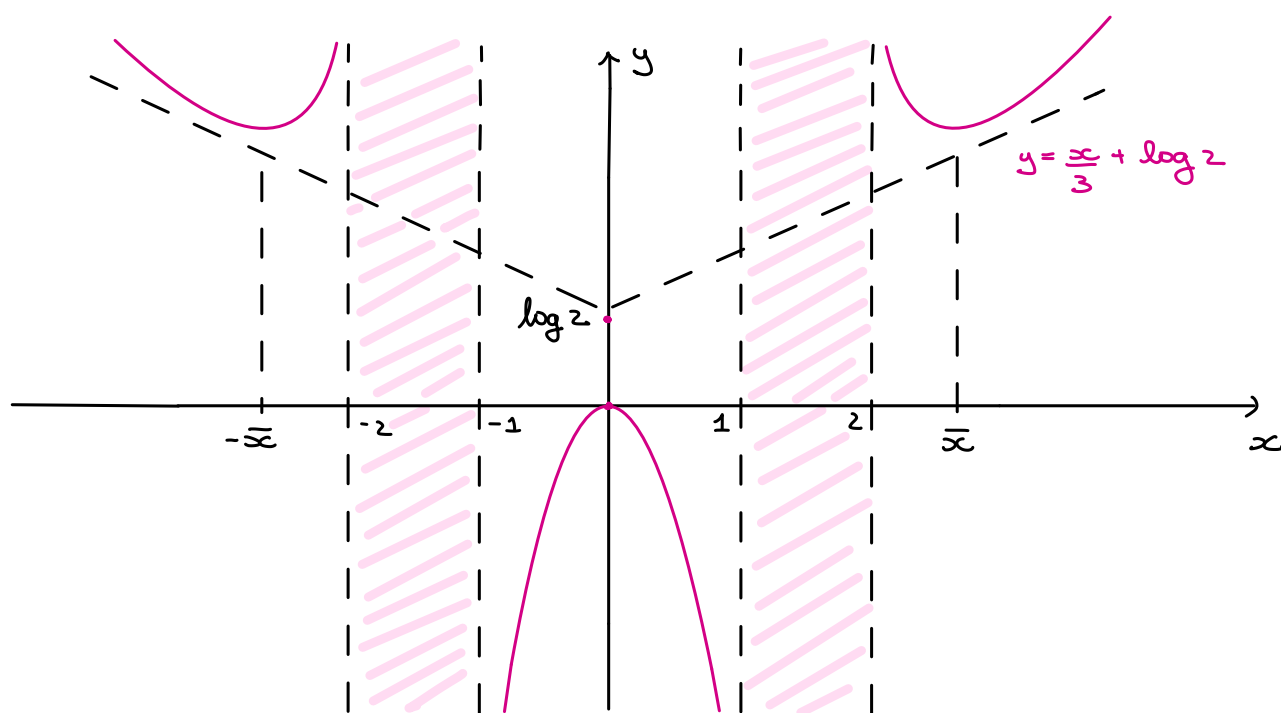
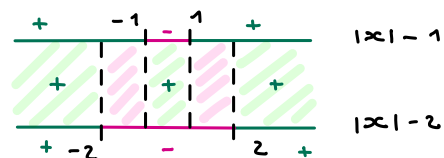
⊙ Disegnare il grafico nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 (conviene farlo fine da subito)

ESEMPI:

- $f(x) = \frac{|x|}{3} + \log\left(2 \frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$

f pari, basta studiarla per $x \geq 0$

$$\text{Dom } f = \left\{ x : \frac{|x|-1}{|x|-2} > 0 \right\} = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$



$$f(0) = 0 + \log(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \log\left(\frac{2|x|-1}{|x|-2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \log\left(\frac{2|x|-1}{|x|-2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoto obliquo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \overbrace{\log\left(\frac{2(x-1)}{x-2}\right)}^{\log 2} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{2(x-1)}{x-2}\right) = \log 2$$

$$y = \frac{x}{3} + \log 2$$

ASINTOTO OBLIQUO

$$f'(x) \text{ per } x > 0, \quad f(x) + \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \log 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{x-2}{x-1} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)' = \frac{1}{3} + \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-2 - (x-1)}{(x-2)^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2 - 3}{3(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 3x - 1}{3(x-1)(x-2)}$$

Per $x > 0$ $\text{sgn}(f') = \text{sgn}(x^2 - 3x - 1)$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

f' cambia segno per $\bar{x} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \in (3, 4)$ unico punto stazionario con $x > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{6}$ punto angoloso in $x = 0$
 f PARI
 f DISPARI

Calcoliamo per $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 3x + 2 - 3}{x^2 - 3x + 2} \right)' = \frac{1}{3} \left(-1 - 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)' = \left(\frac{4}{x^2 - 3x + 2} \right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)' = - \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{3 - 2x}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$\text{sgn } f'' = \text{sgn}(3 - 2x)$ per $x > 0$

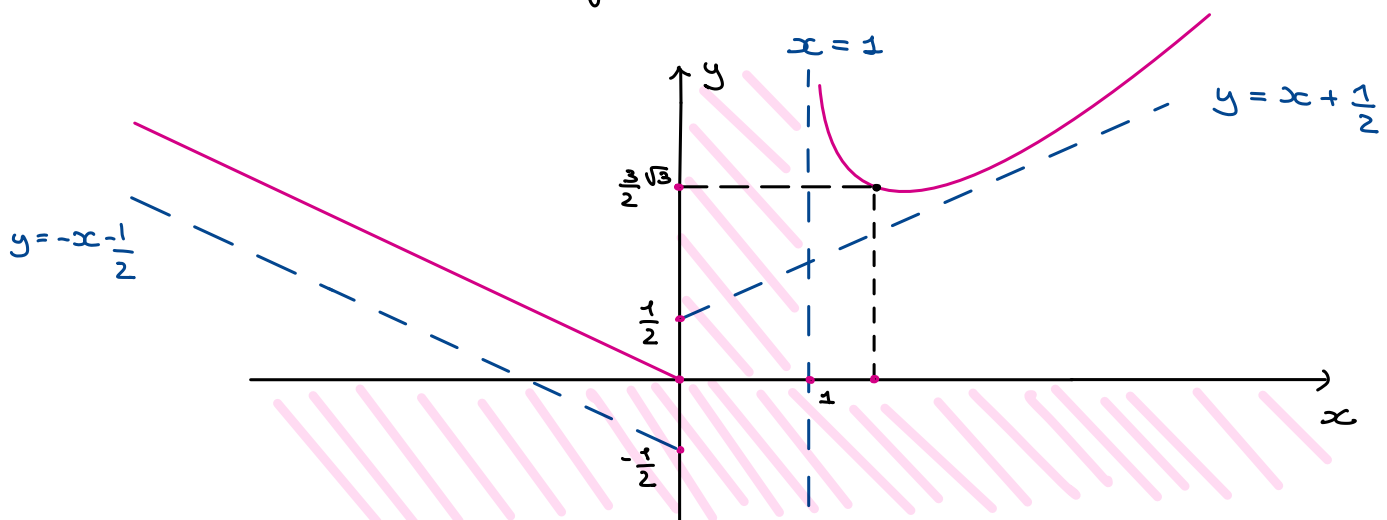
$f''(x) < 0$ in $(0, 1)$ e $f''(x) > 0$ in $(2, +\infty)$
 f concava
 f convessa

• $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ Dom f : $x \neq 1, \frac{x^3}{x-1} \geq 0$

• Dom $f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ $f(0) = 0$

• Non ci sono simmetrie

• $f(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad x \in \text{Dom } f$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty \quad \text{asintoto verticale } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \quad (f \text{ si comporta come } |x|)$$

$$\text{Asintoti obliqui: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x-1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x\right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1) \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{2}} \quad \text{AS OBL. PER } x \rightarrow +\infty$$

$\sim 2x^2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-1)}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1) \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -x - \frac{1}{2}}$$

AS. OBLIQUO per $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo } f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \left(\frac{x^3}{x-1} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \frac{3x^2(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \cdot \frac{x^2}{(x-1)^2} (2x-3) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{27}{2} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{unico punto station. e minimo locale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-\frac{1}{x^3}} \cdot x^2 = 0$$

$$\exists \frac{df}{dx}(0) = 0 \quad x=0 \text{ minimo assoluto di } f$$

$$f'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}, \quad f''(x) = \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}} - \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x}} \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x-1)^4} \stackrel{?}{\neq} 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \stackrel{?}{\leq} (x-1)^4 \cdot \frac{x}{(x-1)^3} = x^2 - x \Rightarrow x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x}_{-x} \leq x^2 - x \quad \text{OK}$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f, \quad f \text{ è convessa in } (-\infty, 0] \text{ e } (1, +\infty).$$

FORMULA DI TAYLOR

PROBLEMA: Data $f(x)$ regolare, $x_0 \in \text{dom } f$, $n \in \mathbb{N}$, trovare il polinomio

$P_n(x)$ di grado n che "approssima meglio" f vicino a x_0 .

Es: $n=0$ $P_0(x) = f(x_0)$, $n=1$ $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

cioè cerchiamo $P_n(x)$ t.c. $f(x) = P_n(x) + o(|x-x_0|^n)$

Oss: Non è detto che esista

Oss: Se esiste è unico: P, Q di grado n , $P-Q = o(|x-x_0|^n) \Rightarrow P=Q$

Def: Data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I aperto, diff n -volte in $x_0 \in I$,

$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ si dice polinomio di Taylor di grado n di f in x_0 .

Oss: $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k < n$

Teo (Peano): f diff. n volte in x_0 , $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{o(|x-x_0|^n)}_{\text{RESTO DI PEANO}}$

Dim: Applico l'Hôpital $(n-1)$ volte a:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0 \end{aligned}$$

Cor (Max/min): f derivabile n volte in x_0 , $n > 1$,

$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

① n dispari, f è localmente strettamente monotona

② n pari, $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 minimo locale stretto

③ n pari, $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 massimo locale stretto

Dim: $f(x) = T_n(x) + o(|x-x_0|^n) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$

Vediamo ②, cioè n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $|o(x-x_0)^n| \leq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$\Rightarrow f(x) \geq \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow x_0$ è un minimo locale

Gli altri punti si fanno in modo simile.

Calcolo di $T_n(f, x_0)$:

○ $T_n(af + bg, x_0) = aT_n(f, x_0) + bT_n(g, x_0) \quad a, b \in \mathbb{R}$

○ $T_{n-1}(f', x_0) = T_n(f, x_0)'$

Esempi: 1) $f(x) = e^x, x_0 = 0, f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

2) $f(x) = \frac{1}{1-x}, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \dots, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

$f^{(k)}(0) = k! \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$

$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$

3) $f(x) = \log(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$T_{n+1}(f)' = T_n(f') = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \Rightarrow T_{n+1}(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + f(0)$

4) $f(x) = \sin(x), f'(x) = \cos(x), f'' = -\sin(x), f''' = -\cos(x), f^{(4)} = \sin(x)$

$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ e analogamente $f = \cos(x), x=0 \Rightarrow T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Oss: f pari e $x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x)$ ha solo monomi con esponenti pari

f dispari e $x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x)$ ha solo monomi con esponenti dispari

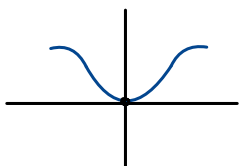
5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 0 \Rightarrow T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$

6) $f(x) = \arctan(x), x_0 = 0 \Rightarrow T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

7) $(1+x)^d, d \neq 0, x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{d}{k} x^k \quad \binom{d}{k} = \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!}$

Oss: Anche se f è derivabile ∞ volte in x_0 non è detto che $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$ per $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

ES: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \quad \forall n \Rightarrow T_n(x) = 0 \quad \forall n$



DOMANDA: Quando $T_n(x) \rightarrow f(x)$ in un intorno di x_0 ?

Teo (Lagrange): f derivabile $(n+1)$ -volte in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad t \in (x_0, x) \text{ o } t \in (x, x_0)$$

→ RESTO DI LAGRANGE

Oss: $n=0$ è il teorema di Lagrange

Lemma: g derivabile $(n+1)$ -volte in (a, b) , $g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0 \quad 0 \leq k \leq n$

$$\Rightarrow \exists t \in (a, b) \text{ t.c. } g^{(n+1)}(t) = 0$$

Dim: Applico Rolle a g :

$$\exists t_1 \text{ t.c. } g'(t_1) = 0, \text{ applico Rolle a } g' \text{ in } [a, t_1]$$

\vdots

$$\exists t_n \text{ t.c. } g^{(n)}(t_n) = 0, \quad " \quad " \quad " \quad g^{(n)} \text{ in } [a, t_n]$$

$$\exists t = t_{n+1} \text{ t.c. } g^{(n+1)}(t) = 0$$

Dim (Teo): Fissiamo $x > x_0$, applico il lemma in (x_0, x) , con

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \leq n, \quad g(x) = 0 \Rightarrow \exists t \in (x_0, x) \text{ t.c. } g^{(n+1)}(t) = 0$$

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \Rightarrow f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Cor: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dim: $e^x - T_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^t \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (|t| < |x|)$

$$|e^x - T_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0$$

Def: f è derivabile infinite volte in x_0 , la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ si dice serie di Taylor di f in x_0 .

Lo stesso funziona per $\sin(x)$, $\cos(x)$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e anche per $\log(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$ ma solo per $|x| < 1$

Es: Approssimare e a meno dell' $1/1000$

$$e = T_n(1) + R_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n \quad R_n = \frac{e^{t_n}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \quad t_n \in (0, 1)$$

Scelgo n t.c. $R_n < \frac{1}{1000}$, cioè $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \quad (n+1)! > 3000$ per $n=6$

$$T_6(1) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

Def: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A aperto, $f \in C^\infty(A)$ è **analitica** in A se $\forall x_0 \in A$

f coincide con la sua serie di Taylor in x_0 , in un intorno di x_0 .

Es: e^x è analitica su \mathbb{R} , $\arctan(x)$ è analitica su \mathbb{R} ,

$\frac{1}{1+x}$ è analitica su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \\ 0 \end{cases}$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, anche se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

10-03-2022 lezione 41 Prof. Carminati

Formula di Taylor con resto di
Peano \leftarrow serve per calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0}$
Lagrange \leftarrow utile per ottenere info di tipo "globale"

4) f derivabile $(n+1)$ volte in I intorno di x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \xi \in (x_0, x)$$

Es: Calcolare $\sin(1)$ con errore inferiore a $\frac{1}{100}$

Oss: Il polinomio di Taylor-Mclaurin di una funzione dispari ha solo monomi di grado dispari

sviluppo di ordine $2n$

$$f(x) = \sin x \rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0 + R_n(x)$$

con $|R_n(x)| = |\sin(\xi)| \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \xi \in (0, x)$

Usare questa formula per $x=1$.

Determinare n in modo che $|R_n(1)| < \frac{1}{100}$.

$$|R_n(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$R_2(1) \leq \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

n	$\frac{1}{(2n+1)!}$
1	$1/3!$
2	$1/5!$

$$\sin(1) = \underbrace{1 - \frac{1}{6}}_{5/6} + R_2(1)$$

ES: fare lo stesso conto per ottenere un'approssimazione a meno di 10^{-4}

ES: Dimostrare che:

$$i) \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ii) \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DIM: i) Scrivo la formula di Taylor con resto di Lagrange con $x_0=0$,

$$n=1, f(x) = \cos x : \cos x = 1 + 0 + \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \quad \text{con } f''(x) = -\cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{\cos \xi}{2} x^2 \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{perché } -(\cos \xi)x^2 \geq -x^2$$

ii) Per esercizio

ES: Dimostrare i) e ii) facendo uno studio di funzione

$$P) f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R(x), \quad R(x) = o((x-x_0)^{n+1}) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

TAYLOR vs DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$$

$$g(x) = x^4$$

$$f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} + \sin x$$

$$g'(x) = 4x^3$$

Continuando a derivare si dovrebbe riuscire in al più 4 passi.

$$\underline{\text{OSS}}: (p(x)e^{-\frac{x^2}{2}})' = (p' - xp)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = (-1 + x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \cos x$$

$$g''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = (3x - x^3)e^{-\frac{x^2}{2}} - \sin x$$

$$g'''(x) = 24x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(3x - x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \frac{\sin x}{x} \right] \cdot \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Stesso esercizio con Taylor:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad y = -\frac{x^2}{2}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \frac{1}{12}$$

LEMMA: f, g infinitesime definite in un intorno di 0:

$$f(x) = O(x^m) \quad g(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono $o(x^{n \cdot m})$, sinteticamente: $o(O(x^m)^n) = o(x^{n \cdot m})$

$$O((o(x^n))^m) = o(x^{n \cdot m})$$

DIM: $f(g(x)) \leq C |g(x)|^m \quad \exists C: |f(x)| \leq C |x|^m$ in un intorno di 0

$$\leq C |x|^{n \cdot m} \cdot |w(x)|^m \quad g(x) = x^n w(x) \text{ con } w(x) = o(1)$$

$$= |x|^{n \cdot m} \cdot o(1) \Rightarrow f \cdot g(x) = o(x^{n \cdot m})$$

ES: verificare che $g \circ f(x) = o(x^{n \cdot m})$

LIMITI GIÀ VISTI (03-03-22)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} \quad * \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) =$$

$$* \text{Sostituzione: } x = \frac{1}{t} \quad t > 0, t \rightarrow 0^+$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \frac{1}{t} - \frac{\pi}{2} + t}{t^3} =$$

$$* \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \arctan t}{t^3} =$$

$$* \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{3}$$

OSS: $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$

$$\left(\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \dots \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \rightarrow f(x)$$

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)}$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$$f(x) = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - e = e \left(e^{-\frac{x}{2} + o(x)} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} * e^y - 1 &= y + o(y) \\ &= e \left(-\frac{x}{2} + o(x) + o\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) \right) = -\frac{e}{2}x + o(x) \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \text{ converge } a_n = -f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ con } f(x) = (1+x)^{1/x} - e$$

$$a_n = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$f(x) = -\frac{e}{2}x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$a_n \sim \underbrace{C}_{C = \frac{e}{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

ESERCIZIO: $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ dire per quali x converge la serie.

ES: Calcolare con Taylor $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$

ES: Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\text{Calcolare } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

→ Usando Taylor

→ Usando De L'Hôpital

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin x) - \sin \log(1+x)}{x^2}$$

determinare l in modo che $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (provare con sagemath)

11-03-2022

Lezione 42

Prof. Novaga

SERIE DI TAYLOR E FUNZIONI ANALITICHE

Se f è C^∞ in x_0 , la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ si dice serie di Taylor di f in x_0

Prop: $f(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n$ $x \in I = (x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$ raggio di convergenza

$$\Rightarrow f \in C^\infty(I) \text{ e } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Dim: Abbiamo visto $f \in C^\infty$ e $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dx^k} (x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!} (x-x_0)^{n-k}$
 $\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = a_k k!$

Def: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f \in C^\infty(A)$ è analitica se $\forall x_0 \in A \exists r$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r) \subseteq A$$

Prop: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad x \in I = (x_0-R, x_0+R) \quad R>0$ raggio di convergenza

$\Rightarrow f$ è analitica in I , cioè $\forall x_1 \in I \exists r = r(x_1) > 0$ t.c. $f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-x_1)^n \quad x \in (x_1-r, x_1+r)$

Lemma: $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |x| < 1$

Dim: $k=0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$ derivo k -volte $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Dim (Prop): Fissiamo $x_1 \in I$ e calcoliamo

$$f^{(k)}(x_1) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (x_1-x_0)^{n-k}, \quad \forall r < R \quad |a_n| \leq \frac{C}{r^n}$$

$$|f^{(k)}(x_1)| \leq \frac{C}{r^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{|x_1-x_0|}{r}\right)^{n-k} \quad r \in (|x_1-x_0|, R), \text{ applico il lemma}$$

$$|f^{(k)}(x_1)| \leq \frac{C \cdot r}{r^{k+1}} \cdot \frac{k!}{\left(1 - \frac{|x_1-x_0|}{r}\right)^{k+1}} = \frac{C \cdot r}{r - |x_1-x_0|} \cdot \frac{k!}{(r - |x_1-x_0|)^k} = C' \cdot \frac{k!}{(r - |x_1-x_0|)^k}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \right| \leq \frac{C'}{(r - |x_1-x_0|)^k} \Rightarrow \text{la serie } \sum \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} (x-x_1)^k$$

Se $|x-x_1| < r - |x_1-x_0|$ in particolare converge in $(x_1 - (R - |x_1-x_0|), x_1 + R - |x_1-x_0|)$.

Sia $g(x)$ la sua somma, voglio vedere che $g=f$.

Siano S_n le somme parziali, quindi $S_n \xrightarrow{n} g$, studiamo $f - S_n$.

Per Lagrange $|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |x-x_1|^{n+1} \quad y \text{ è tra } x \text{ e } x_1$

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{C |x-x_1|^{n+1}}{(r - |y-x_0|)^{n+1}} \xrightarrow{n} 0 \quad \text{se } |x-x_1| < r - |y-x_0|, \quad x \in (x_1-r_1, x_1+r_1)$$

È vero se $r_1 < R - |x_0-x_1| - r_1$. $f=g \Rightarrow f$ analitica.

Cor: f, g analitiche su I intervallo aperto, $\forall k \quad f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \Rightarrow f=g$ su I

Dim: Sia $A = \{x \in I \mid f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) \quad \forall k\}$

$x \in A \Rightarrow \exists r$ t.c. $(x-r, x+r) \subseteq A$ e $g=f$ in $(x-r, x+r)$. A è aperto in I .

Viceversa $x_n \in A$, $x_n \rightarrow x \in I \Rightarrow$ per continuità $x \in A$.

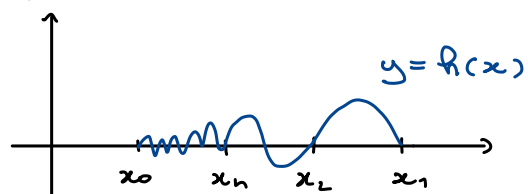
A è chiuso in $I \Rightarrow A = I$.

Cor: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ analitiche, I intervallo aperto, $I \ni x_n$ succ. cov. in I
 $x_n \rightarrow x_0 \in I$, $f(x_n) = g(x_n) \forall n \Rightarrow f = g$ in I .

Oss: f, g analitiche $\Rightarrow (af + bg)$ analitica $\forall a, b \in \mathbb{R}$, cioè le funzioni analitiche sono uno spazio vettoriale.

Dim: Consideriamo $h(x) = f(x) - g(x)$ analitica con $h(x_n) = 0 \forall n$.

Vogliamo mostrare $h \equiv 0$ passando al limite ho $h(x_0) = 0$.



Per Rolle $\forall x \exists x_n^{(1)} \in (x_0, x_n) \cup (x_n, x_0)$
tale che $h'(x_n^{(1)}) = 0 \forall n$.

Passando al limite $h'(x_0) = 0$. Iterando l'argomento ho $h^{(k)}(x_0) = 0 \forall k$

$\Rightarrow h \equiv 0$ cioè $f \equiv g$ in I .

↓
cioè per il corollario precedente

Cor: e^x è analitica in \mathbb{R} , $\sin x, \cos x$ sono analitiche in \mathbb{R} ,
 $\frac{1}{1 \pm x}$ è analitica in $(-1, 1)$, $P(x)$ polinomio è analitica su \mathbb{R}

Teo: ① f, g analitiche in $I \Rightarrow f \cdot g$ analitica

② " " " , $g \neq 0 \Rightarrow f/g$ analitica

③ $f: I \rightarrow J$ analitica $g: J \rightarrow K$ analitica $\Rightarrow g \circ f$ è analitica

④ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ analitica con I intervallo e $f' \neq 0$ in $I \Rightarrow f^{-1}$ è analit.

Prop: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ analitica $\Leftrightarrow f \in C^\infty(I)$ e $\forall x_0 \in I \exists r > 0, C, R > 0$

tc $\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \leq CR^k \forall k$ e $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Dim: Come nella proposizione precedente

Def: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ analitica, I intervallo,

$g = \cup \{h: J \rightarrow \mathbb{R} \text{ analitica}, J \subseteq I \text{ intervallo}, h|_I = f\}$

Dove $h_1: J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_2: J_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_1 \cup h_2(x) = \begin{cases} h_1(x) & x \in J_1 \\ h_2(x) & x \in J_2 \end{cases}$$

È ben definito dato che $h_1 = h_2$ su $J_1 \cap J_2$

$g: J_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **prolungamento analitico** di f ed è univocamente determinato da f .

15-03-2022

lezione 43

Prof. Carminati

ES: 1) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0$ } via studio di funzione

1) $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

(1) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = -\sin x + x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$, in part. $\forall x \in \mathbb{R}$ perché f è pari

2) $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

(2) $\Leftrightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$g(0) = 0$

$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = f(x) \geq 0$

$g' \geq 0 \Rightarrow g$ crescente

$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

ESERCIZIO: Mostrare che:

1) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x \geq 0$

} E generalizzare il risultato

ES1: $f \in C^2(\mathbb{R}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = (*)$

Si usa De l'Hôpital o Taylor

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2 + o(h^2)$

$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)(-h) + \frac{f''(x_0)}{2}(-h)^2 + o(h^2)$

$- 2f(x_0)$

⊕ _____

$N = 0 + 0 + f''(x_0)h^2 + o(h^2)$

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} f''(x_0) + \underbrace{\frac{o(h^2)}{h^2}}_{\substack{= 0 \\ h \rightarrow 0}} = f''(x_0)$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \quad \alpha \geq 0$$

Domanda: Per quali α la serie converge?

Oss: 1) La serie non è a termini positivi

2) Con l'assoluta convergenza ho che la serie converge per $\alpha \geq 1$

3) Con Leibnitz non funziona perché non si ha l'hp di decrescenza

4) Proviamo Taylor:

$$w(x) = x - \log(1+x) \quad \rightarrow \quad \log(1+x) = x - w(x)$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - w\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

$$= \underbrace{a_n}_{\downarrow} - b_n$$

è un'armonica generalizzata che studio con Leibnitz

Studiamo b_n .

$w(x) \geq 0 \quad \forall x > -1 \Rightarrow b_n$ è a termini positivi \rightarrow si usa il confronto as.

$$\begin{aligned} w(x) &= x - \log(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow w(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$b_n = w\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$$\sum b_n \text{ converge } (\Rightarrow) \alpha > \frac{1}{2}$$

\downarrow
 confronto
 asintotico

$$\text{Se } \alpha > \frac{1}{2} \quad \sum x_n \text{ converge}$$

$$\text{Se } \alpha \leq \frac{1}{2} \quad \sum x_n \text{ diverge a } -\infty \text{ perché le contributi di } a_n \text{ è limitato e } b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow -\infty$$

ES 2: Determinare $\alpha \geq 0$ in modo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\log(1+\sin x) - \sin \log(1+x)}^{N(x)}}{x^\alpha} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

parte principale di $N(x)$ per $x \rightarrow 0$
 \hookrightarrow primo termine $\neq 0$ nello sviluppo di T.

ordine di infinitesimo

Quanto deve essere α in modo che $N(x) \sim l \cdot x^\alpha$ con $l \neq 0$

Sviluppi noti:

$$i) \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^6)$$

$$ii) \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^5)$$

Ci "appoggiamo" a questi sviluppi noti per risolvere il nostro problema.

Esempio: $\log(1+\sin x) \stackrel{(ii)}{=} \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x)$ per $x \rightarrow 0$ **NON** è un polinomio

Continuiamo usando i): $= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Oss: $o(\sin^2 x) = o(x^2)$, $\sin^3 x = O(x^3)$

$$\begin{aligned} \sin \log(1+x) &= \log(1+x) + \boxed{O(\log^3(1+x))} = o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

$$N(x) = o(x^2) \Rightarrow d > 2$$

$$\begin{aligned} \log(1+\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + \overbrace{o(\sin^4 x)}^{o(x^4)} \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - o(x^2) \right)^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &\stackrel{(*)}{=} x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

(*) non considero i termini di ordine minore (per questo mancano)

$$\begin{aligned} \sin \log(1+x) &= \log(1+x) - \frac{1}{6} \log^3(1+x) + o(\log^4(1+x)) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \left[x^3 - \frac{3x^4}{2} \right] + o(x^4) \end{aligned}$$

Vediamo la differenza:

$$\begin{aligned} &\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^4 + \cancel{\frac{1}{3} x^3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \left[\cancel{x^3} - \frac{3x^4}{2} \right] + o(x^4) \end{aligned}$$

○

$$\begin{aligned} N(x) &= x^4 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{6 \cdot 2} \right) \right) + o(x^4) \\ &= \frac{5}{12} x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

ES 3: Sia $f(x) = e^{x^2} + ax^2 - b \cos x$ $a, b \in \mathbb{R}$ Oss: $f(0) = 0 \Rightarrow b = 1$

Determinare a, b in modo che f si annulli di ordine massimo.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$f(x) = e^{x^2} + ax^2 - \cos x = \frac{3x^2}{2} + ax^2 + x^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!} \right) + o(x^4)$$

$$R: \quad b = 1 \quad a = -\frac{1}{2} \quad f(x) \sim \frac{11}{24}x^4 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ES 4: Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che risulti finito il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1 - (ax)^2} - \frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{1}{x^4} \right) \leftarrow \text{basta lo sviluppo fino al secondo ordine}$$

Oss: $\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^2)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

$$\sqrt{1 - (ax)^2} = 1 - \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{8}a^4x^4$$

$$\sqrt{1 - (ax)^2} - \frac{\sin x}{x} = -x^2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{a^2}{2} \right) - x^4 \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{8}a^4 \right)$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{1}{6} \quad a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Per casa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - (1+x)^{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin x}{x} - \cos x}$

17-03-2022

Lezione 44

Prof. Corninatti

INTEGRALE DI RIEMANN: Calcolo area sottografica di una funzione

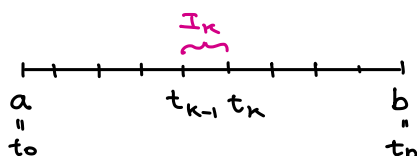
Sia $a < b$, $[a, b]$,

insieme dei punti
suddivisione

$$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad t_0 = a, t_n = b, t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

partizione di $[a, b]$

famiglia di intervalli



$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$$

$$I_k = [t_{k-1}, t_k]$$

$$|I_k| \doteq \text{ampiezza dell'intervallo} \doteq x_k - x_{k-1}$$

Def: π_1, π_2 partizioni di $[a, b]$ dico che π_1 è più fina di π_2

def $\Rightarrow \pi_2 \subset \pi_1$

Oss1: Date π_1 e π_2 partizioni è sempre possibile trovare una partizione

$\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ più fina di entrambe.

Oss2: $\pi_0 = \{a, b\}$ è la partizione meno fina (più grezza) di tutte

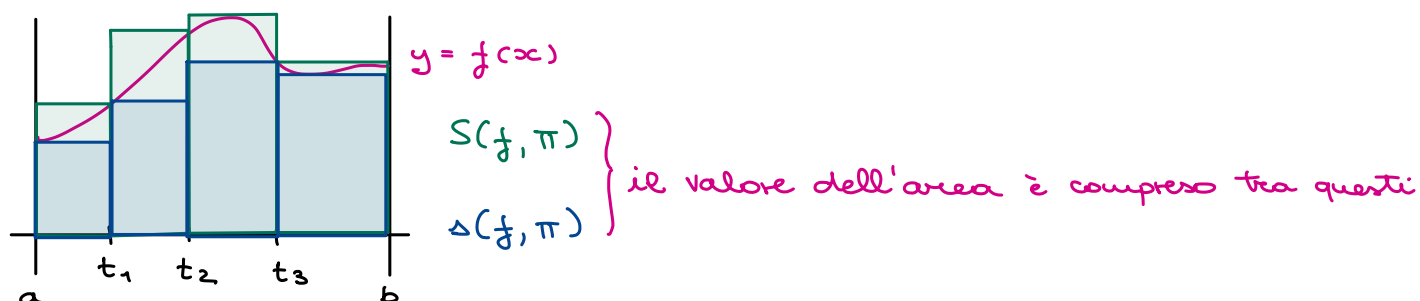
Considero $[a, b]$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f limitata

π partizione di $[a, b]$. Chiamo somma superiore di f relativa a π :

$$S(f, \pi) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f = \sum_{k=1}^n |I_k| \cdot M_k$$

Chiamo somma inferiore di f relativa a π : $s(f, \pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| m_k$

Notazione: $I_k \doteq [x_{k-1}, x_k]$, $|I_k| \doteq x_k - x_{k-1}$, $M_k \doteq \sup_{I_k} f$, $m_k \doteq \inf_{I_k} f$



Oss: $M_k \geq m_k \quad \forall k \quad 1 \leq k \leq n$

$$S(f, \pi) \geq s(f, \pi)$$

Prop: π_1, π_2 partizione di $[a, b]$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Se π_2 è più fina di π_1 $S(f, \pi_2) \leq S(f, \pi_1)$ e $s(f, \pi_2) \geq s(f, \pi_1)$

Dim: Dimostro solo (2). SPG $\pi_1 = \pi$, $\pi_2 = \pi \cup \{t'\}$

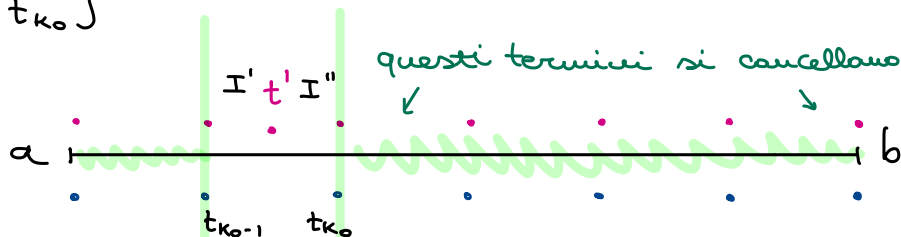
$$S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2) = |I_{k_0}| \sup_{I_{k_0}} f - (|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f) \quad \text{dove si ha}$$

$$I' = [t_{k_0-1}, t'] \quad \text{e} \quad I'' = [t', t_{k_0}]$$

$$|I'| \sup_{I'} f \leq |I'| M_{k_0}$$

$$|I''| \sup_{I''} f \leq |I''| M_{k_0}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad \oplus$$



$$(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f) \geq -|I_{k_0}| M_{k_0} \Rightarrow S(f, \pi_2) - S(f, \pi_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow S(f, \pi_2) \leq S(f, \pi_1)$$

Analogamente si dimostra $s(f, \pi_2) \geq s(f, \pi_1)$

□

TEO: $[a, b]$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, π_1, π_2 partizioni di $[a, b]$

Allora $S(f, \pi_1) \geq s(f, \pi_2)$.

Dim: $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ è una partizione che raffina sia π_1 che π_2

$$S(f, \pi_1) \geq S(f, \pi_1 \cup \pi_2) \geq s(f, \pi_1 \cup \pi_2) \geq s(f, \pi_2)$$

Def: $\int_a^b f = S(f) = \text{integrale superiore su } [a, b]$

$$S(f) = \inf \{ S(f, \pi) : \pi \text{ suddivisione finita} \}$$

$$\int_a^b f = s(f) = \text{integrale inferiore di } [a, b]$$

$$s(f) = \sup \{ s(f, \pi) : \pi \text{ suddivisione finita} \}$$

Prop: $S(f) \geq s(f)$

Dim: Se π_1 è partizione di $[a, b]$,

$$S(f, \pi_1) \geq s(f, \pi_1) \quad \forall \pi \text{ partizione di } [a, b],$$

$$S(f, \pi_1) \text{ è un maggiorante } \{ s(f, \pi) : \pi \text{ partizione di } [a, b] \}$$

$$S(f, \pi_1) \geq s(f) (= \sup \{ s(f, \pi) : \pi \text{ partizione di } [a, b] \}) \quad \forall \pi_1 \text{ part. di } [a, b]$$

$$s(f) \text{ è un minorante } \{ S(f, \pi_1), \pi_1 \text{ partizione} \}$$

$$S(f) = \inf \{ S(f, \pi_1) : \pi_1 \text{ partizione} \} \geq s(f)$$

□

⚠ Può essere che $S(f) > s(f)$

Esempio: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$S(f, \pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| M_k = \sum_{k=1}^n |I_k| = b - a$$

$$s(f, \pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| m_k = 0$$

Def: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f limitata è **INTEGRABILE SECONDO RIEMANN** \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow S(f) = s(f) \text{ e il valore comune si indica con } \int_a^b f(t) dt$$

Oss: Se f integrabile $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$ integrale di f tra a e b

$$M = \sup_{[a, b]} f, \quad m = \inf_{[a, b]} f, \quad \pi_0 = \{a, b\}$$

$$\underbrace{S(f, \pi_0)}_{M(b-a)} \geq S(f) = \int_a^b f(t) dt \geq s(f) \geq \underbrace{s(f, \pi_0)}_{m(b-a)}$$

Prop: f è integrabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \pi$ partizione tale che

$$(0 \leq) S(f, \pi) - \Delta(f, \pi) < \varepsilon$$

Dim: $\Rightarrow S(f) = \int_a^b f(t) dt = \Delta(f)$. Fisso $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists \pi_1 \quad S(f) + \varepsilon/2 &\geq S(f, \pi_1) \geq S(f, \pi) \\ \exists \pi_2 \quad -\Delta(f) + \varepsilon/2 &\leq \Delta(f, \pi_2) \leq -\Delta(f, \pi) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} \pi = \pi_1 \cup \pi_2$$

$$\varepsilon \geq S(f, \pi) - \Delta(f, \pi) \quad (\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \pi \text{ partizione tale che } S(f, \pi) - \Delta(f, \pi) < \varepsilon$$

$$0 \leq S(f) - \Delta(f) \leq S(f, \pi) - \Delta(f, \pi) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow S(f) - \Delta(f) = 0 \Rightarrow f \text{ è integrabile.}$$

□

Prop 1: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona allora è integrabile

Prop 2: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è L-lipschitz allora è integrabile

Teo: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora è integrabile

Dim (Prop 1): SGA suppongo f crescente, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ ($\Rightarrow f$ limitata)

$$\pi_n = \{x_k : 0 \leq k \leq n\} \quad t_k \doteq a + k \frac{b-a}{n} \quad \text{partizione uniforme}$$

$$S(f, \pi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)}{n} f(t_k)$$

$$\Delta(f, \pi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)}{n} f(t_{k-1})$$

$$0 \leq S(f, \pi_n) - \Delta(f, \pi_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_{k-1})] = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

$\downarrow \quad n \rightarrow +\infty$
0

$$S(f, \pi_n) - \Delta(f, \pi_n) \text{ tende a } 0$$

$$n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon} \quad \text{cio che } S(f, \pi_n) - \Delta(f, \pi_n) < \varepsilon \Rightarrow f \text{ integrabile}$$

Dim (Prop 2): f L-lip $\Rightarrow f$ continua, f limitata

$$*) S(f, \pi) - \Delta(f, \pi) \leq L \delta (b-a) \quad \text{con } \delta = \max \{ |I_k| : 1 \leq k \leq n \}, \pi = \{t_0, \dots, t_n\}$$

$$S(f, \pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| M_k$$

\downarrow
parametro di finezza

$$I_k = [t_{k-1}, t_k]$$

$$\Delta(f, \pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| m_k$$

$$M_k = \sup_{I_k} f = \max_{I_k} f$$

$$m_k = \inf_{I_k} f = \min_{I_k} f = f(\eta_k)$$

$$\xi_k, \eta_k \in I_k, \quad |\xi_k - \eta_k| \leq |I_k| \leq \delta$$

$$S(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{k=1}^n |I_k| (M_k - m_k) \leq \overbrace{L \sum_{k=1}^n |I_k|}^{b-a}$$

$$0 \leq M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) \leq L |\xi_k - \eta_k| \leq L \delta$$

Def: L'intervallo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Es: Se f è Lip $\Rightarrow f$ è uniformemente continua

$f(x) = x^2$ non è unif. continua su \mathbb{R}
 $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. su $[0, +\infty)$ } es.

TEO (HEINE-CANTOR):

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua. Allora f è anche unif. continua.

18-03-2022

lezione 45

Konstantinos Bessas

Sia $P_n(x)$ polinomio di grado n a coefficienti reali con n zeri reali distinti. Cosa possiamo dire sugli zeri di $P'_n(x)$

$P_n(x) \stackrel{\textcircled{*}}{=} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, siano $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ le radici di $P_n(x)$

$$\begin{array}{c} | \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n \\ \hline \end{array} \quad P(x_i) = 0 \quad \forall i = \{1, \dots, n\} \quad \begin{array}{c} | \quad x_i \quad \xi_i \quad x_{i+1} \\ \hline \end{array} \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Il teorema di Rolle ci dice che $\exists \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ t.c. $P'_n(\xi_i) = 0$

e si ha che gli ξ_i sono tutti distinti, $\xi_1 < \dots < \xi_{n-1}$ Oss: $\deg P'_n = n-1$

Oss: Si vede facilmente con la scrittura $\textcircled{*}$ e derivando: $P'_n(x) = n a_n x^{n-1} + \dots$

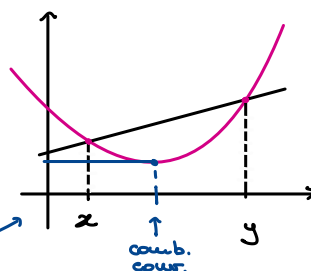
Esercizio: Se ho una funzione strettamente convessa su \mathbb{R} posso dire qualcosa sui minimi?

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1] \quad f(\underbrace{tx + (1-t)y}_{\text{combinazione convessa}}) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

Si dice strettamente convessa \Leftrightarrow

\Leftrightarrow vale $<$ anziché \leq

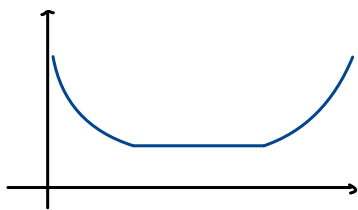
ad esempio:



l'importante è che la somma = 1
 combinazione convessa

Domanda: f str. conv. $\Rightarrow f$ convessa, vale \Leftarrow ? No, sono def. distinte

Esempio:



nelle zone piatte si perde la convessità

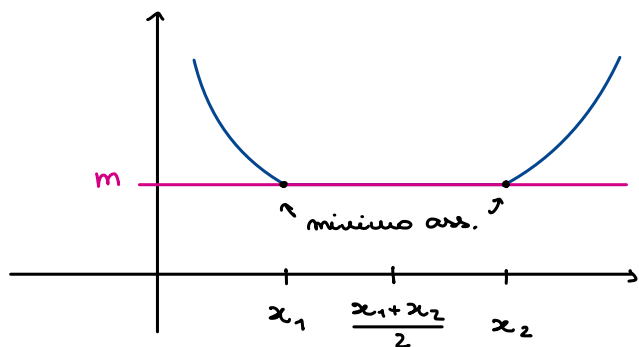
x punto stazionario di f convessa $\Rightarrow x$ è minimo assoluto di f

Si può dire qualcosa sui minimi assoluti di una convessa?

Ad esempio, se ne possono avere due? No (se f str. convessa)

Ragionamento grafico: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente convessa.

Per assurdo $\exists x_1 < x_2$ t.c. $f(x_1) = f(x_2) = \inf_{\mathbb{R}} f = m$



$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &< \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \\ &= \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m \end{aligned}$$

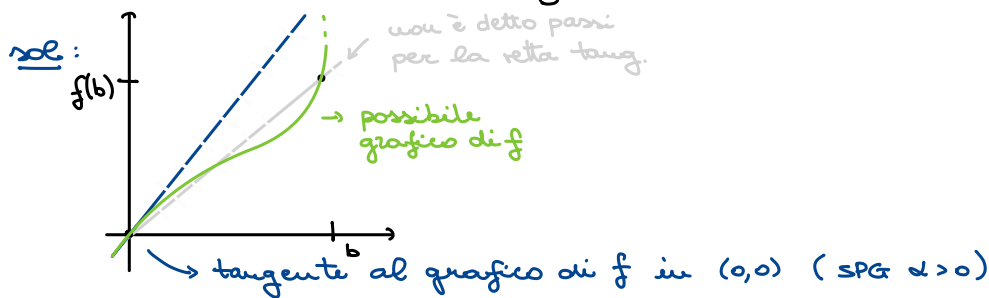
Ragionamento analitico

va bene perché $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Esercizio (23/01/2020):

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(0) = 0 \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$

$b > 0, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta < \frac{f(b)}{b}$, Tesi: $\exists c \in (0, b)$ t.c. $\frac{f(c)}{c} = \beta$



Oss: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \alpha \Rightarrow f(x)$ è derivabile in 0 e la retta tangente ha coef. ang. α

Oss: $F(x) := \frac{f(x)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è continua, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \alpha$. Estendo $F(x)$:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{è continua su } \mathbb{R}$$

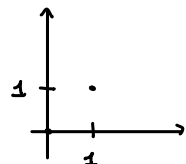
$\tilde{F}(0) = \alpha, \tilde{F}(b) = \frac{f(b)}{b} \Rightarrow$ per il Teo. dei valori intermedi $\exists c \in (0, b) : \tilde{F}(c) = \beta$

Poiché $\tilde{F}(c) = \frac{f(c)}{c} \Rightarrow$ Tesi

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$

Tesi: $\exists x \in (0, 1) : f'(x) > 1$

Sol:



Teorema di
Lagrange

$\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$ (però voglio > 1)

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, fissiamo $0 < \varepsilon < 1$,

$\exists \delta_\varepsilon \in (0, 1) \quad \forall x \in (0, \delta_\varepsilon] \subset (0, 1), \quad -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \varepsilon \iff -\varepsilon x < f(x) < \varepsilon x$

$\Rightarrow f(\delta_\varepsilon) < \varepsilon - \delta_\varepsilon$

Idea: Applicare Lagrange in $[\delta_\varepsilon, 1] \subset (0, 1)$: $\exists x \in (\delta_\varepsilon, 1)$ tc $\frac{f(1) - f(\delta_\varepsilon)}{1 - \delta_\varepsilon} = f'(x)$

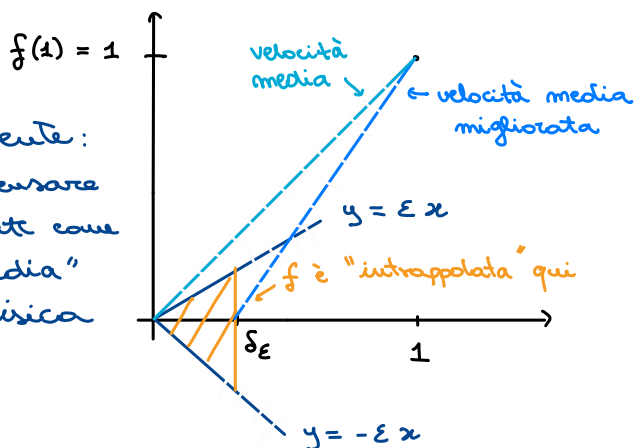
Oss: $\frac{f(1) - f(\delta_\varepsilon)}{1 - \delta_\varepsilon} > \frac{1 - \varepsilon \delta_\varepsilon}{1 - \delta_\varepsilon}$

$= \frac{1 - \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon - \varepsilon \delta_\varepsilon}{1 - \delta_\varepsilon}$

$= 1 + \frac{\delta_\varepsilon(1 - \varepsilon)}{1 - \delta_\varepsilon} \Rightarrow > 0$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{> 1} \rightarrow \text{Tesi}$

Graficamente:
possiamo pensare
alle derivate come
"velocità media"
come in Fisica



22-03-2022

Lezione 46

Prof. Novaga

INTEGRABILITÀ FUNZIONI CONTINUE

Teo (HEINE-CANTOR): $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $C \subseteq \mathbb{R}$ compatto (es: $C = [a, b]$)

$\Rightarrow f$ è unif. continua, cioè $\forall \varepsilon \exists \delta$ tc $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, x, y \in C$

Dim: Per assurdo, $\exists \varepsilon_0$ tc $\forall \delta_n < \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$

$\exists x_n, y_n \in C \quad \text{tc} \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

C compatto $\exists n_k$ tc $x_{n_k} \rightarrow x$ e $y_{n_k} \rightarrow y$ per $x \rightarrow \infty$ e $x = y$.

$\varepsilon \leq \lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = |f(x) - f(x)| = 0 \quad \nabla$

Oss: $f(x) = x^2$ è continua su \mathbb{R} ma non unif. continua

Teo: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ è integrabile

Dim: f è limitata ed è unif. continua fissiamo $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ e

prendiamo $\pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ con $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$

$$\text{Calcoliamo } S(f, \pi) - s(f, \pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{\substack{= \\ \frac{b-a}{n}}} \underbrace{(\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f)}_{\substack{= \\ \text{oscillazione}}} \leq$$

$$\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \max_{[t_k, t_{k+1}]} f - \min_{[t_k, t_{k+1}]} f \leq \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot (b-a) \varepsilon$$

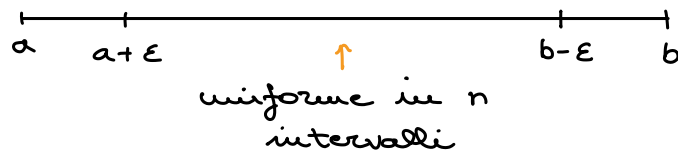
$\swarrow \quad \searrow$
da f è continua

Se scegliamo n tale $\frac{b-a}{n} \leq \delta(\varepsilon)$ dato dall'unif. cont. di f .

Oss: La stessa dim. funziona per $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata.

In fatti, fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\pi = [t_0, \dots, t_{n+2}]$ tale $t_0 = a, t_1 = a + \varepsilon,$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{b-a-2\varepsilon}{n}, \quad t_{n+1} = b - \varepsilon, \quad t_{n+2} = b$$



$$S(f, \pi) - s(f, \pi) = 4\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{b-a-2\varepsilon}{2} (\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f) \leq 4\varepsilon + (b-a)\varepsilon \text{ per } n \text{ grande}$$

Oss: Più in generale la dim. funziona per $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata con $\text{disc}(f)$ finito.

Anche più in generale si ha:

Teo: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata con $\text{disc}(f)$ finito o numerabile $\Rightarrow f$ è integ.

Teo (VITALI - LEBESGUE): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è integrabile \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \text{disc}(f)$ è TRASCURABILE (o di misura nulla).

Def: $E \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile se $\forall \varepsilon \exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$I_n \subset \mathbb{R}$ intervallo tale $E \subseteq \bigcup_n I_n$ e $\sum_n |I_n| \leq \varepsilon$

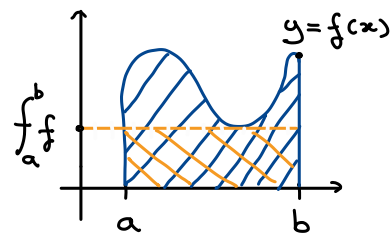
Oss: E numerabile $\Rightarrow E$ trascurabile ma non vale il viceversa (Cantor)

Teo (MEDIA INTEGRALE):

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont.

$$\exists \bar{x} \in [a, b] \text{ t.c. } f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

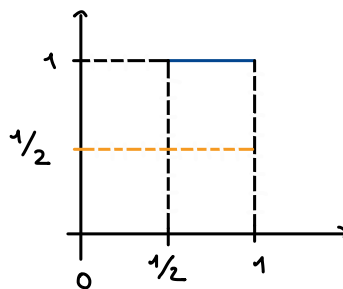
$$\text{cioè } (b-a) f(\bar{x}) = \int_a^b f(x) dx$$



Dim: Si ha $(b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{[a,b]} f \Rightarrow \min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{[a,b]} f$
 $\Rightarrow \exists \bar{x} \text{ t.c. } f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$

Oss: f int. non continua non è vero

$$\int_a^b f = \frac{1}{2} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{se } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Def: Si indica con $\mathcal{R}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabili}\}$

Prop: $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow$

$$\textcircled{1} \quad cf \in \mathcal{R}(I) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \int_I cf = c \int_I f,$$

$$\textcircled{2} \quad f + g \in \mathcal{R}(I) \quad \text{e} \quad \int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

In particolare $\mathcal{R}(I)$ è uno spazio vettoriale e $f \mapsto \int_I f$ è una funzione lineare su $\mathcal{R}(I)$.

Dim: $\textcircled{1} \quad a \geq 0 \quad S(a \cdot f, \pi) = a S(f, \pi) \quad \forall \pi$

$$s(a f, \pi) = a s(f, \pi)$$

$$\sup_{\pi} s(a f, \pi) = a \sup_{\pi} s(f, \pi) = a \inf_{\pi} S(f, \pi) = \inf_{\pi} S(a f, \pi) = a \int_I f$$

$\textcircled{1 \text{ bis}} \quad -f \in \mathcal{R}(I)$ infatti: $S(-f, \pi) = -s(f, \pi), \quad s(-f, \pi) = -S(f, \pi) \quad \forall \pi$

$$\Rightarrow \sup_{\pi} s(-f, \pi) = \inf_{\pi} S(-f, \pi) = - \int_I f$$

$$\textcircled{2} \quad S(f+g, \pi) = \sum_k (t_{k+1} - t_k) \sup_{(t_k, t_{k+1})} (f+g) \leq \sum_k (t_{k+1} - t_k) (\sup f + \sup g) = \\ = S(f, \pi) + S(g, \pi)$$

$$s(f+g, \pi) \geq s(f, \pi) + s(g, \pi) \quad \forall \pi$$

$$\int f + \int g = \sup_{\pi_1} s(f, \pi_1) + \sup_{\pi_2} s(g, \pi_2) = \sup_{\pi} (s(f, \pi) + s(g, \pi)) \\ \leq \sup_{\pi} s(f+g, \pi) \leq S(f+g, \pi) \leq \inf_{\pi_1} S(f, \pi_1) + \inf_{\pi_2} S(g, \pi_2) = \int f + \int g \\ \Rightarrow \text{TESI}$$

Prop (ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO):

$I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(I)$, I intervallo

$$\Rightarrow f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1), f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2) \text{ e } \int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Dim: Siano $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_1 \\ 0 & x \in I_2 \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in I_1 \\ f(x) & x \in I_2 \end{cases}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Dico che $f_I \in \mathcal{R}(I)$ e $\int_I f_1 = \int_{I_1} f$ e lo stesso per f_2 .

Se questo è vero, per linearità,

$$\int_I f = \int_I (f_1 + f_2) = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia π partizione di I t.c. $S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon$ posso

supporre $I_1 \leq I_2$ e $\pi_1 = \pi|_{I_1}$ sia partizione di I_1 e $\pi_2 = \pi|_{I_2}$ per I_2 .

Per questo aggiungo a π il punto $\sup I_1 = \inf I_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si ha } S(f|_{I_1}, \pi_1) - s(f|_{I_1}, \pi_1) \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon \\ \text{e } S(f|_{I_2}, \pi_2) - s(f|_{I_2}, \pi_2) \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1) \\ f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2) \end{array}$$

Si ha anche $S(f|_{I_1}, \pi_1) = S(f_1, \pi) \leq S(f|_{I_1}, \pi_1) \leq s(f_1, \pi)$

$$\Rightarrow f_1 \in \mathcal{R}(I) \text{ con } \int_I f_1 = \int_{I_1} f \text{ e } f_2 \in \mathcal{R}(I) \text{ con } \int_I f_2 = \int_{I_2} f.$$

Oss: Quanto detto si scrive $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

dove $I = (a, c)$, $I_1 = (a, b)$, $I_2 = (b, c)$ $\forall a < b < c$

Per convenzione si pone $\int_a^b f = 0$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$ se $a > b$, in modo da avere:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Oss: $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$

Prop: $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(I)$ e $|\int f| \leq \int |f|$

Dim: Sia ε, π t.c. $S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon$

$$\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f \geq \sup_{(t_k, t_{k+1})} |f| - \inf_{(t_k, t_{k+1})} |f| \Leftarrow |a-b| \geq ||a| - |b|| \quad \forall a, b$$

$$\Rightarrow S(|f|, \pi) - s(|f|, \pi) \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(I)$$

Osserviamo che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \Leftrightarrow \left| \int f \right| \leq \int |f|$

24-03-2022

lezione 47

Prof. Carminati

UNIFORME CONTINUITÀ

$f: C \rightarrow \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in C$

Esempio: $f(x) = x^2 \quad x_n = n \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$
 $y_n = n + \frac{1}{n}$

$f(y_n) - f(x_n) = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 \geq 2$ È continua ma non unif. continua

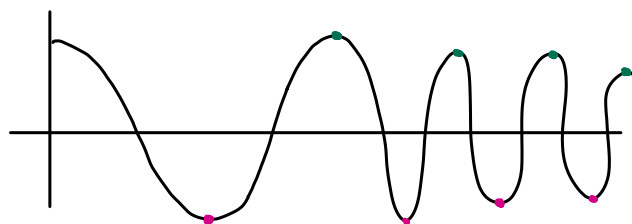
Proviamo con una f. limitata:

• $f(x) = \cos(x^2)$

$y_n = \sqrt{(2n+1)\pi} \quad f(y_n) = -1$

$x_n = \sqrt{2n\pi} \quad f(x_n) = 1$

$$0 \leq y_n - x_n = \sqrt{2(n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)\pi} + \sqrt{2n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

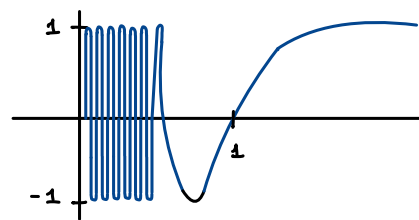


Proviamo con una funzione limitata con intervallo limitato

• $\cos \frac{1}{x} \quad x \in (0, 1)$ Es: verificare che è U.C.

$y_n \text{ t.c. } \frac{1}{y_n} = (2n+1)\pi \quad f(y_n) = -1 \quad y_n \rightarrow 0$

$x_n \text{ t.c. } \frac{1}{x_n} = 2n\pi \quad f(x_n) = 1 \quad x_n \rightarrow 0$



Es: Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$

(i) è unif. continua su $(0, 1)$

(ii) " " " " $(0, +\infty)$

Sol: • $\alpha \leq 0$ f non è unif. continua su $(0, 1)$ (e anche $(0, +\infty)$)

• $\alpha > 0$ f è est. per continuità su $[0, 1] \xrightarrow{H.C.} \tilde{f} \text{ è U.C. su } [0, 1]$

$\Rightarrow f \text{ è U.C. su } (0, 1)$

($\exists \tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $\tilde{f}|_{(0,1)} = f$)

Per casa: per quali $\alpha > 0$ f è U.C. su $(0, +\infty)$?

Sugg: se $d=1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$ $(*) y = \frac{1}{x}$

$0 < d < 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow \infty$

$f(x) \sim x^{d-1}$ si può dire che è VC su $(0, +\infty)$ $\Leftrightarrow 0 < d \leq 2$

Prop: (i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ $l, m \in \mathbb{R}$

allora f è U.C. In generale se ammette limiti agli estremi è U.C.

(ii) $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ U.C. e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f_0(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - f_0(x)) = 0 \Rightarrow f \text{ è U.C.}$$

Dim: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R_+ > 0 \cdot \forall x > R_+ |f(x) - l| < \varepsilon/2$

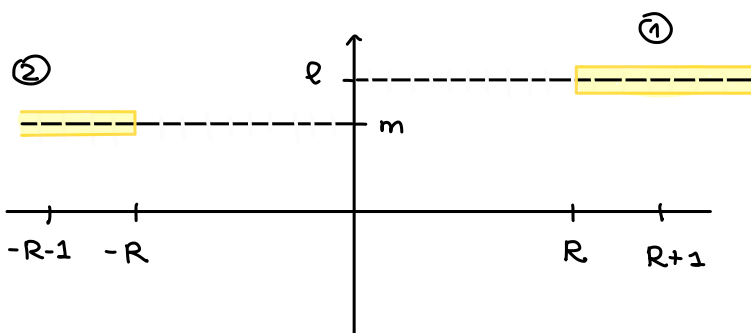
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R_- > 0 \cdot \forall x < -R_- |f(x) - m| < \varepsilon/2$$

$$R = \max\{R_+, R_-, 1\}$$

Fissati $\varepsilon > 0$, prendo R

come sopra e $\delta \in (0, 1)$ che

viene fuori dalla UC di $f|_{[-R-1, R+1]}$



$$x, y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \begin{cases} \textcircled{1} x, y > R \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ \textcircled{2} x, y < -R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ stesso ragionamento} \\ \textcircled{3} x \in [-R, R] \Rightarrow x, y \in [-R-1, R+1] \\ |x - y| < \delta \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

per UC di $f|_{[-R-1, R+1]}$

(ii) per esercizio

Sugg: Somma di funtz. U.C. è U.C. $(*)$ dimostrare questo

$$f(x) = f_0(x) + \underbrace{f(x) - f_0(x)}_{\text{infinitesimo}}$$

MODULO DI CONTINUITÀ (MdC)

$$\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$C \subseteq \mathbb{R}$$

$$(*) \begin{cases} \cdot \omega(0) = 0 \\ \cdot \omega \text{ monotona crescente (debol.)} \\ \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0 \end{cases}$$

DEF. (1) $f: C \rightarrow \mathbb{R}$, dico che ω è un MdC per f se:

(i) ω soddisfa (*)

(ii) $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$

(2) f ammette un MdC se esiste ω che è un MdC per f

Esempi: (banale) $\omega(t) = t$ o $\omega(t) = L \cdot t$ (con $L > 0$)

ω_L MdC per $f \Leftrightarrow f$ è L -Lip.

• $\omega_{L,d}(t) = L \cdot t^d$ ($d \in (0,1)$) funzioni Hölderiane (es: $f = \sqrt{x}$)

Prop: $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti

(i) f è U.C. (su G)

* $C \neq \emptyset$

(ii) f ammette un MdC

Dim: [\Rightarrow] Definisco $\omega_f(t) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in L \mid |x - y| \leq t \}$
 \uparrow MdC per f (ottimale)

• $\omega_f \geq 0$ (basta prendere $x = y \in G$)

• ω_f è monotona per la monotonia del sup al crescere dell'insieme

• $\forall \varepsilon > 0$ prendo δ dell'UC di f e ho che $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

• Se $t < \delta$ e $|x - y| \leq t \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall x, y \in G$

$$\omega_f(t) < \varepsilon \quad \forall t < \delta \quad \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \omega_f(t) = 0$$

Ovviamente $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$ (per costr.)

[\Leftarrow] $|x - y| \doteq t$

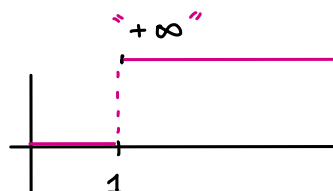
$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \omega(t) < \varepsilon \quad \forall t < \delta \Rightarrow t = |x - y| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega(t) < \varepsilon$$

Esempio: $C = \mathbb{N}$ $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ $f(n) = n^2$

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ +\infty & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$



Prop: Se $f: \overset{\text{intervalllo}}{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è UC e w_f è il suo MdC ottimale

Allora w_f è sub-additivo, $w_f(t+s) \leq w_f(t) + w_f(s)$

Lemma: Se w crescente positiva, $w: [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, w è sub-additiva, w infinitesima, allora $\exists a, b$ t.c. $w(t) \leq at + b \quad \forall t \geq 0$

Cor: Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è UC allora ha crescita sublineare

Dim: $s, t \geq 0$

$$w_f(s+t) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : \underbrace{|x-y| \leq s+t}_{(*)}, x, y \in I \}$$

(*) $z = x - t \frac{x-y}{|x-y|}$, $z \in I$ e inoltre:

$$|x-z| = \left| t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| = t, \quad |z-y| = \left| x-y - t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| \leq s$$

$$\begin{aligned} \text{Osservo che } |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| \leq \\ &\leq w_f(t) + w_f(s) \end{aligned}$$

Dim (Lemma): $\exists \delta_0 : w(\delta_0) < 1$

$$w(n\delta_0) \leq nw(\delta_0) \text{ per sub-additività}$$

$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow n\delta_0 \leq t < (n+1)\delta_0$$

$$w(n\delta_0) \leq w(t) \leq w((n+1)\delta_0)$$

$$w(t) \leq (n+1)w(\delta_0) = nw(\delta_0) + w(\delta_0) \leq t \underbrace{\frac{w(\delta_0)}{\delta_0}}_a + \underbrace{w(\delta_0)}_b$$

□

Prop: Se $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ è U.C. allora f è estendibile per cont. a $[0, 1]$

Dim: Basta vedere che $\exists \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\text{o eq: } \exists l \in \mathbb{R} : \forall x_n \rightarrow 1^- \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

$$\text{Se } x_n \rightarrow 1^- \quad f(x_n) \text{ è limitata} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l \text{ per } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Se } y_n \rightarrow 1^- \text{ è un'altra succ. allora } f(y_n) = f(x_n) + \underbrace{f(y_n) - f(x_n)}_{\varepsilon(n)}$$

$$|\varepsilon(n)| \leq w_f(|y_n - x_n|) \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = l \quad \forall y_n$$

Oss: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua (UC), $w \in \text{MdC}$ per f ,

π part. di $[a, b]$.

$$S(\pi, f) - s(\pi, f) = \sum_{k=1}^n |I_k| \overbrace{(f(\xi_k) - f(\eta_k))}^{w(|I_k|)} \quad \xi_k, \eta_k \in I_k$$

$$\text{se } \delta_\pi = \max \{|I_k|\} \hookrightarrow \sum_{k=1}^n |I_k| w(|I_k|) \leq (b-a) w(\delta_\pi)$$

INTEGRALI VIA CALCOLO DIRETTO:

$$f(x) = x \quad [a, b] \quad \int_a^b f(x) dx$$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \quad \text{part. unif. } \pi_n$$

$$S(\pi_n, f) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \geq (b-a)a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^n k\right)$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$$(b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b-a)(2a+b-a) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Es: Fare lo stesso calcolo per:

$$f(x) = x^2 \quad [0, 2]$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad [1, 2]$$

$$\text{Calcolare } \int_1^a \frac{1}{x^2} dx$$

Es: Se f è continua su $[a, b]$

$f \geq 0$ e $f(x_0) > 0$ ($x_0 \in [a, b]$)

allora $\int_a^b f(x) dx > 0$

25-03-2022

lezione 48

Prof. Novaga

PRIMITIVE E TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Def: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione integrabile, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile,

se $F' = f$, F si dice **PRIMITIVA** di f

Oss: Se F_1, F_2 sono primitive di $f \Rightarrow (F_1 - F_2)' = f - f = 0$

$$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in I \quad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

Si indica con $\int f dx = \{ F: I \rightarrow \mathbb{R}, F' = f \}$ **INTEGRALE INDEFINITO**.

Teo: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, I int. chiuso, $x_0 \in I$, sia $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in I$

allora F_{x_0} è una primitiva di f , cioè F_{x_0} è derivabile e $F_{x_0}' = f$.

(la costante si ottiene ponendo $F_{x_0}(x) = 0$)

Dim: Calcoliamo $F'_{x_0}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x)$$

\uparrow MEDIA
 $x_h \in (x-|h|, x+|h|) \cap I$

Oss: $a, b \in I, a < b \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) = F(b) - F(a)$

Dove F è una qualunque primitiva di f .

In particolare per calcolare $\int_a^b f$ è sufficiente trovare una primitiva.

COME SI CALCOLA UNA PRIMITIVA DI f

Oss: Diversamente dalla derivata, non sempre la primitiva di una "funzione elementare" è ancora una "funzione elementare".

Es: $e^{x^2}, e^{-x^2}, \frac{e^x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \dots$

TABELLA DELLE PRIMITIVE

DERIVATE		PRIMITIVE	
F	F'	f	$\int f$
c	0	0	c
x^a	$a x^{a-1}$	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + c \quad a \neq -1$
$\log(x)$	$1/x$	$1/x$	$\log x + c$
e^{ax}	$a e^{ax}$	e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + c \quad a \neq 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$

REGOLE DI INTEGRAZIONE

① $(F \pm G)' = F' \pm G' \Rightarrow \int f \pm g = \int f \pm \int g$ LINEARITÀ

② $(F \cdot G)' = F'G + FG' \Rightarrow FG + c = \int F'G + \int FG'$ cioè $\int F'G = F \cdot G - \int FG'$

Così estremo diventa $\int_a^b F'G = F \cdot G \Big|_a^b - \int_a^b FG'$ dove $FG \Big|_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$

↳ INTEGRAZIONE PER PARTI

Es: $\odot \int \log(x) \cdot 1 = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x = x \log x - x + c$

$\underset{G}{\log(x)} \quad \underset{F'}{1}$

$\odot \int e^x \sin(x) = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x (-\sin(x))$

$\underset{F'}{e^x} \quad \underset{G}{\sin(x)}$ $\underset{F'}{e^x} \quad \underset{G}{\cos(x)}$

$\Rightarrow \int e^x \sin(x) = \frac{e^x}{2} (\sin(x) + \cos(x)) + c$

$\odot \int e^x P(x) \quad P \text{ polinomio}$
 $\odot \int \sin(x) P(x) \quad P \text{ polinomio} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si integra } e^x \text{ o } \sin(x) \text{ e si deriva } P(x) \end{array} \right.$

$\odot \int \sin^2(x) = \int \sin(x) \cdot \sin(x) = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) \rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$
 $= -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \int \sin^2(x)$

$\Rightarrow \int \sin^2(x) = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + c$

③ $(F \circ \varphi)' = F'(\varphi) \cdot \varphi' \quad f = F'$

$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c = \int f(y) dy \Big|_{y=\varphi(x)}$

Con gli estremi diventa: $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy$ (attenzione al cambio d'estremi)

FORMALMENTE

$y = \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) dx = dy$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

ES: $\odot \int F(e^x) \cdot e^x = \int F(y) dy \Big|_{y=e^x}$

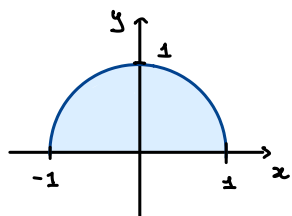
$\odot \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=e^x} = \arctan(e^x) + c \quad F(y) = \frac{1}{1+y^2}, y = e^x$

$\odot \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\varphi(x)} = \log |\varphi(x)| + c \quad F(y) = \frac{1}{y}$

$\odot \int \tan(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = - \int \frac{\varphi'}{\varphi} = - \log |\cos(x)| + c \quad \varphi(x) = \cos(x)$

$\odot \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt \rightarrow \cos(t) \geq 0$
 $= \frac{1}{2} (t + \sin(t) \cos(t)) + c = \frac{1}{2} (\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2}) + c$

$x = \sin(t), dx = \cos(t) dt, t = \arcsin(x)$



Area Cerchio = $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} = \arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2} \Big|_{-1}^1 = 2 \arcsin(1) = \pi$

$$\odot \int f(\sqrt{x}) dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{f(y)}{y} dy \Big|_{y=\sqrt{x}}$$

$$(*) : y = \sqrt{x}, dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\underline{\text{es:}} \odot \int x e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int \frac{e^y y^2}{y} = \frac{1}{2} \int e^y \cdot y \underset{\text{PARTI}}{=} \frac{1}{2} e^y \cdot y - \frac{1}{2} \int e^y = \frac{1}{2} e^y (y-1) + C \Big|_{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x}-1) + C$$

$$\begin{aligned} \odot \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2(t)} \cosh(t) dt = \int \cosh^2(t) dt = \sinh(t) \cosh(t) - \int \sinh^2(t) dt = \\ &= t + \sinh(t) \cosh(t) - \int \cosh^2(t) dt = \frac{1}{2} (t + \sinh(t) \cosh(t)) + C = \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arcsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2}) + C \quad \bullet \text{ SOSTITUZIONE: } x = \sinh(t), dx = \cosh(t) dt \end{aligned}$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x)' = \cosh(x), \quad \int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x)' = \sinh(x), \quad \int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

$$\Rightarrow \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$x = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{2e^t} \Rightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$$

$$e^t = x + \sqrt{1+x^2} \quad t = \operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

29-03-2022

Lezione 49

Prof. Novaga

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P, Q \text{ polinomi}$$

Calcolare $\int f(x) dx$

① Fattorizzare $Q(x)$:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n Q_i(x)^{d_i} \quad d_i \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n d_i \deg Q_i = \deg Q \quad \deg Q_i \in \{1, 2\}$$

$$\textcircled{2} \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} \quad \text{con } \deg P_2 < \deg Q$$

$$\textcircled{3} \deg P < \deg Q, \quad \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} \frac{P_{ij}(x)}{Q_i(x)^j} \quad \text{con } \deg P_{ij} < \deg Q_i, \deg P_{ij} \in \{0, 1\}$$

Vediamo i diversi casi:

$$\frac{P}{Q_j} \quad \text{con } \deg Q \in \{1, 2\} \text{ e } \deg P < \deg Q, j \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{4} \deg Q = 1, P(x) = 1, \int \frac{1}{(x+a)^j} dx = \begin{cases} \log|x+a| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{j-1}} & j>1 \end{cases}$$

$\textcircled{5} \deg Q = 2, Q(x) = x^2 + ax + b$, a meno di molt. per costante scriviamo:

$$P(x) = (2x+a) + c = Q'(x) + c$$

$$\int \frac{P}{Q^j} = \int \frac{Q'(x)}{Q(x)^j} + c \int \frac{1}{Q(x)^j}$$

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)^j} dx = \int \frac{1}{y^j} dy = \begin{cases} \log|y| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{y^{j-1}} & j>1 \end{cases}$$

\downarrow
 $y=Q(x)$

$\textcircled{6}$ Resta da fare $\int \frac{1}{Q(x)^j}$ con $\deg Q = 2$

$$Q(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}\right)^2 + 1 \right]$$

$$= \left(b - \frac{a^2}{4}\right) (y^2 + 1)$$

$y = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \rightarrow \text{CAMBIO DI VARIABILE}$

Resta quindi da fare $\int \frac{1}{(x^2+1)^j}$

$$j=1, \int \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + c$$

$j>1$, abbassiamo il grado integrando per parti:

$$I_j = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^j} = I_{j-1} - \frac{1}{2} \int \frac{2x \cdot x}{(x^2+1)^j} \stackrel{(*)}{=} I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{j-1}} I_{j-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{j-1}} = \dots$$

$$(*) \frac{2x}{(x^2+1)^j} = -\frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{j-1}}$$

... Iterando il procedimento si arriva a $\frac{1}{x^2+1}$, che è $\arctan(x) + c$

Oss: $\int f(x) \log Q(x) = \int P(x) \arctan(Q(x))$

integrando per parti diventano integrali di funzioni razionali

Es: $\int \frac{1}{x^3-1} dx \quad x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{\overbrace{(A+B)}^0 x^2 + \overbrace{(A-B+C)}^0 x + \underbrace{A-C}_1}{x^3-1}$$

Otteniamo il sistema lineare 3×3

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \quad 2A-B \Rightarrow 3A=1$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2(x+1)}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad y = x + \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{y^2+a^2} dy = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right) + c \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right) \right]' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{y^2+a^2}$$

Es: $\int \frac{1}{x^4+1}$

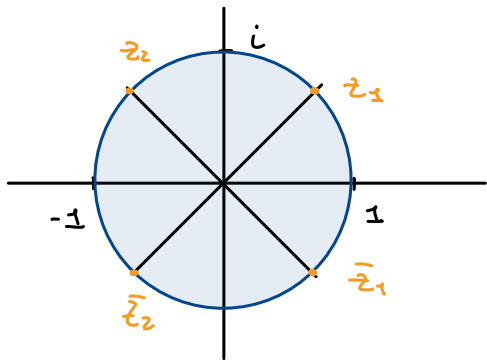
$$x^4+1 = (x^2+ax+1)(x^2-ax+1) = (x^2+1)^2 - a^2x^2$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - a^2x^2 \Rightarrow a^2 = 2, \quad a = \sqrt{2}$$

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

Alternativamente possiamo fattorizzarlo in \mathbb{C}

$$x^4+1=0 \quad x \in \mathbb{C} \text{ sono le radici 4e di } -1$$



$$-1 = e^{i\pi} \quad \sqrt[4]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) \\ &= (x^2 - (z_1 + \bar{z}_1)x + 1) \cdot (x^2 - (z_2 + \bar{z}_2)x + 1) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{(Ax + B)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{x^4 + 1}$$

$$1 = (A + C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x + B + D$$

Da cui il sistema lineare 4×4 :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = D = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A - C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned} \odot \frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} - 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \end{aligned}$$

Passiamo all'integrale:

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad y = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\odot \int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \int \frac{1}{y^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}y) + c = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + c$$

$$\odot \int \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + c$$

Es: $\int \arctan(x) \cdot 1 = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}$

$$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Ci sono alcuni integrali che si riducono ad integrali "classici"

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Sia $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$ una funzione razionale

○ $\int R(e^x) dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} \cdot e^x dx = \int \frac{R(y)}{y} dy$ FUNZIONE RAZIONALE $y = e^x \quad dy = e^x dx$

○ $\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int \overbrace{R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}^{F. RAZ.} \frac{1}{1+y^2} dy$

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = 2 \arctan(y) \quad dx = \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2} \quad \cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

Es: $\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \log|y| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$

○ $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad n \in \mathbb{N}$

[tipico caso: $\int R(\sqrt[n]{x}) dx \quad y = \sqrt[n]{x}$]

○ $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad x = a \sin(t) \quad dx = a \cos(t)$

$$= \int R(a \sin(t), a \cos(t)) a \cos(t) dt$$

○ $\int R(x, \sqrt{x^2 + c}) dx \quad \boxed{c > 0} \quad x = \sqrt{c} \cdot \sinh(t) \quad \boxed{c < 0} \quad x = \sqrt{-c} \cosh(t)$

Diventa del tipo $\int \tilde{R}(e^t) dt$

In alternativa si può porre $(x+y)^2 = x^2 + c \quad y = -x + \sqrt{x^2 + c}$

Diventa del tipo $\int \tilde{R}(y) dy \quad x = \frac{-y^2 + c}{2y} \quad dx = \left(\frac{-y^2 + c}{2y}\right)' dy$

Es: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\cosh(t)} \cdot \cosh(t) dt = t + c$
 \downarrow
 $x = \sinh(t)$
 $dx = \cosh(t) dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh}(x) + c = -\log(-x + \sqrt{x^2+1}) + c$$

31-03-2022

lezione 50

Prof. Corvinioti

Es: $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

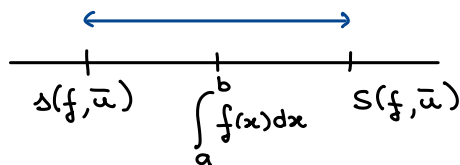
$$0 \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq (b-a) \omega_f(\delta_n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad [a, b] = [1, 2]$$

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \delta_n = \max(x_k - x_{k-1})$$

π_n partizione uniforme

$$\left| \int_1^2 f(x) dx - s(f, \pi_n) \right| \leq \omega_f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



$$s(f, \pi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{h=n+1}^{2n} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{2n} \frac{1}{h} - \sum_{h=1}^n \frac{1}{h} = H(2n) - H(n)$$

\uparrow
 $h=n+k$

$$H(n) = \log n + \gamma + o(n), \quad H(2n) = \log 2n + \gamma + o(2n)$$

$$H(2n) - H(n) = \log 2 + \underbrace{o(2n) - o(n)}_{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log 2$$

METODO "INDIRETTO"

Usando il TFCI, $f(x) = \frac{1}{x}$, $F'(x) = f(x)$ prendo $F(x) = \log x$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = F(2) - F(1)$$

CALCOLO DELLE AREE $\xleftrightarrow{\text{TFCI}}$ RICERCA DELLE PRIMITIVE

$$\int_a^b f(x) dx$$

← calcoli espliciti

$$\int f(x) dx$$

↑ insieme di tutte le primitive di f

→ esistenza delle primitive di una funzione continua

Esercizio: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ partizione di $[a, b]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (arbitrari).

$$\text{Allora } \left| \int_a^b f(x) dx - \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(c_k)}_{\text{Somme di Cauchy}} \right| \leq (b-a) \omega_f(\delta_\pi) \quad \delta_\pi = \max(x_k - x_{k-1})$$

METODI DI INTEGRAZIONE

- Integrazione per parti
- Integrazione per sostituzione
- Integrazione di funzioni razionali

Es: $\int \sin^5(x) dx = \int (\sin^2(x))^2 \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x) dx \stackrel{(*)}{=} \int_{y=\cos x}^{y=\cos x} dy = -\sin x dx$

$$= -\int (1-y^2)^2 dy = -\int [1-2y^2+y^4] dy = -\left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right] + c =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

Es: $\int \frac{1}{\sinh(x)} dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}-1} dx = \int \frac{2}{y^2-1} dy =$ $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = e^x$
 $dy = e^x dx$

$\frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$

$$= \log|y-1| - \log|y+1| + c = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$$

Es: $\int \log^3 x dx = \int y^3 e^y dy = p(y)e^y = (y^3 - 3y^2 + 6y + 6)e^y + c$

$x = e^y, dx = e^y dy$
 $y = \log x$

$p(y) = y^3 + by^2 + cy + d$
 $p'(y) = 3y^2 + 2by + c$

$[p(y)e^y]' = [p'(y) + p(y)]e^y$

⊛ $p'(y) + p(y) = y^3 + \underbrace{(b+3)}_{b=-3}y^2 + \underbrace{(c+2)}_{c=6}y + \underbrace{d}_{d=-6}$

$$\int \log^3 x dx = x(\log^3 x - 3\log^2 x + 6\log x - 6) + c$$

Es: $x > 0 \quad \int \frac{1}{x \log x} dx \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad F(x) = \log x$

$G(x) = \frac{1}{\log x} \quad G'(x) = -\frac{1}{x \log^2 x}$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \log(x) \frac{1}{\log(x)} - \int \log x \left(-\frac{1}{x \log^2(x)}\right) = 1 + \int \frac{1}{x \log x} dx \Rightarrow 0 = 1 \quad ?$$

Es: $\int \sin \log x dx \stackrel{*}{=} \int \sin y e^y dy = \sin y e^y + \int (-\cos y) e^y dy$ *: $x = e^y, \log x = y, dx = e^y dy$

$$= \sin y e^y - \cos y e^y - \int \sin y e^y dy = \frac{1}{2}(\sin y - \cos y) e^y + c$$

$$\int \sin \log x dx = \frac{1}{2}(\sin \log x - \cos \log x) x + c$$

Es: $\int \frac{1}{2 \sin x + \sin x \cos x} dx = -\int \frac{(-\sin x)}{(1 - \cos^2 x)(2 + \cos x)} dx$

$y = \cos x$
 $dy = -\sin x dx$

$= + \int \frac{dy}{(y^2-1)(2+y)}$

$t = \tan \frac{x}{2}, x = 2 \arctan t,$
 $dx = \frac{2}{1+t^2}$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(y+1)(y-1)(2+y)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{2+y} \quad \exists A, B, C \text{ t.c. } \forall y \notin \{1, -1, -2\}$$

$$1 = A(y-1)(2+y) + B(y+1)(2+y) + C(y+1)(y-1)$$

$$1 = 0 + B \cdot 2 \cdot 3 + 0 \Rightarrow B = \frac{1}{6} \leftarrow y=1$$

$$1 = A(-2) + 0 + 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \leftarrow y=-1$$

$$1 = 0 + 0 + C \cdot 3 \Rightarrow C = \frac{1}{3} \leftarrow y=-2$$

$$\frac{1}{(y^2-1)(2+y)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{y-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+y}$$

$$\int \frac{1}{(y^2-1)(2+y)} dy = -\frac{1}{2} \log|y+1| + \frac{1}{6} \log|y-1| + \frac{1}{3} \log|2+y| + c$$

$$\int \frac{1}{2 \sin x + \sin x \cos x} dx = \frac{1}{2} \log|\cos x + 1| + \frac{1}{6} \log|\cos x - 1| + \frac{1}{3} \log|2 + \cos x| + c$$

_____ o _____

$$I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos x}$$

$$- \int \frac{-\sin x}{\cos^3 x} dx \stackrel{y=\cos x}{\downarrow} = - \int \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} + c$$

$$I = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

$$I = \int \tan x (\tan x)' dx \stackrel{y=\tan x}{\downarrow} = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c$$

$$I = \frac{1}{2} \tan^2 x + c$$

→ sono entrambi giusti!

$$\text{Oss: } \frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$

_____ o _____

↑ costante!

$$H(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$$

$$H'(x) = F'(\cos x) \cdot (-\sin x) - F'(\sin x) \cos x$$

$$= \sqrt{1-\cos^2 x} (-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x$$

$$= -(|\sin x| \sin x + |\cos x| \cos x)$$

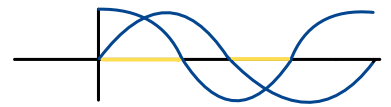
Studiare $H(x)$ senza calcolare esplicitamente l'integrale.

$$H(\pi/4) = 0$$

$$\text{Se } F'(y) = \sqrt{1-y^2}$$

$$H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$$

Oss: se $x \in [0, \pi/2]$, $H'(x) \equiv -1$, se $x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ $H'(x) \equiv 1$



Es₁ per casa: Determinare intervalli di crescita e decrescita

Es₂: Fare il calcolo esplicito (scrivendo l'espressione analitica di $F(y)$)

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + R(t)$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + r(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2F(x) - F(2x)}{x - F(x)}$$

$$R(t) = O(t^5), |R(t)| \leq c|t|^5 \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$r(t) = O(t^4) \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{18} + \int_0^x R(t) dt$$

$$\left| \int_0^x r(t) dt \right| \leq \left| \int_0^x |r(t)| dt \right| \leq c \left| \int_0^x t^4 dt \right| \leq c' x^5$$

$$F(x) = x - \frac{x^3}{18} + O(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2F(x) - F(2x)}{x - F(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2}{18}x^3 - 2x + \frac{(2x)^3}{18} + O(x^5)}{\frac{x^3}{18} + O(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{18} + \frac{8}{18} + O(x^2)}{\frac{1}{18} + O(x^2)} = 6$$

Per casa: $\int \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} dx$

01-04-2022

lezione 51

Prof. Carminati

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log|y| + C = \log|\log x|$$

$$D = (0, +\infty) \setminus \{1\} \quad \begin{cases} y = \log x \\ dy = \frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$h(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$$

$$F = \int \sqrt{1-t^2} dt \quad -1 \leq t \leq 1, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \int \cos x \cdot \cos x dx = \int \cos^2 x dx$$

$$t = \sin x, dt = \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int [1 + \cos 2x] dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right] + C = \frac{1}{2} \left[x + \sin x \cos x \right] + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\arcsin t + t \sqrt{1-t^2} \right] + C$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x)} \left(= -\frac{1}{2} \log(1 + \cos x) + \frac{1}{6} \log(1 - \cos x) + \frac{1}{3} \log(2 + \cos x) \right) \text{ (calcolo di veri)}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t \cdot \frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)} dt = *$$

$$\begin{cases} t = \frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{cases}$$

$$\frac{1+t^2}{t(3+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{3+t^2} = \frac{A(3+t^2) + Bt^2 + Ct}{t(3+t^2)} \quad A = 1/3, \\ = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{t} + \frac{2t}{3+t^2} \right] \quad B = 2/3, \\ C = 0$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{t} + \frac{2t}{3+t^2} \right] dt = \frac{1}{3} \left[\log|t| + \log|3+t^2| \right] + c = \frac{1}{3} \left[\log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \log \left| 3 + \tan^2 \frac{x}{2} \right| \right] + c$$

Oss: (*) $\int \frac{1+t^2}{3t+t^3} dt = \frac{1}{3} \log(3t+t^3) + c$
 $\hookrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{N'}{N}$ con $N=3t+t^3$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh(t) dt}{1+\cosh(t)} = \int \frac{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})}{1+\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})} dt = \int \frac{(y+\frac{1}{y})}{2+(y+\frac{1}{y})} \cdot \frac{dy}{y}$$

$dx = \cosh(t) dt, x = \sinh(t)$ $e^t = y, t = \log y, dt = \frac{dy}{y}$

$\mathbb{R}(x, \sqrt{x^2+c}) \stackrel{c>0}{\cong} \mathbb{C}$
 $x = \mathbb{C} \sinh(t)$
 $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

$$= \int \frac{y^2+1}{2y+y^2+1} \cdot \frac{dy}{y} = \int \frac{y^2+1}{(y+1)^2 \cdot y} dy \quad (*)$$

$$\frac{y^2+1}{(y+1)^2 y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{(y+1)^2} \quad \leftarrow \text{aggiungo e tolgo } 2y \text{ al numeratore}$$

$$(*) = \int \left[\frac{1}{y} - \frac{2}{(y+1)^2} \right] dy = \log|y| + \frac{2}{y+1} = \\ = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{2}{1+x+\sqrt{x^2+1}} + c$$

$$x = \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right), 2xy = y^2 - 1 \\ y^2 - 2xy - 1 = 0, \\ y_{\pm} = x + \sqrt{x^2+1} \quad y > 0!$$

□

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{2y dy}{1+y} = \int \left[2 - \frac{2}{1+y} \right] dy = 2y - 2\log(1+y) + c = 2\sqrt{1+x^2} - 2\log(1+\sqrt{1+x^2})$$

$y = \sqrt{1+x^2}, y^2 = 1+x^2, 2y dy = dx$ $t = \tan(\frac{x}{2}), \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

□

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{(1+t)^2} dt = -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + c$$

METODO DI HERMITE (SCOMPOSIZIONE)

$P, Q \in \mathbb{R}[x], \text{ gr}(P) < \text{gr}(Q), \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} + \frac{d}{dx} \left[\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)} \right], \begin{cases} \text{gr } P^* < \text{gr } Q^* \\ \text{gr } \hat{P} < \text{gr } \hat{Q} \end{cases}$

\nwarrow incognite \nearrow

con $Q^*(x)$ con le stesse radici di Q ma tutte semplici

$\hat{Q}(x)$ ha le stesse radici multiple di Q ma con molteplicità diminuita di 1

Esempio: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3(x-1)^2}$ $gr(P^*) = 1, gr(\hat{P}) = 2$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{x(x-1)} + \frac{d}{dx} \left[\frac{\hat{P}(x)}{x^2(x-1)} \right] = \left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1} \right) + \frac{d}{dx} \left[\frac{bx^2 + cx + d}{x^2(x-1)} \right] = \star$$

Es per casa: derivare e calcolare a_0, a_1, b, c, d in modo che l'espressione

\star coincida con P/Q dato iniziale.

$$\int \frac{P}{Q} dx = a_0 \log|x| + a_1 \log|x-1| + \frac{bx^2 + cx + d}{x^2(x-1)} + c$$

Es: fare lo stesso integrale con il metodo classico visto a lezione

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ $\sin \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$ per $t \rightarrow +\infty$



$$\int \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = - \int \sin(y) \frac{dy}{y^2} \text{ non ha espressione esplicita in termini di f. elementari}$$

$$\sin \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + w\left(\frac{1}{t}\right) \text{ con } w\left(\frac{1}{t}\right) = O\left(\frac{1}{t^3}\right) \text{ per } t \rightarrow +\infty \quad \exists R, C: |w\left(\frac{1}{t}\right)| \leq C \cdot \frac{1}{|t^3|} \text{ su } [R, +\infty)$$

$$\text{Se } n \geq R \quad \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_n^{2n} \frac{1}{t} dt + \int_n^{2n} w\left(\frac{1}{t}\right) dt = [\log 2n - \log n] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \log 2$$

$$\left| \int_n^{2n} w\left(\frac{1}{t}\right) dt \right| \leq n \cdot \frac{C}{n^3} \leq \frac{C}{n^2}$$

• Sia $f(x) = \int_x^{x+\sin^2 x} e^{-t^2} dt$, mostrare che f ammette massimo globale su \mathbb{R}

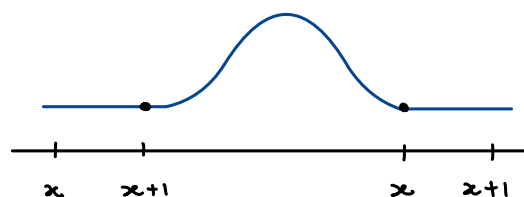
Oss: $\begin{cases} f \geq 0 \text{ continua} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ ammette massimo}$

$$f(0) = 0, f(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, x \leq x + \sin^2 x \text{ e } e^{-t^2} > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$x \geq R > 0 \quad 0 \leq f(x) = \int_x^{x+\sin^2 x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2},$$

\downarrow
 $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f \text{ ammette massimo}$$



Oss: f è continua anzi, è derivabile

$$f'(x) = F'(x + \sin^2 x)(1 + 2\sin x \cos x) - F'(x) = e^{-(x+\sin^2 x)^2} (1 + 2\sin x \cos x) - e^{-x^2}$$

TFCI $\Rightarrow \exists F \in C^1(\mathbb{R})$ tale $F'(t) = e^{-t^2}$

$$f(x) = F(x + \sin^2 x) - F(x)$$

Sia $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$, studiare F per $x > 0$

$$F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} > 0 \quad F''(x)$$

$$\text{TFCI} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ verificarlo e dare una stima asintotica

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = l \in [-\infty, +\infty)$ è finito

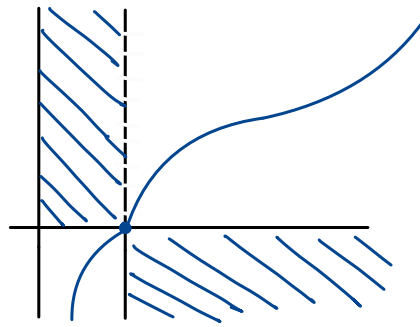
Il limite per $x \rightarrow 0$ è finito

$$0 \geq \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt = - \int_x^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$$

\uparrow
 $x < 1$

$$0 \leq \int_x^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt \leq e \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = e \cdot 2\sqrt{t} \Big|_x^1 = 2e - 2e\sqrt{x} \leq 2e, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l \geq -2e$$

\downarrow
 $\forall t \in [x, 1], e^t \leq e^1$



Per casa: Studiare la funzione $F(x) = (1-x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt$

05-04-2022

Lezione 52

Prof. Novaga

INTEGRALI IMPROPRI (GENERALIZZATI)

$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, f integrabile su $[a, c]$ $\forall c < b$,

si dice che f è integrabile (in senso improprio) su $[a, b)$ se

$$\exists \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}, \text{ lo stesso si può fare per } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e f integrabile su $[c, b]$ $\forall c > a$.

Più in generale $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, è integrabile se,

dato $x_0 \in (a, b)$, f è integrabile su $(a, x_0]$ e $[x_0, b)$ e si pone:

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f \quad \text{Oss. la def. non dipende dalla scelta di } x_0.$$

Esempi: $f(x) = x^\alpha$ $x \in (0, 1]$ $\alpha \in \mathbb{R}$

• $\alpha \geq 0$ f è integrabile

• $\alpha < 0$ f non è limitata. Fisso $\varepsilon > 0$ e calcolo:

$$(\alpha \neq -1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha < -1 \end{cases}$$

$$(\alpha = -1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{\alpha} \text{ \u00e8 integrabile su } (0, x_0] \Leftrightarrow \alpha > -1$$

Se considero $[1, +\infty)$, con lo stesso calcolo,

$$x^{\alpha} \text{ \u00e8 integrabile su } [x_0, +\infty) \Leftrightarrow \alpha < -1$$

Oss: x^{α} non \u00e8 mai integrabile su $(0, +\infty)$

$$f(x) = e^{-x} \text{ su } [0, +\infty)$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^M = \lim_M (1 - e^{-M}) = 1$$

TEOREMA (CONFRONTO)

$f, g: [x_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, f, g integrabile su $[x_0, M]$ $\forall M < +\infty$,

- $\odot f \leq g$ e g integrabile su $[x_0, +\infty) \Rightarrow f$ integrabile su $[x_0, +\infty)$
- $\odot f \leq g$ e f non \u00e8 integrabile $\Rightarrow g$ non \u00e8 integrabile su $[x_0, +\infty)$

Oss: $f \geq 0$, f non \u00e8 integrabile su $[x_0, +\infty) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^M f = +\infty$

infatti $M \mapsto \int_{x_0}^M f$ \u00e8 una funzione monotona crescente

Cor (CONFRONTO ASINTOTICO): f, g definite positive per $x \rightarrow +\infty$ $f \sim g$,

ci\u00f2 \u00e8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f/g = 1$ (va bene anche $f \sim c \cdot g$, $c \in (0, +\infty)$) \Rightarrow

$$\Rightarrow f \text{ \u00e8 integrabile su } [x_0, +\infty) \Leftrightarrow g \text{ \u00e8 integrabile su } [x_0, +\infty)$$

Dim (Teo): $0 \leq f \leq g$ g integrabile su $[a_0, +\infty)$

$$0 \leq \int_{x_0}^M f(x) dx \leq \int_{x_0}^M g(x) dx, \limsup_{M \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^M f(x) dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g < +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \mapsto \int_{x_0}^M f \text{ \u00e8 crescente e limitata} \Rightarrow \exists \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^M f = \int_{x_0}^{+\infty} f \leq \int_{x_0}^{+\infty} g$$

Def: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo anche illimitato,

f \u00e8 assolutamente integrabile su I se .

$\odot f$ \u00e8 integrabile su $[a, b] \subseteq I$ con $-\infty < a < b < +\infty$,

$\odot |f|$ \u00e8 integrabile (in senso improprio) su I .

Teo: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ assolutamente integrabile $\Rightarrow f$ è integrabile

Dim: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ parte positiva di f

$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ parte negativa

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $x \in I$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ in particolare,

$0 \leq f^\pm(x) \leq |f|(x)$. Per confronto $f^+(x)$ e $f^-(x)$ sono integrabili su I

\Rightarrow per additività del limite f è integrabile e $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Oss: $|f|$ è integrabile su $I \Rightarrow \int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$, $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

In particolare $\left| \int_I f \right| = \left| \int_I f^+ - \int_I f^- \right| \leq \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I |f|$.

Esempi: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$

① Su $(0, 1]$ $\sin(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim x^{1-\alpha}$ per $x \rightarrow 0$

f è integrabile $\Leftrightarrow 1-\alpha > -1$ cioè $\alpha < 2$

CONFR. ASINTOTICO

② Su $[1, +\infty)$ assoluta integrabilità:

$\left| \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ integrabile se $\alpha > 1 \Rightarrow f$ è integrabile per $\alpha > 1$

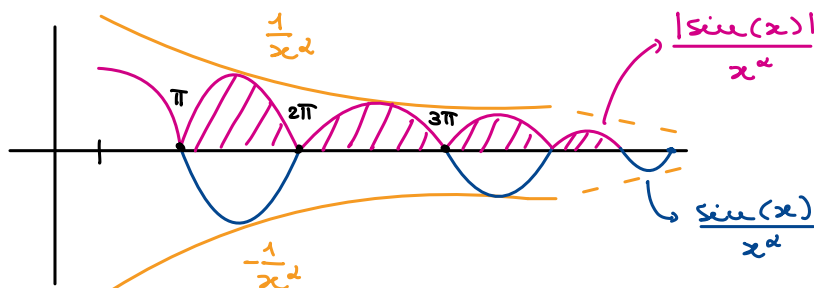
Per $\alpha \in (0, 1]$? Consideriamo $\int_1^M \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \overset{\text{PER PARTI}}{=} -\frac{\cos(x)}{x^\alpha} \Big|_1^M - \alpha \int_1^M \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}$

$\left| \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ integrabile su $[1, +\infty)$

Per il teo. $\exists \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} \Big|_1^M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(n)}{n^\alpha} - \cos(1) \right) = -\cos(1)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \cos(1) - \alpha \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$

③ Si può mostrare che $\frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ non è assolutamente integrabile su $[1, +\infty)$ per $\alpha \in (0, 1]$, cioè $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} = +\infty$



$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} \geq \frac{2}{\pi^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} = +\infty$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(k\pi+y)|}{(k\pi+y)^{\alpha}} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{(k\pi+y)^{\alpha}} \geq \frac{\int_0^{\pi} \sin(y)}{(k+1)^{\alpha} \pi^{\alpha}} \quad x = k\pi + y, \quad y \in [0, \pi]$$

Oss. Scrivendo $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$ per $\alpha > 0$

Si può ottenere l'integrabilità di $\frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$ dal criterio di Leibnitz.

07-04-2022

Lezione 53

Prof. Corninatti

INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(1+x)} \quad \text{dire se l'integrale è convergente.}$$

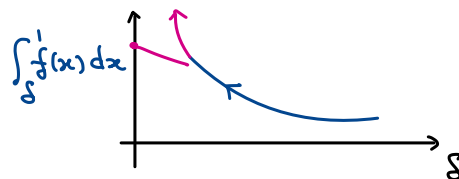
$$f(x) = \frac{1}{\log(1+x)}$$

► non è limitata in un intorno di 0

► è integrabile su $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{\log(1+x)}$$

► $f(x) \geq 0$ per $x > 0$



$$\log(1+x) \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{\log(1+x)} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

per il criterio del confronto asintotico

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ converge}$$

Questo integrale
NON converge

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} (-\log \delta) = +\infty$$

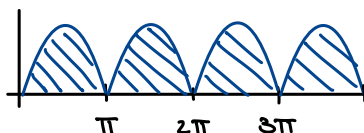
Prop: f_1, f_0 funzioni positive; integrabile su $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 1 \quad \text{allora} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 f_1(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 f_2(x) dx$$

o è finito per entrambi o è infinito per entrambi.

$$\bullet \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \sin^2 x dx = +\infty$$



• $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} dx$ converge o no? $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ non esiste

$y = x^2, x = \sqrt{y}, dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \begin{cases} x = n\pi \\ \sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$

$I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \frac{\sin((k-1)\pi + x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}} dx = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}} dx}_{a_k}$
 $y = (k-1)\pi + x$

$a_k \geq 0, a_k \downarrow$: Questa serie converge

$\int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \boxed{\int_{n\pi}^{n\pi+x'} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy} \quad x = n\pi + x' \text{ con } x' \in [0, \pi)$
 $R(x)$

$= I_n + R(x) \quad x \rightarrow 0 \quad |R(x)| \leq \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$
 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k \hookrightarrow 0$

Es per cosa: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\log t} dt$ dire se esiste e è finito

Es: $\int_0^1 \log^2 x dx$ converge?

Sostituiamo: $y = -\log x, x = e^{-y}, dx = -e^{-y} dy$
 $= \int_0^{\infty} y^2 (-e^{-y}) dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy$ converge (per parti)

• $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt$

($m=0$) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

($m \geq 1$) $I_m = \left[t^m (-e^{-t}) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} m t^{m-1} (-e^{-t}) dt = 0 + m I_{m-1}$

$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_m = m I_{m-1} \end{cases} \Rightarrow I_m = m!$

• ($\lambda > 0$) $\int_0^{+\infty} t^m e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^m} \int_0^{+\infty} y^m e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{m!}{\lambda^{m+1}} (*)$
 $\lambda t = y \begin{cases} t^m = \frac{y^m}{\lambda^m} \\ dt = \frac{dy}{\lambda} \end{cases}$

Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^\alpha \left(\log \frac{1}{t} \right)^\beta dt$$

problematiche $\begin{cases} \rightarrow a \text{ zero, se } \alpha < 0 \\ \rightarrow a \text{ 1, se } \beta < 0 \end{cases}$

$$y = \log \frac{1}{t}, \quad t = e^{-y}, \quad dt = -e^{-y} dy$$

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 e^{-\alpha y} y^\beta (-e^{-y}) dy = \int_0^{\infty} y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy \leftarrow \text{problematiche a } 0 \text{ e } +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha+1 > 0$$

$$\int_1^{+\infty} y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > -1 \text{ per il criterio del confronto asintotico}$$

Basta confrontarlo con $\int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy$ con $m \geq \beta$, $0 \leq y^\beta \leq y^m$ (vedi *)

$$I(\alpha, \beta) \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta < -1 \end{cases}$$

★ $I(\alpha, m) = \int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy = \frac{m!}{(\alpha+1)^{m+1}} \quad \left(\text{in alcuni casi si può fare il calcolo esplicito} \right)$

Γ di Eulero

Def: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

(a) l'integrale è finito $\forall x > 0$ (vedi es. precedente)

(b) $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ (per parti)

(c) $\Gamma(n) = (n-1)!$

(d) Γ è una funzione C^∞ (nella x)

Lemma: Posto $\Gamma_m(x) \doteq \int_0^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} dt$

a) Γ_m è ASSOLUTAMENTE convergente $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0$

b) $\Gamma_m(x+h) = \Gamma_m(x) + h \cdot \Gamma_{m+1}(x) + o(h)$ per $h \rightarrow 0 \quad (x > 0)$

c) $\Gamma'_m(x) = \Gamma_{m+1}(x)$ (da (b), usando la definizione di derivata)

d) $\Gamma_m(x) = \left(\Gamma_0(x) \right)^{(m)}$ \uparrow derivata m-esima (per induzione da (c))

Qss: $\Gamma_0(x) = \Gamma(x)$

Dim: a) convergenza assoluta: $\int_0^{+\infty} |\log t|^m t^{x-1} e^{-t} dt$ lo "spetto":

$$\int_0^1 |\log t|^m t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} |\log t|^m t^{x-1} e^{-t} dt$$

a) $\int_1^{+\infty} (\log \frac{1}{t})^m t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 (\log \frac{1}{t})^m t^{x-1} dt \stackrel{\text{per } \star}{=} \frac{m!}{x^{m+1}}$
 $e^{-t} \leq 1$

a) $\int_1^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{x+m-1} e^{-t} dt \leq \Gamma(x+m)$
 $0 \leq \log t \leq t$

b) Fisso $x > 0$, $\delta \in (0, x)$, $|h| \leq \delta$,

$R(h) = \Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x) - h \Gamma_{m+1}(x)$ tesi: $R(h) = o(h)$ per $h \rightarrow 0$

$$= \int_0^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} [t^h - 1 - h \log t] dt$$

$\begin{cases} g(s) = t^s \\ g'(s) = (\log t) t^s \\ g''(s) = (\log t)^2 t^s \end{cases}$ $g(h) = g(0) + h g'(0) + \frac{h^2}{2} g''(\xi)$ sviluppo di Taylor con resto di Lagrange
 $[t^h - 1 - h \log t] = \frac{h^2}{2} (\log t)^2 t^\xi$ con $|\xi| \leq \delta$

t^δ è convessa, $\max_{|s| \leq \delta} t^s = \max(t^\delta, t^{-\delta}) \leq t^\delta + t^{-\delta}$

$$0 \leq t^h - 1 - h \log t \leq \frac{h^2}{2} (\log t)^2 (t^\delta + t^{-\delta})$$

$$|R(h)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x-1} e^{-t} (t^\delta + t^{-\delta}) dt = \frac{h^2}{2} (J^+ + J^-)$$

con $J^+ = \int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x+\delta-1} e^{-t} dt < +\infty$ \swarrow $0 < \delta < x$

Quindi $|R(h)| \leq C h^2$ cioè $R(h)$ è $O(h^2)$ e quindi è $o(h)$ □

Per casa: Mostrare che se f continua su $[1, +\infty)$,

f decrescente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Allora esiste $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x dx$

(Sugg: procedere come per $\int_1^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$)

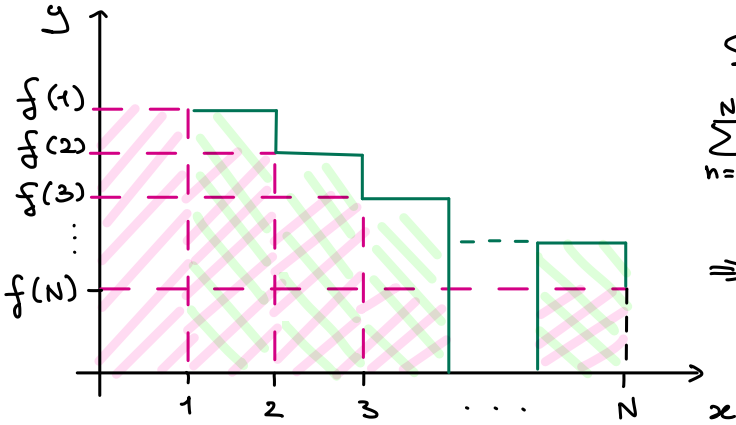
Es: Dire se converge $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} (-dy) = \int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy \leq \int_1^\infty e^{-y} dy$

Dire se converge: $\int_0^1 x^{\log x} dx \stackrel{*}{=} \int_0^1 e^{\log^2 x} dx = \int_0^\infty e^{y^2} e^{-y} dy = \int_0^\infty e^{y^2-y} dy$ non conv.

*: $x^{\log x} = e^{\log^2 x}$, se $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \log^2 x \rightarrow \infty$ \swarrow $\log x = -y, dx = -e^{-y} dy$

Per casa: $\int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin x} dx$ dire se converge o diverge

CRITERIO INTEGRALE PER LE SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = f(n), \quad f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \geq 0, \quad f \text{ decrescente}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$


Se hanno le disuguaglianze:

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^N f(x) dx \geq \sum_{n=2}^N f(n) \quad \forall N \geq 2$$

Teo: $f \geq 0$, f decrescente, allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) < +\infty$

Dimo: Segue dal teorema del confronto per i limiti.

Oss: Passando al limite $N \rightarrow +\infty$ si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} f(x) - f(1)$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, la serie converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \text{ converge } (\Rightarrow) \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}} < +\infty$$

$$y = \log x \rightarrow \int_{\log_2 1}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \Rightarrow \alpha > 1$$

Oss: Consideriamo la successione $b_N = \sum_{n=1}^N f(n) - \int_1^N f(x) dx$ e $[0, f(1)] \forall N$

In particolare b_n è limitata, inoltre si ha:

$$b_{N+1} - b_N = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^{N+1} f(x) + \int_N^N f(x) = f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x) \leq 0, \text{ cioè}$$

$$b_n \text{ è decrescente} \Rightarrow b_n \xrightarrow{n} \inf_n b_n = b \in [0, f(1)] .$$

Quindi $\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x) dx + b + o(1)$ per $N \rightarrow \infty$ con $b \in [0, f(1)]$.

Questo vale anche quando $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$.

Esempi: • $f(x) = \frac{1}{x}$ $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log(N) + \gamma + o(1)$, $\int_1^N \frac{1}{x} = \log(N)$

$\gamma \in [0, 1]$, $\gamma \approx 0,577...$ si chiama **COSTANTE DI EULERO-MASCHERONI**

• $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1)$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + o(1)$, $\gamma_\alpha \in [0, 1]$

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^N = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$\alpha > 1$, possiamo mandare $N \rightarrow +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \gamma_\alpha$, $\gamma_\alpha \in [0, 1]$

ESERCIZI SU INTEGRALI IMPROPRI

• Studiare l'integrabilità di $\int_0^1 |\log(x)|^\alpha dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

① Vediamo $x \rightarrow 1^-$. $\log(x) = x-1 + o(1)$ $x \rightarrow 1^- \Rightarrow |\log(x)|^\alpha = (1-x)^\alpha + o(1)$

$$\int_{1-\varepsilon}^1 |\log x|^\alpha \sim \int_{1-\varepsilon}^1 (1-x)^\alpha < +\infty \text{ per } \alpha > -1$$

② Vediamo $x \rightarrow 0^+$ $x^\beta |\log x|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \quad \forall \beta > 0$, $|\log x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad \forall \beta > 0$ $x \rightarrow 0^+$

Per confronto con $\frac{1}{x^\beta}$, $\beta \in (0, 1)$, si ha $\int_0^\varepsilon |\log x|^\alpha < +\infty \quad \forall \alpha, \varepsilon \in (0, 1)$

$\Rightarrow |\log x|^\alpha$ è integrabile su $(0, 1) \Leftrightarrow \alpha > -1$.

• Studiare l'integrale di $\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta) dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\beta = 0$ abbiamo $\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta) = \sin(1) \int_0^\infty x^\alpha = +\infty \quad \forall \alpha$

Facciamo il cambio di variabile $y = x^\beta$, $\beta \neq 0$: $x = y^{\frac{1}{\beta}}$, $dx = \frac{1}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$

$$\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta) \sim \frac{1}{|\beta|} \int_0^\infty y^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \cdot y^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sin(y) dy = \frac{1}{|\beta|} \int y^\delta \sin(y) dy, \quad \delta = \frac{\alpha+1-\beta}{\beta}$$

$y^\delta \sin(y)$ è integrabile su $[1, +\infty) \Leftrightarrow \delta < 0$

$y^\delta \sin(y) \sim y^{\delta+1}$ per $y \rightarrow 0$ è integrabile su $(0, 1] \Leftrightarrow \delta+1 > -1 \Leftrightarrow \delta > -2$

$y^\delta \sin(y)$ è integrabile su $(0, +\infty) \Leftrightarrow -2 < \delta < 0$

$x^\alpha \sin(x^\beta)$ è integrabile su $(0, +\infty) \Leftrightarrow -2 < \frac{\alpha+1-\beta}{\beta} < 0$ e $\beta \neq 0$.

Ad esempio, se $\alpha = 0$, $\sin(x^\beta)$ è integrabile $\Leftrightarrow -2 < \frac{1-\beta}{\beta} < 0$,

• $\beta > 0 \Rightarrow -2\beta < 1-\beta < 0 \Rightarrow \beta > 1$

invece per $x \rightarrow 0$ non ci

• $\beta < 0 \Rightarrow -2\beta > 1-\beta > 0 \Rightarrow -\beta > 1 \Rightarrow \beta < -1$

sono mai problemi

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

L'incognita è una funzione $y(x): I \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$
dove n è l'**ordine** dell'equazione.

L'equazione si dice **autonoma** se F non dipende da x .

Se $F(x, y, \dots, y^{(n)}(x)) = \sum_{j=0}^n a_j(x) y^{(j)}(x) + b(x)$ l'equazione si dice **lineare**,
se $b(x) = 0$ si dice **lineare omogenea**.

Es: $y''(x) = 0$, integriamo $\Rightarrow y'(x) = c$, integriamo $\Rightarrow y(x) = cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$

Sono tutte le soluzioni dell'equazione.

Allo stesso modo $y^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow y(x) = P(x)$, P polinomio $\deg P = n-1$.

- Non c'è unicità
- lo spazio delle soluzioni ha dimensione n
- L'insieme delle soluzioni ha n "gradi di libertà"
- $h''(t) = -g$ caduta verticale di un "grave"

$$h(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$$

Dati iniziali: $\begin{cases} h(0) = h_0 & \text{altezza iniziale} \\ h'(0) = v_0 & \text{velocità iniziale} \end{cases}$

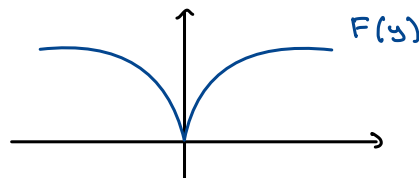
PROBLEMA DI CAUCHY

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right\} \text{ } n \text{ dati iniziali}$$

In molti casi ci aspettiamo soluzione
unica del problema di Cauchy

Oss: Non è sempre vero, F deve essere abbastanza regolare

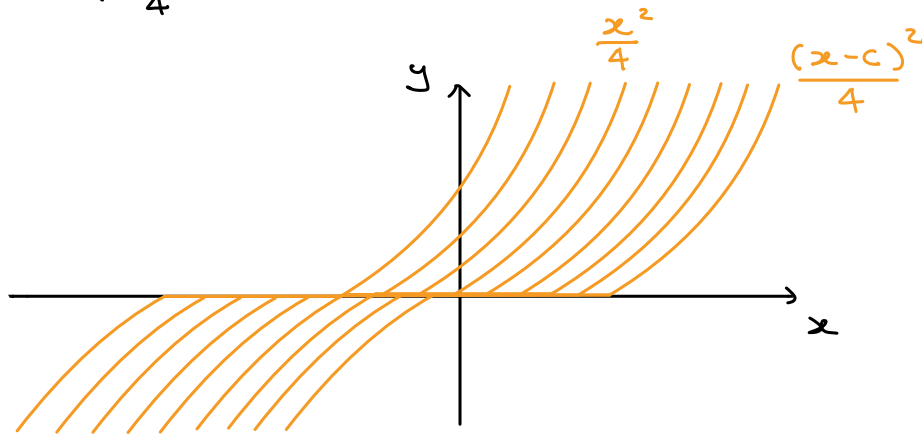
$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



• $y(x) = 0 \quad \forall x$ è soluzione, cerchiamo sol. del tipo $y(x) = ax^2$ ($x \geq 0$)

$$y'(x) = 2ax = \sqrt{y(x)} = \sqrt{a} \cdot x \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

○ $y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & x > 0 \end{cases}$ è soluzione. NON C'È UNICITÀ



BAFFO DI PEANO

Oss: Questo fenomeno non c'è se F è C^1

EQUAZIONE DEL PRIMO ORDINE IN FORMA "NORMALE"

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} & a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ x_0 \in (a, b) \end{matrix}$$

Teo (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE)

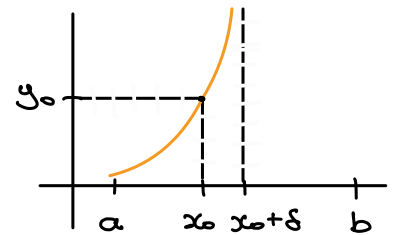
Se f è continua in (x, y) e lipschitziana in y , cioè:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \text{ con } L > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ con } (x_0 + \delta, x_0 - \delta) \subseteq (a, b)$$

e $\exists ! y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ soluzione del problema di Cauchy.

Oss: δ può essere molto piccolo.

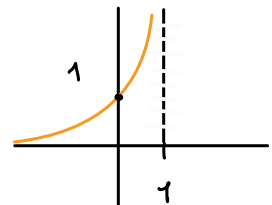
Le soluzioni possono avere asintoti verticali.



Es: $\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ NON HA SOLUZIONE GLOBALE

Divido per $y^2(x)$: $\frac{y'}{y^2} = 1$

integro $\int \frac{y'}{y^2} = x + c = -\frac{1}{y}$, $y(x) = -\frac{1}{x+c}$ $c \in \mathbb{R}$, $c = -1$



Esempio: $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue

Siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

Si può trovare la soluzione generale.

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè $A'(x) = a(x)$, scriviamo l'equat.

$y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$ moltiplichiamo per $e^{-A(x)}$ e otteniamo:

$$e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(s)} b(s) ds + c \quad c \in \mathbb{R}, \text{ da cui } y(x) = c e^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(s)} b(s) ds$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

In particolare, la soluzione di $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è:

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(s)} b(s) ds \quad \text{con } A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds, A(x_0) = 0.$$

Oss: Tutte le soluzioni sono definite globalmente, cioè $\forall x \in \mathbb{R}$

14-04-2022

lezione 56

Prof. Carminati

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO INTEGRALE

Prop: Se f è integrabile n volte e $f^{(n)}$ è integrabile allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \rightarrow R_n \quad (T_n)$$

Dim (Per induzione):

$$(n=1) \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (\text{vera per TFCI})$$

$$\text{Oss: } \frac{d}{dt} \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} \right] = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Suppongo la formula (T_n) vera e scrivo:

$$R_n = \int_{x_0}^x \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{\text{integro}} \cdot \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{derivato}} dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}$$

(T_n) vera $\Rightarrow (T_{n+1})$ è vera □

Confronto l'espressione di R_n con Lagrange:

$$\xi \in [x_0, x] \quad f^{(n)}(\xi) \frac{(x-x_0)^n}{n!} = R_n = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

$$f^{(n)}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^n}{n!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \quad P_n(t) \geq 0$$

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) P_n(t) dt \quad \text{con } \int_{x_0}^x P_n(t) dt = 1$$

Oss: Se $f^{(n)}$ è continua posso dimostrare la formula di Taylor con resto di Lagrange a partire da quella con resto integrale.

Infatti osservo che
$$m_n \int_{x_0}^x P_n(t) dt \leq \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) P_n(t) dt \leq M_n \int_{x_0}^x P_n(t) dt$$

$M_n = \max_{[x_0, x]} f^{(n)}$
 $m_n = \min_{[x_0, x]} f^{(n)}$

$\xrightarrow{\quad \rightarrow 1 \quad}$

Se $f^{(n)}$ continua $\Rightarrow \exists \xi \in [x_0, x]$ t.c. $f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) P_n(t) dt$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) P_n(t) dt$$

la formula con resto integrale produce stime più precise di quelle che si ottengono col resto di Lagrange.

LUNGHEZZA DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad := \text{partizione } \pi$$

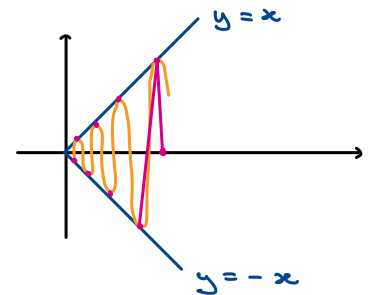
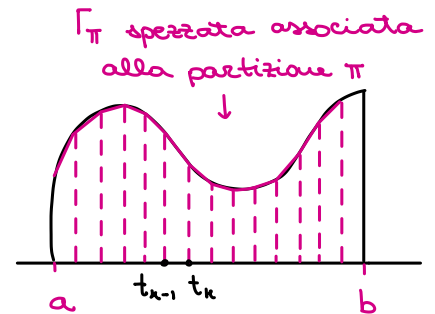
$$l(\Gamma_\pi) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}$$

$$\Gamma_f \doteq \{ (x, y) : y = f(x) \quad a \leq x \leq b \}$$

$$l(\Gamma) = \sup_{\pi} l(\Gamma_\pi)$$

Oss: Anche se f è continua $l(\Gamma_f)$ può valere $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases} \quad \begin{matrix} f \text{ continua} \\ l(\Gamma_f) = +\infty \end{matrix}$$



Fatto: Si può costruire $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $l(\Gamma_f|_{[a, b]}) = +\infty$, $a, b \in (0, 1)$

Def: Γ_f è **rettificabile** $\Leftrightarrow l(\Gamma_f) < +\infty$

Oss: Se f è M-Lip. $\Rightarrow \Gamma_f$ è rettificabile

$$l(\Gamma_\pi) \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + M^2 (t_k - t_{k-1})^2} \leq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{1 + M^2} = \sqrt{1 + M^2} (b - a)$$

Prop: Se $f \in C^1([a, b])$ allora Γ_f è rettificabile e $l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

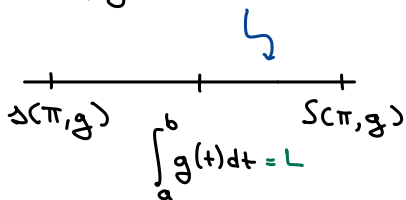
Dim: Sia π partizione,

$$\begin{aligned} l(\Gamma_\pi) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2} \quad \text{con } t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k \\ &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \end{aligned}$$

È una somma di Cauchy per $g(x) \doteq \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

$$\sum (t_k - t_{k-1}) m_k \leq l(\Gamma_\pi) \leq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) M_k \quad \text{con } M_k = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} g, \quad m_k = \inf_{[t_{k-1}, t_k]} g$$

$$s(\pi, g) \leq l(\Gamma_\pi) \leq S(\pi, g), \quad |l(\Gamma_\pi) - L| \leq S(\pi, g) - s(\pi, g) \leq (b-a) \omega_g(\delta_\pi) \quad *$$



$$\int_a^b g(t) dt = L$$

Oss: Se π_n è la partizione uniforme questo mostra

$$\text{che } |l(\Gamma_{\pi_n}) - L| \leq (b-a) \omega_g\left(\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Per terminare la dimostrazione basta verificare che $l(\Gamma_\pi) \leq L \quad \forall \pi \text{ part.}$

$$\text{Se } \pi \text{ partizione, } l(\Gamma_\pi) \leq l(\Gamma_{\pi \cup \pi_n}) \stackrel{*}{\leq} L + (b-a) \omega_g(\delta_{\pi \cup \pi_n}) \leq L + \underbrace{(b-a) \omega_g(\delta_{\pi_n})}_{\rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow l(\Gamma_\pi) \leq L \quad (\text{da cui } L \text{ è il sup}). \quad \square$$

Esempio: $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \quad \Gamma_f = \{ (x, f(x)) : 0 \leq x \leq T \}$

$$l(\Gamma_f) = \int_0^T \sqrt{1+x^2} dx \stackrel{*}{=} \int_0^\sigma \sqrt{\cosh^2(t)} \cosh(t) dt \quad \text{con } \sigma = \sinh^{-1}(T)$$

* $x = \sinh(t)$

$dx = \cosh(t) dt$

$1+x^2 = 1 + \sinh^2(t)$

$= \cosh^2(t)$

$$= \int_0^\sigma \cosh^2(t) dt \quad \cosh^2(t) = \frac{1}{2} (1 + \cosh(2t))$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\sigma [1 + \cosh(2t)] dt \leq \frac{\sigma}{2} + \left[\frac{1}{4} \sinh(2t) \right]_0^\sigma$$

$$\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t) \quad = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \left[\sinh(t) \cosh(t) \right]_0^\sigma = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} T \sqrt{1+T^2}$$

con $\sigma = \sinh^{-1}(T)$

$$= \frac{1}{2} \left[\log(T + \sqrt{1+T^2}) + T \sqrt{1+T^2} \right]$$

Esercizio: Verificare che $\sinh^{-1}(T) = \log(T + \sqrt{1+T^2})$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (del primo ordine)

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con a, b funzioni reali

Ammette un'unica soluzione (fatto generale)

$$(CL) \quad y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(s)} b(s) ds \quad \text{dove } A'(x) = a(x)$$

Esempio: $\begin{cases} y' = 2yx + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} a(x) &= 2x \\ A(x) &= x^2 \end{aligned}$

$$(CL) \Rightarrow y(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-s^2} ds$$

Es: Sia $b(x)$ una funzione limitata su $[0, +\infty)$. Mostrare che

l'equazione (E) $y' = y + b(x)$ ammette un'unica sol. limitata su $[0, +\infty)$.

Per (CL) otteniamo che la soluzione di (E) con $y(0)=y_0$ è :

$$y(x) = y_0 e^x + \int_0^x e^{x-s} b(s) ds = e^x \left[y_0 + \int_0^x e^{-s} b(s) ds \right]$$

Come scegliere y_0 in modo che questa quantità si mantenga limitata?

$$y_0 \doteq - \int_0^{+\infty} e^{-s} b(s) ds$$

Oss: l'integrale è assolutamente convergente, $B \doteq \sup |b(s)|$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s} |b(s)| ds \leq B \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = B$$

Con questa scelta di y_0 otteniamo che $y(x) = e^x \left[- \int_x^{+\infty} e^{-s} b(s) ds \right]$

$$|y(x)| = \int_x^{+\infty} e^{x-s} |b(s)| ds \leq B \int_x^{+\infty} e^{x-s} ds = B \quad (\forall x > 0)$$

Quindi la soluzione è limitata su $[0, +\infty)$ □

Es: Mostrare che, se $\alpha \notin \{0, 1\}$ allora $y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$ si riconduce a un'equazione lineare del I ordine ponendo $v \doteq y^{1-\alpha}$

$$[v' + (1-\alpha)p(x)v = g(x)]$$

Risolvere $y' + 2xy = y^3 x^3$ ($p(x) = 2x$, $g(x) = x^3$, $\alpha = 3$)

Es. per casa: ① Dire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale $\int_0^\infty \left[\frac{1}{x^\alpha} - \sin \frac{1}{x^\alpha} \right] dx$

② Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \arctan \left(\frac{nx}{n+x} \right) dx$

26-04-2022

Lezione 57

Prof. Novaga

Teorema (esistenza e unicità)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 & (x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d) \end{cases}$$

f continua in x e y e lip. in y

$\Rightarrow \exists \delta$ e \exists unica $y(x) \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ soluzione

Oss: Senza f lip. non c'è unicità: $y' = \sqrt{|y|}$ BAFFO DI PEANO

Teo (Peano):

Se f è solo continua, \exists una sol. $y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$, in generale non unica.

Def: Si dice sol. massimale del problema di Cauchy una soluzione

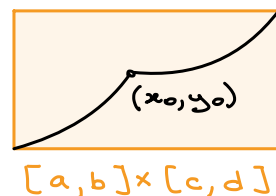
$y \in C^1(I)$, $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$, tale che se $z \in C^1(I')$ è un'altra sol. $\Rightarrow I' \subseteq I$

Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità $\exists! y \in C^1(I)$ sol. massimale del problema di Cauchy con $I \subseteq [a, b]$

Teo: Nelle ipotesi del Teo di $\exists!$, sia $y \in C^1([a', b'])$ la sol. massimale si ha:

① $b' = b$ o $(b' < b \text{ e } \lim_{x \rightarrow b'^-} y(x) \in \{c, d\})$

② $a' = a$ o $(a' > a \text{ e } \lim_{x \rightarrow a'^+} y(x) \in \{c, d\})$



Oss: Se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ allora

① $b' = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow b'^-} y(x) = \pm \infty$ (ASINTOTO VERTICALE)

② $a' = -\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a'^+} y(x) = \pm \infty$

Dim: Dimostriamo ① e supponiamo $b' < b$.

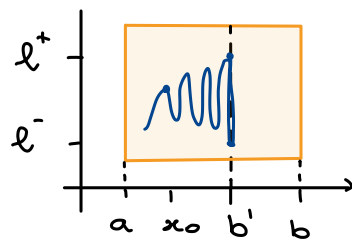
Mostriamo che $\exists \lim_{y \rightarrow b'^-} y(x) = \alpha \in [c, d]$. Ma allora $\alpha \in \{c, d\}$, altrimenti potremmo prolungare la soluzione e non sarebbe massimale.

Suppongo per assurdo che $\limsup_{y \rightarrow b'^-} y(x) = l^+ > l^- = \liminf_{x \rightarrow b'^-} y(x)$

Per Lagrange, $\exists x_n \rightarrow b'^-$ tale che:

$|y'(x_n)| = |f(x_n, y(x_n))| \rightarrow +\infty$ ma

$|f(x_n, y(x_n))| \leq \max_{[b'-\delta, b'] \times [l^+-\varepsilon, l^++\varepsilon]} |f(x, y)| < +\infty \text{ per } n \gg 1 \quad \downarrow$



Teo (Confronto): $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ soluzioni di $y' = f(x, y)$, I intervallo, con f continua e (loc.) lip. in $y \Rightarrow$ ho 3 possibilità:

① $y_1(x) > y_2(x) \quad \forall x \in I$

② $y_1(x) < y_2(x) \quad \forall x \in I$

③ $y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I$

Dim: Supponiamo che $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ per qualche $x_0 \in I$

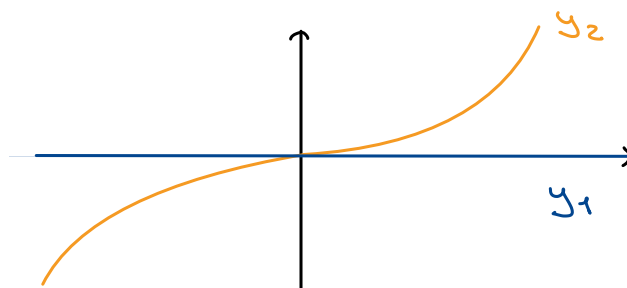
\Rightarrow per unicità $y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I$

Oss: Non vale per f solo continua

$$y' = \sqrt{|y|}$$

$y_1(x) = 0$ è soluzione

$$y_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases} \text{ è soluzione}$$



Def: $y \in C^1(I)$ è una **SOPRASOLUZIONE** (resp. **SOTTOSOLUZIONE**) di $y' = f(t, y)$ se $y'(x) \geq f(x, y(x)) \forall x \in I$ (resp. \leq).

La sopra/sottosoluzione si dice **STRETTA** se c'è la disug. stretta.

Teo: $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ y_1 soprasoluzione di $y' = f(x, y)$
 $x_0 \in I$ y_2 sottosoluzione di $y' = f(x, y)$] una delle due stretta

① $y_1(x_0) \geq y_2(x_0) \Rightarrow y_1(x) > y_2(x) \quad \forall x > x_0, x \in I$

② $y_1(x_0) \leq y_2(x_0) \Rightarrow y_1(x) < y_2(x) \quad \forall x < x_0, x \in I$

Dim. Dimostriamo ①

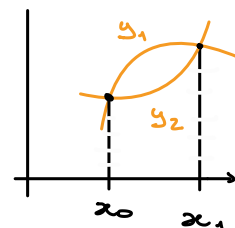
Osserviamo che, se $y_1(x_0) = y_2(x_0)$,

$$\Rightarrow y_1'(x_0) > y_2'(x_0) \Rightarrow y_1(x) > y_2(x) \text{ per } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Posso supporre che $y_1(x_0) > y_2(x_0)$.

Supponiamo per assurdo che $\exists x_1 > x_0$ t.c. $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ e $y_1(x) > y_2(x)$

$$\forall x \in (x_0, x_1) \Rightarrow y_1'(x_1) \leq y_2'(x_1), \text{ assurdo.}$$



STUDIO QUALITATIVO DELLE SOLUZIONI DI $y' = f(x, y(x))$

OBIETTIVO: Disegnare tutte le soluzioni

PASSI: ① Dominio di f

② Segno di f , tone di monotonia delle soluzioni $y(x)$

③ Soluzioni costanti, cioè $y \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x, y) = 0 \quad \forall x$

④ Simmetrie di f

⑤ Asintoti orizzontali e verticali (usando sopra/sottosolut.)

⑥ Derivate seconde di $y(x)$

Esempio: $y'(x) = x \left(1 + \frac{1}{y}\right)$ $f(x, y) = x \left(1 + \frac{1}{y}\right)$

$\text{dom}(f) = \{(x, y) : y \neq 0\}$ f è loc. lip. in y nel $\text{dom}(f)$

Segno di f : $f(x, -1) = 0 \ \forall x$, $y(x) = -1$ sol. costante, $f(0, y) = 0 \ \forall y$

Guardiamo le $y(x)$ con $y(0) \in (-1, 0)$

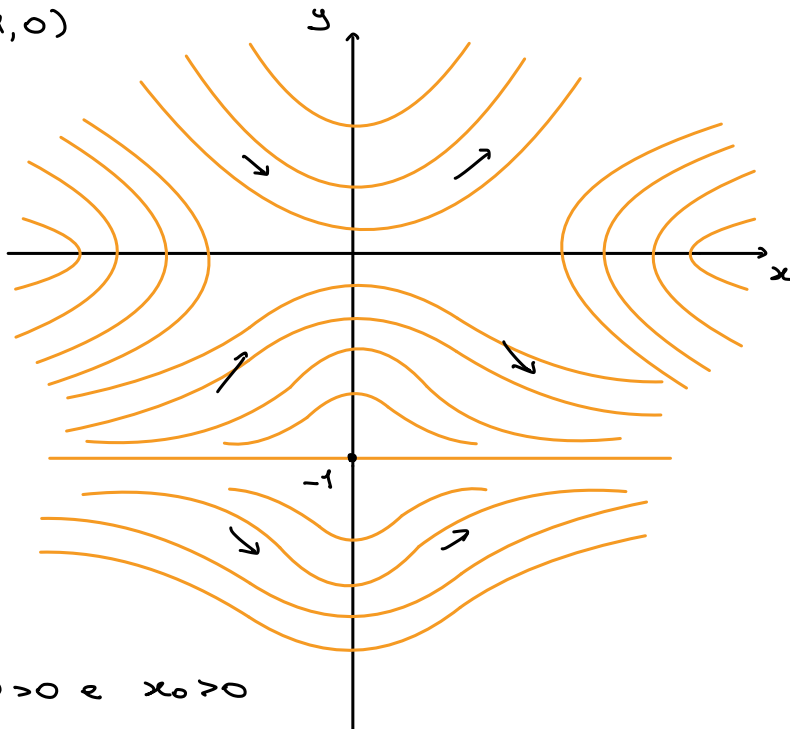
$$y'(x) < 0 \quad x > 0, \quad y'(x) > 0 \quad x < 0$$

$$y(x) \in (0, 1) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = y_\infty \in (0, 1)$$

$$\exists x_n \rightarrow +\infty \text{ t.c. } y'(x_n) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \lim_n y'(x_n) = \lim_n f(x_n, y(x_n)) = \\ &= \lim_n x_n \cdot \frac{y_\infty + 1}{y_\infty} \Rightarrow y_\infty = -1 \end{aligned}$$



Va capito se le soluzioni con $y(x_0) > 0$ e $x_0 > 0$

sono definite $\forall x > x_0$ o hanno un asintoto verticale

Sia $y(x)$ una tale soluzione, osserviamo che $y(x_0) < y(x) \ \forall x > x_0 \Rightarrow$

$$x \leq f(x, y(x)) \leq x \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right)$$

$\Rightarrow y_1(x)$ soluzioni di $y' = x$ è sottosoluzione stretta per $x > x_0$,

e $y_2(x)$ soluzioni di $y' = \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right)x$ è soprassoluzione stretta.

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + \left(y(x_0) - \frac{x_0^2}{2}\right), \quad y_2(x) = \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right) \frac{x^2}{2} + \left(y(x_0) - \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right) \frac{x_0^2}{2}\right)$$

\Rightarrow per confronto $y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x) \ \forall x > x_0$ c'è sempre esist. globale

Teo (ESISTENZA GLOBALE):

y è sol. massimale di $y' = f(x, y(x))$ con $|f(x, y(x))| \leq a(x) + b(x)|y|$

a, b continue e positive $\Rightarrow y$ è definita globalmente

Dim.: le eq. lineari $y' = a(x) \pm b(x)y$ hanno sol. globali ed esplicite, con cui posso confrontare la soluzione $y(x)$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{x^\alpha} - \sin \frac{1}{x^\alpha} \right]}_{\varphi(x)} dx \quad \text{per quali } \alpha > 0 \text{ converge}$$

Oss: $\sin t \leq t$, $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$

Devo verificare che convergono $\int_0^1 \varphi(x) dx$ e $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$.

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ esiste e } \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ è finito} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

$$x \rightarrow +\infty, y := \frac{1}{x^\alpha}, y \rightarrow 0 \Rightarrow y - \sin y \sim \frac{y^3}{6} \text{ per } y \rightarrow 0 \text{ (Taylor)}$$

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{6 \cdot x^{3\alpha}} \text{ per } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow 3\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}$$

$$\text{Quindi } \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \alpha < 1$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx$$

$$\int_0^1 1 \cdot \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx = *$$

$$f'(x) = 1$$

$$f(x) = x$$

$$\int_0^1 f' \cdot g dx = \left[f \cdot g \right]_0^1 - \int_0^1 f \cdot g' dx$$

$$g(x) = \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right)$$

$$g'(x) = \frac{n^2}{(n+x)^2 + n^2 x^2}$$

$$* = \left[x \arctan \frac{nx}{n+x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + x^2} dx$$

$$a_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$b_n$$

$$\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + x^2} \leq \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + x^2} \leq \frac{x}{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{c+x^2} dx \quad c=1, c = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\left[\frac{1}{2} \log(c+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log \frac{c+1}{c} = \begin{cases} c=1 \rightarrow \frac{1}{2} \log 2 \\ c = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \log \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log 2 \end{cases}$$

$$b_n \rightarrow \frac{1}{2} \log 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \cdot a(x) & \textcircled{E} & F: I \times J, y' = F(x, y), F(x, y) = f(y) \cdot a(x) \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I, y_0 \in J & a: I \rightarrow \mathbb{R}, f: J \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$$

Oss 1: Se $f(y_0) = 0$ allora $y(x) = y_0$ è soluzione

Oss 2: Se f è anche localmente lip. la soluzione locale è unica

(Valgono le ipotesi del teorema di Cauchy Lip)

$f(y_0) \neq 0$, chiamo J_0 la componente connessa di $\{y: f(y) \neq 0\}$ che contiene y_0 ; f non cambia segno su J_0 .

E la riscrivo come $\frac{y'(x)}{f(y(x))} = a(x)$ se $G' = \frac{1}{f}$, $A' = a$

$$\frac{d}{dx} [G(y(x))] = \frac{d}{dx} [A(x)] \xrightarrow[\text{su } x-x_0]{\text{TFCI: integrando}} G(y(x)) - G(y(x_0)) = A(x) - A(x_0)$$

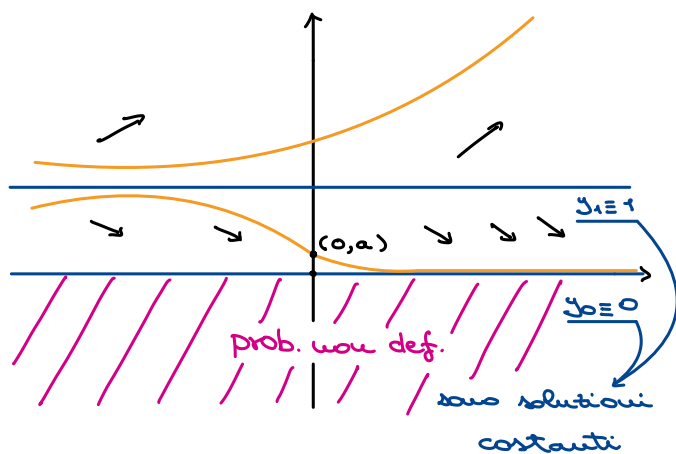
$$\Rightarrow G(y(x)) = G(y_0) + A(x) - A(x_0) \Rightarrow y(x) = G^{-1}(G(y_0) + A(x) - A(x_0))$$

per gli x per cui l'argomento appartiene a $G(J_0)$, $G: J_0 \rightarrow G(J_0)$

$$y' = f(y) a(x) \quad (x, y) \in I \times J$$

$$\text{Studiamo le soluzioni di } \begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

$$y' = f(y) \text{ con } f(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ y \log y & y > 0 \end{cases}$$



Oss: f è continua su $[0, +\infty)$

Oss: $a(x) \equiv 1$ (caso autonomo) \Rightarrow se $y(x)$ è sol., $y(x-d)$ è sol.

Oss: $I = \mathbb{R}$, $J = [0, +\infty)$

intorno di $(0, a)$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \quad \textcircled{I} \text{ localmente per } (x, y_1), (x, y_2) \in Q$$

$$\textcircled{Oss}: F(x, y) = f(y)$$

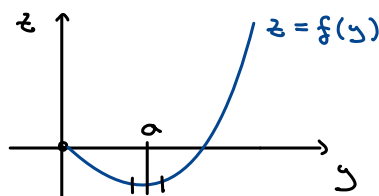
Se $\delta > 0$ è piccolo, $y_1, y_2 \in [a-\delta, a+\delta]$, e si ha:

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) = f(y_1) - f(y_2) = f'(\xi) |y_1 - y_2|$$

Quindi la condizione \textcircled{I} è verificata con $L = \max_{|\xi-a| \leq \delta} |f'(\xi)|$.

$$f(y) < 0 \quad \text{se } 0 < y < 1$$

$$f(y) > 0 \quad \text{se } y > 1$$



Oss: Se $a \in (0, 1)$ la soluzione del problema di Cauchy è definita su $(-\infty, a]$

perché $a \leq y(x) \leq 1$ se $x \in (-\infty, 0]$

$\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = l$ (perché $y(x)$ è monotona) e tale limite l deve soddisfare $f(l) = 0$

(perché altrimenti si avrebbe $\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(y(x)) = f(l) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 1$)

Un discorso analogo vale nel caso $a > 1$.

$$y'(x) = f(y(x)) \quad f'(y) = \log y + 1$$

$$y''(x) = f'(y(x)) y'(x) = f'(y(x)) f(y(x))$$

$$y''(x) = y \log y (\log y + 1)$$

$$y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < y < 1$$

$\log y$	-	-	+
$\log y + 1$	-	+	+
	$1/e$	1	

• Calcolo la soluzione usando quanto visto prima

$$a(x) = 1 \quad A(x) = x$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y \log y} \quad G(y) = \log |\log y|$$

$$G(y(x)) = G(y(0)) + A(x) - A(0)$$

$$G = \log |\log y|$$

$$\log |\log y(x)| = \log |\log a| + x$$

$$|\log y(x)| = |\log a| e^x$$

$$\text{Se } a > 1 \quad \log y(x) = (\log a) e^x$$

$$y = \exp((\log a) e^x)$$

$$\text{Se } 0 < a < 1 \quad \log y(x) = -|\log a| e^x$$

$$y(x) = \exp(-|\log a| e^x)$$

Esercizio: Fare lo studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione

$y' = \sin y$ e calcolare l'espressione esplicita della soluzione del

problema di Cauchy nel caso $y(0) = \frac{\pi}{2}$ e $y(0) = \frac{3}{2}\pi$

Esercizio: $y' = y^2 - x^2 - 1 = F(x, y)$ (*), fare lo studio qualitativo delle sol.

• $F(x, y)$ è continua in (x, y) e loc. lip. in y

Oss: $y(x) = -x$ è sol. dell'equazione

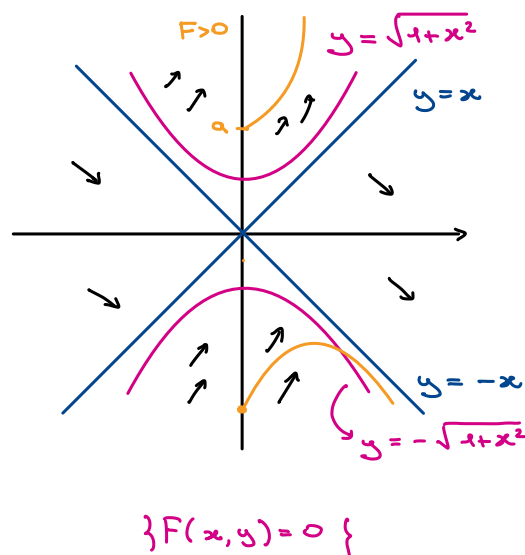
$$z(x) = x + y(x)$$

$$z' = z(z-x)$$

Es: Finire lo studio qualitativo

Esercizio: Se $F(x, y) = F(-x, -y)$ e se y è soluzione di $y' = F(x, y)$ allora

$v(x) = -y(-x)$ è ancora soluzione della stessa equazione $v' = F(x, v)$



29-04-2022

Lezione 59

Prof. Carminati

$$y' = \underbrace{y^2 - x^2 - 1}_{F(x, y)} \quad (E)$$

① Valgono le ipotesi del teorema di Cauchy-Lip

② $y(x) = -x$ è soluzione

③ Crescenta/decrescenta

④ $F(-x, -y) = F(-x, y) = F(x, -y)$

Se $y(x)$ è sol. di (E) anche $v(x) \doteq -y(-x)$

è sol. di (E): $v'(x) = -y'(-x) \cdot (-1) = F(-x, y(x)) = F(x, y(-x)) = F(x, v(x))$

$$(C_p) \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(0) = p \end{cases}$$

Prop: Sia y_p soluzione di (C_p) allora $\exists! P_* \in \mathbb{R}$ t.c.

a) $p < P_*$ allora y_p è definita su $[0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_p(x) + x = 0$$

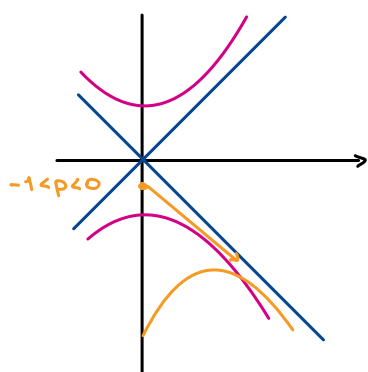
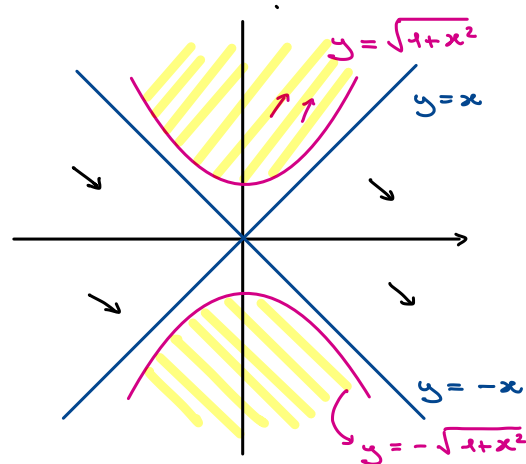
b) $p > P_*$ allora $\exists w = w(p)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow w} y_p(x) = +\infty$

c) $p = P_*$, y_{P_*} è definita su $[0, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_{P_*} = +\infty$

$$x + \frac{1}{x} \leq y_{P_*}(x) \leq x + \frac{1}{x} + \frac{1}{p} \quad \text{per } x \gg 1$$

Se $p < 0$ $y_p(x) \rightarrow -x$ per $x \rightarrow +\infty$

Se $p > 0$ $z_p(x) = y_p(x) + x$ se y_p è sol. di (C_p) $z' = y' + 1 = \overbrace{y^2}^{(z-x)^2} - x^2 - 1 + 1$
 $= z^2 - 2xz$



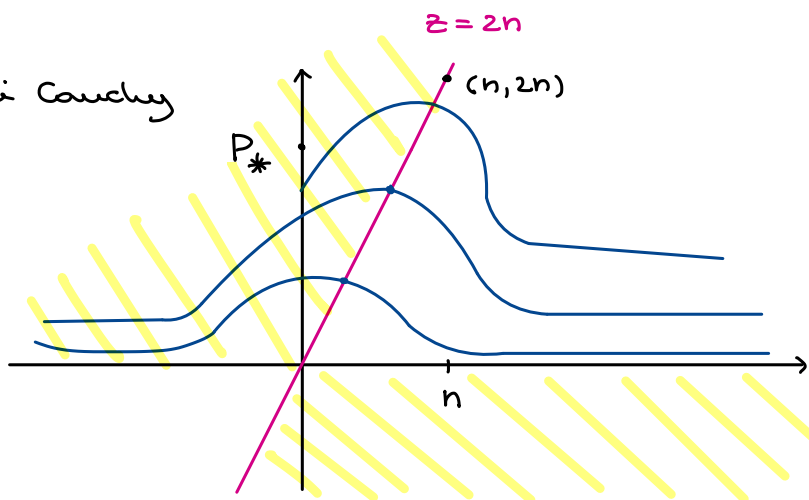
$$(z_p) \begin{cases} z' = z(z - 2x) \\ z(0) = p \end{cases}$$

ξ_n : la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \xi' = \xi(\xi - 2x) \\ \xi(n) = 2n \end{cases}$$

$$\xi_*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(x)$$

Prop: $\xi_*(x) < +\infty \quad \forall x \in [0, +\infty)$



Sia $\xi(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; ξ è una soluzione per $z' = z(z - 2x)$

$$G(x, z) = z(z - 2x), \quad \xi' < G(x, \xi)$$

$$G(x, \xi) - \xi' = \left(2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$= 2 + \text{"positivo"} - 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\xi_n(x) \leq \xi(x), \quad \xi_*(x) \leq \xi(x)$$

Fatto: Se φ_n definite su $[a, b]$ e continue su $[a, b]$, $\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq 0$,

$$\varphi_n(x) \searrow 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \rightarrow 0 \text{ uniformemente, } \sup_{x \in [a, b]} \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Oss: Senza la monotonia questo potrebbe non essere vero.

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}, \quad \varphi_n(x) \doteq \varphi(nx), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ma} \quad \sup_{x \in [0, 1]} \varphi_n(x) = 1$$

Grazie a questo fatto otteniamo $\xi_n \rightarrow \xi_*$ uniform. su ogni intervallo $[0, b]$

$$\varphi_n(x) \doteq \xi_* - \xi_n$$

$$\text{E di conseguenza } \int_0^b G(x, \xi_n(x)) dx \rightarrow \int_0^b G(x, \xi_*(x)) dx \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_n(b) - \xi_n(0) &= \int_0^b \xi'_n(x) dx = \int_0^b G(x, \xi_n(x)) dx \\ \downarrow n \rightarrow \infty \\ \xi_*(b) &= \xi_*(0) + \int_0^b G(x, \xi_*(x)) dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi'_*(b) = G(b, \xi_*(b))$$

• Sia ξ_a la soluzione del problema di Cauchy: $\begin{cases} \xi' = \frac{\xi^2}{2} \\ \xi(a) = 4a \end{cases} \text{ per } a > 1$

$$\xi'_a(a) = \frac{(4a)^2}{2} = 8a^2 > 4$$

ξ_a convessa $\Rightarrow \xi_a(x) \geq 4x \quad \forall x \geq a$, ha asintoti verticali

$$\xi' = \frac{\xi^2}{2} = \xi \left(\xi - \frac{\xi}{2} \right) \leq \xi \left(\xi - \frac{4x}{x} \right) \quad \xi' \leq G(x, \xi)$$

$$p > p_*, \quad \text{se } (y_p - y_{p_*})' = (y_p^2 - x^2 - 1) - (y_*^2 - x^2 - 1) = y_p^2 - y_*^2 \\ = (y_p - y_*) \underbrace{(y_p + y_*)}_{\rightarrow +\infty}$$

Di conseguenza per $x \gg 1$, $\varphi(x) \doteq y_p - y_*$, $\varphi' \geq \varphi$

$\Rightarrow \varphi$ cresce più che esponenzialmente. Quindi se $p > p_*$,

$y_p(x) - 4x \rightarrow +\infty$ e quindi y_p ha un tempo di vita finito. □

$$\bullet \begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = a \end{cases}$$

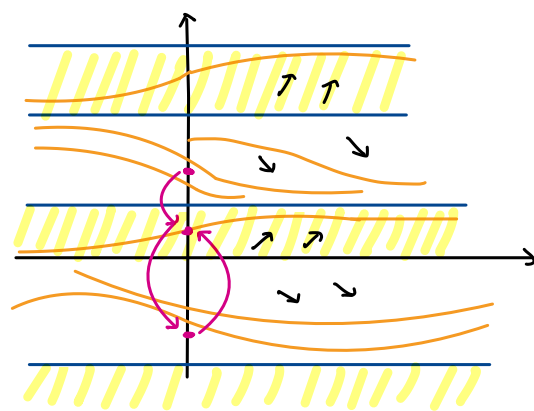
soluzione stazionaria $y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Se $y(x)$ è sol. di $y' = \sin y$ allora anche

a) $y(x+a)$ è sol. ($\forall a \in \mathbb{R}$)

b) $y(x) + 2\pi$ è sol.

c) $-y(x)$ è sol.



$$v(x) = -y(x) \quad v'(x) = -y'(x) = -\sin y(x) = \sin -y(x) = \sin v(x)$$

Per trovare tutte le soluzioni basta trovare quelle per $a \in (0, \pi)$

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = a \in (0, \pi) \end{cases} \quad \frac{y'}{\sin y} = 1$$

$$G'(y) = \frac{1}{\sin y} \quad \int \frac{1}{\sin y} dy \stackrel{t = \tan \frac{y}{2}}{=} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| \\ \stackrel{t = \tan \frac{y}{2}}{=} \log \left| \tan \frac{y}{2} \right| \quad \text{se } 0 < y < \pi$$

$$\log \tan \frac{y}{2} = \log \tan \frac{a}{2} + x$$

$$\tan \frac{y}{2} = \left(\tan \frac{a}{2} \right) e^x$$

$$0 < \frac{y(x)}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow y(x) = 2 \arctan \left(\left(\tan \frac{a}{2} \right) e^x \right) \quad \text{se } a \in (0, \pi)$$

E la soluzione per $\alpha_1 = \frac{3}{2}\pi$ qual è?

$$y_{\frac{3}{2}\pi} = 2\pi + y_{-\frac{\pi}{2}} = 2\pi - y_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 2\arctan(e^x)$$

Es: $(C_0) \begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ mostrare che $y(x) = -\underbrace{y(-x)}_{v(x)}$

Basta vedere che v soddisfa lo stesso problema di Cauchy

$$v(0) = 0 \text{ ovvio, } v'(x) = -y'(-x) \cdot (-1) = \cos(y(-x)) = \cos(-y(-x)) = \cos(v(x))$$

v e y soddisfanno $C_0 \xrightarrow{\text{UNICITA'}}$ $v(x) = y(x) \forall x$

Per esercizio: Calcolare le soluzioni

Es: Calcolare tutte le soluzioni di $y' = y \log^2 y$ ($y \geq 0$)

- non c'è unicità
- alcune soluzioni hanno un asintoto verticale

Es: Trovare tutte le soluzioni del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (\log \sqrt{1 + \sin^2 y})^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Es: Trovare le sol. di $y'(x) = \sin(x + y(x) + 1)$

Suggerimento: $z(x) \doteq x + y(x) + 1$

03-05-2022

Lezione 60

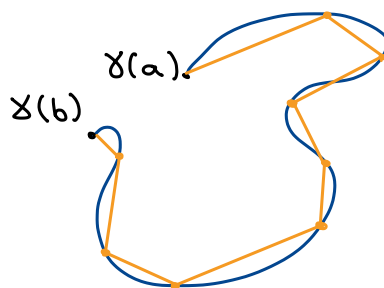
Prof. Novaga

CURVE IN \mathbb{R}^n

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, curva

$\gamma([a, b])$ supporto della curva

La curva è "chiusa" se $\gamma(a) = \gamma(b)$



LUNGHEZZA:

$$\pi = \{t_i\}_{i \in \{0, \dots, N\}} \quad t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$$

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \in [0, +\infty], \quad \text{lunghezza di } \gamma$$

La curva è RETTIFICABILE se $L < +\infty$.

Es: $\mu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\gamma(x) = (x, \mu(x)): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva, $\text{supp}(\gamma) = \Gamma_\mu$

Abbiamo visto che, se $\mu \in C^1$, $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \mu'(x)^2} dx < +\infty$

Più in generale:

Prop: $\gamma \in C^1 \Rightarrow \gamma$ rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Dim: Fissiamo π partizione di $[a, b]$, $\pi = \{t_0, \dots, t_N\}$

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt$$

Sommando in i : $L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Mostriamo che $L(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo π_ε t.c.

$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon \quad \forall s, t \in [t_i, t_{i+1}]$, si può fare perché γ' è unif. continua

Si ha che $\left| \gamma'(t) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) ds \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ quindi si ha:

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt - \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) ds \right| \right| < \varepsilon \quad \forall i, \text{ quindi sommando in } i:$$

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| + \varepsilon (t_{i+1} - t_i) \right) = \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon (b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon (b-a)$$

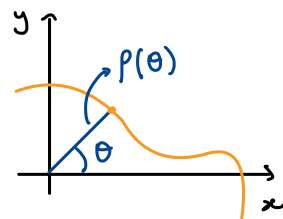
Oss: Il risultato è vero anche per curve lipschitziane

Oss: Se γ non è iniettiva $L(\gamma)$ è una "lunghezza con molteplicità"

CURVE IN COORDINATE POLARI:

Data $p(\theta): [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, +\infty)$ continua.

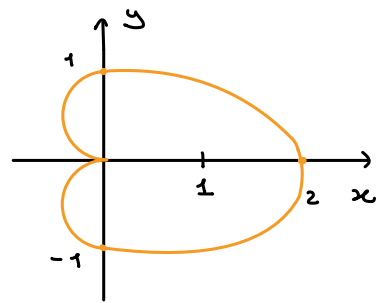
Posso considerare la curva $\gamma(\theta) = (p(\theta)\cos\theta, p(\theta)\sin\theta)$



$$\begin{aligned} p \in C^1 \Rightarrow \gamma \in C^1 \Rightarrow L(\gamma) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\gamma'(\theta)| d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(p'(\theta)\cos\theta - p(\theta)\sin\theta)^2 + (p'(\theta)\sin\theta + p(\theta)\cos\theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p'(\theta)^2 + p(\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

ESEMPLI:

CERCHIO: $p(\theta) = R$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{p'^2 + p^2} = 2\pi R$



CARDIOIDE: $p(\theta) = 1 + \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $p'(\theta) = -\sin \theta$

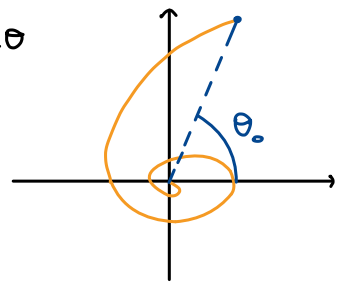
$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{p'^2 + p^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \\ \sqrt{1 + \cos \theta} = \sqrt{2} \cdot \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| \end{cases}$$

$$L(\gamma) = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \left| \cos(t) \right| dt = 8 \int_0^{\pi/2} \cos t = 8 \quad t = \frac{\theta}{2}, 2dt = d\theta$$

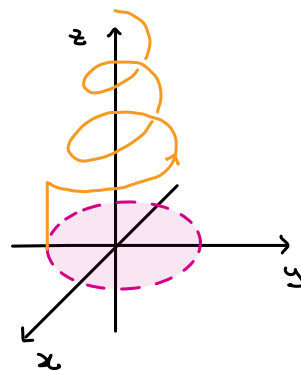
SPIRALE LOGARITMICA: $p(\theta) = e^{-\theta}$, $\theta \in [\theta_0, +\infty)$, $p'(\theta) = -e^{-\theta}$

$$L(\gamma) = \int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{p'^2 + p^2} = \sqrt{2} \int_{\theta_0}^{+\infty} e^{-\theta} = \sqrt{2} e^{-\theta_0}$$



ELICA: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [a, b]$, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_a^b \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} (b - a)$$



Oss: $\gamma'(t)$ si dice velocità della curva γ , $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ (se $|\gamma'(t)| \neq 0$), $|\tau(t)| = 1$ si dice vettore tangente alla curva γ

05-05-2022

Lezione 6.1

Prof. Corvini

EQ. LINEARI DI ORDINE SUPERIORE

$$(CS) \begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) & I \subseteq \mathbb{R} \quad J \subseteq \mathbb{R}^n \quad (x_0, y_0) \in I \times J \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 & f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ f loc. lip. in } y \end{cases}$$

allora (CS) ammette soluzione unica (localmente)

Inoltre se $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $|f(x, y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x)$ con $\alpha, \beta \geq 0$ continua

allora la soluzione di (CS) è definita su I

• (E) $a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x)$ Eq. lineare di ord. n

$a_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a_n(x) > 0$, anzi $a_n(x) \equiv 1$, u funzione scalare incognita

Pongo $y_j(x) := u^{(j)}(x)$ $0 \leq j \leq n-1$, $y(x) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))$ è sol. del sistema:

$$\begin{cases} y_j'(x) = (u^{(j)}(x))' = u^{(j+1)}(x) & 0 \leq j \leq n-2 \\ y_{n-1}'(x) = u^{(n)}(x) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} + b(x) \end{cases} \quad (S) \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{B}(x)$$

$$A(x) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \hline -a_0(x) & \dots & & -a_{n-1}(x) \end{array} \right) \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Soluzioni del sistema (S) \longleftrightarrow sol. di (E)

$$\vec{y} \text{ sol. di (S)} \iff u \doteq y_0 \text{ è sol di (E)}$$

Es: Verificare che $f(x, y) = A(x) \cdot y + B(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di CL e $|f(x, y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x)$

La soluzione di (S) è unica se si fissano le condizioni iniziali

Pertanto anche l'equazione $Lu \doteq u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u$

$$\begin{cases} Lu = b \\ u^{(j)}(x_0) = c_j & 0 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Questo problema di Cauchy di ordine n ha soluzione unica

Struttura delle soluzioni:

Prop: L'insieme delle soluzioni di $Lu = b$ (E) è uno spazio affine di dim n

Dim. Se u_1 e u_2 sono soluzioni di (E) equazione non omogenea.

$w \doteq u_1 - u_2$ soddisfa $Lw = 0$ (E₀) equazione omogenea.

$$Lu_1 = b \quad Lw = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = b - b = 0$$

$$Lu_2 = b$$

$Lw = 0$ è spazio vettoriale perché è $\text{Ker}(L)$, $L: C^n(I) \rightarrow C^0(I)$

Considero w_k la soluzione dell'equazione $\begin{cases} Lw = 0 \\ w^{(j)}(x_0) = \delta_{kj} \end{cases} \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$

Fatto: $\{w_k: 0 \leq k \leq n-1\}$ è base di $\ker L$

(a) w_k sono indipendenti

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k \quad \mu_k \in \mathbb{R} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$0 = D^l(\sum \mu_k w_k) = \sum \mu_k w_k^{(l)}(x) \quad \forall x \in I. \text{ Valutando in } x_0$$

$$0 \leq l \leq n-1 \quad 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k^{(l)}(x_0) = \mu_l \quad \leftarrow \delta_{kl}$$

Se $Lu = 0$ allora è combinazione lineare dei w_k , $u^{(k)}(x_0) = \mu_k \quad 0 \leq k \leq n-1$

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$$

$$\bar{u}^{(l)}(x_0) = \sum \mu_k w_k^{(l)}(x_0) = \mu_l \quad 0 \leq l \leq n-1$$

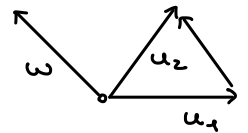
$$\begin{cases} L\bar{u} = 0 \\ \bar{u}^{(l)} = \mu_l \end{cases}$$

u e \bar{u} soddisfano lo stesso problema di Cauchy $\Rightarrow u = \bar{u}$

Oss: L'insieme delle soluzioni di $Lu = b$ si ottiene

da una soluzione di $Lu_0 = b$ sommando una combinazione di $\sum \mu_k w_k$

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$$



CASO DI COEFFICIENTI COSTANTI

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b(x) \quad a_j \in \mathbb{R} \quad 0 \leq j \leq n-1$$

• (EN) $P(D)u = b(x)$

$$P \in \mathbb{R}[x], \quad P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

\uparrow polinomio caratteristico dell'equazione

Esempio: $u'' - u = 0$

$$Du^2 - u = 0 \Rightarrow (D^2 - I)u = 0, \quad D: C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I) \text{ operatore lineare}$$

$$P, Q \in \mathbb{R}[\lambda] \quad P = \sum a_i \lambda^i, \quad Q = \sum b_j \lambda^j$$

$$P(D) \circ Q(D) u = P(D)(\sum b_j u^{(j)}) = \sum_i \sum_j a_i b_j u^{(i+j)} = (P \cdot Q)(D) u$$

\swarrow prodotto di polinomi

\uparrow composizione di operatori

Esempio: $P(\lambda) = \lambda - 1, \quad Q(\lambda) = \lambda + 1, \quad P(D) \cdot Q(D) = (P \cdot Q)(D) = D^2 - I$

④ Come trovare le soluzioni di $P(D)u = 0$?

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \quad \lambda_j \text{ sono radici distinte, } \sum_{j=1}^r m_j = n = \deg(P)$$

$$\ker P(D) \supseteq \ker (D - \lambda_j)^{m_j} \quad \forall 1 \leq j \leq r$$

$$P(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda)(\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \quad P(D)u = \hat{P}_j(D) \circ (\lambda - \lambda_j)^{m_j} u$$

$$u \in \text{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j} \Rightarrow u \in \text{Ker} P(D)$$

Teorema: $\text{Ker}(P(D)) = \bigoplus_{j=1}^r \text{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j}$

Lemma: $\text{Ker}(D^m) = \{q \in \mathbb{R}[x] : \text{gr}(q) < m\}$

Lemma₁: a) $D - \lambda = E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda} \quad (E_\lambda u)(x) := u(x)e^{\lambda x}$

b) $(D - \lambda)^m = E_\lambda \circ D^m \circ E_{-\lambda} \quad E_\lambda \circ E_{-\lambda} = I$

Dim (a): $E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda} u = u' - \lambda u = (D - \lambda)u$

$$u(x) \xrightarrow{E_{-\lambda}} u(x)e^{-\lambda x} \xrightarrow{D} (u'(x) - \lambda u(x))e^{-\lambda x} \xrightarrow{E_\lambda} u'(x) - \lambda u(x)$$

(b) è ovvio

Lemma₂: $\text{Ker}(D - \lambda)^m = \{u = q(x)e^{\lambda x} \mid q \in \mathbb{R}[x], \text{gr}(p) < m\}$

Dim: $(D - \lambda)^m q(x)e^{\lambda x} = E_\lambda D^m E_{-\lambda}(q(x)e^{\lambda x}) = E_\lambda D^m(q(x)) = 0$

Questo dimostra $\text{Ker}(D - \lambda)^m \supset \{u = q(x)e^{\lambda x} \mid \text{gr}(p) < m\}$.

Vale = per una questione di dimensione

$$\sum_{j=1}^r \text{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j} \subseteq \text{Ker} P(D)$$

Considero l'applicazione:

$$\dim V = m_1 + \dots + m_r = n$$

$$V \cong \text{Ker}(D - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times \text{Ker}(D - \lambda_r)^{m_r} \longrightarrow \text{Ker}(P(D))$$

$$(v_1, \dots, v_r) \longmapsto v_1 + \dots + v_r$$

Per terminare la dimostrazione del teorema basta verificare che

$$v_1 + \dots + v_r = 0 \Rightarrow v_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}.$$

Lemma: Se $\lambda \neq \mu$ allora $D - \mu : \text{Ker}(D - \lambda)^m \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(D - \lambda)^m$ è un iso

Dim: $\mu(x) = q(x)e^{\lambda x}$, $\text{gr}(p) < n$, $(D - \mu)u = E_\mu \circ D \circ E_{-\mu} u$

$$u(x) = q(x)e^{\lambda x} \xrightarrow{E_{-\mu}} q(x)e^{(\lambda - \mu)x} \xrightarrow{D} (q' + (\lambda - \mu)q)e^{(\lambda - \mu)x} \xrightarrow{E_\mu} (q' + (\lambda - \mu)q)e^{\lambda x}$$

$$\text{gr}(q) = \text{gr}(q' + (\lambda - \mu)q) \quad \lambda \neq \mu, \quad q' + (\lambda - \mu)q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

L'applicazione è iniettiva e anche surgettiva (su $\text{Ker}(D - \lambda)^m$)

Dim (Teo): $1 \leq j \leq r$ fissato, $P(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda)(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$

$$v_1 + \dots + v_r = 0 \Rightarrow 0 = \hat{P}_j(D)(v_1 + \dots + v_r) = \hat{P}_j(0)(v_1 + \dots + v_r) = \hat{P}_j(D)v_j$$

$$\hat{P}_j(D) : \text{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j} \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j} \Rightarrow v_j = 0 \text{ vale } \forall j \Rightarrow \text{tesi} \quad \square$$

$$\bullet u'' - 4u = 0 \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$$

$$u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \quad u'' - 4u' + 4u = 0 \quad P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$$\uparrow$$

$$u = (c_0 + c_1 x) e^{2x}$$

• E se ho radici complesse?

Tutto quello che ho detto funziona su $C^\infty(I, \mathbb{C})$.

Seguendo il ragionamento esposto sopra trovo $\text{Ker}(P(D))$ come spazio di $C^\infty(I, \mathbb{C})$; $\text{Ker}(D - \lambda)^m = \{ u = q(x) e^{\lambda x}, q \in \mathbb{C}[x] \text{ gr}(q) < m \}$

06-05-2022

Lezione 62

Prof. Carminati

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\underbrace{u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u}_{P(D)u} = b(x) \leftarrow \begin{array}{l} \text{eq. non omogenea} \\ \uparrow \\ \text{funzione continua} \end{array}$$

$$P \in \mathbb{R}[x], a_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n-1$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad \text{polinomio caratteristico dell'equazione}$$

$$\bullet P(D)u = 0 \quad \text{eq omogenea per } b=0$$

$$\text{Ker}(P(D))$$

$$\textcircled{\mathbb{R}} D: C^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(I, \mathbb{R})$$

$$\textcircled{\mathbb{C}} D: C^\infty(I, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(I, \mathbb{C})$$

$$\textcircled{\mathbb{C}} \text{Ker}((D - \lambda)^m) = \{ u = q(x) e^{\lambda x} \mid q \in \mathbb{C}[x]; \text{gr}(q) < m \}$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \text{ con } \beta \neq 0 \quad e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad \text{Ker}(P(D)) = \oplus \text{Ker}((D - \lambda_i)^{m_i})$$

Come faccio a trovare una base reale nel caso ci siano radici complesse?

$$z = \alpha + i\beta \quad P(z) = 0, \quad z(x) = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \text{ è sol. a val. compl., } z \in \text{Ker}(D - z)$$

$$u = \text{Re}(z) \quad P(D)u = P(D)\text{Re}z = \text{Re}(P(D)z) = 0$$

\uparrow
linearità di $P(D)$ + $P \in \mathbb{R}[x]$

$$u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ è soluzione di } P(D)u = 0$$

$$u \notin \text{Ker}(D - \xi)$$

$$u \in \text{Ker}(D - \xi) \oplus \text{Ker}(D - \bar{\xi})$$

$$[\text{Ker}(D - \xi)^m \oplus \text{Ker}(D - \bar{\xi})^m] \cap C^\infty(I, \mathbb{R}) =$$

$$= \{ u = q_1(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q_2(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x], \quad \text{gr}(q_i) < m \}$$

Es: $u'' + u = 0 \quad P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \xi = \pm i \quad u(x) = a \cos x + b \sin x$

METODO DI SOMIGLIANZA (per EQ. DIFF. A C.C.)

$$P \in \mathbb{R}[x], \quad P(D)u = b \quad (N) \quad \text{con } b \in \text{Ker}(D - \mu)^l$$

$$\left(\begin{array}{l} l := \text{molteplicità di } \mu \\ \uparrow \\ \text{esp} + 1 \end{array} \quad \mu := \text{radice di } e \right)$$

CASO NON RISONANTE

Prop: a) Se $P(\mu) \neq 0$ allora $\exists!$ soluzione di (N) della forma

$$u(x) = q(x) e^{\mu x} \quad \text{con } \text{gr}(q) < l$$

b) Se $P(\mu) = 0$ allora $\exists!$ soluzione di (N) della forma

$$x^m q(x) e^{\mu x} \quad \text{con } \text{gr}(q) < l \quad m = l - 1$$

• $u'' + 9u = x^1 e^{2x}$, $\mu = 2$, $l = 1+1 = 2$ $P(\lambda) = \lambda^2 + 9$ $P(2) = 13 \neq 0$

Cerco una soluzione $u(x) = (a + bx) e^{2x}$

$$u'(x) = e^{2x} (b + 2a + 2bx)$$

$$u''(x) = e^{2x} (2b + 2b + 4a + 4bx)$$

$$u'' + 9u = e^{2x} (4b + 4a + 4bx + 9a + 9bx) \stackrel{?}{=} x e^{2x}$$

$$4a + 4b + 9a = 0 \quad 13b = 1 \quad b = \frac{1}{13} \quad a = -\frac{4}{13^2}$$

Dim: a) Se $\lambda \neq \mu \Rightarrow (D - \lambda): \text{Ker}(D - \mu)^l \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(D - \mu)^l$

Se λ_i è radice di P $(D - \lambda_i)^{m_i}$ è autom. di $\text{Ker}(D - \mu)^l$

$$\Rightarrow P(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_r)^{m_r} \text{ è autom. di } \text{Ker}(D - \mu)^l$$

$$P(D): \text{Ker}(D - \mu)^l \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(D - \mu)^l \text{ è surgettivo}$$

Se $b \in \text{Ker}(D - \lambda)^l \quad \exists! u \in \text{Ker}(D - \lambda)^l : P(D)u = b$

□

(b) $P(\mu) = 0$ cioè $\mu = \lambda_i$ per qualche i

$$P(D) = (D - \mu)^m \hat{P}(D) \quad \hat{P}(\mu) \neq 0 \quad X: u(x) \longrightarrow x u(x)$$

$$P(D): X^m \text{Ker}(D - \mu)^l \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(D - \mu)^l \quad P(D) = \hat{P}(D)(D - \mu)^m$$

$$X^m \text{Ker}(D-\mu)^l \xrightarrow[\sim]{(D-\mu)^m} \text{Ker}(D-\mu)^l \xrightarrow[\sim]{\hat{P}(D)} \text{Ker}(D-\mu)^l$$

e si conclude come nel caso precedente.

Attenzione: Nel caso b sia del tipo $q(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, $q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$

(NR) $u'' + u' + u = \sin x$ $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\sin x = \text{Im}(e^{ix})$ $\mu = i$, $P(i) = i \neq 0$

$$u(x) = a \cos x + b \sin x$$

$$u'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

$$u''(x) = -a \cos x - b \sin x \quad \oplus$$

$$u'' + u' + u = -a \sin x + b \cos x \stackrel{?}{=} \sin x \Rightarrow a = -1, b = 0 \Rightarrow u(x) = -\cos x$$

Metodo alternativo: Considero l'equazione $z'' + z' + z = e^{ix}$ (NC) su $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$z(x) = ce^{ix} \quad \text{con } c \in \mathbb{C}$$

$$z'(x) = ice^{ix}$$

$$z''(x) = -ce^{ix}$$

$$\Rightarrow z'' + z' + z = ice^{ix} \stackrel{?}{=} e^{ix}, \quad z = -ie^{ix} \text{ è soluzione di (NC) } \Rightarrow \text{Im}(-ie^{ix}) \text{ è sol di (NR)}$$

$$-ie^{ix} = (-i \cos x \pm \sin x), \quad \text{Im}(-ie^{ix}) = -\cos x$$

(N) $u'' + 2u' + 5u = e^x \sin 2x \leftarrow \text{Trovare tutte le soluzioni di questa equazione}$
 \uparrow
 $\text{Im} e^{(1+2i)x}$

$$P(D)u = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1-5} = \begin{cases} -1+2i \\ -1-2i \end{cases} e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$\text{Ker } P(D) = \{ e^{-x}(a \cos 2x + b \sin 2x) \} \quad \text{soluzione dell'omogenea}$$

Cerco soluzioni di (N) della forma $u(x) = Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x$

Es: Finire i conti per casa

Es*: Trovare tutte le soluzioni nel caso $b = e^{-x} \sin 2x$, $u'' + 2u' + 5u = e^{-x} \sin 2x$

Es: Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni omogenee: $u''' - 2u'' - 3u' = 0$

• Trovare tutte le soluzioni di $\underline{u''' - 2u'' + u' - 2u = \sin x + x^2 e^x}$
 $\quad \quad \quad P(D)u$

$$P(D)u_1 = \sin x$$

$$P(D)u_2 = x^2 e^x$$

$$P(D)(u_1 + u_2) = \sin x + x^2 e^x$$

METODO DI VARIAZIONI DELLE COSTANTI (per eq. diff. del II ordine)

$$Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u$$

$$Lu = b$$

Suppongo di avere w_1, w_2 soluzioni linearmente indipendenti di $Lw = 0$

Cerco una soluzione $u(x) = c_1(x)w_1(x) + c_2(x)w_2(x)$ dove c_1, c_2

funzioni incognite determinabili con una integrazione

$$u'(x) = c_1'(x)w_1(x) + c_2'(x)w_2(x) + c_1w_1' + c_2w_2'$$

$$u''(x) = c_1'w_1' + c_2'w_2' + c_1w_1'' + c_2w_2''$$

$$Lu = b \Leftrightarrow c_1(\cancel{Lw_1}) + c_2(\cancel{Lw_2}) + c_1'w_1' + c_2'w_2' = b$$

$$\begin{cases} c_1'w_1 + c_2'w_2 = 0 \\ c_1'w_1' + c_2'w_2' = b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Es₁: Verificare che se w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti allora la matrice è sempre invertibile.

Es₂: Verificare che, detto $\Delta(x)$ il determinante della matrice, vale $\Delta' = -a(x)\Delta$

dove $\Delta = w_1w_2' - w_1'w_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w_2' & -w_2 \\ -w_1' & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} c_1' = -\frac{1}{\Delta} w_2 b \\ c_2' = \frac{1}{\Delta} w_1 b \end{cases}$$

\Rightarrow ricavo c_1 e c_2 mediante integrazione, sono definite a meno di costanti

Es/esercizio: (*) $u'' - u = b(x)$ con $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} b(x) = 0$

a) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione (*)

b) Mostrare che $\exists!$ sol. di (*) t.c. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

$$u'' - u = 0 \quad w_1 = e^{-x} \quad w_2 = e^x$$

Cerco una soluzione della forma $u(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^x$

$$\begin{cases} c_1' = -\frac{1}{2}e^x b(x) \\ c_2' = \frac{1}{2}e^{-x} b(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} w_1' = -e^{-x} & w_2' = e^x \\ \Delta = w_1 w_2' - w_1' w_2 = 2 \end{matrix}$$

$$c_1(x) = k_1 - \frac{1}{2} \int_0^x e^t b(t) dt, \quad c_2(x) = k_2 + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} b(t) dt$$

$$u(x) = \underbrace{e^{-x} \left(k_1 - \frac{1}{2} \int_0^x e^t b(t) dt \right)}_{A(x)} + \underbrace{e^x \left(k_2 + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} b(t) dt \right)}_{B(x)}$$

$$\text{Se } k_1 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^t b(t) dt, \quad k_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} b(t) dt$$

Ottengo che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} B(x) = 0$ finire per casa

$$A(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \left(\int_{-\infty}^0 e^t b(t) dt + \int_0^x e^t b(t) dt \right) = -\frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^t b(t) dt$$

Seconda prova in itinere.

Esercizio 1. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione con n zeri distinti.

- (1) Mostrare che f' ha almeno $n - 1$ zeri distinti.
- (2) Mostrare che la funzione $f_c = f' + cf$ ha almeno $n - 1$ zeri distinti, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Discutere la convergenza dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\beta}{(1+t^2)^2} \left[\sin \left(\frac{1}{1+|t|^{4\alpha}} \right) \right]^2 [\cos(e^{-|t|})]^{2\alpha-1} dt,$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcolare l'integrale quando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Esercizio 3. Al variare del parametro $\lambda \in (-1, 1)$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 + \lambda \cos u \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- (1) Dire se il problema ammette un'unica soluzione e se è definita globalmente.
- (2) Mostrare che la soluzione è dispari e tracciarne un grafico qualitativo.
- (3) Calcolare l'espressione analitica di u in un intorno dell'origine.
- (4) Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x}$.