Dipartimento
di Matematica
Università di Pisa

APPUNTI DEL CORSO DI

ANALISI MATEMATICA I

A cura di Chiara Di Sano
c.disano1@studenti.unipi.it

PRIMO SEMESTRE

Rielaborazione delle lezioni dei prof.
M. Novaga
C. Carminati
A.A. 2021-2022

29-09-21 Lezione 1 Prof. Novaga

Concetti chiave

- Insiemi
- funzioni tra insiemi

In questa lezione

- linguaggio: connettivi logici, insiemi e operazioni tra insiemi
- funzioni

Definizione Un insieme è una collezione di elementi su cui è possibile fare delle operazioni $(\cup, \cap, \setminus, \dots)$ ed è possibile dire sempre se $x \in A$.

$\underbrace{x}_{\text{elemento degli insiemi}} \in \underbrace{A}_{\text{insieme}}$

Ci vuole attenzione per evitare paradossi della teoria degli insiemi

ES L'insieme di tutti gli insiemi non è un insieme

Connettivi logici $P(x)$, $P(x, y, \dots)$ sono affermazioni che riguardano gli elementi di un insieme e si chiamano predicati.

ES x è pari, $x \leq y$

Possono essere V o F a seconda dei valori $x, y, z, \dots$

Quando le variabili hanno un valore definito oppure sono quantificate $(\forall, \exists)$ si parla di proposizione.

ES $\underset{V}{2 \text{ è pari}}$, $\underset{F}{2 > 3}$, $\underset{F}{\forall x \in \mathbb{N}\ x \text{ è pari}}$

Quantificatori $\forall$ ≡ per ogni, $\exists$ ≡ esiste, $\exists!$ ≡ esiste ed è unico

I connettivi logici servono a costruire predicati complessi a partire da predicati semplici. Essi sono:

- $\vee$ o $P(x) \vee Q(x)$
- $\wedge$ e $P(x) \wedge Q(x)$

- ¬ non $\neg P(x)$

Osservazione :

- $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
- $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

distributive

- $\neg(\forall x \ P(x)) = \exists x \ \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \ P(x)) = \forall x \ \neg P(x)$

Nelle dimostrazioni per assurdo nego la tesi.

Altri connettivi sono :

- $\Rightarrow$ ≡ implica $\qquad P(x) \Rightarrow Q(x)$
- $\Leftrightarrow$ ≡ se e solo se $\qquad P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

Notazioni: $\emptyset$ ≡ insieme vuoto , $A \subseteq B$: $\{x \in B \mid P(x)\} = A$, $A \supseteq B$

A è contenuto in B = A sottoinsieme di B $\qquad$ A contiene B

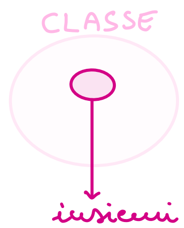
CLASSI E INSIEMI

Paradosso di Russell: $\{A \text{ insieme} \mid A \notin A\} = B$ mi chiedo $B \in B$?

ad es. l'insieme delle tazze da tè

- se $B \in B$ per definizione vale $B \notin B$, per la proprietà che caratterizza B
- allora $B \notin B$, ma allora sempre per definizione $B \in B$

Quindi $B \in B$ è indecidibile $\Rightarrow$ B non è un insieme.



Troviamo una via di uscita mettendo delle condizioni:

ES L'insieme di tutti gli insiemi è una classe

Nota Gli elementi di un insiemi si esprimono attraverso una definizione assiomatica dei predicati.

Operazioni le operazioni servono per passare da insiemi ad altri insiemi

- $\cap$ ≡ intersezione $\quad A \cap B = \{x \text{ tc } x \in A \wedge x \in B\}$ $\qquad$ (ricorda $\wedge$)
- $\cup$ ≡ unione $\quad A \cup B = \{x \text{ tc } x \in A \vee x \in B\}$ $\qquad$ (ricorda $\vee$)
- $\setminus$ ≡ differenza $\quad A \setminus B = \{x \text{ tc } x \in A \wedge x \notin B\}$

- $\Delta \equiv$ differenza simmetrica $\quad A \Delta B = \{ x \text{ tc } x \in A \ \mathring{\cup} \ x \in B \}$

$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- $A \times B \equiv$ prodotto cartesiano $\quad A \times B = \{ (x,y) \text{ tc } x \in A, y \in B \}$

Proprietà

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \qquad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$
- $A \times B \times C = \{ (x,y,z) \text{ tc } x \in A, y \in B, z \in C \}$
- Se si considerano solo sottoinsiemi di U si indica con

  $A^c = U \setminus A = \{ x \mid x \notin A \} = \{ x \mid \neg (x \in A) \}$ (ricorda $\neg$)
  ↳ complementare di A

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $\}$ distributive

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

INSIEMI NUMERICI

- numeri naturali
  $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ definisco $\mathbb{N}$ assiomaticamente tramite Peano

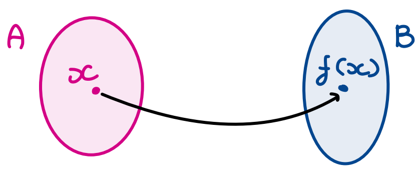
  $\subseteq$
- $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ numeri interi

  $\subseteq$
- $\mathbb{Q} = \{ p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$ numeri razionali

  $\subseteq$ ⤳ salto logico, ci sono dei buchi
- $\mathbb{R}$ = numeri reali

  $\subseteq$
- unità immaginaria
  $\mathbb{C} = \{ x + iy : x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1 \}$ numeri complessi

FUNZIONI TRA INSIEMI



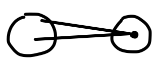
$f : A \longrightarrow B$
dominio ↳ codominio

f è una mappa che associa ad ogni $x \in A$ un unico $f(x) \in B$

- $f(A) = \{ f(x) \in B : x \in A \} \subseteq B \equiv \mathrm{Im}(f)$
- $\Gamma f = \{ (x, f(x)) : x \in A \} \subseteq A \times B \equiv$ grafico di f

  $\Gamma \subseteq A \times B \text{ tc } \forall x \in A \ \exists! \ y \in B \text{ tc } (x,y) \in \Gamma \Rightarrow \exists f \text{ tc } \Gamma = \Gamma f$

- f è iniettiva $\quad f : A \longrightarrow B$ se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$


NO!

- f è surgettiva se $f(A) = B$
- f è bigettiva se è iniettiva e suriettiva
- $C \subseteq A$ $\quad f: A \to B$ $\quad f|_C : C \to B$
  ↳ restrizione di f a C
  $x \longrightarrow f(x)$

Osservazione

- $f: A \to f(A) \subseteq B$ $\quad f$ è sempre surgettiva
- f bigettiva $f: A \to B$ è invertibile cioè $\forall y \in B \ \exists! \ x \in A$ tc $f(x) = y$
  $x = f^{-1}(y)$
  $f^{-1}: B \to A$ $\quad f^{-1}$ è l'inversa di f

FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to B \quad g: B \to C \quad g \circ f : A \longrightarrow C \quad g \circ f(x) = g(f(x))$

se f è invertibile $f^{-1} \circ f = id_A \quad f \circ f^{-1} = id_A$

ASSIOMA DELLA SCELTA

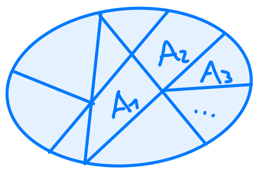
A insieme $\quad I \equiv$ insieme di indici $\quad A_i \subseteq A \quad \forall i \in I$

famiglia di sottoinsiemi indicizzati di A

$\{A_i\}_{i \in I}$ si dice partizione di A se:

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$\bigcup_i A_i = A$



$\Rightarrow \exists B \subseteq A$ tc (A.C.) $\quad B \cap A_i = x_i \quad \forall i$

Oss: $f: A \to I$ è surgettiva definisce la partizione di A.

$P = \{ \{ f^{-1}(i) \} \}_{i \in I}$ dove $f^{-1}(i) = \{ x \in A : f(x) = i \}$. Viceversa, data una partizione c'è sempre una funzione $f(X) = i$ $\quad P \overset{\text{biun.}}{\longleftrightarrow} \{ f \text{ surg} \}$
↳ $P = \{A_i\}_i$

Riformulazione $\forall f: A \to B$ surgett. $\exists g: B \to A$ iniett. tc $f \circ g = id_B$.

Vale anche il viceversa: se $f: A \to B$ è iniett. $\Rightarrow \exists g: B \to A$ surg. tc $g \circ f = id_A$

Esercizio 1:

$\exists f: A \to B$ iniett. $\wedge \ \exists g: B \to A$ iniett.

equiv.

$\exists g: B \to A$ suriett. $\wedge \ \exists f: A \to B$ suriett.

equiv.

$\exists f: A \to B$ iniett. $\exists h: A \to B$ suriett.

Es 2: Teorema di Bernstein

$\exists f: A \to B$ iniet. $\wedge \ \exists g: B \to A$ iniet.

$\Leftrightarrow \exists h: A \to B$ big. (Dimostrarlo)

30-09-21 Lezione 2 Prof. Novaga

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

INSIEMI DELLE PARTI DI A $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

È NATURALMENTE DEFINITA $f : A \to \mathcal{P}(A)$ INIETTIVA

$f(x) = \{x\} \quad \forall x \in A$

Viceversa usando $\underset{\text{Axiom of choice}}{AC}$, esiste una funzione di scelta

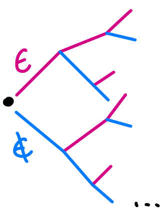
$f : \mathcal{P}(A) \to A$ surgettiva tc $f(B) \in B \quad \forall B \subseteq A$

OSS In generale $\mathcal{P}(A)$ è più grande di A.

Se A ha n elementi. Qual'è $|\mathcal{P}(A)|$?

$|\mathcal{P}(A)| = 2^n > n$

Spiegazione 1:
↓
Ne esistono altre



∀ elemento scelgo se ∈ o ∉

Relazioni su un insieme A

$R(x,y)$ PREDICATO $x, y \in A$

① Relazioni di equivalenza:

- $R(x,x) \quad \forall x$ Riflessiva
- $R(x,y) \Rightarrow R(y,x) \quad \forall x,y$ Simmetrica
- $R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z) \quad \forall x,y,z$ Transitiva

R rel. d'equiv. si scrive $x \sim y \Leftrightarrow R(x,y) \Leftrightarrow R(y,x)$
$y \sim x$

$\forall x$ è def $\underset{\text{CLASSE DI EQUIVALENZA}}{[x]} = \{y : x \sim y\} \subseteq A$

$\{[x]\}_{x \in A}$ è una PARTIZIONE di A

$\shortparallel$ $A/\sim$ INSIEME QUOZIENTE di A

② Relazioni d'ordine

- $R(x,x) \quad \forall x$ Riflessiva

- $R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y$ Antisimetrica
- $R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow R(x,x)$ Transitiva

Es. $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

$\mathcal{R}(B, C) = B \subseteq C \quad B, C \in \mathcal{P}(A)$

La relazione d'ordine è TOTALE se $\forall x, y \; R(x,y)$ o $R(y,x)$.

Altrimenti è PARZIALE.

Si indica $x \leq y$ la relazione $R(x,y)$.

$B \subseteq A$ si dice una CATENA se $\mathcal{R}|_B$ è totale, cioè se $\forall x, y \in B \; x \leq y$ o $y \leq x$.

Lemma di Zorn (Equivalente di AC)

Def $x \in (A, \leq)$ è MASSIMALE se $x \leq y \Rightarrow x = y$

Def x è un MAGGIORANTE per $B \subseteq A$ se $y \leq x \;\; \forall y \in B$

Se $A \neq \emptyset$ e $\forall B \subseteq A$ catena $\exists x_B$ maggiorante per $B \Rightarrow \exists \bar{x}$ massimale in A.

Def $(A, \leq)$ Tot. ord. è BEN ORDINATO se $\forall B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$

$\exists$ un minimo, cioè $\exists x \in B$ tc $x \leq y \;\; \forall y \in B$

Es $\mathbb{N}$ è ben ord, ma $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ no.

Principio di induzione su $\mathbb{N}$

Dato $P(x)$ predicato, $P(n) \; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow P(0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

UTILITÀ: È spesso più facile dimostrare $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Oss $P(n) \; \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow P(n_0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1) \;\; \forall n \geq n_0)$

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\underbrace{(1+x)^n \geq 1 + nx}_{P(n)} \quad \forall n \quad x > 1$$

- $P(0)$: $(1+x)^n = 1 \geq 1$
- Suppongo che valga $(1+x)^n \geq 1 + nx$ e guardo $(1+x)^{n+1} = (1+x)\underbrace{(1+x)^n}_{\text{hp ind.}} \geq$

$\geq (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ è $P(n+1)$.

Cardinalità ($|A|$, $\#A$, $c(A)$)

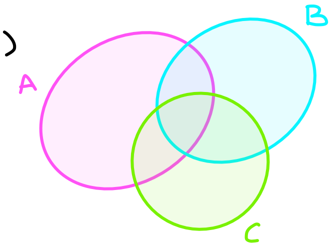
A finito, $|A|$ = numero di elementi

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ più complicato (FORMULA DI INCLUSIONE - ESCLUSIONE)

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



In generale dati A, B

$|A| = |B|$ se $\exists f : A \to B$ bigettiva

$|A| \leq |B|$ se $\exists f : A \to B$ iniettiva o equival. se $\exists f : B \to A$ surgettiva

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$ (Teor. di Berstein)

$\mathcal{R}(A,B) : |A| \leq |B|$ è una relazione d'ordine .

$\tilde{\mathcal{R}}(A,B) : |A| = |B|$ è una relazione d'equivalenza .

$|A|$ è identif. con la classe di eq. di A per $\tilde{\mathcal{R}}$.

Prop $\mathcal{R}$ è un buon ordinamento

Def A infito è numerabile se $|A| = |\mathbb{N}|$, cioè possiamo scrivere $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

OSS $|\mathbb{N}|$ è la cardinalità infinita più piccola

Teo A infinito $\Rightarrow \exists B \subseteq A$ numerabile

Dim $f : \mathcal{P}(A) \to A$ funzione di scelta $f(B) \in B$; $\forall B \subseteq A$

Scelgo $a_0 \in A$ e dati $\{a_0, \dots, a_n\}$ pongo $a_{n+1} = f(A \setminus \{a_0 \dots a_n\}) \in A \Rightarrow \underbrace{B = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{NUMERABILE}}$

OSS $\forall A \quad |A| \leq \mathcal{P}(A)$

Teo (Cantor) $|A| < \mathcal{P}(A)$ cioè $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

Cor $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è infinito NON numerabile

Dim. Per assurdo $\exists f : A \to \mathcal{P}(A)$ bigettiva .

$B = \{x : x \notin f(x)\} \subseteq A$ se c'è la big. è un stinsieme che ha senso

$\bar{x} : f^{-1}(B)$ $\boxed{\text{DOMANDA: } \bar{x} \in B \ ?}$ $\to$ NON SI PUÒ DIRE $\to \nexists f^{-1} \to$ ASSURDO

$f(\bar{x}) \in B$

$\square$

01-10-21 Lezione 3 Prof. Carminati

PROBLEMI DI CONTEGGIO (CALCOLO COMBINATORIO)

$I_n = \{ K \in \mathbb{N} , 0 < K \leq n \} = \{1, \_, n\}$

"Strutture" su insiemi finiti :
- operazioni booleane $\cap$ $\cup$ complementare ecc
- Soluz. di problemi con una proprietà particolare
- prodotti cartesiani
- funzioni
- $\mathcal{P}(X)$

PROBLEMI CLASSICI

- $|\mathcal{P}(\{a,b,c\})| = 8$
- Problema dei compleanni

  "Qual'è la probabilità che tra 100 persone ne esistano almeno due che compiono gli anni lo stesso giorno?" $\sim 1 - \frac{1}{3 \text{ mil}}$ (MOLTO ALTA)
- Quanti sono gli anagrammi della parola "CIAO" 24
- " " " " " " "BABBO" 20
- Quante sono le stringhe di 10 caratteri su un $\underbrace{\text{alfabeto binario}}_{\{A,B\}}$? 2^{10}
- Quante sono le stringhe ... tali che il blocco AA non compare mai?
- Quante sono le funzioni tra $I_n \to I_n$:
  - quante iniettive?
  - quante surgettive? (FACILE) ↓
  - str. crescenti? (PIÙ COMPLICATO)
  - deb. crescenti?

- $|\mathcal{P}(\{a,b,c\})| = 8$

$\#0: \emptyset$, $\#1: \{a\}, \{b\}, \{c\}$, $\#2: \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}$, $\#3: \{a,b,c\}$

Notazione: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{j=1}^{n} a_i$

Es $\prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ NB $0! = 1$

Esercizio $\sum_{j=1}^{n} j = ?$

$$X = \bigsqcup_{j=1}^{f} A_f \Rightarrow |X| = \sum_{j=1}^{f} |A_j|$$

$X = \cup A_j$

$A_i \cap A_j = \emptyset$

X è unione disgiunta degli A_j

A_j è una PARTIZIONE di X

OSS: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = ?$

Se $\psi : X \to Y$ bigettiva allora $|X| = |Y|$

$|X| = n$ $\quad \mathcal{J} = \{(A, B) : A \subseteq B \subseteq X\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$

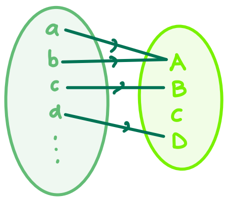
$\qquad\qquad \mathcal{P}(X)$

$|\mathcal{J}| = ?$ soluz: 3^n

dimostrare per induzione

creare una bigezione tra insiemi di stessa #

$\psi : X \to Y$



ψ manda una partizione su X

$X = \bigsqcup_{y \in Y} \psi^{-1}(\{y\}) \qquad |X| = \sum_{y \in Y} |\psi^{-1}(\{y\})|$

$|X| = 1 + 3 + 1 + 0$

$\underbrace{\psi^{-1}}_{\text{controimmagine di } B}(B) = \{x \in X : \psi(x) \in B\}$

- $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{N}$

  $A \longmapsto |A|$

  induce una partizione su $\mathcal{P}(X)$

$\boxed{\text{EQUIPOTENZA}}$ $\quad |X| = |Y|$

$\boxed{\text{FIBRA COSTANTE}}$ $\quad$ Se $\psi : X \to Y$ e $\exists m \in \mathbb{N} : |\psi^{-1}(\{y\})| = m \Rightarrow |X| = m|Y|$

Strutture su insiemi finiti:

$Y = Y_1 \times \dots \times Y_n = \{(y_1, \dots, y_n) : y_i \in Y_i\} \qquad |Y| = |Y_1| \cdot \dots \cdot |Y_n|$

Induzione $\quad P(1)$ è vera $\qquad \pi : Y_1 \times \dots \times Y_n \longrightarrow Y_n$

$\qquad P(n) \Rightarrow P(n+1) \qquad (y_1, \dots, y_n) \longmapsto y_n$

fibra $\quad \in Y_n$

$|\pi^{-1}(y)| = |Y_1 \times \dots \times Y_{n-1}| = |Y_1| \cdots |Y_n| = m \qquad |Y| = m \qquad |Y_m| = |Y_1| \dots |Y_n|$

X, Y insiemi finiti $\{ f : I_m \to Y \} \overset{big}{\sim} \underbrace{Y \times \ldots \times Y}_{|X| = m}$

× esercizio: mostrare che è una bigezione

$$f \longmapsto (f(1), \ldots, f(n))$$

$|\{ f : I_m \to Y \}| = |Y|^m$ (in generale: $|\{ f : X \to Y \}| = |Y|^{|X|}$

Es: $\mathcal{P}(X) \longleftrightarrow \{ f : X \longrightarrow \{0,1\} \}$ mostrare che è una bigezione

$$A \longmapsto \chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$\mathcal{P}(A) = \{ A \subseteq X : |A| = k \}$

05 - 10 - 2021 Sezione 4 Prof. Novaga

INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  $+$: addizione
  $\cdot$: moltiplicazione

- ELEMENTO NEUTRO ($a + 0 = a$, $a \cdot 1 = 1$)

- COMMUTATIVE ($a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$)

- ASSOCIATIVE ($(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$)

- DISTRIBUTIVE ($a \cdot (b+c) = ab + ac$)

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$

- GRUPPO (COMMUTATIVO) CON IL $+$

  $\forall x \ \exists (-x)$ tc $x + (-x) = 0$

- $\mathbb{Q} = \{ p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ GRUPPO PER $\cdot$

  $\mathbb{Q}$ si dice CAMPO (o corpo commutativo)

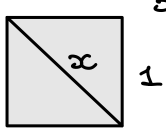
Oss in $\mathbb{Q}$ possiamo risolvere $ax + b = 0$ $a, b \in \mathbb{Q}$ ma in generale non le equazioni di II grado.

Es

$x^2 = 2$

NON HANNO SOL IN $\mathbb{Q}$

$x^2 = -1$



$x^2 = 2$ $x = ?$

Se per assurdo $x = p/q$ $p/q \in \mathbb{N}$ posso supporre che p e q non abbiano

fattori comuni := $(p,q)=1$. Sia $\frac{p^2}{q^2}=2 \longrightarrow p^2 = \underbrace{2q^2}_{\text{pari}} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \text{ è pari} \\ q \text{ è dispari} \end{cases}$

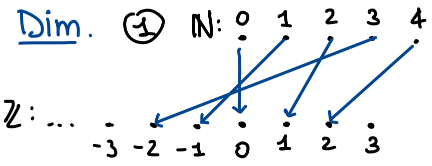
Ottengo $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q$ è PARI, assurdo ↯

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \rightsquigarrow \text{numerabile} \\ \mathbb{Q} = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightsquigarrow \text{numerabile} \end{array}\right\}$ l'unione e il prodotto cartesiano sono degli invarianti

Prop. ① $\mathbb{Z}$ è NUMERABILE

② $\mathbb{Q}$ è NUMERABILE

Dim. ①



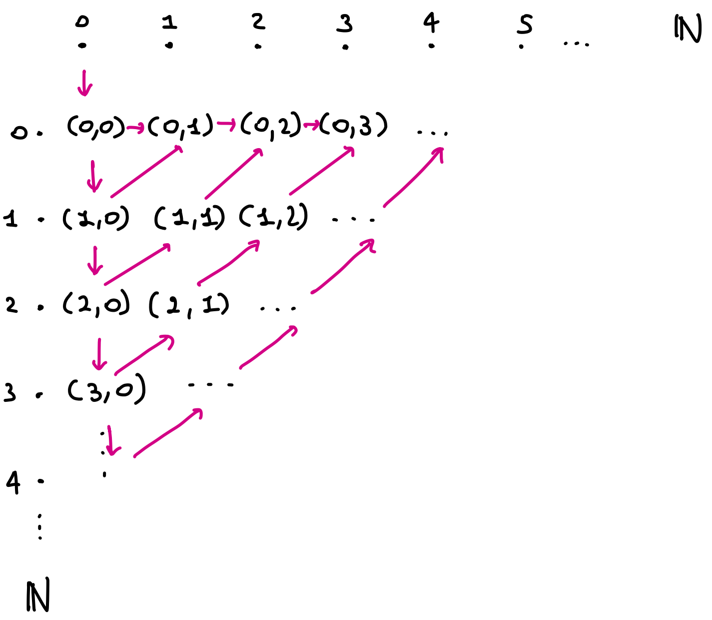
$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bigettiva

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ pari} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

② Basta vedere che $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è numerabile, infatti $\exists f(p,q) = p/q$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surgettiva, ma $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è come $\boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

PROCEDIMENTO DIAGONALE



□

Oss $\mathbb{Q}$ è un CAMPO ORDINATO

$<$ è un ORDINE TOTALE

$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a+c < b+c & \forall c \\ ac \leq bc & \forall c \geq 0 \end{cases}$$

NUMERI REALI

I numeri reali sono un campo ordinato con una proprietà in più:

la **COMPLETEZZA** $\exists$ elemento separatore, $\exists$ estremo superiore

Oss Questa non è la completezza degli spazi metrici

$\exists$ ELEMENTO SEPARATORE:

$\forall$ A, B sottoinsiemi del campo $\mathbb{R}$,

- $x \leq y \quad \forall x \in A$ e $\forall y \in B$
- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}$ tc $x \leq z \leq y \quad \forall x \in A$ e $\forall x \in B$

Conseguenza:

Def. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, x è un **MAGGIORANTE** per A se $x \geq y \quad \forall y \in A$

Def. Il più piccolo dei maggioranti (se c'è) si chiama **ESTREMO SUPERIORE** di A [$\sup A \in \mathbb{R}$]

Formulazione equivalente:

$A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato (cioè $\exists$ maggiorante)

$\Rightarrow \exists \sup A \in \mathbb{R}$

Teorema: I reali esistono e sono unici a meno di isomorfismo

Dim (Traccia):

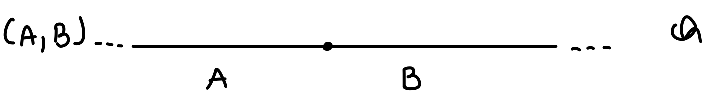
buco di $\mathbb{Q}$: due insiemi, uno più piccoli dell'altro, due semirette che partizionano $\mathbb{Q}$

Esistenza:

Def: Una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}$ è una partizione di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} = A \cup B$ tc

$A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ e $x < y \quad \forall x \in A$ e $y \in B$

sono semirette "disgiunte"



Prendo le sezioni per cui non c'è il max in A, cioè $\nexists x \in A$ tc $x \geq y \quad \forall y \in A$. Voglio dare una struttura di campo ordinato su $\underbrace{A \text{ e } B}_{\text{sezioni}}$

Dato $q \in \mathbb{Q}$

la sezione $A_1 = \} x \in \mathbb{Q} \; , x < q \{$

$B_1 = \} x \in \mathbb{Q} \; , x > q \{$ corrisponde al numero razionale q

$\mathbb{Q} \xleftrightarrow{\text{big}}$ sezioni

C'è una struttura di ordine

$(A, B) \leqslant (A', B') \Leftrightarrow A \subset A'$ ORDINE TOTALE

Usando l'inclusione si estendono le operazioni a tutte le sezioni

Il campo risultante è unione crescente di sezioni che è comunque una sezione

Unicità

Dim (Traccia): campo $\mathbb{K}$

si identifica con le sue sezioni

- 1 è l'elemento neutro di $\cdot$ $\rightarrow \exists \, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \exists \, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \Rightarrow \boxed{\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}}$

  $x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ $\quad x = \underbrace{S}_{\text{sezione}} = (A,B) \in \mathbb{R}$ $\quad A = \} y \in \mathbb{Q} : y < x \{$

Questione di cardinalità

le semirette di $\mathbb{Q}$ infinite non lineari a sinistra

Oss: $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = [0,1]^{|\mathbb{N}|} \xleftrightarrow{\text{big.}} \} f : \mathbb{N} \rightarrow \} 0,1 \{ \{ \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

↳ # del continuo

Dim. $\mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{big}} \} (A,B)$ sez. di DedeKind senza max. di $A \{$

$\downarrow$ si immergono iniettivamente

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

$\updownarrow$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\Rightarrow |\mathbb{R}| \leqslant |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Viceversa, cerco $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ iniettiva

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \} f : \mathbb{N} \rightarrow \} 0,2 \{ \{$ $\rightarrow A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f(n) = 2$ se $n \in A$, $f(n) = 0$ se $n \notin A$

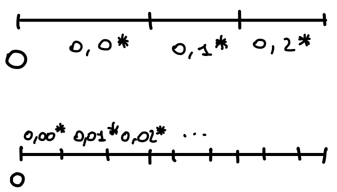
↳ poiché sono in base 3, non metto 1 per avere l'iniettività

E data f definisco $g(f) = 0, f(1) f(2) f(3) \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$$\overbrace{0{,}f(1)f(2)f(3)\dots}^{0{,}2002202\dots} \in \mathbb{R}$$

lo leggo / definisco in base 3 cioè divido l'intervallo $(0,1)$ in 3 parti

$0 \le g(f) \le 1$



divido di nuovo in 3

in questo modo codifico e decodifico in base 3 → ogni num. ottenuto con g lo "traduco" in $\mathbb{R}$

Si verifica che g è iniettiva $g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ perché non c'è ambiguità

$$|\mathbb{R}| \ge |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

Tutti i numeri tra 0 e 3 in cui non compare mai 1

$\boxed{\text{Insieme di Cantor}} \equiv \mathrm{Im}(g)$ e $|\text{Ins. di Cantor}| = |\mathrm{Im}\, g|$

07-10-21 Lezione 5 Prof. Carminati

- $\mathcal{P}(X) = \{A \text{ tc } A \subseteq X\}$ se $|X| = n$
- $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$
- Calcolare $\mathcal{P}_k(X) \equiv$ sottoinsiemi di X di $\#k = \{A \subseteq X \ |A| = k\}$

$$P(a,b,c) = \{\underset{\mathcal{P}_0(X)}{\emptyset}, \underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{\mathcal{P}_1(X)}, \underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{\mathcal{P}_2(X)}, \underbrace{\{a,b,c\}}_{\mathcal{P}_3(X)}\}$$

$C_{n,k} \equiv |\mathcal{P}_k(I_n)| \equiv$ comb. semplici di ordine k su un insieme di n elementi

Proprietà:

1) $C_{n,0} = C_{0,n} = 1$ riflessiva

2) $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ simmetrica $\rightsquigarrow \mathcal{P}_k(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{n-k}(X)$
$A \longrightarrow A^c = (X \setminus A^c)$ complementare

3) $\sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = 2^n$ perché $\rightsquigarrow \mathcal{P}(X) = \bigsqcup_{0 \le k \le n} \mathcal{P}_k(X)$

4) Prop. di ricorrenza $C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}$

$$\mathcal{P}_k(I_n) = \{A \in \mathcal{P}_k(I_n),\ n \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{P}_k(I_n),\ n \in A\}$$

$$|\mathcal{P}_k(I_n)| = |\mathcal{P}_k(I_{n-1})| + |\mathcal{P}_{k-1}(I_{n-1})|$$

Proposizione $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$

Dim. La formula è vera per $k=0$ e per $k=n$ (i casi estremi).

Procedo per induzione su K per $0<K<n$.

$P(1)$ è vera (x esercizio)

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$: $\mathbb{P}(n) = C_{n,K} = \dfrac{n!}{K!\,(n-K)!}$ $\forall K$ tc $0<K<n$ tesi

Uso 4

$$C_{n,K} = C_{n-1,K} + C_{n-1,K-1} \overset{\text{hp. ind.}}{=} \frac{(n-1)!}{K!\,(n-1-K)!} + \frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-\cancel{1}-K+\cancel{1})!}$$

$$C_{n,K} = \frac{(n-K)(n-1)!}{\underbrace{(n-K)\,K!\,(n-1-K)!}_{(n-K)!\,K!}} + \frac{K\,(n-1)!}{\underbrace{K(K-1)!}_{K!}\,(n-K)!} = \frac{(n-K)(n-1)!}{K!\,(n-K)!} + \frac{K(n-1)!}{K!\,(n-K)!} =$$

$$= \frac{n\,(n-1)!}{K!\,(n-K)!} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

$\square$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{K} = \begin{cases} \dfrac{n!}{K!\,(n-K)!} & \text{se } 0 \leq K \leq n \\ 0 & \text{se } K<0 \vee K>n \end{cases} \qquad n, K \in \mathbb{N}$$

Esercizio

$\binom{n}{K}$ rispetta le proprietà 1, 2, 3, 4

1) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

2) $\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$ $\quad \forall n, \forall K \in \mathbb{Z}$

3) $\sum \binom{n}{K} = 2^n$

4) $\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K} + \binom{n-1}{K-1}$

Formula del binomio di Newton

Come si esprime la n-esima potenza del coefficiente binomiale?

$$(A+B)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} A^K B^{n-K}$$

Dim. Per induzione su n

$P(1)$ è vera.

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$(A+B)^n = (A+B)(A+B)^{n-1} \overset{\text{hp ind.}}{=} (A+B)\left(\sum_{K=0}^{n-1} \binom{n-1}{K} A^K B^{n-K}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^{k+1} B^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k B^{n-k} =$$

faccio un cambio d'indice : $h = k+1$ e $h = k$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{h-1} A^h B^{n-h} + \sum_{h\in\mathbb{Z}}^{n-1} \binom{n-1}{h} A^h B^{n-h} = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \left[\binom{n-1}{h-1}+\binom{n-1}{h}\right] A^n B^{n-h} = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \left[\underbrace{\binom{n-1}{h-1}+\binom{n-1}{h}}_{\text{prop. 4}}\right] A^h B^{n-h} =$$

$$= \sum_{h\in\mathbb{Z}} \binom{n}{h} A^h B^{n-h}$$

Nota: • A, B devono stare in un anello commutativo. Se così non fosse avrei:

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB$

$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = AAA + AAB + ABA + ABB + BAA + BAB + BBA + BBB$

• Se l'anello non è commutativo $(A+B)^n$ ha 2^n elementi:

$(A+B)^n = \sum_{\varepsilon\in\Pi} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ dove $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ $\quad \Pi = \{A, B\}^n$

• $\binom{n}{k}$ è il numero di addendi di (x) che contribuiscono ad $A^k B^{n-k}$

Es $(A+B+C)^5 =$ somma su 3 addendi, se contiamo quale è il coeff. di $A^2 B^2$ coincide con gli anagrammi di BACCA.

Esercizio: $C_0 : \{(A,B) \quad A \subseteq B \subseteq X\} \quad |Y| = n$

$C_0 \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$

$C_0 = \bigsqcup_{B\in\mathcal{P}(X)} \{(A,B) : A \in B\}$

$$|C| = \sum_{B\in X} |(A,B) \text{ tc } A \subseteq B| = \sum_{B\subset X} 2^{|B|} \overset{k=|B|}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \underset{\text{Binomio di Newton}}{=} (1+2)^n$$

Domande (es 1):

Quante sono $\{f : I_n \to I_m \text{ tc } f \text{ è strettamente crescente}\}$? ⤳ Sono in bigezione con $\mathcal{P}_n(I_m)$

f è strettamente crescente $\overset{def}{\iff} k_1 < k_2 \to f(k_1) < f(k_2) \quad \forall k_1, k_2$

$f \qquad \{f : I_n \to I_m \text{ tc } f \text{ è strettamente crescente}\} = SC \qquad |SC| = \binom{m}{n}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$f(I_n) \qquad \mathcal{P}_n(I_m)$

Es 2 $\quad \mathrm{Inj}_{m\geq n}(I_n, I_m) = \{f : I_n \to I_m \text{ tc } f \text{ è iniettiva}\}$ per il 1° ho m possibilità

per il 2° ho m−1 "

...

$|\mathrm{Inj}(I_n, I_m)| = m(m-1) \quad (m-n-1) = \binom{m}{n} n!$

Per ind su n: $n = 1 \to |\mathrm{Inj}| = m$

$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \mathrm{Inj}_k = \{f \in \mathrm{Inj}(I_k, I_n), \ f(n) = k\} \overset{big}{\sim} \mathrm{Inj}(I_{n-1}, I_{n-1})$

$I_{nj}(I_K, I_n) = \bigsqcup_{1 \le k < n} J_K \qquad |f_K| = \binom{m-1}{n-1}(n-1)! \quad$ hp ind.

$|I_{nj}| = m\binom{m-1}{n-1}(n-1)! = \dfrac{m!}{n(n-1)!(m-n)!} n(n-1)! = \binom{m}{n} n!$

Nota: $|I_{nj}(I_n, I_n)| = n!$ permutazioni

08-10-2021 Lezione 6 Prof. Carmicuati

PROBLEMI DI COLLOCAZIONE:

Come mettere n oggetti in n celle

OGGETTI: DISTINGUIBILI / INDISTINGUIBILI

RIPETIZIONI: AMMESSE / NON AMMESSE

	AMM	NON AMM.	
DIST	n^K	$\binom{n}{K}K!$	DISPOSIZIONI
INDIST	$\binom{n+K-1}{K}$	$\binom{n}{K}$	COMBINAZIONI
	CON RIPETIZIONI	SEMPLICI	

$C^*_{(n,K)}$ = COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI

$$\binom{n}{K} = |\{f: I_K \to I_n \text{ strett. crescenti}\}|$$

$$C^*_{(n,K)} = |\{f: I_K \to I_n \text{ debolmente crescenti}\}|$$

$j_1 < j_2 \Rightarrow f(j_1) \le f(j_2)$

f è debolmente crescente $\rightsquigarrow g(j) = f(j) + j - 1$

$g: I_K \to I_{n+K-1}$

g strett crescente (somma di una funz. str. crescente e una deb. crescente)

$C^*_{(n,K)} = |\{g: I_K \to I_{n+K-1} \text{ strett. crescenti}\}|$ $\exists$ una bigezione

IL PROBLEMA DEI COMPLEANNI

$\phi: I_K \longrightarrow I_{365}$

Quante sono le f. iniettive su tutte le possibili funzioni?

Prob. che non ci siano compleanni coincidenti $\dfrac{\binom{365}{K}K!}{365^K}$ $\binom{365}{K}K! \to$ f. iniettive, $365^K \to$ tutte le funz.

ANAGRAMMI

NAVE $4!$ anagrammi

$B_1 A B_2 B_3 O \quad \dfrac{5!}{3!}$ "

$\{A, B, O\}$

$m_A = 1 \quad m_B = 3 \quad m_O = 1$

Parola di lunghezza n su $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ di compare con molt. m_i $1 \le i \le k$

$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ $\quad$ |anagrammi| $= \dfrac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!}$ $\quad A^2B^3C^5 \quad (A+B+C)^{10}$

Esercizio: mostrare che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(suggerimento: cercare interpretazione combinatoria)

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \binom{n}{k} \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

$\sum k(k-1)\binom{n}{k} \qquad k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

$a_j \quad 1 \le j \le n \quad \prod_{j=1}^{n}(1+a_j) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{P}_k(I_n)}}_{\binom{n}{k} \text{ addendi}} \prod_{j \in J} a_j \Big\}$ se $a_j = a \; \forall j$ $= a^k$

dim per ind (esercizio)

$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n} a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_k}$

FORMULA DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

$n=3 \quad |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$ funzione caratteristica dell'insieme A

$X \div \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

$\varphi : X \to \mathbb{R}$

Nota: $\prod \varnothing = 1$

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n}(1 - \chi_{A_j}(x)) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \underbrace{\prod_{j \in J} \chi_{A_j}}_{} (x)$$

funzione caratteristica dell'interseszione

cioè $x \notin A_j$

$$0 = \sum_{x \in X} \varphi(x) = \sum_{x \in X} 1 + \sum_{x \in X} \sum_{k=1} (-1)^k \sum_{J \in \mathcal{P}_k} \chi_{\bigcap_{j \in J} A_j}(x)$$

$$0 = |X| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{J \in \mathcal{P}_k(I_n)} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

Calcolo delle $|$funzioni surgettive$|$

$|X| = k \qquad |Y| = n$

$\mathcal{F}(X,Y) = \{ f : X \to Y \} \qquad |\mathcal{F}(X,Y)| = n^k$

$S(X,Y) = \{ f : X \to Y$ tc f surg

$N = \mathcal{F} \setminus S \qquad |S| = |\mathcal{F}| - |N|$

$f \in N \Leftrightarrow \exists y \in Y : y \notin f(X)$

$N = \bigcup_{y \in Y} a_y \qquad a_y = \{ f : X \to Y$ tc $y \notin f(X) \}$

$a_{y_1} \cap a_{y_2} = \{ f : X \to Y$ tc $\{y_1, y_2\} \cap f(X) = \emptyset \}$

$\bigcap_{y \in H} a_y = \{ f : X \to Y$ tc $H \cap f(X) = \emptyset \} = \{ f : X \to Y \setminus H \} \qquad H \subset Y$

$\left| \bigcap_{y \in H} a_y \right| = (n - |H|)^k$

$$\left| \bigcup a_j \right| = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} \sum_{N \subset \mathcal{P}_h(Y)} (n-h)^k = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{n+1} \binom{n}{h} (n-h)^k$$

$$S(X,Y) = n^k + \sum_{h=1}^{n} (-1)^h \binom{n}{h} (n-h)^k$$

$k \geq n$

$$= \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \binom{n}{h} (n-h)^k$$

12-10-2021 Lezione 7 Prof. Novaga

A, B insiemi infiniti

$|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$ (lemma di Zorn)

ES $\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$ $\forall n$

Ipotesi del continuo (Cantor):
↳ (è indipendente dagli assiomi)

$E \subset \mathbb{R}$ infinito

$\Rightarrow \underbrace{|E| = |\mathbb{N}|}_{\text{numerabile}}$ o $\underbrace{|E| = |\mathbb{R}|}_{\text{più che numerabile}}$

Proprietà archimedea di $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ tc $0 < x < y$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tc $nx > y$

Dim. Se fosse falso $\Rightarrow n \leq \frac{y}{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ cioè $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ avrebbero un maggiorante in $\mathbb{R}$ ↯

Oss. $\exists$ campi ordinati non archimedei (non completi)

- Reali non standard
- $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)}, P, Q \text{ polinomi} \right\}$ CAMPI DI FRAZIONI
- Esiste un campo ordinato "universale" NUMERI SURREALI

Prop. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ cioè $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ $\exists z \in \mathbb{Q}$ tc $x < z < y$

Dim. $y - x > 0$

$n \in \mathbb{N}$ tc $n(y-x) > 1$ cioè $\frac{1}{n} < y - x$. Supponiamo $x > 0$. Se fosse $x = 0$ $\frac{1}{n}$ va bene.

Prendo $K = \max\left\{ j \in \mathbb{N} \text{ tc } \frac{j}{n} \leq x \right\}$, in particolare $\frac{K}{n} \leq x < \underbrace{\frac{K+1}{n}}_{\substack{\shortparallel \\ z \in \mathbb{Q}}} \leq x + \frac{1}{n} \cdot K$

Radici n-esime

$\forall$ $y > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ sempre $\underset{x>0}{z \in \mathbb{R}}$ tc $x^n = y$

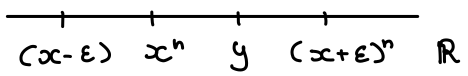
$x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ radice n-esima di y

Come si trova?

$x = \sup\{ z \text{ tc } z^n \leq y \}$ va verificato che $x^n = y$.

$\forall$ $\varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon)^n \leq z^n \leq y < (x+\varepsilon)^n \leftrightarrow (x-\varepsilon)^n \leq x^n \leq (x+\varepsilon)^n$
↳ molto piccolo ↳ z appartiene all'insieme

Binomio di Newton
$$(a-b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$



$$\Rightarrow \quad |x^n - y| \le (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (x+\varepsilon)^k (x-\varepsilon)^{n-1-k} \qquad (\varepsilon < 1)$$

$$\le \varepsilon\,(2n(x+1)^{n-1}) = C\cdot\varepsilon \Rightarrow x^n = y$$

Dal fatto $0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n$ segue l'unicità della radice $x^{1/n}$

Valore assoluto

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$$

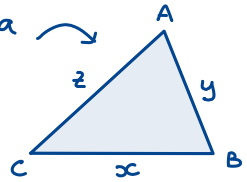
$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Verifica:

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

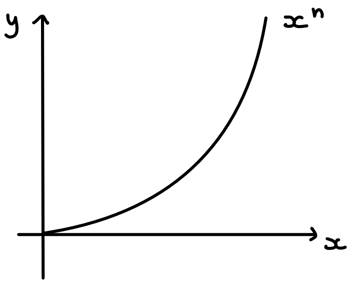
$|yx| = |y|\,|x| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$

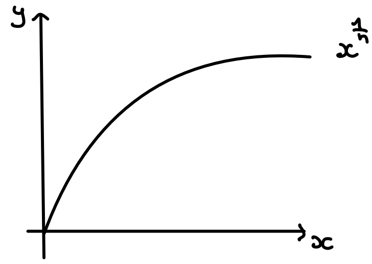
$|x+y| \le |x| + |y|$ disuguaglianza triangolare



C'è un'estensione agli elementi (vettori) di $\mathbb{R}^n = (\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{x})$

$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ norma di x





Oss: n dispari: posso risolvere $x^n = y$ anche per $y < 0$, ponendo $x = (-\tilde{x})^{1/n}$, $\tilde{x}$ soluzione di $x^n = y$

Potenze in ℝ

Come definiamo a^b con $a,b \in \mathbb{R}$ $a > 0$?

1) $b \in \mathbb{Q}$, cioè $b = \frac{j}{n}$ $\quad j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$a^b = (a^{1/n})^j = \begin{cases} (a^{1/n})^j & j > 0 \\ 1 & j = 0 \\ \frac{1}{(a^{1/n})^{-j}} & j < 0 \end{cases}$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot)\ a^{b+c} = a^b \cdot a^c \\ \cdot)\ (a\cdot b)^c = a^c \cdot b^c \\ \cdot)\ a^b > 0,\ a^0 = 1,\ 1^b = 1 \\ \cdot)\ a > 1 \quad b_1 < b_2 \Rightarrow a^{b_1} < a^{b_2} \quad (x \to a^x \text{ crescente}) \end{array}\right\} \text{Verificare}$$

In generale se $b \in \mathbb{R}$ pongo:

·) $a = 1$, $1^b = 1$

·) $a>1 \quad a^b = \sup\{a^q, \ q<b, \ q\in\mathbb{Q}\}$

·) $a<1 \quad a^b = \inf\{a^q, \ q<b, \ q\in\mathbb{Q}\}$

Si verifica che continuano a valere le proprietà algebriche. Inoltre si ha

$a>1 \Rightarrow a^b = \inf\{a^q : q\in\mathbb{Q}, \ q>b\}$

$a<1 \Rightarrow a^b = \sup\{a^q : q\in\mathbb{Q}, \ q>b\}$

Oss: $f(x)=a^x : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ = \{z\in\mathbb{R}, z>0\}$ è un isomorfismo tra $(\mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{R}^+,\cdot)$

Numeri complessi

unità immaginaria

$x^2=-1$ non ha senso in $\mathbb{R}$. Prendo $i^2=-1$. Considero $\mathbb{R}\cup\{i\}$.

i genera il campo dei NUMERI COMPLESSI. $\quad \mathbb{C} = \{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$

·) $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) \quad \mathbb{C}$ è un gruppo (abeliano) rispetto a $+$

·) $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+(ad+bc)i \quad \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è un gruppo per $\cdot$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ è un campo che estende $\mathbb{R}$

Dato $a+ib$ il numero $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ è il suo inverso per $\cdot$.

$$a+ib \cdot \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2+(ab)i-(ab)i+b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Notazione: Dato $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$

$a=\mathrm{Re}(z)$ PARTE REALE

$b=\mathrm{Im}(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$\bar{z}=a-ib$ CONIUGATO DI z

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ MODULO DI z

· $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

· $|zw| = |z|\cdot|w|$

· $|z+w| \leq |z|+|w|$

In particolare: $\begin{cases} |z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \end{cases}$

14-10-21 Lezione 8 Prof. Novaga

Numeri Complessi

Estensione di $\mathbb{R}$ aggiungendo i tale che $i^2 = -1$ genera $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} := \{a+ib : a,b \in \mathbb{R}\}$ è un campo, con le operazioni $+, \cdot$

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

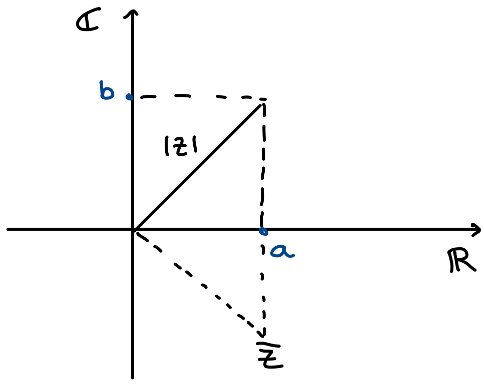
$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

INVERSO MOLTIPLICATIVO: $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

Oss: Si può definire un ordine totale (non completo)

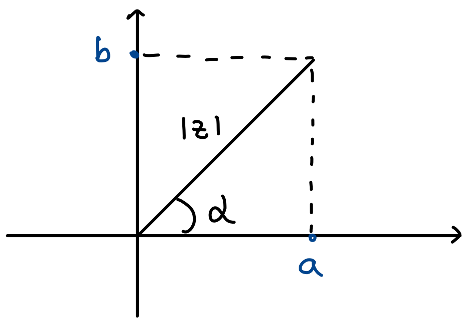
$a+bi \leq c+di$ se $a<c$ o $a=c$ e $b \leq d$

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$



$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow [0,+\infty)$ $\quad \begin{cases} |z \cdot w| = |z||w| \\ |z+w| \leq |z| + |w| \end{cases}$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA



$\alpha = \operatorname{arctg}(z)$ è tc

$b = |z| \sin \alpha$ e

$a = |z| \cos \alpha$

$\boxed{z = |z| (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}$ $\quad \operatorname{arctg}(z)$ è definito a meno di multipli di 2π

Notazione: $\operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$ si dice argomento principale di z

PROPRIETÀ:

$z_1 = \rho_1 (\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1) \qquad \rho_1 = |z_1| \qquad \rho_2 = |z_2|$

$z_2 = \rho_2 (\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2) \qquad \alpha_1 = \operatorname{Arg}(z_1) \qquad \alpha_2 = \operatorname{Arg}(z_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i \sin(\alpha_1+\alpha_2))$

Verifica: $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + i \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2 \cos\alpha_1)$

In particolare

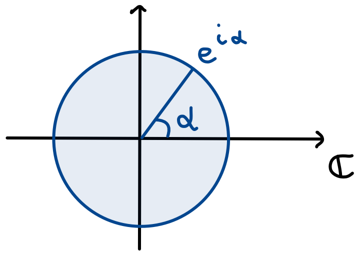
$$z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)$$

PONIAMO: $\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$ $\qquad e = 2,71\ldots$ numero di Nepero

$z = \rho e^{i\alpha}$ RAPPR. ESPONENZIALE



$$e^{i\alpha} : \mathbb{R} \to \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

Per estensione poniamo:

$$e^z = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b) \qquad z = a + ib \in \mathbb{C}$$

$$e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \text{isomorfismo di gruppi}$$

Radici n^e di $w \in \mathbb{C}$

Cerchiamo soluzioni in $\mathbb{C}$ di $\boxed{z^n = w}$

$$w = |w| e^{i\alpha} \qquad z = |z| e^{i\beta} \qquad z^n = |z|^n e^{in\beta} \qquad \alpha = \arg(w)$$

$$|z|^n e^{in\beta} = |w| e^{i[\text{Arg}(w) + 2k\pi]} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

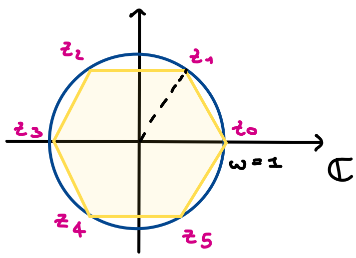
$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \text{Arg}(z) = \dfrac{\text{Arg}(w)}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad \text{tc } \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

↳ n soluzioni distinte

Caso $w = 1$, radici dell'unità $\quad z^n = 1$

$$w = 1 \cdot e^{0i + 2k\pi i}$$

$$z = e^{i\frac{2k}{n}\pi} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$



Poligono inscritto nella circonferenza unitaria

Più in generale, dato

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

$\exists$ sempre una soluzione $P(\bar{z}) = 0$. → Teorema fondamentale dell'algebra

In particolare possiamo scrivere $P(z) = (z - \bar{z})Q(z) \quad \deg Q = n-1$

$P(z) = a_n (z-z_1) \dots (z-z_n)$ $z_i \in \mathbb{C}$ soluzioni di $P(z)=0$

possibilmente coincidenti

$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z-z_j)^{\alpha_j}$ Fattorizzazione di P in $\mathbb{C}$

$K \leq n$ $\alpha_j \in \mathbb{N}$ molteplicità di z_j, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n$

Oss: Non è vero in $\mathbb{R}$, dove però si può decomporre $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

come $P(x) = a_n \prod_{j=1}^{k} P_j(x)$

$$P_j(x) = \begin{cases} x - x_j \\ \circ \\ x^2 + a_j x + b_j \end{cases} \qquad \sum_j \deg P_i = n$$

<u>Def</u>: Si dice che $\mathbb{C}$ è <u>algebricamente chiuso</u>

Oss: $P(z) = 0$ $\deg P = 2$ cioè $P(z) = az^2 + bz + c$ $a, b \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Oss</u>: Il teorema non vale per $P(z, \bar{z}) = 0$

<u>Es</u>: $z \cdot \bar{z} + 1 = 0$ non ha soluzione

<u>DISTANZA, INTORNI, TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$</u>

Cos'è una distanza su un insieme E

$d: E \times E \to [0, +\infty)$ è una DISTANZA se:

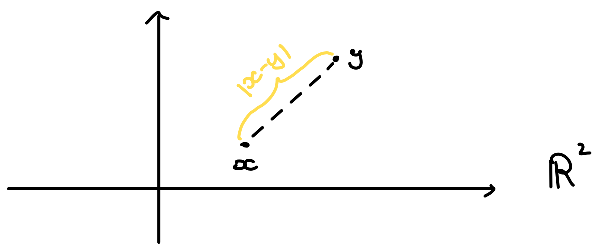
- $d(x, x) = 0$ $\forall x \in E$
- $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y$ simmetrica
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $\forall x, y, z$ disuguaglianza triangolare

(E, d) si dice uno SPAZIO METRICO

<u>Es</u>: $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$

$$d(x,y) = |x-y|$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$



ESERCIZIO: $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p)$ $\quad p \in (0, +\infty)$

$$d(x,y) = |x-y|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$ è una distanza se $p > 1$

Def: Dato (E,d) spazio metrico $B_r(x) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$

si dice PALLA di raggio r con centro x.

Def: (E,d) spazio metrico, $A \subseteq E$, $x \in A$, A si dice un INTORNO di x se $\exists r > 0$ tc $B_r(x) \subseteq A$

Oss: (E,d) s.m. $E' \subseteq E \Rightarrow (E', d)$ s.m.

Def: (E,d) s.m. $A \subseteq E$ A si dice APERTO se A è intorno di ogni suo punto, cioè $\forall x \in A$ $\exists r > 0$ tc $B_r(x) \subseteq A$.

A si dice CHIUSO se $E \setminus A$ è aperto.

Prop. Detta $\mathcal{A} = \{ A \subseteq E : A \text{ aperto} \}$ si ha che

1. $\emptyset, E \in \mathcal{A}$
2. $\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti, anche infinita, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$
3. $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (NON è vera per $\cap$ infinite)

15-10-2021 lezione 9 Prof. Carminati

Esercizio:

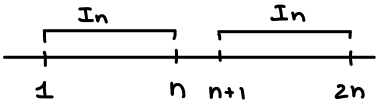
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$\downarrow$

\# sottoinsiemi di ordine n in un insieme di \# 2n

$= |\mathcal{P}_n(I_{2n})|$ $\qquad \mathcal{P}_n(I_{2n}) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \{ A \in \mathcal{P}_n(I_{2n}) : |A \cap I_n| = k \}$

$I_{2n} = \{ 1, 2, \_\_ \}$



$$\{ A \in \mathcal{P}_n(I_{2n}) : |A \cap I_n| = k \} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_k(I_n) \times \mathcal{P}_k(I_n)$$

$$A \longmapsto (A \cap I_n, I_n' \setminus A)$$

ha n elementi

$$|\{ A \in \mathcal{P}_n(I_{2n}) : |A \cap I_n| = k \}| = |\mathcal{P}_k(I_n)| \, |\mathcal{P}_k(I_n')| = \binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

Quindi $\binom{2n}{n} = |\mathcal{P}_n(I_{2n})| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Esercizio $\quad a_n = \{ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n : \varepsilon_i \in \{a,b\} \}, \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \neq aa \quad \forall i \in 1,\dots,n$

$$a_n = a_n^a \sqcup a_n^b$$

$$a_n^a \overset{?}{\downarrow} a_{n-2} \qquad a_n^b \overset{?}{\downarrow} a_{n-1}$$

$g_n = |a_n|$ soddisfa una relazione di ricorsione

$g_n = g_{n-2} + g_{n-1}$

$a_1 = \{a, b\}$

$a_2 = \{ab, ba, bb\}$

$a_3 = \{aba, bab, bba, abb, bbb\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

sequenza di Fibonacci

Scrivo ora l'espressione analitica di g_n:

$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ (L) cerco soluzioni di L in forma esponenziale

$g_n = \lambda^n$

$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \qquad n = 2 \qquad \lambda^2 = \lambda + 1 \qquad \lambda_{+,-} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

verificare x es.

Chiamo $\lambda_+^n = \alpha_n$, $\beta_n = \lambda_-^n$ sono soluzioni di (L) $\Rightarrow A\alpha_n + B\beta_n$ è sol di L

Cerco A e B che soddisfano le condizioni iniziali oltre alla ricorsione

Condizioni iniziali: $g_n(0) = 1$, $g_n(1) = 2$

$g_n = A\lambda_+^n + B\lambda_-^n$ chiedo che g_n soddisfi $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ e che $\underset{\substack{\parallel \\ A+B=1}}{g_0 = 1}$ e $g_1 = 2$

$$A\lambda_+ + B\lambda_- = 2$$

$$A\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2$$

$$A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 4$$

$$\underbrace{A+B}_{=1} + \sqrt{5}(A-B) = 4$$

$$\sqrt{5}(A-B) = 3 \rightarrow A - B = 3/\sqrt{5}$$

$$2A = 1 + 3/\sqrt{5} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+^2 \qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-^2 \qquad \boxed{g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n)}$$

Successioni definite per ricorrenza

$a_1, a_2, a_3, \dots$ successione = seq. infinita di elem. di un insieme a val. in X

Una successione è succ: $\mathbb{N} \to X$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ = form. esplicita

regola ricorsiva ⇝ Data $f: X \times \mathbb{N} \to X$ e $\alpha \in X$

$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n, n) \end{cases}$ successione definita per ricorrenza

ES $n!$ è una succ. definita per ricorrenza

$f: X \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad a_0 = 1$ $\quad X = \mathbb{N} \quad \alpha = 1$

$(x, n) \longmapsto x(n+1)$ $\quad a_{n+1} = \underbrace{a_n(n+1)}_{= f(a_n, m)}$

ES $f(x, \cancel{n})$ successioni autonome

↳ non dipende da n

Il caso precedente si può ricondurre in questa cornice.

$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad f: X \to X$ $\quad X \ni \alpha = (1,2)$ punto di partenza

$(x,y) \mapsto (y, x+y)$ $\quad$ • $a_0 = (1,2)$ • $a_1 = (2,3)$ • $a_2 = (3,5)$

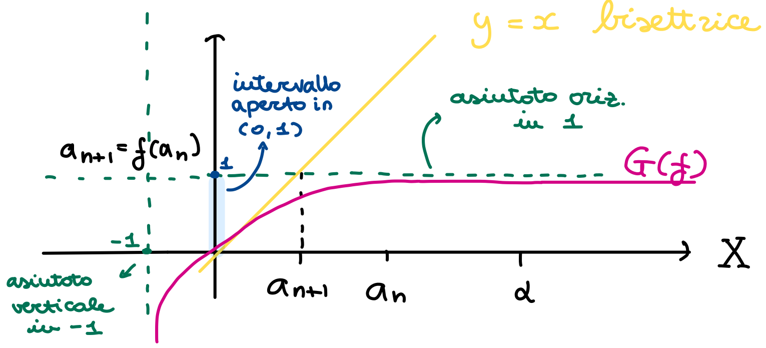
C'è un parallelismo tra eq. differenziali e successioni definite per ricorrenza

Esempio

$\begin{cases} a_0 = \alpha > 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \end{cases}$ $\quad f(x) = \frac{x}{1+x}$ $\quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$X := (0, +\infty)$



2 modi di lavorare
- Formula esplicita → non sempre possibile
- Studio qualitativo → meno informazioni

⇝ a_n è decrescente $\quad \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$

Ora dovrei riportare a_{n+1} sulle ordinate per ottenere a_{n+2}

Mi basta prendere la bisettrice perché in essa un punto ha ordine uguale all'ascissa. $a_{n+2} = f(a_{n+1})$ ottengo una spezzata

La bisettrice è tangente al grafico della curva.

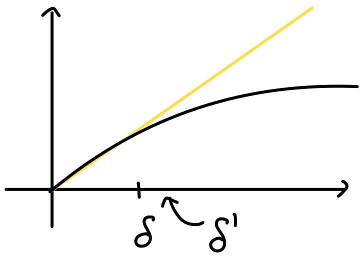
a_n è sempre ben definita $f(X) \subset X$

$a_n > 0$ (per induzione)

se $x > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x} < x \quad \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow a_n$ è sempre decrescente

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq 0$ 0 è un minorante, l'inf è il max dei minoranti

In effetti $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$.



Per assurdo: $\inf a_n = \delta > 0$

$f(\delta') = \delta, \quad \dfrac{\delta'}{1+\delta'} = \delta \qquad \delta = \delta\delta' + \delta$

$\delta' > \delta \qquad \delta' > \max \qquad \delta' = \dfrac{\delta}{1+\delta} > \delta \qquad \delta = \inf \equiv \max$ dei minoranti per tutti gli elementi della successione

δ' non è più un minorante per tutti gli elementi della successione

$\Rightarrow \exists\, \bar{n}$ per cui la successione scende rispetto a δ': cioè $\exists\, \bar{n} : a_{\bar{n}} < \delta'$

Ma allora $a_{\bar{n}+1} = f(a_{\bar{n}}) < f(\delta') = \delta$ Assurdo perché $a_{\bar{n}+1}$ è sceso rispetto a $\delta \Rightarrow \delta$ non è un minorante. $\lightning$

$a_0 = \alpha$

$a_1 = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$

$a_2 = \dfrac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \dfrac{\alpha}{1+2\alpha}$

$a_3 = \dfrac{\frac{\alpha}{1+2\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1+2\alpha}} = \dfrac{\alpha}{1+3\alpha}$

$\vdots$

$a_n = \dfrac{\alpha}{1+n\alpha} \longrightarrow$ Si dimostra formalmente per induzione.

<u>Esercizio</u>: Trovare una formula esplicita per $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$ $\quad f(x) = Ax + B \quad A, B \in \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$

19-10-2021 Lezione 10 Prof. Carminati

Metrica e Topologia

E insieme $\quad d : E \times E \to [0, +\infty)$

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ disuguaglianza triangolare

Esempi: $E = \mathbb{R} \quad d(x,y) = |x-y|$

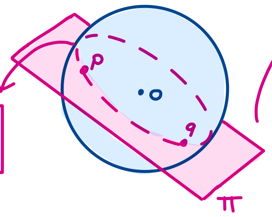
$E = \mathbb{C} \quad d(z,w) = |z-w|$ modulo

$E = \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n) \qquad d(x,y) = |x-y|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

$E = S \subseteq \mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

S sfera unitaria

$p, q \in S$



$\boxed{\pi \cap S = C_{p,q}}$

π piano individuato da p, q, O, $\quad \mathbb{R}^3 \ni O = (0,0,0)$

$d(p,q)$ = lunghezza arco più corto tra p e q

distanza geodetica sulla sfera

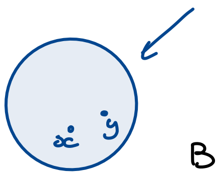
$\begin{cases} x \in E \\ r > 0 \end{cases} \qquad B_r(x) := \{ y \in E : d(x,y) < r \}$ palla di centro x e raggio r

A **INTORNO** di x se $\exists x \in E, r > 0$ tc $B_r(x) \subset A$

A **APERTO** se A è intorno di ogni $x \in A$

Oss: se $r > 0$ $B_r(x)$ è un insieme aperto se $y \in B_r(x) \Rightarrow d(x,y) < r$

$ \overset{\shortparallel}{r - \delta}$ con $\delta > 0$



$z \in B_\delta(y) \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r - \delta$

$B_\delta(y) \subset B_r(x)$

A chiuso se $E \setminus A$ è aperto.

Proprietà: i) $\emptyset, E$ sono aperti

ii) Se A_j aperti, $j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j$ è aperto

iii) Se $A_1, \dots, A_\ell$ aperti $\Rightarrow \bigcap_j A_j$ è aperto

Dim. i) verifica diretta

ii) $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \Rightarrow \exists \bar{j} \in J : x \in A_{\bar{j}} \Rightarrow \exists r : B_r(x) \subset A_{\bar{j}} \subset \bigcup_{j \in J} A_j$

iii) $x \in \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j \Rightarrow x \in A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad \exists x_j : B_{r_j}(x) \subset A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}, \; r \doteq \min A_j$

$B_r(x) \subset A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j$

Oss: Questo risultato non è vero per intersezioni infinite

Esempio: $A_j = (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}) \qquad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{0\}$

$(A_j \subseteq \mathbb{R}) \quad j \in \mathbb{N}$

Oss: Può capitare che metriche diverse definiscano la stessa topologia

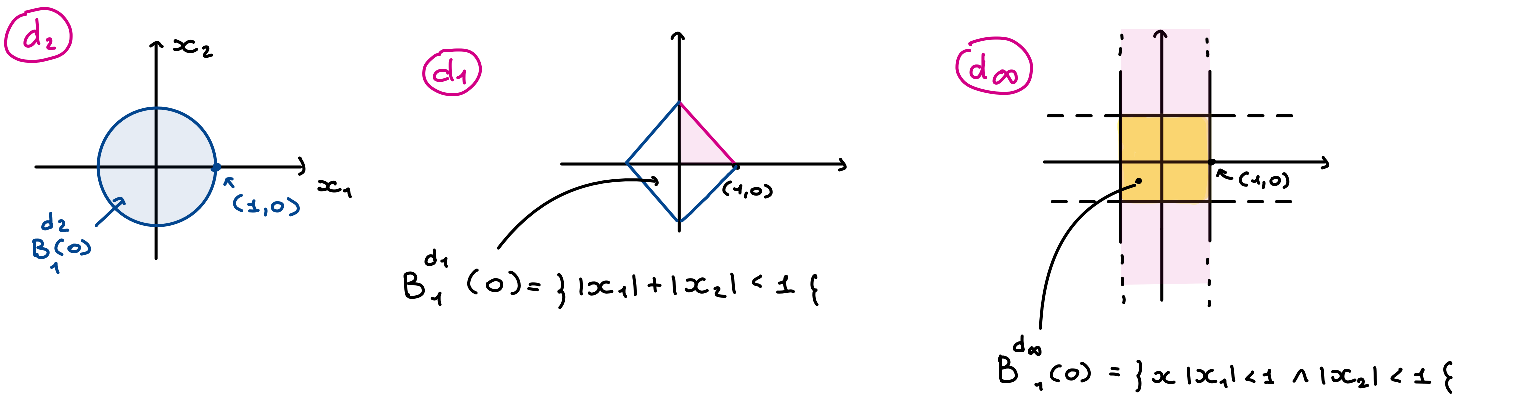
Esempio: $E = \mathbb{R}^n \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \qquad x' = (x'_1, \dots, x'_n)$

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2}$$

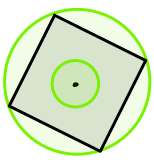
$$d_1(x, x') = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|$$

$$d_\infty(x, x') = \max\{|x_i - x'_i| \quad 1 \leq i \leq n\}$$

Queste distanze definiscono la stessa topologia su E in $\mathbb{R}^2$.



La topologia indotta da d_1 e d_2 è la stessa perché $B_r^{d_2} \subset B_r^{d_1}(x) \subset B_r^{d_2}(x)$



Dentro una palla tonda riesco sempre a metterne una a forma di losanga e viceversa.

Proprietà dei chiusi

i) $\emptyset$, E sono chiusi

ii) A_j chiusi $\forall j \in J \Rightarrow \bigcap_{j \in J} A_j$ è chiuso

iii) $A_1, \dots, A_\ell$ chiusi $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$ è chiuso

Dim: A_j chiuso $\forall j \Rightarrow A_j^c$ aperto $\forall j$

$(\bigcap_{j \in J} A_j)^c = \bigcup_{j \in J} A_j^c \leftarrow$ aperto perché unione di aperti

$\Downarrow$

$x \Rightarrow x \notin \bigcap A_j \Rightarrow \exists j : x \in A_j^c \Rightarrow x \in \bigcup A_j^c$

$\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j^c$ è aperto perché int. finita di aperti

Def: x è INTERNO ad A $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, r>0 : B_r(x) \subset A$

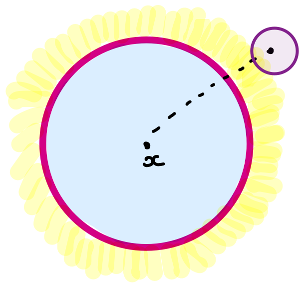
x è ESTERNO ad A $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, r>0 : B_r(x) \subset A^c$ $\quad$ x è interno a A^c

x è di FRONTIERA per A $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, r>0$ $\begin{cases} B_r(x) \cap A \neq \emptyset \\ B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$ $\quad$ x non è né interno né esterno

$\mathrm{int}(A) \doteq \{x : x \text{ interno ad } A\}$

$\partial A \doteq \{x : x \notin \mathrm{int}(A) \wedge x \notin \mathrm{int}(A^c)\} = \{x : x \text{ di frontiera per } A\}$

$E = \mathrm{int}(A) \sqcup \partial A \sqcup \mathrm{int}(A^c)$ $\quad$ unione disgiunta



Esempio: $B_r(x) = \mathrm{int}(B_r(x))$

$\partial B_r(x) = \{y : d(x,y) = r\}$

Oss: i) A aperto $\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{int}(A)$

ii) $\mathrm{int}(A)$ è un aperto

iii) $\mathrm{int}(A)$ è il più grande aperto contenuto in A

Dim: i) è la definizione di aperto

ii) Se $x \in \mathrm{int}(A) \Rightarrow B_r(x) \subset A \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \forall y \in B_r(x)\ \exists\, r_1 > 0 : B_{r_1}(y) \subset A \Rightarrow B_r(x) \subset \mathrm{int}(A)$

$B_r(x)$ è aperta

iii) $\left.\begin{matrix} A' \subseteq A \\ A \text{ aperto} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall x \in A'\ \exists r\ B_r(a) \subset A' \subseteq A \Rightarrow a \in \mathrm{int}(A)$, di conseguenza $A' \subset \mathrm{int}(A)$ $\square$

Def: ADERENZA

x è ADERENTE ad A $\Leftrightarrow$ $\forall r>0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

$\bar{A} = \{$ insieme di punti aderenti ad A $\}$ $\quad$ chiusura di A

Prop: $\bar{A} = \mathrm{int}(A) \sqcup \partial A$ $\qquad$ **Oss:** $A \subset \bar{A}$

Dim: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r>0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \notin \mathrm{int}(A^c) \Leftrightarrow x \in (\mathrm{int}(A^c))^c$

$$(\mathrm{int}(A^c))^c = \mathrm{int}(A) \sqcup \partial A$$ $\square$

Oss: • $\bar{A} = \{x \in E : d(x,A) = 0\}$

dove $d(x,A) \doteq \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ $\quad$ $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists$ punti di A arbitrariamente vicini a x

• se A è chiuso $A = \bar{A}$

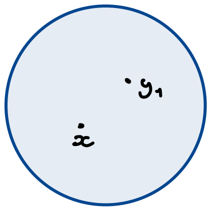
• $\bar{A} = \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}}}_{\to \{x \in E \,:\, d(x,A)=0\}} \{x : d(x,A) < \tfrac{1}{n}\}$ $\leftarrow$ NB: questi sono insiemi aperti

• $\bar{A}$ è il più piccolo chiuso contenente A

Def: x è di accumulazione per A sse $\forall r>0$ $(B_r(x)\setminus\{x\})\cap A \neq \emptyset$

Oss: Se x è di accumulazione $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A diversi da x.

$r_0 = 1$
$r_1 = \frac{1}{2} d(x, y_1)$
$\vdots$
$r_n = \frac{1}{2} d(x, y_n)$



$y_1 \in B_{r_0}(x)\setminus\{x\} \cap A$
$y_2 \in B_{r_1}(x)\setminus\{x\} \cap A$
$\vdots$
$y_n \in B_{r_{n-1}}(x)\setminus\{x\} \cap A$
$y_{n+1} \in B_{r_n}(x)\setminus\{x\} \cap A$

Infatti se per un centro r_0 ce ne fosse solo un numero finito, potrei prendere un raggio $r_1 < r_0$, in modo che la palla $B_{r_1}(x)$ non contenga nessun elemento di A ($\neq x$) e quindi x non sarebbe d'accumul.

Def x si dice isolato se non è di accumulazione

Esercizio: $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n \in \mathbb{N}_+, m \in \mathbb{N}_+ \right\} \subset \mathbb{R}$

Determinare i punti di accumulazione

Esercizio: $A \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} (\alpha_j, \beta_j)$

Ogni aperto è unione al più numerabile di intervalli disgiunti.

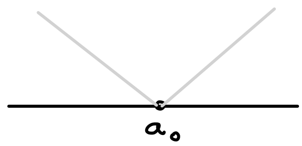
21-10-2021 Lezione 11 Prof. Carminati

(E, d) spazio metrico con d distanza

$d(x, A) = \inf\{ d(x,a) : a \in A \}$

Esempi:

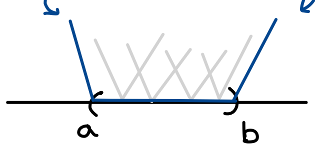
punto fissato
$d(x, a_0)$
$E = \mathbb{R}$ $\longrightarrow$



$E = \mathbb{R}^2$ una specie di cono $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
"si immerge"

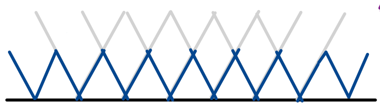
inf delle distanze

$A = (a, b)$ $\longrightarrow$
intervallo



Grafici delle funzioni distanza

$A = \mathbb{Z}$



inf

Def ρ-intorno di A, $A_\rho := \{ x \in E : d(x, A) < \rho \}$

Esercizio. A_ρ è aperto. Verificare $A_\rho = \bigcup_{a\in A} B_\rho(a)$

Domanda: È sempre vero che $\overline{A_\rho} = \{x\in E : d(x,A)\le \rho\}$?

↳ chiusura di A_ρ

Risposta: Preso $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea è vero, in generale è falso

Fornire un controes.

ma vale un'inclusione: $\overline{A}_\rho \subset \{x\in E : d(x,A)\le \rho\}$

Propietà della distanza:

(i) $a_0\in E$ $\quad |d(x,a_0)-d(y,a_0)|\le d(x,y) \quad \forall x,y\in E$

(ii) $A\subset E$ $\quad |d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y) \quad \forall x,y\in E$

Sono interessato a questa funzione: $d\cdot\ E\to[0,+\infty)$
$$x\mapsto d(x,A)$$

Def $\varphi: E\to\mathbb{R}$ $\quad \varphi$ è L-lipschitz $\overset{def}{\iff}$ $|\varphi(x)-\varphi(y)| \overset{(*)}{\le} L\, d(x,y) \quad \forall x,y\in E$

NB:

(Sopra avrei $\varphi(x)=d(x,A)$ $L=1$ la distanza da A è una funzione 1-Lip)

$$(*) \begin{cases} \varphi(x)-\varphi(y)\le L\,d(x,y) & \forall x,y\in E \\ -\varphi(x)+\varphi(y)\le L\,d(x,y) & \forall x,y\in E \end{cases} \qquad |a|\le b \iff \begin{cases} a\le b \\ -a\le b\end{cases}$$

Basta verificarne una e scambiando x e y si ottiene l'altra (Questo è vero per la simmetria della distanza: $d(x,y)=d(y,x)$)

Dim (Prop) (i) Basta verificare $d(x,a_0)-d(y,a_0)\le d(x,y) \quad \forall x,y$

↳ Per quanto detto sopra

$$d(x,a_0) \le d(x,y)+d(y,a_0)$$

per la dis. triangolare ⟶ implica la tesi

perché è l'inf

$$\underbrace{d(x,A)} - d(y,a) \overset{\boxed{a\in A}}{\le} d(x,a)-d(y,a)\le d(x,y) \qquad \forall x,y\in E$$

$$d(x,A)\le d(y,a)+d(x,y) \qquad \forall a\in A$$

non dipende da $a\in A$

$$\underbrace{d(x,A)-d(\overbrace{x,y}^{\text{sono fissati}})}\le d(y,a) \qquad \forall a\in A$$

è un minorante per $d(y,a)$: $a\in A$

$$d(x,A)-d(x,y)\le \inf\{d(y,a): a\in A\} = d(y,A)$$

↑ l'inf è il massimo dei minoranti

$$d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y) \qquad \forall x,y\in E$$

Esercizio: Mostrare che $\underbrace{\overline{\overline{A}} = \overline{A}}$

"l'aderenza dell'aderenza di A coincide con l'aderenza di A"

Ricordiamo:

(E, d) sp. metrico $\quad A \subseteq E$, $\overbrace{\text{int}(A) \sqcup \partial A}^{\bar{A}}$ → frontiera di A

$\bar{A}$: punti che $\notin \text{int}(A^c)$ ie più piccolo chiuso contenente A

int(A): ie più grande aperto contenuto in A

x è di accumulazione per A se $\forall r>0 \quad B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$

(equivalentemente $B_r(x) \cap A$ ha infiniti elementi)

$D(A) = A' = \{x \in E : x$ è di accumulazione per A $\}$

Esercizio: • $\bar{A} = A \cup A'$

• A chiuso $\Leftrightarrow$ $A \supset A'$

• $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

• $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ma può valere l'inclusione stretta

Def $a \in A$ si dice ISOLATO se $a \notin A'$

A si dice DISCRETO sse tutti i punti sono isolati

A si dice DENSO sse $\bar{A} = E$

Esempi $\quad A = (a, b) \quad A' = [a, b] \quad \partial A = \{a, b\}$

$\mathbb{N}$: $\mathbb{N}' = \emptyset \quad \text{int}\, \mathbb{N} = \emptyset \quad \partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$ tutti i punti sono isolati

→ $\mathbb{N}$ è DISCRETO, idem $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$: $\quad \text{int}(\mathbb{Q}) \overset{=}{\underset{*}{}} \emptyset \qquad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

(*) perché? una spiegazione è la cardinalità: $\mathbb{Q}$ è numerabile, un intervallo ha cardinalità del continuo ($= |\mathbb{R}|$). Quindi $\mathbb{Q}$ non può contenere un intervallo.

Esercizio (difficile): Q^*: Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $\partial A = A = A'$

(suggerimento: sì)

Topologia e ordine in $\mathbb{R}$:

Prop: $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad (A \neq \emptyset)$, $\sigma \doteq \sup A < +\infty$ (Vale enunciato analogo per l'inf A)

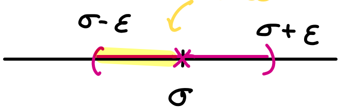
$\sigma \notin A \Rightarrow \sigma$ è punto di accumulazione per A

Dim: $\sigma = \sup A \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sigma \geq a \quad \forall a \in A & \text{i) mi dice che } \sigma \text{ è un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_0 \in A : \sigma - \varepsilon < a_0 & \text{ii) mi dice che } \sigma \text{ è superato da un el} \in A \end{cases}$

se $\varepsilon > 0$ fissato $\exists a \in A : \sigma - \varepsilon \underset{(ii)}{\leq} a \underset{(i)}{\leq} \sigma$

$\sigma \notin A \Rightarrow \exists\, a \in A : \boxed{\sigma - \varepsilon < a < \sigma}$

ci sono elementi da questa parte



$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B_\varepsilon(\sigma) \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$ □

non è più difficile di dimostrare che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Prop: $G \subseteq \mathbb{R}$, $G \neq \{0\}$, G sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ (es: $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Q}$ ...)

↳ G è soggetto alla rel. d'ordine

$g_0 := \inf G \cap (0, +\infty)$

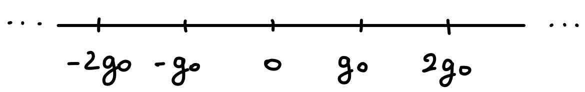
↳ $\in G$ essendo sgrp additivo

NB: l'inf può non appartenere all'insieme

$$\begin{cases} g_0 = 0 \Rightarrow \overline{G} = \mathbb{R} \quad \text{"G è denso in $\mathbb{R}$"} \\ g_0 > 0 \Rightarrow G = g_0 \cdot \mathbb{Z} \doteq \{k \cdot g_0 : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

↳ es: $G = \mathbb{Q}$

↳ G è chiuso es: multipli di π



Cor: i) $\mathbb{Q}$ è denso $\to \inf\{q \in \mathbb{Q}, q > 0\} = 0$

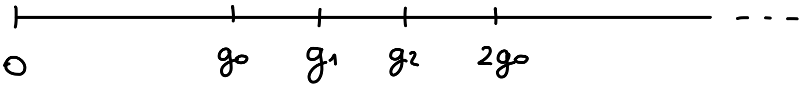
comb lineari di $\sqrt{2}$ a coef interi

ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{k + h\sqrt{2} : k, h \in \mathbb{Z}\}$ è denso in $\mathbb{R}$

Dim (Prop): II caso: $g_0 = \inf G \cap (0, +\infty)$ $\quad g_0 > 0$

Allora $\boxed{g_0 \in G}$ perché se così non fosse $g_0 \in G'$ (di acc per G; {pt. di acc. di G}) $\Rightarrow g_0 < g_1 < g_2 < 2g_0$ $\quad g_1, g_2 \in G$

abbiamo visto che può $\notin G$



$0 < \underbrace{g_2 - g_1}_{\in G \cap (0,+\infty)} < g_0 \quad \Rightarrow \quad g_1 < g_2 < 2g_0 \Rightarrow 0 < g_2 - g_1 < 2g_0 - g_1 < g_0$ Assurdo ($g_2 - g_1 \in G$)

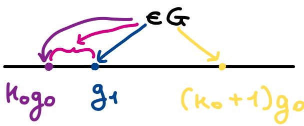
altrimenti $g_2 - g_1 < 0$

$G \supset g_i \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Vale l'}=}$ Per assurdo: $\exists\, g_1 \in G \setminus g_0 \mathbb{Z} \Rightarrow \exists\, k_0$ tale che $k_0 g_0 < g_1 < (k_0 + 1) g_0$

$g_1 - k g_0 \in G \cap (0, +\infty)$

$g_1 - k g_0 < g_0$ assurdo



I caso: $g_0 = 0 \qquad g_0 \notin G \cap (0, +\infty) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, g_2 \in G \cap (0, \varepsilon)$

G denso $\iff \forall (a, b) \subset \mathbb{R} \quad (a, b) \cap G \neq \emptyset$ SPG $a > 0$

Scelgo $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ $\quad g_\varepsilon \in G \cap (0, \varepsilon)$

$\varepsilon < a$

G gruppo $\Rightarrow G \supset g_\varepsilon \mathbb{Z} = \{k g_\varepsilon : k \in \mathbb{Z}\}$

sup. illimitato

$\{k \in \mathbb{N} : k g_\varepsilon < a\}$ è un insieme finito e non vuoto

$k_0 = \max \qquad (k_0 + 1) g_\varepsilon > a \qquad (k_0 + 1) g_\varepsilon = k_0 g_\varepsilon + g_\varepsilon < k_0 g_\varepsilon + \varepsilon < a + \varepsilon < b$

$\Rightarrow (k_0 + 1) g_\varepsilon \in (a, b) \cap G$ □

Esercizio: $T = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ chi sono i punti di accumulazione?

naturali positivi

Prop: $T' = \{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^* \} \cup \{0\}$ (0 è accumulato dagli elementi $\frac{2}{n}$)

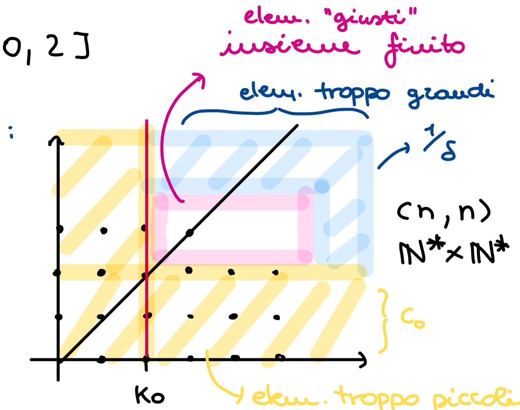
T' = insieme dei pt. di acc.; $\underbrace{\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^* \}}_{D}$

su un insieme sta in un chiuso tutti i pt. di accumulazione stanno in quel chiuso

$k \in D \Rightarrow k \in T'$ (per es.) $\qquad T \subset [0,2] \qquad T' \subset \overline{T} \subset [0,2]$

$x \in (1,2]$ non è di accumulazione

Idea:



$T \cap (1,2] = \{ 1 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}^* \}$ come pt. di acc. ha solo l'el. 1

$x \in [0,1]$, $x \notin D \Rightarrow \exists K_0 \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{K_0+1} < x < \frac{1}{K_0}$

22 - 10 - 2021 $\qquad$ Lezione 12 $\qquad$ Prof. Carminati

Esercizio: $T = \{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}_* \}$ $\qquad T' = \underbrace{\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}_* \}}_{D} \cup \{0\}$

① $D \subseteq T'$ facile

② Se $x \notin D \Rightarrow x \notin T'$

$T' \subset [0,2]$; non ci sono pt. di acc. in $(1,2]$ facile

Se $x_0 \in (0,1) \setminus D \Rightarrow x_0$ non è di accumulazione

Strategia: Se $x_0 \in (0,1) \setminus D$, $\exists K_0$ tc $\frac{1}{K_0+1} < x_0 < \frac{1}{K_0}$

$x_0 - \delta \quad x_0 + \delta$ → È possibile scegliere δ abb. piccolo tale che solo un num. finito di elementi cada in questo intervallo

$\frac{1}{K_0+1} \qquad x_0 \qquad \frac{1}{K_0}$

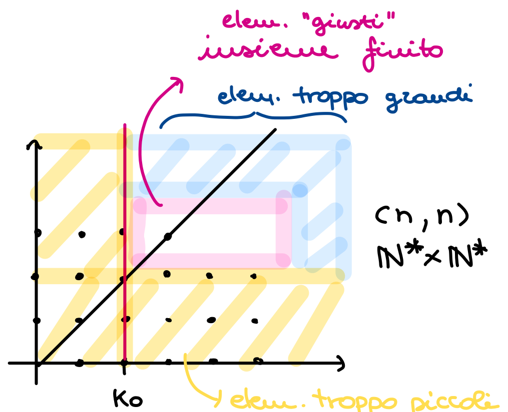
Scelgo δ così: $x_0 + \delta < \frac{1}{K_0}$, $\frac{1}{K_0+1} + \delta < x_0 - \delta$ (chi è ? x es.)

Voglio "scartare" un numero finito di elementi, alcuni troppo grandi, altri troppo piccoli, così da avere un numero finito di elementi.

$T = \mathrm{Im}\,\varphi$ posso pensare T in questo modo

$\varphi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$(n, m) \longmapsto \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$



$C_0 = \{ (n, m) : n \leq K_0 \vee m < K_0 \}$

$C_1 = \{ (n, m) : (n > K_0 \wedge m \geq 1/\delta) \cup (m > K_0 \wedge n > 1/\delta) \}$

C_2 = tutti gli altri $\qquad \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = C_0 \sqcup C_1 \sqcup C_2$

Le condizioni C_0 e C_1 individuano quattro strisce, due verticali e due oriz.

$\varphi(C_0) \subset \left[\frac{1}{K_0}, 2\right]$ $\quad (n,m) \in C_0 \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{K_0}$ $\boxed{> x_0 + \delta}$

$\varphi(C_1) \subset \left[0, \frac{1}{K_0+1} + \delta\right]$ $\quad (n,m) \in C_1 \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{K_0+1} + \delta$ $\boxed{< x_0 - \delta}$

$\notin$ all' intervallo che ho scelto $(x_0+\delta, x_0-\delta)$

$T \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset \varphi(C_2)$ ← sono un numero finito

$\Rightarrow x_0$ non è di accumulazione per T

Esercizi

- $\underbrace{\overline{A \cap B}}_{\text{minimo chiuso contenente } A\cap B} \subset \underbrace{\bar{A} \cap \bar{B}}_{*}$ } generico chiuso che contiene $A \cap B$

  ⊛ $A \cap B \subset \bar{A}$, $A \cap B \subset \bar{B}$

  $B = B_r(x)$
  $A = B^c \longrightarrow A \cap B = \emptyset$
  $\bar{A} \cap \bar{B} = \partial B = \partial A$

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

  $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ → ovvia per lo stesso motivo di sopra

  $\overline{A \cup B} \supset \underset{\substack{\uplus \\ x_0}}{\bar{A} \cup \bar{B}}$ $\begin{cases} \forall r>0 \quad \exists\, B_r(x) \cap A \neq \emptyset \\ \quad\quad \text{oppure} \\ \quad '' \quad\quad \exists\, B_r(x) \cap B \neq \emptyset \end{cases}$ $\Rightarrow \forall r>0 \quad \exists B_r(x) \cap (A \cup B)$ $\Rightarrow x_0 \in \overline{A \cup B}$

  $\square$

- $\bar{A} = A \cup A'$ $\quad \boxed{\bar{A} \supset A \cup A'} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix} A \subset \bar{A} \\ A' \subset \bar{A}\end{matrix}}$ $\quad A$ chiuso $\Leftrightarrow A \supset A'$

  $\bar{A} = A \cup \underbrace{\partial A}_{= (\partial A \cap A') \cup (\partial A \setminus A') \text{ punti isolati}} = A \cup (\partial A \cap A') \subset A \cup A'$ $\quad A = \bar{A} = A \cup A'$

  $\square$

- $\left.\begin{matrix} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \text{ aperto} \\ \neq \emptyset \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$ A è unione di una famiglia numerabile di aperti disgiunti

$x_0 \in A \quad \mathcal{J}_{x_0} = \{ J \subset A : x_0 \in J,\ J \text{ è un intervallo aperto} \}$

$J_{x_0} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{x_0}} J$ è $\begin{cases} \text{un intervallo aperto} \\ \text{contiene } x_0 \\ J_{x_0} \subset A \end{cases}$

$y \in J_x \Rightarrow J_y \supset J_x \Rightarrow x \in J_y \Rightarrow J_x = J_y$ $\quad J_x \cap J_y \neq \emptyset$
$\quad \uplus$
$\quad z \quad \Rightarrow J_x = J_z = J_y$

$A = \bigcup_{x \in A} J_x = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}} J_x$

J_{x_0} fissato $\rightsquigarrow q_0 = \min \{ q \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z} \cap J_{x_0} \neq \emptyset \}$

$\frac{p_0}{q_0}$ elemento di $\{ \frac{p}{q_0} : p \in \mathbb{Z} \} \cap J_{x_0}$ che dista meno da 0

$J_{x_0} \rightsquigarrow \frac{p_0}{q_0}$ $\quad \tilde{\mathbb{Q}}$ = razionali ottenuti in questo modo a partire da J_{x_0} $(x_0 \in A)$

$\tilde{\mathbb{Q}}$ è numerabile $\quad A = \bigsqcup_{r \in \tilde{\mathbb{Q}}} J_r$

$\square$

NUMERI COMPLESSI

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a+ib$, $\bar z = a - ib$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$, $\quad i^2 = -1$

$$\underbrace{\phi(z)}_{\downarrow} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \phi : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\delta}{\gamma} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

trasformazione dei complessi $\qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ $\qquad$ ↳ ma spesso "finisce" in $\mathbb{Q}$

se $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ allora ϕ conserva $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$ cioè $\phi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$

↳ $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ $\qquad$ ↳ semipiano superiore $\qquad$ se $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ ϕ big. (verifica)

$\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \phi(z) > 0$

$$= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \gamma} = \frac{(\alpha z + \beta)(\overline{\gamma z + \delta})}{(\gamma z + \delta)(\overline{\gamma z + \delta})} \qquad \overline{\gamma z + \delta} = \gamma \bar z + \delta \qquad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\alpha\gamma \overbrace{z\bar z}^{|z|^2} + \beta\delta + \boxed{\beta\gamma\bar z + \alpha\delta z}^{*}}{|\gamma z + \delta|^2} \quad \in \mathbb{R}$$

$\beta\gamma(a-ib) = \beta\gamma a - i\beta\gamma b$

$\oplus \ \alpha\delta(a+ib) = \alpha\delta a + i\alpha\delta b$

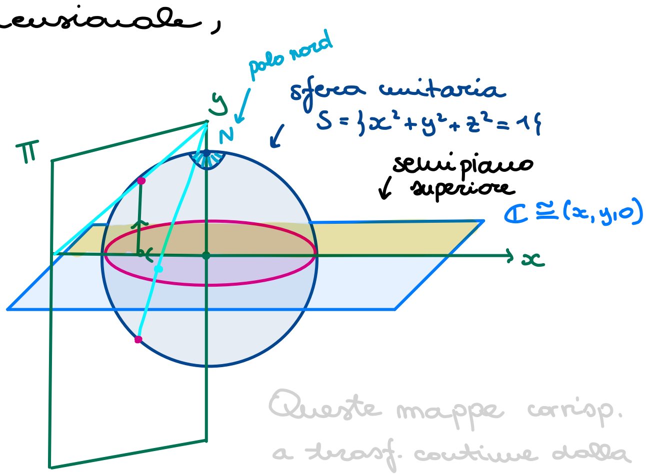
$* = a(\alpha\delta + \beta\gamma) + ib(\alpha\delta - \beta\gamma)$

$$\operatorname{Im} \phi(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{|\gamma z + \delta|^2} \cdot \underbrace{\operatorname{Im}(z)}_{b}$$

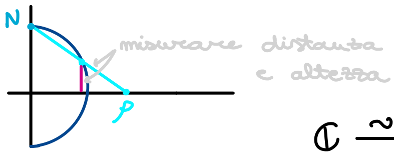
Esercizio: $\psi(z) = \dfrac{iz+1}{z+i}$ verificare che $\psi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} = \{ z : |z| < 1 \}$ (disco unitario)

Verificare $\operatorname{Im}(z) > 0 \Rightarrow |\psi(z)| < 1$ + che è una bigezione.

Idea: I complessi sono un piano bidimensionale, possiamo identificarli come il piano x,y in un sistema tridimensionale.



Es: Scrivere la big. in coordinate polari



Il polo nord lo penso come un punto all'infinito

$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} S \setminus N$

Queste mappe corrisp. a trasf. continue dalla sfera nella sfera

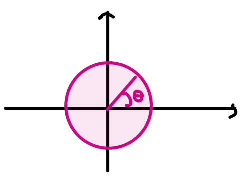
$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} S$ $\quad$ e $\quad \phi(z) = \dfrac{\alpha \bar z + \beta}{\gamma \bar z + \delta}$

$\phi : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ continue per la topologia indotta su $\mathbb{C}$ dall'identificazione con S

Risolvere: $z^2 = \bar z$

forma cartesiana → somme

forma polare → prodotti



$$z = a + ib = (a^2+b^2)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{b}{a^2+b^2}\right) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

($z=0$ è sol)

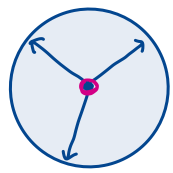
$z^3 = \bar{z} z = |z|^2$

$\boxed{z = \rho e^{i\theta}} \longrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \rho^2$ $\qquad \rho = a^2+b^2 \geq 0$

$\rho e^{i3\theta} = e^{i0} \leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ 3\theta = 0 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2}{3}\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ 3 sol geom. distinte

$\Downarrow$



Esercizi 1) Scomporre x^4+1 come prodotto

$x^4 + 1 = q_1(x)\, q_2(x)$ $\qquad q_i \in \mathbb{R}[x]$ $\qquad i = 1, 2$

$gr(q_i) = 2$

2) Calcolare $\sum_{k \in 3\mathbb{Z}} \binom{n}{k}$

1) $x^4 + 1 = \prod_{i=1}^{4} (x - \xi_i)$ $\qquad \xi_i$ sono le 4 soluzioni di $z^4 = -1$

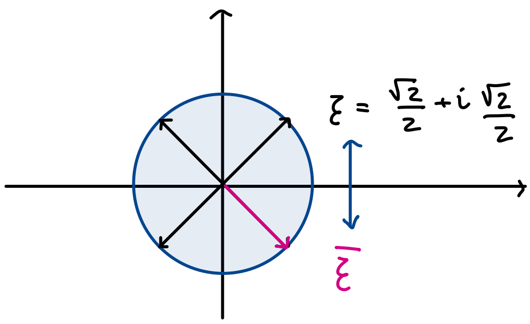
$\rho^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi}$

$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$(z - \underset{a+ib}{\xi})(z - \bar{\xi}) = (z-a)^2 + b^2$

$\left[\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left[\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]$

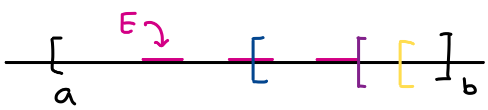


26-10-2021 $\qquad$ lezione 13 $\qquad$ Prof. Novaga

TEOREMA DI BOLZANO-WEIRSTRASS

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO e di CARDINALITÀ INFINITA $\Rightarrow$ E ha punti di ACCUMULAZIONE

Dim: $\underline{n=1}$



$E \subseteq [a, b]$ (idea: restringiamo sempre di più l'intervallo)

costruiamo iterativamente $[a_j, b_j] \subseteq [a_{j+1}, b_{j+1}]$ $\qquad a_0 = a,\ b_0 = b$

$|b_j - a_j| = \frac{b-a}{2^j}$ tc $E \cap [a_j, b_j]$ ha cardinalità infinita

Notazione: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo CHIUSO

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo APERTO

$\bigcap_j [a_j\, b_j] = \bar{x} \in \mathbb{R}$

$\bar{x} = \sup_j a_j = \inf_j b_j$

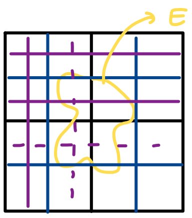
Si ha che $\bar{x}$ è un punto di accumulazione per E, infatti $\forall \varepsilon > 0$

$[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \supseteq [a_j, b_j]$ DEFINITIVAMENTE in j, cioè $\exists j_0$ tale che

$[a_j - b_j] \subseteq [\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon]$ $\quad \forall j > j_0$

Oss: Non è detto che $\bar{x} \in E$

n > 1 La dimostrazione è analoga



Q_0

$E \subseteq Q_0$ M-CUBO. Divido Q_0 in 2^n cubi di lato metà e scelgo Q_1 tc $E \cap Q_1$ ha cardinalità infinita.

$\Rightarrow Q_j \subseteq Q_{j-1}$, $L_j = \frac{L_0}{2^j}$ lunghezza dello spigolo di Q_j

Oss: Non è vero in spazi metrici generali

ES: E CHIUSO $\Leftrightarrow \partial E \subseteq E$

derivato di E

E CHIUSO $\Leftrightarrow$ $DE \subseteq E$ dove $DE = \{x : x$ punto di accumulazione di $E\}$

o E'

$\partial E = \emptyset \Leftrightarrow E \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$

LIMITI DI FUNZIONI

E, F spazi metrici

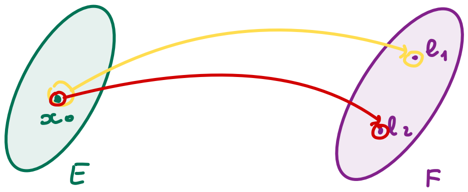
$f : E \setminus \{x_0\} \to F$ funzione

x_0 punto di accumulazione di E. Si dice che f ha limite $\ell \in F$ per $x \to x_0$ se $\forall V$ intorno di ℓ in F $\exists U$ intorno di x_0 in E tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$ (Posso prendere U, V palle).

Oss: • Il limite non dipende da $f(x_0)$

Non è importante se f sia definita o meno in x_0, importa solo ciò che accade in un intorno di quel punto.

• Il limite ℓ si indica $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ed è UNICO (se esiste)



dove mandiamo la palla $\overbrace{\text{più piccola}}^{\text{intersezione}}$?

Non possiamo mandarla in ℓ_1 e ℓ_2

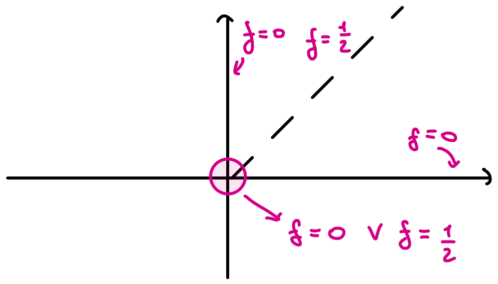
ESEMPI:

• $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

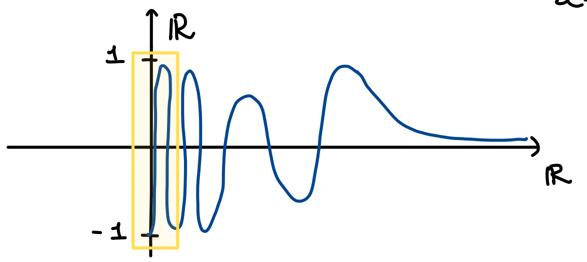
$\downarrow$

NON ESISTE



$x=y \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

• $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$



Per le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è conveniente considerare $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($\overline{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R}$ esteso)

Si può estendere la definizione ponendo

U intorno di $+\infty \iff \exists x$ tc $y \in U \ \forall y > x$

U intorno di $-\infty \iff \exists x$ tc $y \in U \ \forall y < x$

$\Rightarrow$ Sono definiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e i limiti possono essere $\pm\infty$

ES: $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$

PROPRIETÀ DEI LIMITI IN $\overline{\mathbb{R}}$

TEO (Permanenza del segno): $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$ (va bene anche $\ell = +\infty$)

$\Rightarrow \exists U$ intorno di x_0 tc $f(y) > 0 \ \forall y \in U$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \quad \ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ ⊙ $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$ tranne quando otteniamo $\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$

FORME INDETERMINATE

⊙ $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell \cdot m$ tranne quando abbiamo $0 \cdot \infty$

Con le convenzioni: $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$, $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty$

$\pm\infty + c = \pm\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

⊙ $m \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ tranne $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (FORMA INDETERMINATA)

con la convenzione $\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & c > 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$

⊙ $m = 0$, se $g(x) > 0$ in $U \setminus \{x_0\}$ e $\ell \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \end{cases}$

se $g(x) < 0$ si invertono i segni

Oss: $\ell = m = 0$ abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Oss: I limiti di funzione includono i limiti di successione

Def: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in E se $\exists f: \mathbb{N} \to E$ tc $a_n = f(n)$
$\hookrightarrow \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

È definito $\lim_{n \to +\infty} f(n)$

$\lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in E \iff \forall V$ int. di ℓ in E $\exists U$ int. di $+\infty$

tc $f(n) \in V$ $\forall n \in U \cap \mathbb{N}$ $\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tc $a_n \in V$ $\forall n > n_0$

DEF Una succ. a_n tc $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell \in E$, $a_n \to \ell$ si dice convergente in $\mathbb{R}^n$.

Se $E = \overline{\mathbb{R}}$ e $\ell = \pm\infty$, si dice divergente.

ES: $C \subseteq E$ sp. metrico è chiuso $\iff \forall a_n$ succ. in C con $a_n \to \underset{E}{x}$ $\Rightarrow x \in C$
↳ chiusura per successioni

28-10-2021 Lezione 14 Prof. Novaga

Prop: $f, g: E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ x_0 pt. di acc. di E, $f \leq g$ in un intorno di x_0

$\lim_{x \to x_0} f = \ell$ $\lim_{x \to x_0} g = m$ $\Rightarrow \ell \leq m$

Dim: Detta $h = g - f \geq 0$, si ha $\lim_{x \to x_0} h = m - \ell$.

Suppongo per assurdo $m - \ell < 0 \Rightarrow$ (perm. segno) $h(x) < 0$ in un int. di x_0

$\Rightarrow g < f$ in un int. di x_0 ASSURDO

Teorema (2 carabinieri)

$f, g, h : E \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \leq h \leq g$ in un intorno di x_0

$\lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h = \ell$

Dim caso $\ell = +\infty$: $\forall V$ intorno di $+\infty$ del tipo $(a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in V$ $\forall x \in U$, cioè $f(x) > a$ $\forall x \in U$

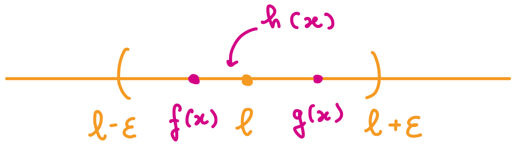
$\Rightarrow h(x) \geq f(x) > a$ $\forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = +\infty$

caso $\ell = -\infty$: analogo

caso $\ell \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon$ $\exists U$ intorno di x_0 : $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $g(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ $\forall x \in U$

$\Rightarrow h(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ $\forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

Graficamente :



Cor 1 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

Dim ($\Leftarrow$) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, con $-|f(x)| \to 0$ e $|f(x)| \to 0$ $\Rightarrow f(x)$ va a 0 per il teorema

($\Rightarrow$) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\forall \varepsilon$ $\exists U$ int. di x_0 tc $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall x \in U$

$\Rightarrow |f(x)| \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

Cor 2 $f, g : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $|g(x)| \leq M$ in un int. di x_0

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$

Dim : $-M|f(x)| \leq f(x) g(x) \leq M|f(x)|$ in un intorno

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} M|f(x)| = 0 \Rightarrow$ per il teorema (2 carab.) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$

COMPATTEZZA

Def E spazio topologico → include tutti gli spazi metrici

① E si dice **COMPATTO** se per ogni **RICOPRIMENTO APERTO** di E, cioè

$\forall [\Omega_i]_{i\in I}$ **FAMIGLIA DI APERTI** tc $E \subseteq \bigcup_i \Omega_i \Rightarrow \exists \underbrace{\Omega_1, \dots, \Omega_N}_{\text{SOTTORICOPRIMENTO FINITO}}$ tc $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} \Omega_n$

② E si dice numerabilmente compatto se vale la proprietà precedente

$\forall I$ indice (E COMPATTO $\Rightarrow$ E NUMERABILMENTE COMPATTO)

③ E si dice **SEQUENZIALMENTE COMPATTO** se $\forall x_n$ successione in E

$\exists x_{n_k}$ **SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE** in E, cioè $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x \in E$

Teorema Se E è metrico: ① $\Leftrightarrow$ ② $\Leftrightarrow$ ③ (①, ②, ③ equivalenti)

OSS: In generale ① $\not\Rightarrow$ ③ , ③ $\not\Rightarrow$ ① e ② $\not\Rightarrow$ ①

Prop: E sp. metrico compatto, $F \subseteq E$ chiuso $\Rightarrow$ F sp. metrico compatto

Dim: $x_n \in F \subseteq E$, $\exists x_{n_k} \to x \in E \Rightarrow$ (F chiuso) $x \in F$

Prop: E metrico, $F \subseteq E$ compatto $\Rightarrow$ F chiuso e limitato

[F limitato significa $F \subset B_r(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$]

Dim. ⊙ F chiuso. Se per assurdo F non è chiuso $\Rightarrow \exists x_0$ pt di acc di F,

$x_0 \notin F$ $\exists x_0 \to x_0, \dots, x_n \in F \Rightarrow \overset{hp}{(F \text{ cpt})}$ $x_{n_k} \to x_1 \in F$ ma $x_1 = x_0$ ↯

⊙ F limitato. Per assurdo F non limitato $\Rightarrow$ dato $x_0 \in F$, $F \not\subseteq B_n(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

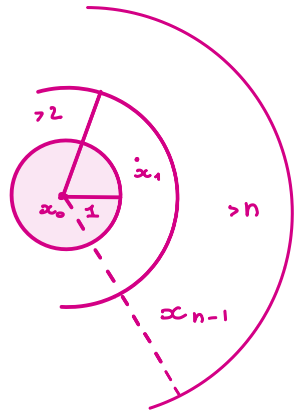
Definiamo $x_1 \in F \setminus B_1(x_0)$,

" $\quad x_2 \in F \setminus B_{d(x_0,x_1)+1}(x_0)$

quindi $x_n \in F \setminus B_{d(x_0,x_{n-1})+1}(x_0)$

la successione x_n verifica $d(x_n, x_m) \geq 1$ $\forall n \neq m$

lo stesso vale per x_{n_k} sottosuccessione $\Rightarrow x_{n_k}$ non può convergere.



Oss: In generale $\exists$ spazi E metrici e sottoinsiemi $F \subseteq E$ chiusi, limitati, ma non compatti.

ES: $\ell_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni limitate $\}$

$a_n \in \mathbb{R}$ e $|a_n| \leq M$ $\forall n$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\|x\| = \sup_n |x_n|$ norma di $x \in \ell_\infty$

Le palle $\overline{B_R(x)} = \{ y \in \ell_\infty : \|x-y\| \leq R \}$ sono chiusi e limitati non cpt.

Basta prendere, in $B_1(0)$, la successione $x_n = (0, \dots, \underset{\text{↳ } n^a \text{ posizione}}{1}, \dots, 0, \dots)$.

Teo: $F \subset \mathbb{R}^n$ CHIUSO e LIMITATO $\Rightarrow$ F COMPATTO

Dim. $x_n \in F$ successione

① $\exists x \in F$ tc $x_n = x$ per infiniti n (frequentemente) $\Rightarrow \exists x_{n_k} = x \quad \forall K$

② Altrimenti, $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ è INFINITO e LIMITATO $\overset{(B.W.)}{\Rightarrow} \exists$ pt. di accumulazione $x \in \mathbb{R}^n$ per $\{x_n\}_n \Rightarrow$ si ottiene $x_{n_m} \to x \in F$ (F chiuso)

Teo E sp. metrico, $F \subseteq E$ compatto infinito $\Rightarrow$ F ha un punto di accumulazione che appartiene ad F.

Dim. Sia x_n succ. in F tc $x_n \notin [x_0, \dots, x_{n-1}] \underset{\text{compattezza}}{\Rightarrow} \exists x_{n_k} \to x \in F$

$x_{n_k} \neq x \quad \forall K \Rightarrow x$ è di accumulazione per F.

FUNZIONI CONTINUE

Def: $f: E \to F$ E, F sp metrici $x_0 \in E$, f si dice CONTINUA in x_0 se

- x_0 è pt. isolato
- x è di accumulazione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in F$

OSS: Dalla def. di limite, f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists U$ intorno di x_0 tc $f(U) \subseteq V$.

Def: f si dice continua su $E' \subseteq E$ se è continua $\forall x_0 \in E'$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

$f, g: E \to \mathbb{R}$ continue in x_0, allora

- $f \pm g$ cont. in x_0
- $f \cdot g$ cont. in x_0
- $g(x_0) \neq 0$, f/g cont. in x_0
- $c \cdot f$ cont. in x_0 $\forall c \in \mathbb{R}$

Teo (Perm. segno) $f(x)$ cont. in x_0 con $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U$ intorno di x_0 tc

$f(x)>0$ (risp $f(x)<0$) $\forall x \in U$

Oss L'insieme delle funzioni continue $f: E \to \mathbb{R}$ che si indica con $C(E)$ o $C^\circ(E)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (di dim infinita).

Teorema di composizione di f. continue (o sostituzione nei limiti)

$f: E \setminus \{x_0\} \to F$ $\quad$ E, F sp. metrici, x_0 pt. di accumulazione, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$

$g: F \to G$ continua in y_0

$\Rightarrow$ la funzione $g\circ f: E\setminus\{x_0\} \to G$ ha limite in x_0 e si ha $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = g(y_0)$,

cioè $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ (sostituzione $y = f(x)$).

Dim Sia V intorno di $g(y_0)$ $\Rightarrow \exists U$ intorno di y_0 tale che $g(U) \subseteq V$

$\Rightarrow \exists W$ intorno di x_0 tale che $f(W) \subseteq U \Rightarrow (g\circ f)(W) \subseteq V$

Cor Se ho $\left.\begin{array}{l} f: E \to F \text{ continua in } x_0 \\ g: F \to G \text{ continua in } f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f$ continua in x_0

29-10-2021 $\quad$ Lezione 15 $\quad$ Prof. Carminati

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad (E, d)$ spazio metrico

Def: f L-Lip $\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\, d(x,y)$

Prop: f L-Lip $\to f$ continua

Dim: Basta dimostrare che $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

$$0 \underset{\text{per il valore assoluto}}{\leq} |f(x) - f(x_0)| \underset{\text{per definizione}}{\leq} L\, d(x, x_0)$$

Passo al limite:

$$\lim_{x\to x_0} 0 = 0 \leq \lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = \ell \leq \lim_{x\to x_0} L\,|x - x_0| = 0$$

Applico il teorema dei due carabinieri: $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

Def: $f: E \to \mathbb{R}$ $\quad f$ loc. Lip $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in E \;\; \exists L > 0 \;\; \exists U$ intorno di a tc $\underbrace{f|_U}_{\text{restrizione di } f \text{ a } U}$ è L-Lip

Prop: f loc. lip. su $E \Rightarrow f$ è continua

Dim: $a \in E$ $\quad \exists U$ int. di a tc $f|_U$ è L-lip $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f$ continua
$\exists L > 0$

Es: $x \mapsto \sqrt{x}$ (i) non è Lip su $[0,+\infty)$ (e nemmeno su $(0,+\infty)$)

(ii) è loc. Lip. su $(0,+\infty)$ ed è continua su $[0,+\infty)$

[(i)] f è L-lip $\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L \quad \forall x \neq y$ (*)

la condizione (*) non è verificata su tutto $[0,+\infty)$ infatti prendendo

$f(x)=\sqrt{x}$, $y=0$ $\quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ quindi (*) non è verificata

Oss. $f(x)=\sqrt{x}$ è L-Lip su $[a,+\infty)$ $a>0$ con $L=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{|x-y|}{2\sqrt{a}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \geq \sqrt{a} \\ \sqrt{y} \geq \sqrt{a} \end{cases}$$

ii) se $x_0>0$, l'intervallo $[\underset{a\doteq x_0/2}{a},+\infty)$ è intorno di x_0 su cui f è L-Lip,

$L=\frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$ è Loc. Lip. su $(0,+\infty)$

Esercizio: Verificare che:

$z \longmapsto 1/z$ è loc lip su $\mathbb{C}^*$ (è L-Lip su $|z|\geq r$ con $L=1/r^2$)

$z \longmapsto z^2$ è loc lip su $\mathbb{C}$ (" " " $|z|\leq r$ con $L=2r$)

ma non sono lip nel loro dominio.

La proprietà di Lip. non è stabile per operazioni algebriche. (Es: x L-Lip, $x\cdot x = x^2$ NO)

Oss: Somma e prodotto di funz. continue è continua

(ma prod. di funz. Lip. può non essere Lip.)

Prop (somme e prodotto di funzioni con limite finito) x_0 pto di accumulazione.

$g,f: E\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=m\in\mathbb{R}$ allora

$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\ell+m$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\ell\cdot m$

Def: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ int di x_0 tc $f(U\setminus\{x_0\})\subset V$ (L)

Oss: È equivalente a chiedere che

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists U$ intorno di x_0 tc $f(U\setminus\{x_0\})\subset B_\varepsilon(\ell)$ (L')

$(L) \Rightarrow (L')$ perché $B_\varepsilon(\ell)$ è un intorno di ℓ

$(L') \Rightarrow (L)$ perché ogni V intorno di ℓ contiene una palla $B_\varepsilon(\ell)$, $\varepsilon > 0$

Dim (Prop.) $\oplus$ fisso $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \exists U_1 \text{ intorno di } x_0 : f(U_1 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(\ell) \\ \exists U_2 \quad '' \quad '' \quad '' : g(U_2 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(m) \end{cases}$$

$U \doteq U_1 \cap U_2$ è ancora intorno di x_0

$$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) = \ell + r_1 & |r_1| < \varepsilon/2 \\ g(x) = m + r_2 & |r_2| < \varepsilon/2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) + g(x) = \ell + m + \overbrace{r_1 + r_2}^{r}$$

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) + g(x) \in B_\varepsilon(\ell + m)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U : (f+g)(U \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(\ell + m)$

Per il limite del prodotto, $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \ell \cdot m \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)g(x) - \ell \cdot m| = 0$

$$0 \leq |f(x)g(x) - \ell \cdot m| \leq |f(x)g(x)| + |\ell g(x) + \ell g(x) - \ell \cdot m|$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|f(x) - \ell|}_{\downarrow \, 0} \; \underbrace{|g(x)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{è limitato} \\ \text{in un intorno} \\ \text{di } x_0}}}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{|\ell| \; \underbrace{|g(x) - m|}_{\downarrow \, 0 \; x \to x_0}}_{\downarrow \, 0}$$

Prodotto di funz. infinit. per funz. limitata è infinitesimo.

$\lim_{x \to x_0} |f(x)g(x) - \ell \cdot m| = 0$

Oss: Il risultato in questa forma copre anche il caso delle successioni

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è semplicemente una funzione definita su $E = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned} \qquad x_0 = +\infty$$

Gli intorni di ∞ sono gli insiemi che contengono una semiretta

$[n_0, +\infty) \cap \mathbb{N}$.

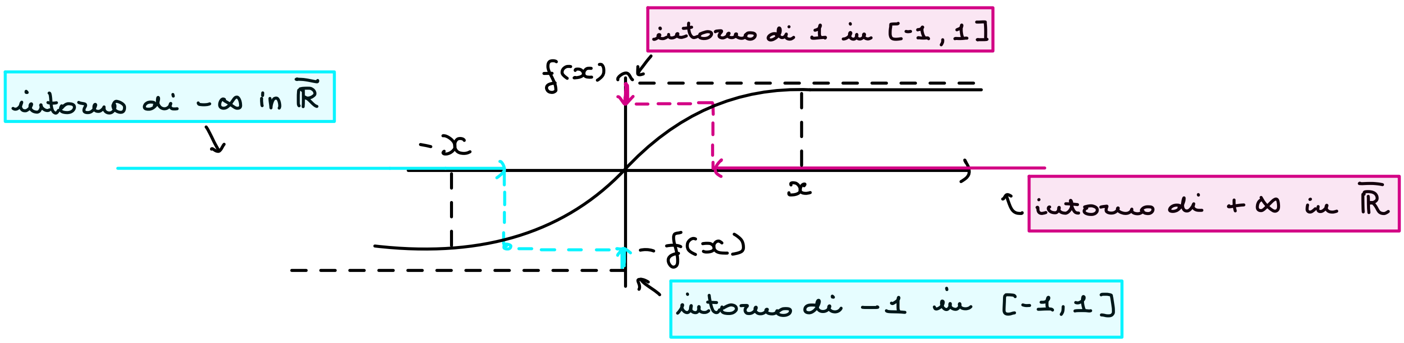
$\exists U$ intorno di ∞ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in U$ ← Formulazione generale

$\exists \bar{n}$ tc $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$ ← Forma particolare nel caso delle successioni

Es: $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ $\quad \varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1, 1)$

È continua, bigettiva, strett. crescente

Suggerimento: $f(x) = -f(-x)$ (:= funzione dispari ⇒ assume valori simmetrici rispetto l'origine), esaminare prima il caso $x > 0$ e poi sfruttare la simmetria.



La topologia in $\overline{\mathbb{R}}$ è definita in modo da "rispecchiare" quella su $[-1,1]$

Se riscrivessimo la dimostrazione del punto ⊕ vista sopra gli intorni U_1 e U_2 sarebbero: $U_1 = \{n \geq n_1\}$, $U_2 = \{n \geq n_2\}$

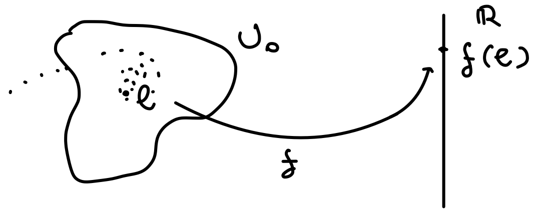
$$U = U_1 \cap U_2 = \{ n \geq \max\{n_1, n_2\} \} \qquad [\cdots]$$

LIMITI DI SUCCESSIONI

ⓒ Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ e $f : U_0 \to \mathbb{R}$ (intorno di ℓ; continua in ℓ)

Formulazione di c) nel caso delle successioni

⇒ $\exists n_0$: $f(a_n)$ è ben definita $\forall n \geq n_0$ & $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell)$



TOOL KIT (Strumenti per il calcolo dei limiti)

a) operazioni algebriche

b) due carabinieri

b') infinitesima × limitata è infinitesima

c) composizione con funz. continue

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ ⇒ $\forall$ intorno U di ℓ $\exists \bar{n} \cdot a_n \in U$ $\forall n \geq \bar{n}$ ⇒ buona def. di $f(a_n)$ per $n \geq \bar{n}$

$\overset{\text{teoria}}{\underset{\text{di comp.}}{\Longrightarrow}}$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell)$

Esercizio: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\ell = f(\ell)$

ℓ è un punto fisso per f

Limiti di successioni: esempi

$a_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

È vero $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ no (vale solo se $a_n > 0$ defin.)

Se $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n$ non converge

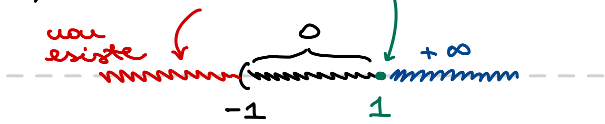
dividere o moltiplicare per questo è uguale

Infatti $a_{2n} \longrightarrow +\infty$ mentre $a_{2n+1} \longrightarrow -\infty$

$a_n = a^n$

$a \in \mathbb{R}$ fissato

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \nexists & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Dim.

$\boxed{a > 1} \qquad a = 1 + \delta$ con $\delta > 0$

$$(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta$$

Bernoulli

$(1+\delta)^n \to +\infty$, $n\delta \to +\infty$ per $n \to \infty$

$a = 1$ e $a = 0$ banali

$\boxed{0 < |a| < 1}$

$\Downarrow$

NB: $1/|a| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\boxed{(1/|a|)^n}} = 0$$

↳ $+\infty$ per il punto prec.

Esercizi: $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} \qquad a > 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, 2^n}{n^n}$

Prop: Se $(a_n)(b_n)$ sono succ. a termini positivi (i.e. $a_n > 0 \ \forall n$, $b_n > 0 \ \forall n$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Allora $a_n \geq c\, b_n \quad \forall n \geq n_0$ (con $c = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$)

Dim. (*) $\Leftrightarrow a_{n+1} b_n \geq b_{n+1} a_n \quad \forall n \geq n_0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq \frac{a_n}{b_n} \quad \forall n \geq n_0$$

Posto $r_n \doteq \frac{a_n}{b_n}$ abbiamo $r_{n+1} \geq r_n \quad \forall n \geq n_0$ quindi $r_n \geq r_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ovvero $\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \quad \forall n \geq n_0$

$$a_n \geq c\, b_n \quad \forall n \geq n_0$$

Applicazione: $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} \quad (a > 1)$

Fissiamo b A.C. $1 < b < a$ (p.es. $b = \frac{a+1}{2}$)

Poniamo $a_n \doteq b^n$, $b_n \doteq n^2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1 \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$$

Quindi $\exists\, n_0$ tc $\frac{b_{n+1}}{b_n} < b \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq c b_n \quad \forall n \geq n_0$

$$b^n \geq c\, n^2 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\frac{a^n}{n^2} = (a/b)^n \cdot \frac{b^n}{n^2} \geq (a/b)^n \cdot c \quad \forall n \geq n_0$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad (a/b) > 1$$

$$+\infty$$

Pertanto per il th dei due carabinieri (in questo caso ne basta 1)

si ha: $\frac{a^n}{n^2} \to +\infty$

02-11-2021 Lezione 16 Prof. Novaga

FUNZIONI CONTINUE IN SPAZI METRICI

Prop: $f: E \to F$ continua in $x_0 \in E \Leftrightarrow \forall\, x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ si ha $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

Dim: Per esercizio.

Oss: Non vale in uno spazio topologico generale

TEOREMA DI WEIRSTRASS

$f: E \to \mathbb{R}$ continua, E sp. metrico compatto

$\Rightarrow f$ ammette MASSIMO e MINIMO in E cioè $\exists\, x_m, x_M \in E$ tali che

$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n) \quad \forall x \in E$

OSS: Si applica a $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se E è chiuso e limitato

Dim: Mostriamo che $\exists x_m$ di MINIMO.

Sia $\ell = \inf_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e sia $y_n \in f(E)$ con $y_n \to \ell$

$y_n = f(x_n)$, $x_n \in E$. E compatto $\Rightarrow \exists x_{n_k} \to x_m \in E$

f continua $\Rightarrow f(x_m) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = \ell$

x_m è di MINIMO. Analogo per x_n di MASSIMO.

SUCCESSIONI DI CAUCHY

E sp. metrico, x_n successione in E

x_n si dice di CAUCHY se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ tc $d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$

Oss. ⊙ $x_n \to x \in E \Rightarrow x_n$ è di CAUCHY

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon \text{ tc } d(x_n, x) < \varepsilon/2 \quad \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \\ d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \end{array} \right]$$

⊙ x_n di Cauchy $\Rightarrow x_n$ è limitata

Oss: In generale possono esistere succ. di Cauchy non convergenti

ES: $E = \mathbb{Q}$ $\quad x_n \in \mathbb{Q} \quad x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ è di CAUCHY

Prop: $E = \mathbb{R}^n$, x_n di C. $\Rightarrow x_n \to x \in \mathbb{R}^n$

Dim: x_n di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}_n$ è LIMITATO

$\Rightarrow$ Caso ① $\{x_n\} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ FINITO

$\overset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} x_n = \bar{x}_i \quad \forall n$ abb. grande $\Rightarrow x_n \to \bar{x}_i$

Caso ② $\{x_n\}$ INFINITO $\Rightarrow \exists x$ di ACCUMULAZIONE

$\Rightarrow \exists x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x \quad \underset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \quad x_n \to x$

Infatti $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ tc $|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$

$\exists K_\varepsilon$ tc $|x_{n_k} - x| < \varepsilon \quad \forall k > K_\varepsilon$

$\Rightarrow |x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ dove scelgo

$k > k_\varepsilon$ tale che $n_k > n_\varepsilon$

Def: lo spazio metrico E è completo se tutte le succ. di Cauchy in E convergono.

OSS: $\mathbb{R}^n$ è completo, $\mathbb{Q}$ non è completo,

E sp. metrico compatto $\Rightarrow$ E è completo

In questo corso questa nozione è importante

OSS: $\exists$ campi ordinati e completi (in questo senso) $\neq \mathbb{R}$ (ES. $\mathbb{R}(x)$)

Però $\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato, completo e archimedeo.

vieta gli infinitesimi

OSS: Un altro modo per costruire $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R} = \{x_n \in \mathbb{Q}$ di CAUCHY$\}/\sim$

$\{x_n\} \sim \{y_n\}$ se $(x_n - y_n) \xrightarrow[n]{} 0$

ES: $E = C^0([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue$\}$

spazio vettoriale $\quad d(f,g) = \max_{[0,1]} |f-g| \quad$ DISTANZA

$\Rightarrow$ E sp. metrico completo (VA DIMOSTRATO)

Def: E spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) è normato se $\exists \; \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ tc

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (SUBADDITIVITÀ)

OSS: E sp. normato è metrico ponendo $d(x,y) = \|x-y\|$

Def: E spazio normato è uno spazio di Banach se, come spazio metrico, è completo.

ES: $\mathbb{R}^n$, $C^0([0,1])$, $C^0(K)$ con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto sono spazi di Banach

SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$, LIMITE NOTEVOLE

CRITERIO DEL RAPPORTO: $a_n > 0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n]{} x \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 1 & \Rightarrow a_n \to 0 \\ x > 1 & \Rightarrow a_n \to +\infty \end{cases}$$

Segue dal confronto di a_n con $(x \pm \varepsilon)^n$ e dal fatto che

$x^n \to 0$ per $x \in [0,1)$ e $x^n \to +\infty$ per $x > 1$. VERIFICA PER ES.

Applicazioni :

• $x_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$ $\alpha > 0$, $a > 1$ chiedere questo è come chiedere chi va a ∞ più velocemente

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{a^n}{a^{n+1}} = \Big(\overbrace{1 + \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\downarrow_n \, 0}}^{1}\Big)^\alpha \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$ $a^n \xrightarrow[n]{} \infty$ più veloc.

• $x_n = \frac{a^n}{n!}$ $a > 1$ $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, $n! \to +\infty$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} \to 0 \Rightarrow \frac{a^n}{n!} \to 0$$ $n! \to \infty$ più velocemente

• $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$ dove $e = \underbrace{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71\ldots = e}_{\text{NUMERO DI NEPERO}}$

$\Rightarrow x_n = \frac{n!}{n^n} \to 0$ $n^n \to \infty$ più veloc.

Quindi, per n grande, si ha $n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$ $\alpha > 0$, $a > 1$

Verifichiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge.

Prop : x_n monotona, cioè $x_{n+1} \geq x_n$ $\forall n$ o $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n$,

x_n LIMITATA $\Rightarrow x_n$ CONVERGE

Dim : $\{x_n\}$ ha un punto di accumulazione

x_n crescente, l'unico punto di accumulazione è $\sup\limits_x x_n$

$\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x = \sup x_n \Rightarrow x_n \xrightarrow[n]{} x$

Viceversa, x_n decrescente $\Rightarrow x_n \to \inf\limits_n x_n$

Prop: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata (converge ad $e > 2$)

Dim. 1 x_n crescente

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\ \ n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) = x_n$$

2 x_n limitata, in particolare $x_n < 3 \quad \forall n$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)}_{<1} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{1}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^n}$$

Osserviamo che
1 $k! \geq 2^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
2 $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$ ← DA RICORDARE

$$x_n < 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \underset{2}{=} 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n$$

Restano da vedere 1 e 2

1 Per induzione $k! \geq 2^{k-1}$

- $k=1 \qquad 1 \geq 1$ ok
- $k=2 \qquad 2 \geq 2$ ok
- $k>2 \qquad$ supp. $(k-1)! \geq 2^{k-2} \Rightarrow k! \geq 2(k-1)! \geq 2\cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$

2 Segue dalla formula:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

$$= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

Ponendo $a=1$, $b=x$

Oss: Dalla diseg. $x_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ si ha

$$e \leq \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overset{\text{DEF}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

In realtà si ha proprio $\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}$

04-11-2021 Lezione 17 Prof. Novaga

LIMITI DI SUCCESSIONI E FUNZIONI

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \underset{\text{DEF}}{=} e \in \mathbb{R}$

Oss: Dall'uguaglianza $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ si può vedere (va dimostrato)

$e \notin \mathbb{Q}$, cioè $e \neq p/q$ $\forall p, q \in \mathbb{Z}$

- $\lim_{n}\frac{n!}{n^n} = 0$ per criterio del rapporto

- $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$ $\quad x>0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{\cancel{n+1}}(n+1)\cancel{!}}{\cancel{x^n}\,\cancel{n!}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_{n}\frac{x^n n!}{n^n} = \begin{cases}\infty & x>e\\ 0 & x\in(0,e)\end{cases}$$

Vale la formula di Stirling per $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$ VA DIMOSTRATA

Dove $a_n \sim b_n$ per $n\to\infty$ se $\lim_{n}\frac{a_n}{b_n}=1$

$$\Rightarrow \lim_{n}\frac{e^n n!}{n^n} \sim \lim_{n}\sqrt{2\pi n} = +\infty$$

— o —

Siano P, Q polinomi, $P(n)=\sum_{k=0}^{N}a_k n^k$, $Q(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k n^k$, $N=\deg P$, $M=\deg Q$

$$\lim_{n}\frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n}\frac{a_N n^N}{b_M n^M} = \frac{a_N}{b_M}\lim_{n} n^{N-M} = \begin{cases}\operatorname{seg}\left(\frac{a_N}{b_M}\right)\infty & N>M\\ a_N/b_M & N=M\\ 0 & N<M\end{cases}$$

Infatti $P(n) = a_N n^N\left(1+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{a_k}{a_N}\frac{1}{n^{N-k}}\right)$

$Q(n) = b_M n^M\left(1+\sum_{k=0}^{M-1}\frac{b_k}{b_M}\frac{1}{n^{M-k}}\right)$

$$\lim_{n}\frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n}\frac{a_N n^N}{b_M n^M}\cdot\underbrace{\lim_{n}\frac{1+\sum_k\frac{a_k}{a_N}\frac{1}{n^{N-k}}\to 0}{1+\sum\frac{b_k}{b_M}\frac{1}{n^{M-k}}\to 0}}_{=1}$$

Nei limiti conta solo il termine che va a ∞ più velocemente o quello che va a 0 più lentamente.

⊙ $\lim_n a^{1/n}$ $\quad a>0$

$a=1 \quad a^{1/n}=1$

$a>1 \quad a^{1/n}$ DECRESCENTE $\quad a^{1/n}>1 \ \forall n \Rightarrow \exists \lim_n a^{1/n} = \ell \geq 1$ e si ha

$a^{1/n} \geq \ell \ \forall n \to a \geq \ell^n \ \forall n \Rightarrow \ell = 1$

Analogamente, se $a \in (0,1)$, $a^{1/n}$ è crescente, $a^{1/n}<1 \ \forall n$ e $\lim_n a^{1/n} = 1$

— o —

Utilizzando la monotonia, gli stessi risultati valgono per limiti di funzioni, in particolare:

$x^\alpha \ll a^x \ll x^x$ per $x \to \infty$ $\quad \alpha>0, \ a>1$

cioè:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall \alpha>0 \quad a>1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = 0 \quad \forall a>1$$

$$\lim \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} a_N/b_n \cdot \infty & N>M \\ a_N/b_M & N=M \\ 0 & N<M \end{cases} \quad \text{con} \quad P(x)=\sum_{k=0}^{N} a_k x^k, \quad Q(x)=\sum_{k=0}^{M} b_k x^k$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left[\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} \right]$$

$\searrow e$

parte intera di x

SIMBOLI DI LANDAU

Notazione utile nei limiti

Def Data $f(x)$ tc $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

DEF $o(f)$ per $x \to x_0$ come l'insieme delle funzioni $g(x)$ (o una generica funzione)

o piccolo

tc $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

ES: $x_0=0 \quad f(x)=x^\alpha \quad \alpha \geq 0$

$g \in o(f)$ o $g=o(f)$ è una f. che va a zero più rapidamente di x^α

In particolare $x^\beta = o(x^\alpha)$ se $\beta>\alpha$.

Se invece $x_0 = +\infty \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha)$ se $\beta < \alpha$

In particolare $P(x)$ è un polinomio:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k = a_N x^N + o(x^N) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$P(x) = a_0 + o(1) \quad \text{per } x \to 0$$

Def: $O(f)$, per $x \to x_0$, è l'insieme delle funzioni g tc $\exists C > 0$ e
↳ O grande
U int. di x_0 tc $|g(x)| \leq C|f(x)|$ $\forall x \in U$ $x \neq x_0$.

In particolare $o(f) \subseteq O(f)$

ES: $x^\beta = O(x^\alpha)$ $\begin{cases} \text{per } x \to 0 & \Leftrightarrow \beta \geq \alpha \\ \text{per } x \to \infty & \Leftrightarrow \beta \leq \alpha \end{cases}$

$$P(x) = O(x^N) = a_N x^N + O(x^{N-1}) \quad \text{per } x \to \infty$$

VALGONO LE SEGUENTI REGOLE:

1) $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
2) $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$
3) $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
4) $o(f) + o(g) = o(\max(|f|, |g|))$
5) $O(f) + O(g) = O(\max(|f|, |g|))$

ES: $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

$$o(x^\alpha) + o(x^\beta) = \begin{cases} o(x^\alpha) & x \to \infty \\ o(x^\beta) & x \to 0 \end{cases}$$

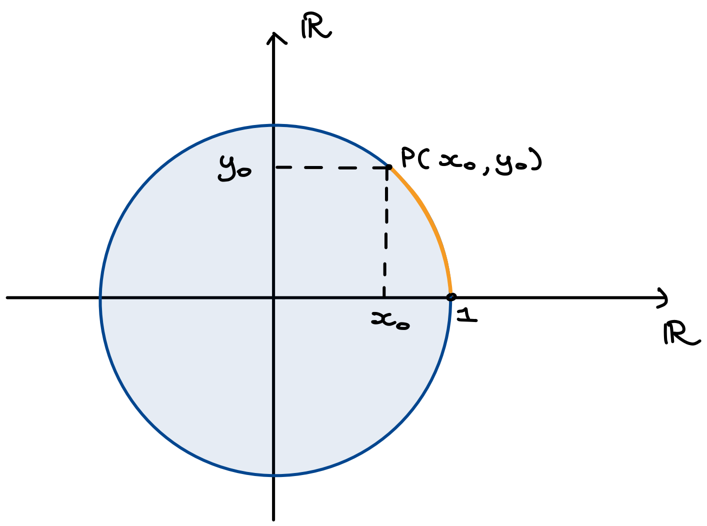
$\alpha \geq \beta$

Oss: $f + o(f) \sim f$ per $x \to x_0$

$$\frac{f + o(f)}{g + o(g)} \sim \frac{f}{g} \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$$

LIMITI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

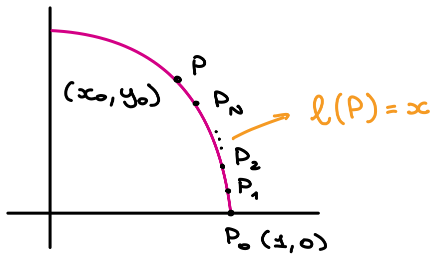


$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

cerchio unitario

$\ell(P)$ = lunghezza dell'arco tra $(1,0)$ e P



$$\ell(P) \overset{\text{DEF}}{=} \sup_{\{P_i\}_i} \sum_{i=1}^{N} |P_{i+1} - P_i|$$

Dato $x \in [0, 2\pi)$ $\exists!$ $P \in S^1$ tc $\ell(P) = x$

$\ell(P) = (x_0, y_0)$ definiamo $\sin(x) = x_0$ e $\cos(y) = y_0$

Estendiamo $\sin(x)$ e $\cos(x)$ a funzioni 2π periodiche su $\mathbb{R}$,

cioè $\sin(x) \overset{\text{DEF}}{=} \sin(x_0)$ dove $x_0 \in [0, 2\pi)$ è tc $x = x_0 + 2k\pi$ $\;k \in \mathbb{Z}$

e lo stesso per $\cos(x)$.

Def alternativa

Def. la funzione $e^{ix} : \mathbb{R} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ omo di gruppi

$\Rightarrow \cos(x) \overset{\text{DEF}}{=} \mathrm{Re}(e^{ix}) \qquad \sin(x) \overset{\text{DEF}}{=} \mathrm{Im}(e^{ix})$

Dove e^{ix} è: (1) L'omomorfismo di periodo minimo 2π con $\mathrm{Im}(e^{i}) > 0$

(2) $e^{ix} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$

LIMITE IN $\mathbb{C}$

Dalla definizione otteniamo $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$

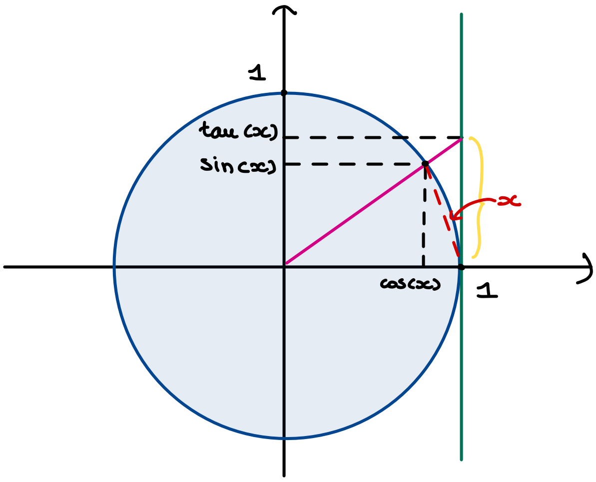
$\Rightarrow$ $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono funzioni continue infatti si ha:

$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) \xrightarrow[h \to 0]{} \sin(x), \quad \cos(x + h) \xrightarrow[h \to 0]{} \cos(x)$

Si ha inoltre $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$, cioè $\sin(x) = x + o(x)$

Questo segue dalle disuguaglianze $\sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

VA DIMOSTRATA



$x \in [0, \pi/2)$

Dividendo per $\sin(x)$ si ottiene

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$\frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \to 0} 1$, $\frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \to 0} 1$

Conseguente:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + o(x)$$

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x)$$

infatti.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{1 - \cos^2(x)}^{\sin^2(x)}}{x^2(1 + \cos(x))} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2}$$

05-11-2021 Lezione 18 Prof. Carminati

Esercizi per casa:

1) $a = 2020^{2021}$ $b = 2021^{2020}$ $\max\{a, b\} = ?$

2) Determinare sup & inf di $A := \{ \sqrt[n]{n} : n \geq 2 \}$

3) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{2^n + 3^n}$

— o —

Prop: Se $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\geq)}{\leq} \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \exists c > 0 : a_n \overset{(\geq)}{\leq} c\, b_n$$ (x es.)

a_n succ. data

b_n termine di paragone $\to b_n = b^n$ $\quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = b$

Cor: Se $a_n > 0$

i) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b$ $\quad \forall n \geq n_0$ $\quad \exists c :$ $\quad a_n \leq c\, b^n$ $\quad \forall n \geq n_0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\forall b > \ell$ $\quad \exists n_0, c$ tc $\boxed{a_n \leq c\, b^n \quad \forall n \geq n_0}$

Oss: se $\ell < 1$ posso scegliere $b \in (\ell, 1)$ ottenendo che $a_n \to 0$

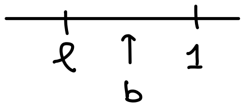
con velocità esponenziale.

Dim: i) deriva da prop. precedente con $b_n = b^n$

ii) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell < b \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, b)$ definitivamente

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ definitivamente (e si conclude con (i))

Oss: basta prendere $b = \frac{\ell + 1}{2}$



Cor: Se $a_n > 0$

i) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b$ $\quad \forall n \geq n_0$ $\quad \exists c > 0 :$ $\quad a_n \geq c\, b^n$ $\quad \forall n \geq n_0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\forall b < \ell$ $\quad \exists n_0, c$ tc $\boxed{a_n \geq c\, b^n \quad \forall n \geq n_0}$

Oss: se $\ell > 1$ posso scegliere $b \in (1, \ell)$ ottenendo che $a_n \to +\infty$

con velocità esponenziale.

Dim. x esercizio:

—— o ——

Es: $a_n = \binom{2n}{n} a^n$ $\quad$ con $a > 0$ fissato

Discutere il comportamento di a_n al variare di $a > 0$

(Oss: $\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n$)

$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} a^n$ $\qquad (2n)! \neq 2(n!)$

$a^{n+1} = a \cdot a^n$

$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

$(n+1)! = (n+1)\, n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} a^{n+1} \cdot \frac{n!^2}{(2n)!\, a^n}$$

$$= \frac{a(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2a \cdot \frac{2n+1}{n+1} \longrightarrow 4a$$

$\frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$

Per il criterio del rapporto: $4a<1 \leftrightarrow a<1/4 \Rightarrow a_n \to 0$ per $n\to\infty$

$4a>1 \leftrightarrow a>1/4 \Rightarrow a_n \to +\infty$ per $n\to\infty$

E se $\boxed{a_n = 1/4\,?}$ $\longleftarrow$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Provo a confrontare a_n con $b_n = n^{-\alpha}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \\ \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \end{cases} \quad \text{per } n\to+\infty$$

Se $0<\alpha<1/2$ allora $\boxed{\underbrace{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}}_{\circledast} \text{ definitivamente } \circledast}$

Infatti $\circledast \Leftrightarrow \cancel{1} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \cancel{1} - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2} - \alpha\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$\Updownarrow$

$0 \leq \dfrac{1}{n}\left(\underbrace{\dfrac{1}{2} - \alpha}_{>0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{infinitesimo}}}{o(1)}\right)$

$\exists n_0$: è vera $\forall n \geq n_0$

$\circledast \Rightarrow \exists c: \; 0 \leq a_n \leq c b_n = c n^{-\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1/2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

es: $\alpha = 1/3$

— o —

$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ per $n\to+\infty$ $\quad 2<e<3$

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow +\infty$ per $n\to+\infty$ $\quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n^2\cdot\dfrac{1}{n} \geq 1+n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1$ per $n\to+\infty$ $\quad = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq \left[1+\dfrac{1}{n}\cdot n\right]^n \geq 2^n \longrightarrow \infty$

$1 \leq \left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} < [e]^{1/n}$ $\quad a_n \doteq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$[\;] = a_{n^2}$

$a_n \nearrow \Rightarrow a_{n^2} \nearrow$

2 carab. $\downarrow 1$ $\qquad \xrightarrow{n\to\infty} 1$

(c) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \longrightarrow e$ per $x\to+\infty$ $\quad (x\in\mathbb{R})$

definitivamente

$t\in\mathbb{R}$ fissato $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n = \left[\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{n/t}\right]^t$ $\quad n\to\infty \quad 1+\dfrac{t}{n}\to 1 \quad 1+\dfrac{t}{n}>0$ defini.

$(t>0)$ $\quad \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$ $\quad$ uso la formula (c) con $x = n/t$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-volte}}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{a^x \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ serve che } a>0}$

$\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{n}{t}\right) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = e$

Quindi $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \longrightarrow e^t$ perché $x \longmapsto x^t$ è continua su $(0,+\infty)$

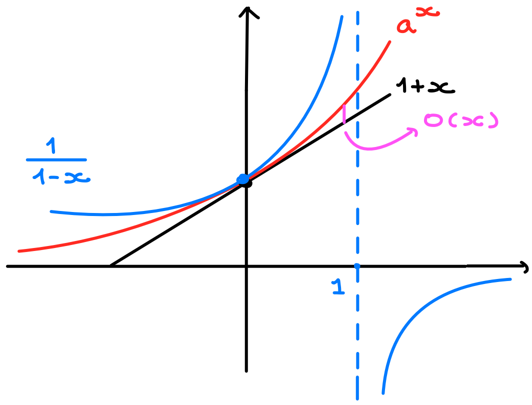
lo stesso risultato vale per $t<0$ (per esercizio)

[Sugg: mostrare che $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ usando il cambio di variabile $t = -(x+1)$]

—— o ——

Da $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \longrightarrow e^t$ segue $e^t \geq 1+t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\underbrace{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n}_{\substack{\geq\, 1 + n\left(\frac{t}{n}\right) = 1+t \\ \text{definit.}}}$ Bernoulli $\longrightarrow$ $\alpha > -1 \quad (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$



$e^{-t} \geq 1-t \longrightarrow \boxed{e^t \leq \frac{1}{1-t}}$

$1-t>0 \qquad e^{-t} \cdot e^t = 1$

Proprietà di $\exp(x) = e^x$

$\exp: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$

1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

2) $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2') $e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$

3) e^x è str. crescente (quindi inj)

4) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

5) exp è continua ($\Rightarrow$ surgettività su $(0,+\infty)$)

[es: $\forall a \in \mathbb{R}$ exp è L-lip su $(-\infty, a]$ con $L = e^a$]

6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ovvero $e^x = 1 + x + \boxed{o(x)}$ per $x \to 0$

Dim: 1), 2), 2'), 4) già visti (sopra o a lezione)

se $x > x_0 \Rightarrow e^x - e^{x_0} = e^{x_0}\left(e^{x-x_0} - 1\right) > 0$

Ⓕ $\rightarrow$ $\underset{\substack{\downarrow\\0}}{h} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{e^h - 1} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{1-h} - 1}$ se h piccolo, $\lim_{h\to 0} e^h - 1 = 0$

$$\lim_{x\to x_0} e^x - e^{x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0}\Big(\overbrace{e^{x-x_0} - 1}^{\text{tende a zero}}\Big) = 0 \Rightarrow \text{exp è continuo}$$

Riprendendo Ⓕ ottengo:

$$h \le e^h - 1 \le \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h} \qquad (\text{con } |h|<1)$$

$$0 \le \underbrace{e^h - 1 - h}_{\omega(h)} \le \frac{h}{1-h} - h = \frac{h^2}{1-h}$$

$e^h = 1 + h + \omega(h)$ con $\omega(h) = o(h)$ per $h \to 0$

infatti $\underset{\substack{\downarrow\\0}}{0} \le \dfrac{\omega(h)}{h} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\dfrac{h}{1-h}}$ per $h \to 0$

$$e^h = 1 + h + o(h) \Rightarrow e^h - 1 = h + o(h)$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \quad \text{perché} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$\exp: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (0,+\infty)$ bigettiva $\Rightarrow$ esiste l'inversa : $\log \doteq \exp^{-1}$

inversa insiemistica

$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^{\log t} = t \quad \forall t \in (0,+\infty)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\exp"] & (0,+\infty) \arrow[l, bend left, "\log"] \end{tikzcd}$$

Proprietà:

1) $\log : (0,+\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ è strettamente crescente continua,

2) $\log(1) = 0$,

3) $\log t > 0 \Leftrightarrow t > 1$,

4) $\log(t \cdot s) = \log t + \log s$,

5) $\log(t) \le t - 1 \quad \forall t > 0$

Oss: $\exp_a(x) := e^{x \log a}$, $\exp_a(x) = a^x$

09-11-2021 Lezione 19 Prof. Carminati

ES 2020^{2021} vs 2021^{2020}

$n^{n+1} > (n+1)^n$ per quali n è vera?

$\xrightarrow{\div n^n} \quad n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$n \geq 3 \Rightarrow n \geq 3 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow n^{n+1} > (n+1)^n$$

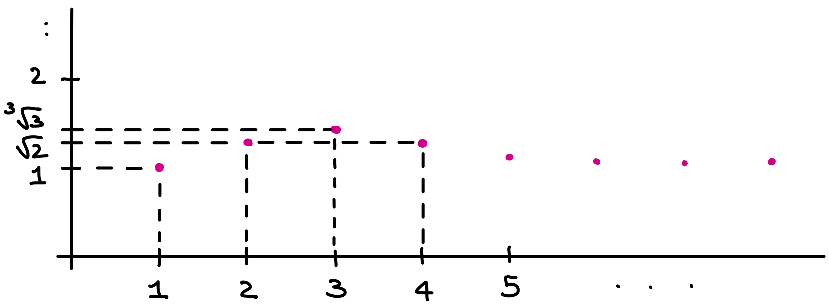
— o —

$A = \{ \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{a_n} : n \geq 2 \}$ $\qquad$ $\sup A = ?$ $\qquad$ $\inf A = ?$

a_n è str. decrescente per $n \geq n_0$ $\overset{def}{\iff}$ $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq n_0$

$\iff (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{1/n} \iff (n+1)^n < n^{n+1}$ vera per $n \geq 3$

n	$\sqrt[n]{n}$
1	1
2	$\sqrt{2} \sim 1,41$
3	$\sqrt[3]{3} \sim 1,44$
4	$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$
5	$\sqrt[5]{5} \sim 1,38$
$\vdots$	$\vdots$



$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \iff 8 < 9$

$\sup A = \sqrt[3]{3}$ $\qquad$ $\boxed{\inf A = \lim_{n\to\infty} a_n = 1}$ (*)

$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0 : \underset{\overset{\shortparallel}{\sqrt[n]{n}}}{a_n} < 1 + \delta \quad \forall n \geq n_0$

$\Updownarrow$

$n < (1+\delta)^n \iff 1 < \dfrac{(1+\delta)^n}{n}$

definitiv. vera perché $\dfrac{(1+\delta)^n}{n} \longrightarrow +\infty \quad \forall \delta > 0$

— o —

$$\lim \sqrt[2n]{2^n + 3^n} = ?$$

$\sqrt[2n]{3^n} \leq \sqrt[2n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[2n]{2 \cdot 3^n}$ $\qquad$ perché $3^n = (\sqrt{3})^{2n}$

$\underset{\downarrow \atop \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \leq \underset{\downarrow \atop \sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt[2n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}} \leq \underset{\downarrow \atop \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,\underset{\downarrow \atop 1}{\underbrace{\sqrt[2n]{2}}}$ $\qquad$ per i carabinieri

— o —

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\shortparallel$

$\left[\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t}\right]^t$

$t > 0 \to \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$t < 0 \to \boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$x = \dfrac{n}{t}$

$\boxed{x \to -\infty}$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-x-1+1}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) = e \qquad y \doteq -(x+1)$$

— o —

$$\lim_{t\to+\infty} t\cdot e^{-t} = 0$$

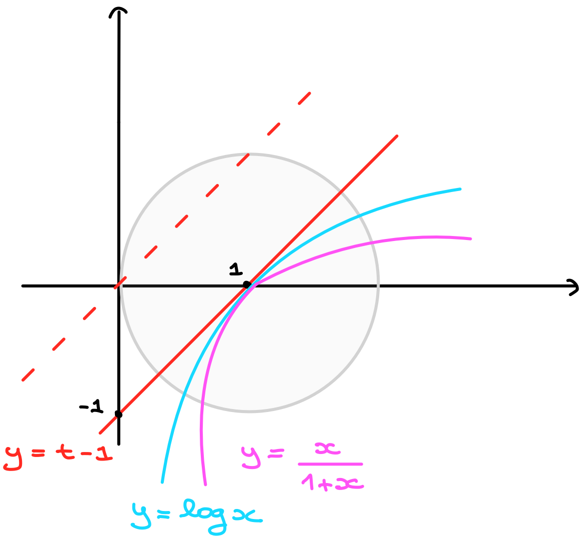
$$\lim_{t\to+\infty} \underbrace{t^{\alpha}e^{-t}}_{\alpha>0} = 0 \qquad \begin{matrix}\alpha\le 0\\ \alpha>0\end{matrix}$$

$$\left(t e^{-t/\alpha}\right)^{\alpha} \qquad \lim_{t\to\infty} t e^{-t/\alpha} = 0$$

— o —

FUNZIONE LOGARITMO

$\log : (0,+\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$



Proprietà: 1) $\log(t\cdot s) = \log t + \log s$

$\hookrightarrow \log t = -\log\frac{1}{t} \qquad s=\frac{1}{t}$

2) $\log t \le t-1 \qquad \forall t>0$

$\hookrightarrow \log(1+\alpha)\le\alpha \qquad \forall\alpha>-1$

1) $\begin{cases} t=e^{x}\\ s=e^{y}\end{cases} \qquad e^{x+y} = e^{x}\cdot e^{y}$

$\Updownarrow$

$\log e^{xy} = \log(e^{x}\cdot e^{y})$

$\begin{cases} x=\log t\\ y=\log s\end{cases} \qquad \log t + \log s = x+y = \log(t\cdot s)$

2) $e^{x}\ge 1+x \qquad t=e^{x} \qquad x=\log t$

$t \ge 1+\log t \qquad \log t\le t-1$

$\log(1+\alpha)\le\alpha \qquad \forall\alpha>-1 \ (*)$

$$-\log(1+\alpha) = \log\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) = \log\left(1+\frac{1}{1+\alpha}-1\right) = \log\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \overset{(*)}{\le} -\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \overset{(\cdot)}{\le} \log(1+\alpha) \left(\overset{(\cdot)}{\le}\alpha\right)$$

log è strettamente crescente (perché inversa di una strettamente cresc.)

e continua (è L-lip $\forall\delta>0$ su $[\delta,+\infty)$ con $L=\frac{1}{\delta}$)

Se $x, y \in [\delta, +\infty]$ SPG $x<y$

$$0 < \log y - \log x = \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log\left(1 + \overbrace{\frac{y}{x} - 1}^{\alpha}\right) \overset{(\bullet\bullet)}{\leqslant} \frac{y-x}{x} \leqslant \frac{y-x}{\delta}$$

$$|\log y - \log x| \leqslant \frac{1}{\delta}|y-x| \quad \forall x, y \in [\delta, +\infty)$$

- $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ (x es, usando la def di limite)

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (ii) $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

$$\frac{x}{1+x} - x \leqslant \log(1+x) - x \leqslant x - x = 0$$

$$-\frac{x^2}{1+x} \leqslant \underbrace{\log(1+x) - x}_{\omega(x)} \leqslant 0 \qquad (\forall x > -1) \qquad \omega(x) = o(x) \text{ per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x + \omega(x) = x + o(x) \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{(i)}$$

- $\lim_{\boxed{x\to 0}} x \log x$ cambio $t = -\log x$, $x = e^{-t}$ NB: $x \to 0$, $t \to +\infty$

$$\lim_{\boxed{t\to+\infty}} -\frac{t}{e^t} = 0 \quad \text{(visto prima)}$$

↳ va ad ∞ più velocemente

- $\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$x > 0$

$\alpha > 0$

$$x^\alpha \log x = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \log x^\alpha \qquad x^\alpha = y \longrightarrow 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\alpha} y \log y = 0$$ ci riconduciamo al caso di prima

- $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \quad \forall \alpha > 0$ $y = \frac{1}{x}$, si risolve come prima

- $a^x = e^{x \log a} \qquad a > 0,\ a \neq 1$

$\log_a$ inversa di a^x → $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

$$a^{\frac{\log x}{\log a}} = e^{\left(\frac{\log x}{\log a}\right)\log a} = e^{\log x} = x$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(1+x)}{\log a}}{x} = \frac{1}{\log a} \qquad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

- $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = 1$ $\qquad a^x = e^{x\log a}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log x}-1}{x\log x} \cdot \log x = -\infty$ $\qquad \frac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x} \cdot \frac{\alpha\log(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$

$\alpha\log(1+x) \to 0$

$\sim \circ \sim$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$H_1 = 1$
$H_2 = 1 + \frac{1}{2}$
$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$\vdots$
$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$H_n \nearrow$

$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \qquad \forall x > -1$

$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \qquad x = \frac{1}{k} \quad k\in\mathbb{N}$

(A) $\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k$

(T) $\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\log(k+1) - \log k\right] \underset{(*)}{=} \log(n+1) - \log(1)$

SOMMA TELESCOPICA: (*) Prop: $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ (per induzione)

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \overset{(A)}{=} \sum_{k=1}^{n} \log(k+1) - \log k \overset{(T)}{=} \log(n+1)$

$H_n \geq \log(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Prop: $\exists\, \gamma \in (0,1)$ tale che $H_n = \log n + \gamma + o(1) \qquad n\to+\infty$

Dim. $\gamma_n \doteq H_n - \log n$

$\gamma_{n+1} < \gamma_n \iff \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0 \iff \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n < 0$

$\iff \frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n \iff \frac{1}{n+1} \underset{(\cdot)}{\leq} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ vera

γ_n è decrescente $\Rightarrow \gamma_n \leq \gamma_1 = 1$

γ_n è positiva, infatti: $\gamma_n = H_n - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \geq \log(n+1) - \log n > 0$

Es: Verificare che $\gamma \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n > 0$

[Sugg: si ponga $\beta_n \doteq H_n - \log(n+1)$; verificare che β_n è crescente, $\beta_n < \gamma_n \; \forall n$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$, $\beta_1 = 1 - \log 2 > 0$]

11-11-2021 Lezione 20 Prof. Novaga

LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

LIMITE DESTRO E SINISTRO

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ pt. di acc. di E

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{\text{LIMITE DESTRO}} = \lim_{x\to x_0} f(x)\Big|_{E\cap(x_0,+\infty)}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}_{\text{LIMITE SINISTRO}} = \lim_{x\to x_0} f(x)\Big|_{E\cap(-\infty,x_0)}$$

OSS: $\lim_{x\to x_0^+} f = \ell \iff \forall\, V$ int. di ℓ $\exists\, \varepsilon>0$ tc $f(x)\in V$ $\forall x \in \underbrace{(x_0, x+\varepsilon)}_{\text{INT. DESTRO DI } x_0}$

Analogamente per $x\to x_0^-$.

OSS: Se $\exists \lim_{x\to x_0} f = \ell \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^\pm} f = \ell$ non è vero il viceversa

ES: $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ (f non è continua in $x=0$)

$\exists \lim_{x\to 0^+} f = 1$, $\quad \lim_{x\to 0^-} f = -1$

PROP: Se $\exists \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ e $\ell^- = \ell^+ \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)$

DIM: Sia $\ell \underset{\text{DEF}}{:=} \ell^+ = \ell^-$ $\quad \forall\, V$ int. di ℓ,

$\exists\, \varepsilon^\pm$ tc $f(x)\in V$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon^-, x_0)$ e $\forall x\in(x_0, x_0+\varepsilon^+)$

$\Rightarrow f(x) \in V$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$ dove $\varepsilon = \min(\varepsilon^-, \varepsilon^+)$.

PROP: $f: E\to\mathbb{R}$ monotona, cioè $x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y)$ (crescente)

$x \ge y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$ (decrescente),

$\Rightarrow \forall x_0$ (deve essere punto di acc.) $\exists \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm)$ e

f crescente $\Rightarrow f(x_0^+) \ge f(x_0^-)$, f decrescente $\Rightarrow f(x_0^+) \le f(x_0^-)$

DIM: $E \cap (-\infty, x_0)$ e x_0 pt. di acc. di $E \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow x_0 = \sup E$

f crescente $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f\big|_{E \cap (-\infty, x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0^-} f = \sup f(x) \quad x \in E \cap (-\infty, x_0)$

f decrescente $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f = \inf f(x) \quad x \in E \cap (-\infty, x_0)$

La stessa cosa si ha per $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

DISCONTINUITÀ DI f

$f : E \to \mathbb{R} \qquad \text{disc}(f) = \{ x \in E$ t.c. f non è continua in $x \}$

$x \in \text{disc}(f)$:

- f ha una disc. eliminabile se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f \neq f(x_0)$

ES: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

- f ha una disc. a salto (I SPECIE) se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ ma $\ell^+ \neq \ell^-$

ES: $f(x) = \text{sgn}(x)$

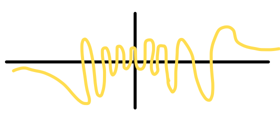
OSS: Le f monotone hanno solo dis. a salto

- f ha una disc. di II specie se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^\pm} f = \ell^\pm \in \overline{\mathbb{R}}$,
  $\ell^+ \neq \ell^-$ e almeno uno dei due è $\pm\infty$

ES: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1/x & x \neq 0 \end{cases} \qquad \lim\limits_{x \to x_0^\pm} f = \pm\infty$

- f ha una disc. di III specie se $\nexists \lim\limits_{x \to x_0^+} f$ o $\nexists \lim\limits_{x \to x_0^-} f$

ES: - $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}$



- $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ FUNZIONE DI DIRICHLET

  $\text{disc}(f) = \mathbb{R}$ e non esiste nessun limite

- $f(x) = \begin{cases} 1/q & x = p/q \in \mathbb{Q}, \quad (p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

tutte le disc. sono eliminabili e $\text{disc}(f) = \mathbb{Q}$, $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ devo ved.

che $\lim_{x \to \bar{x}} f = 0$ cioè $\forall N \; \exists \delta$ t.c. $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap \{ p/q : q \leq N \} = \emptyset$

$\Rightarrow f(x) < \frac{1}{N} \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$

⊙ $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e disc. solo su $\mathbb{Q}$ (le disc. sono a salto)

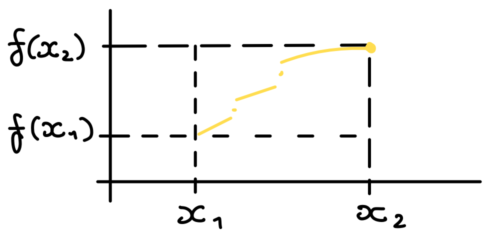
$$f(x) = \sum_n \frac{1}{2^n} \chi_{(q_n, +\infty)}, \quad \chi_{(q_n, +\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x > q_n \\ 0 & x \leq q_n \end{cases} \quad \mathbb{Q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

f crescente $\quad 0 \leq f(x) \leq \sum_n \frac{1}{2^n} = 1 \quad \forall x \qquad \mathrm{disc}(f) = \mathbb{Q}$

Oss: f monotona $\Rightarrow \mathrm{disc}(f)$ è numerabile.

Infatti sia $f : E \to \mathbb{R}$ crescente e siano $x_1 < x_2 \quad x_1, x_2 \in E$

$$\Rightarrow \sum_{x \in \mathrm{disc}(f) \cap [x_1, x_2]} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(x_2) - f(x_1) < +\infty$$



$\Rightarrow \mathrm{disc}(f) \cap [x_1, x_2]$ è numerabile

Abbiamo usato:

$\sum_{i \in I} a_i < +\infty, \; a_i > 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow I$ è finito o numerabile

infatti $\quad I = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} I_N \qquad I_N = \{ i \text{ tc } a_i \geq \frac{1}{N} \} \qquad I_N \subseteq I_{N+1}$

$$\frac{1}{N} |I_N| \leq \sum_{i \in I_N} a_i \leq \sum_{i \in I_N} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i < +\infty \Rightarrow |I_N| < +\infty \quad \forall N$$

$\Rightarrow I$ è numerabile

DEF: $f : E \to \mathbb{R}$ x_0 pt. di acc. di E, diciamo che f ha limite superiore in x_0 uguale a $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, e scriviamo $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell$, se

$$\begin{cases} \ell = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \\ \ell = +\infty \Rightarrow \exists x_n \to x_0 \text{ tc } \lim_n f(x_n) = +\infty \\ \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x_n \to x_0 \text{ tc } \lim_n f(x) = \ell \\ \qquad \forall \varepsilon \; \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ tc } f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in U \end{cases}$$

Def. analoga per $\liminf_{x \to x_0} f$.

Si ha.

$\forall x_0 \in E$ punto di accumulazione $\exists \liminf_{x \to x_0} f$ e $\limsup_{x \to x_0} f$

$$\limsup_{x \to x_0} f = \inf_{U \text{ int di } x_0} \; \sup_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) \geq \sup_U \; \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f$$

OSS: f ha limite in $x_0 \Leftrightarrow \liminf_{x\to x_0} f = \limsup_{x\to x_0} f$

OSS: Date f, g si ha:

$$\limsup_{x\to x_0}(f+g) \leq \limsup_{x\to x_0} f + \limsup_{x\to x_0} g$$

$$\liminf_{x\to x_0}(f+g) \geq \liminf_{x\to x_0} f + \liminf_{x\to x_0} g$$

$$\limsup_{x\to x_0}(-f) = -\liminf_{x\to x_0} f$$

ES. $a_n = (-1)^n \quad \limsup_n a_n = 1 > \liminf_n a_n = -1$

$b_n = (-1)^{n+1} \quad a_n + b_n = 0$

$0 = \limsup_n (a_n + b_n) < \limsup_n a_n + \limsup_n b_n = 2$

DEF: $f: E \to \mathbb{R} \quad x_0 \in E$

$$\mathrm{osc}(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & x_0 \text{ è isolato} \\ \limsup_{x\to x_0} f - \liminf_{x\to x_0} f \geq 0 & x_0 \text{ è pt. di acc.} \end{cases}$$

OSS: $\mathrm{osc}(f)(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathrm{disc}(f)$

$\mathrm{disc}(f) = \bigcup_N E_N \qquad E_N = \{x \in \mathrm{disc}(f) : \mathrm{osc}(f)(x) \geq \frac{1}{N}\}$

Questi insiemi E_N sono chiusi (DA VERIFICARE)

$\Rightarrow \mathrm{disc}(f)$ è unione numerabile di insiemi chiusi

(non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno questa proprietà)

Domanda: $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc $\mathrm{disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

No, perché $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non si può scrivere come unione di num. chiusi.

Infatti, se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_n E_n$, E_n chiusi avrei $\mathrm{int}(E_n) \subseteq \mathrm{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset \ \forall n$

$\Rightarrow$ aggiungendo i punti razionali avrei che $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$, F_n chiuso, $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$.

Teorema (Baire): E sp. metrico completo, $F_n \subseteq E$ chiusi a parte interna vuota, $F = \bigcup_n F_n \Rightarrow \mathrm{int}(F) = \emptyset$ in particolare $F \neq E$

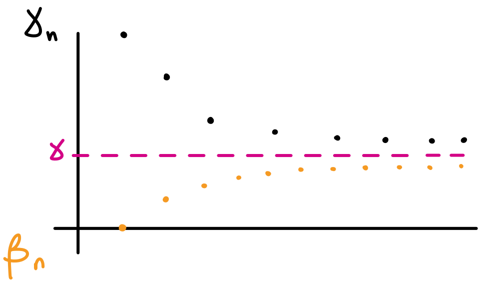
12-11-2021 Lezione 21 Prof. Carminati

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ somma armonica $\quad H_n \geq \log(n+1)$

$\gamma_n = H_n - \log n \geq 0$, γ_n è str. decrescente $\Rightarrow \gamma_n \to \gamma \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$

$\gamma \in [0,1)$, in realtà $\gamma > 0$: basta vedere che posto $\beta_n = H_n - \log(n+1)$ si ha

β_n è str. decrescente $\left(\text{Oss: } \beta_n \longrightarrow \gamma \ ,\ \gamma_n - \beta_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0\right)$



$\Rightarrow \gamma > \beta_1 = 1 - \underbrace{\log 2}_{1<2<e \Rightarrow \log 2 < 1} > 0$

$\gamma_n \searrow \gamma$ ↳ converge decrescendo

$H_n - \log n = \gamma_n = \gamma + o(1)$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow H_n = \log n + \gamma + o(1)$ per $n \to \infty$

Applicazioni: i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \log 2$

analogo ↓

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$

(sugg: trovare formule asintotiche per la somma dei rec. dei pari e
" " " " dispari)

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \log 2n + \cancel{\gamma} + \underbrace{o(1)}_{} - \log n - \cancel{\gamma} - \underbrace{o(1)}_{}$$ per $n \to \infty$

sono due funz. diverse!

⇓

$$= \log\left(\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}\right) + \underbrace{o(1)}_{}$$ non si semplificano perché avrò comunque "resto" infinitesimo!

$$= \log 2 + o(1)$$

Prop (Somme telescopiche):

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$ con $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ succ.

Dim: Per induzione su n

$\boxed{n=1}$ $a_2 - a_1 = a_2 - a_1$ vera

$\boxed{P(n-1) \Rightarrow P(n)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + (a_{n+1} - a_n) =$

$\overset{\text{hp ind}}{=} \cancel{a_n} - a_1 + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_1$

Applicazioni: i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ è l'opposto ↗

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ è superiormente limitata

ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{k=h+1}{=} 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{(h+1)^2} \leq 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2}$

Oss: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ NON BANALE (serve il calcolo diff.)

Usando le stesse tecniche è possibile trovare stime per $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Prop: $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$ per $n \to \infty$

Dim: $a_n \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, a_n è decrescente, infatti $a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Razionalizzo: $-\frac{1}{\sqrt{k+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Oss: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$0 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq a_n - a_{n+1} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$0 \leq a_n - a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$ $\quad$ a_n è inf. limitata, infatti: $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - a_k$

$$\geq a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

somma telesc.

$$\geq \underbrace{a_1}_{=-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1$$

$$\geq -2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq -2$$

$\Rightarrow \alpha_n \searrow \alpha \geq -2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$ $n \to \infty$

— o —

Somme telescopiche e progressioni geometriche:

$z \in \mathbb{C}$ $\qquad (z-1)\sum_{k=0}^{n} z^k = z^{n+1} - 1$

Questa è una somma telescopica

$$(z-1)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} (z^{k+1} - z^k) = z^{n+1} - z^0 = z^{n+1} - 1$$

Oss: $A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k} \rightsquigarrow$ es: $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

Oss: Vale anche se A e B sono due oggetti di una stessa algebra commutativa

(Ad esempio due matrici in GL_n)

Prop (Cesaro): Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. a val. complessi

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Dim: $\alpha_n \doteq a_n - \ell$ $\qquad a_n \to \ell \Leftrightarrow \boxed{\alpha_n \to 0}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\underset{\downarrow\\0}{a_k}-\ell) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underset{\downarrow\\0}{a_k}\Big)-\ell \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell$$

$$\boxed{\alpha_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \to 0}$$

Fisso $\varepsilon>0$ $\exists\, \bar n : \forall k \geq \bar n$ $|\alpha_k|<\varepsilon$ $n>\bar n$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{\bar n}\alpha_k}_{M} + \frac{1}{n}\sum_{k=\bar n+1}^{n}\alpha_k \;, \text{ se } n>\frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \Big(\frac{M}{n}<\varepsilon\Big) \text{, quindi}$$

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Big| \leq \frac{|M|}{n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=\bar n+1}^{n}|\alpha_k|}_{\text{somma di } n-\bar n \text{ addendi } <\varepsilon} < \frac{|M|}{n}+\varepsilon < 2\varepsilon$$

Cor: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. positiva $(a_n>0)$. Se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell \overset{*}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$

Applicazioni: i) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$ ii) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$

i) Calcolo
$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{4n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

$*$ Potrebbe esistere $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ ma non il limite del rapporto

$$a_n = \begin{cases} 2^n & n \text{ pari} \\ n\,2^n & n \text{ dispari}\end{cases} \qquad \sqrt[n]{a_n}\to 2 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2(n+1) & n \text{ pari} \\ 2/n & n \text{ dispari}\end{cases}$$

Dim (Cor): $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$

$\alpha_n \doteq \log a_n$; $\log\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\log a_n = \frac{1}{n}\alpha_n$

$$\log\frac{a_{n+1}}{a_n} = \log a_{n+1} - \log a_n = \alpha_{n+1}-\alpha_n$$

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k) \;,\quad \frac{1}{n}\alpha_n = \frac{1}{n}\alpha_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0+\log\ell$$

CESARO

$$\boxed{\alpha_{k+1}-\alpha_k = \log\frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \log\ell}$$

cioè $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n}\log a_n}_{\log\sqrt[n]{a_n}} = \log\ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$

□

Esercizio: Mostrare che in generale (per $a_n>0$) valgono le disug.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Es per casa: Determinare tutti i pol. $p\in\mathbb{R}[x]$ tc: $1-x^2\leq p(x)\leq 1+x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x) = A + Bx$

$$\begin{cases} x_0 = p \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$ scrivere esplicitamente x_n

$x_0 = p$

$x_1 = A + Bp$

$x_2 = A + BA + B^2 p$

$x_3 = A + BA + B^2 A + B^3 p$

CONGETTURA

$$\boxed{x_n = A \sum_{k=0}^{n-1} B^k + B^n p}$$

Dim: Per induzione

PB) ok

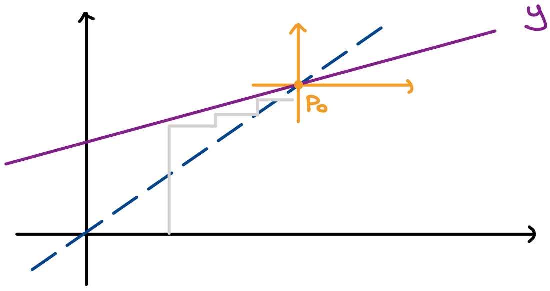
PI : $n \Rightarrow n+1$) $x_{n+1} = A + Bx_n = A\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} B^{k+1}\right) + B^{n+1} p$

$$= A\left(1 + \sum_{h=0}^{n} B^h\right) + B^{n+1} p$$

$\sum_{k=0}^{n-1} B^k = \frac{B^n - 1}{B - 1}$ se $B \neq 1$ e di conseguenza $x_n = A \frac{B^n - 1}{B-1} + B^n p$.

Se $B = 1$: $x_n = nA + p$

— o —



$y = Ax + B$

$y_n \doteq x_n - P_0$

$A + BP_0 = P_0$ $y_{n+1} = B y_n$

16-11-2021 lezione 22 Prof. Carminati

$a_n > 0$ $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(*)$

dimostreremo questa

$\left((*) \Rightarrow \left[\text{se } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \text{ allora } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \right] \right)$

— o —

Richiami sul limsup:

Def: i) $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \ell = -\infty \to \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\ \ell = +\infty \to \exists x_n \to x_0 \text{ tc } \lim f(x_n) = +\infty \\ \ell \in \mathbb{R} \to \begin{cases} \exists x_n \to x_0 : \lim f(x_n) = \ell \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists U \text{ intorno di } x_0 : f(x) < \ell + \varepsilon \ \forall x \in U \setminus \{x_0\} \end{cases} \end{cases}$

con x_0 pt. di acc.

ii) $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_U \sup_{x\in U\setminus\{x_0\}} f(x)$ con x_0 pt. di acc. e U intorno di x_0

Proprietà di limsup e liminf:

a) $\limsup_{x\to x_0} f(x)+g(x) \le \limsup_{x\to x_0} f(x) + \limsup_{x\to x_0} g(x)$ (visto a lezione)

b) $f\le g \Rightarrow \limsup_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0} g(x)$ (banale)

c) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \ell = \limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x)$

Oss: In generale la disug. in (a) può essere stretta:

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ $\limsup a_n + b_n = 0 < \limsup a_n + \limsup b_n = 1+1$

Prop (Analogo di (a)): Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora $\limsup_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \ell + \limsup g(x)$

Esercizio: Enunciare e dimostrare analoghe proprietà sul liminf.

Dim (caso $\ell\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{R}$):

$\limsup_{x\to x_0} g(x) \doteq m\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ i) $\exists\, x_n\to x_0$ tc $g(x_n)\to m$

ii) $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, U$ int. di x_0 tc $g(x) < m+\varepsilon/2$ $\forall x\in U$

i)' $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow f(x_n)\to \ell$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)+g(x_n) = \ell+m$

$\varepsilon>0$ $\exists\, V$ intorno di x_0 su cui $|f(x)-\ell| < \varepsilon/2$ $\forall x\in V$

$\Downarrow$

$f(x) < \ell + \varepsilon/2$ $\forall x\in V$

ii)' Se $x\in U\cap V \Rightarrow f(x)+g(x) \le \ell + \varepsilon/2 + m + \varepsilon/2 = \ell+m+\varepsilon$

i)' + ii)' $\Rightarrow \limsup_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \ell+m$

Prop: Se $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ φ continua in ℓ e str. cresc.

Allora $\limsup_{x\to x_0} \varphi\circ f(x) = \varphi(\ell)$

Dim: $\limsup_{x\to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \exists\, x_n\to x_0 : f(x_n)\to\ell \xRightarrow{\text{cont. di } \varphi} \varphi(f(x_n))$

Devo verificare che $\forall\varepsilon>0$ $\exists U$ int di x_0 tc $\varphi(f(x)) < \varphi(\ell)+\varepsilon$ $\forall x\in U\setminus\{x_0\}$

$\varepsilon>0 \rightsquigarrow \exists\,\delta>0 : |y-\ell| < \delta \Rightarrow |\varphi(y)-\varphi(\ell)| < \varepsilon \rightsquigarrow \varphi(y) < \varphi(\ell)+\varepsilon$
$\forall y\in B_\delta(\ell)$

$\delta>0$ $\exists\, U$ int. di x_0 tc $f(x) < \ell+\delta/2$ $\forall x\in U\setminus\{x_0\}$

$\varphi(f(x)) \underset{\text{monotonia di } \varphi}{<} \varphi(\ell+\delta/2) < \varphi(\ell)+\varepsilon$

$\hookrightarrow \ell+\delta/2 \in B_\delta(\ell)$

Mostriamo che se $a_n > 0$ allora $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (M)

Questo equivale a mostrare $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (A)

Questo vale per la prop. sopra (con $\varphi(y) = \log(y)$)

Consideriamo il caso in cui $\lim_{n\to+\infty} \log\frac{a_{n+1}}{a_n} \doteq \sigma \in \mathbb{R}$

Dim: Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tc $\log\frac{a_{n+1}}{a_n} < \sigma + \varepsilon$ $\forall n > \bar{n}$

Sia $n > \bar{n}$. $\log a_n = \log a_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}}^{n-1} (\log a_{k+1} - \log a_k) = \log a_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}}^{n-1} \log\frac{a_{k+1}}{a_k}$

$\frac{1}{n}\log a_n \leq \frac{\log a_{\bar{n}}}{n} + \frac{(n-\bar{n})}{n}(\sigma+\varepsilon) = \frac{\log a_{\bar{n}}}{n} + \left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right)(\sigma+\varepsilon)$

$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log a_n \leq \sigma + \varepsilon$ (@)

la disug. (@) vale $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log a_n \leq \sigma$

□

— o —

Lemma (Fekete): Sia $a_n \geq 0$ $a_{n+m} \leq a_n + a_m$

def: a_n è sub-additiva

Allora $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$.

Dim: $a_2 \leq a_1 + a_1 \leq 2a_1$

$a_n \leq n a_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (per induzione)

Quindi $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \in [0, a_1]$

$\sigma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}$ tc $\frac{a_{\bar{n}}}{\bar{n}} < \sigma + \varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$, $n > \bar{n}$ def. come sopra $n = k\bar{n} + r$ $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq \bar{n}$

$a_n = a_{k\bar{n}+r} \leq a_{k\bar{n}} + a_r \leq k a_{\bar{n}} + a_r$, $\frac{a_n}{n} \leq \frac{k}{n}, \frac{a_{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{M}{n}$ $M = \max\{a_0, \dots, a_{\bar{n}}\}$

$\frac{a_n}{n} \leq \left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right)(\sigma+\varepsilon) + \frac{M}{n}$ $\frac{k\bar{n}}{n} = \frac{n-r}{n} \leq 1 - \frac{\bar{n}}{n}$

$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup\left[\left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right)(\sigma+\varepsilon) + \frac{M}{n}\right] = \sigma + \varepsilon$

la disug. è vera $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sigma$

$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} = \sigma$

$\liminf \frac{a_n}{n} = \sup_{U} \inf_{n\in U} \frac{a_n}{n}$ con U intorno di ∞

$\sigma \leq \liminf \frac{a_n}{n} \leq \limsup \frac{a_n}{n} \leq \sigma \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sigma$

Applicazione interessante:

Oss / Es (*): Sia A matrice $n \times n$ a coef. reali, definiamo la norma:

$$\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av| \quad , \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

sia $a_n = \log \|A^n\|$, si verifica che a_n è una succ. subadditiva

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| = \lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{\|A^n\|}$ e quindi esiste anche:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n}$ ← Raggio spettrale della matrice A

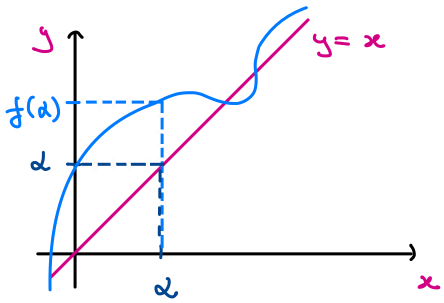
—— o ——

Successioni definite per ricorrenza

Prop: $\begin{cases} x_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f str. crescente continua

Allora esiste $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e se $\ell \in \mathbb{R}$ si ha che $\ell = f(\ell)$

Il limite esiste perché sotto queste ipotesi la successione è monotona



Dim: Se $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow x_n = \alpha \quad \forall n$

Se $f(\alpha) > \alpha$: $\alpha \in U = \{x : f(x) - x > 0\}$ aperto

$a \doteq \inf \underbrace{\{a' \leq \alpha : [a', \alpha] \subset U\}}^{V^-}$ $\quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$b \doteq \sup \underbrace{\{b' \geq \alpha : [\alpha, b'] \subset U\}}_{V^+}$ $\quad b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Oss: Se a (risp. b) è finito $\Rightarrow f(a) = a$ (**Es**: Vale anche se a e/o $b \notin \mathbb{R}$)

Se $a' \in V^- \Rightarrow f(a') - a' > 0 \Rightarrow f(a) - a \geq 0$

Se $f(a) - a > 0 \Rightarrow \exists I$ intorno di a : $f(a') - a' > 0 \;\; \forall a' \in I \Rightarrow a$ non è $\inf V^-$

Se $a < x < b \xRightarrow[f \text{ str. cr.}]{} \underset{\substack{\| \\ a}}{f(a)} < f(x) < \underset{\substack{\| \\ b}}{f(b)} \Rightarrow a < f(x) < b \rightsquigarrow f : (a,b) \to (a,b)$

$\Rightarrow x_n \in (a,b) \subset U \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ (per ind), $x_{n+1} = f(x_n) > x_n \Rightarrow x_n$ mon. crescente

$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup x_n \to b < +\infty \Rightarrow \ell = \lim x_n = b$

$\ell \doteq \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\ell)$

$\ell \in [a,b]$, $\ell \geq \alpha \Rightarrow \ell = b$

Se $b = +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$ (se no $x_n \to \ell \in [\alpha, +\infty)$ con $\ell = f(\ell)$ ↯) □

18 - 11 - 2021 Lezione 23 Prof. Novaga

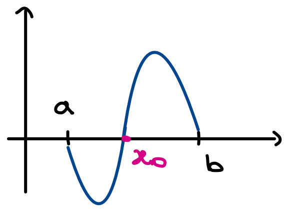
Funzioni continue

Teorema degli zeri:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$ (segni opposti)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ tc $f(x_0) = 0$.

Graficamente:



Deriva dal teorema di permanenza del segno

Dim: Supp. $f(a) < 0$ e sia $x_0 \overset{*}{=} \sup\{x \text{ tc } f(x) < 0\} \Rightarrow f(x_0) = 0$

Infatti, se fosse $f(x_0) < 0$ $\exists\, \varepsilon$ tc $f(x) < 0$ in $[x_0, x+\varepsilon]$ $\lightning$ (contr. $*$)

Analogamente, $f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ $\lightning$ (contraddice la def.)

Cor (Valori intermedi): (Dim per esercizio)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

- $f([a,b]) \supseteq [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$
- $f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$

una funzione cont. manda intervalli in intervalli

Generalizzazione:

Def: E spazio metrico (va bene topologico) è:

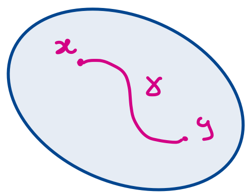
- **sconnesso** se $\exists\, A, B \subseteq E$ aperti non vuoti tc $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$

  cioè se ha "due pezzi"

- **connesso** se non è sconnesso

- **connesso per archi** se $\forall\, x, y$ $\exists\, \gamma : [a,b] \to E$ continua tc $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

gli archi sarebbero curve, graficamente:



Oss: $E \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

E connesso $\Leftrightarrow$ E connesso per archi

$\Leftrightarrow$ E intervallo, semiretta o $\mathbb{R}$

Oss: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, cioè $\forall x, y \in E \ [x,y] = \{ \lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1] \} \subseteq E$, connesso per archi.

Teorema: $f : E \to F$ continua, E, F sp. metrici

1) E connesso $\Rightarrow f(E)$ connesso

2) E connesso per archi $\Rightarrow f(E)$ connesso per archi

Dim: 1) Supp. (per assurdo) $f(E)$ sconnesso, cioè $f(E) \subseteq A \cup B$, A, B aperti in F, $f(E) \cap A \neq \emptyset$, $f(E) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow E = \underbrace{f^{-1}(A)}_{\text{APERTI}} \cup \underbrace{f^{-1}(B)}_{}$

$\Rightarrow E$ sconnesso $\lightning$

2) E connesso per archi, $y_1, y_2 \in f(E)$, siano $x_1, x_2 \in E$ tc

$y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2) \Rightarrow \exists \ \gamma : [0,1] \to E$ cont., $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$

$\Rightarrow \exists \hat{\gamma} : [0,1] \to f(E) \quad \hat{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ cont., $\hat{\gamma}(0) = y_1$, $\hat{\gamma}(1) = y_2$

$\Rightarrow f(E)$ connesso per archi.

Prop: E conn. per archi $\Rightarrow E$ connesso

Dim: Supp. E sconnesso, $E = A \cup B$ e siano $x \in A$, $y \in B$ e $\gamma : [0,1] \to E$ continua con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y \Rightarrow \gamma([0,1]) \subseteq A \cup B = E \Rightarrow$ è sconnesso

Assurdo poiché $[0,1]$ è connesso e γ è continua.

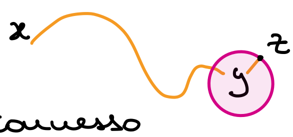
Sono equivalenti? In generale no, ma in alcuni casi sì.

Oss: E convesso $\Rightarrow \begin{cases} E \text{ conn. per archi} \\ E \text{ connesso} \end{cases}$

Prop: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso $\Rightarrow E$ connesso per archi (quindi vale $\Leftrightarrow$)

Dim: $x \in E$, $A = \{ y \in E \text{ tc } \exists \gamma : [0,1] \to E \text{ cont.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}$

$\Rightarrow A$ aperto. Graficamente:



$B_r(y) \subseteq E$

$\Rightarrow E \setminus A$ aperto $\Rightarrow E = A \cup (E \setminus A)$ connesso

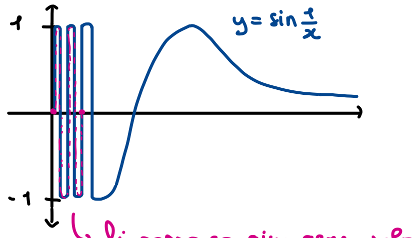
$\Rightarrow E \setminus A = \emptyset \Rightarrow E$ conn. per archi

Non è detto che valga per i chiusi (tranne in $\mathbb{R}$)

Oss: $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto (quindi, in particolare, chiuso) tale che C connesso ma non per archi.

Esempio: $C = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0,1]\} \cup \Big(\bigcup_{|y|\le 1} (0,y)\Big)$

segmento verticale



li posso congiungere solo tramite l'arco $\sin\frac{1}{x}$ che non è continuo

$\Rightarrow C$ è chiaramente connesso ma non per archi

Oss: $\exists\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che mandano connessi in connessi (= intervalli) ma non sono continue. **ES**: $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ← ma le discontinuità sono solo di questo tipo

Teo: $f : E \to F$ cont, E sp. metrico compatto $\Rightarrow f(E)$ compatto

Dim: y_n successione in $f(E)$, $x_n \in E$ tc $f(x_n) = y_n$

E cpt $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x \in E \underset{f.\text{cont.}}{\Rightarrow} y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(E)$ cioè $f(E)$ è comp.

Cor (Weirstrass):

$f : E \to \mathbb{R}$ continua, E compatto $\Rightarrow f$ ammette max e min

Dim. $f(E) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ chiuso e limitato $\Rightarrow \inf f(E) = \min f(E) = \min_E f$

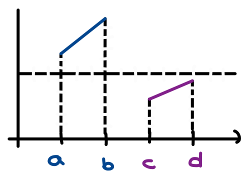
$\Rightarrow \sup f(E) = \max f(E) = \max_E f$

Oss: Non è vero il viceversa, ma ci sono funzioni che mandano compatti in compatti ma non sono continue: $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

Esercizio: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che manda connessi in connessi e compatti in compatti $\Rightarrow f$ continua

Teorema: $f : I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo, f è invertibile (= iniettiva) $\Leftrightarrow f$ è str. monotona (crescente o decrescente)

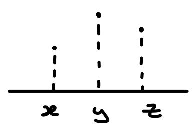
Oss: Serve I intervallo, altrimenti, se ne fossero due:



Dim: f str. monotona $\Rightarrow f$ iniettiva

f iniettiva e (per assurdo) non str. monotona. $\exists\, x < y < z \in I$ tc

$f(x) < f(y)$ e $f(z) < f(y)$ Graficamente:



oppure $f(x) > f(y)$ e $f(z) > f(y)$ Graficamente:

Consideriamo il primo caso (l'altro è analogo)

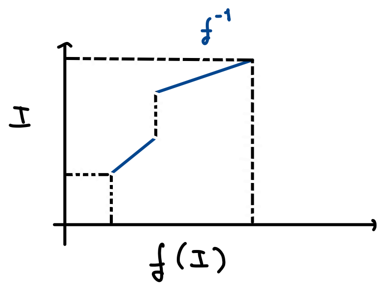
Posso supporre $f(x) < f(z) < f(y)$ (il caso $f(z) < f(x) < f(y)$ è analogo)

Per il teorema dei valori intermedi $f([x,y]) \supseteq [f(x), f(y)] \ni f(z)$

$\Rightarrow \exists\, z' \in (x,y)$ tc $f(z) = f(z') \Rightarrow f$ non è iniettiva $\lightning$

Cor: $f: I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile, I intervallo $\Rightarrow f^{-1}$ continua

Dim: f invertibile $\Rightarrow f$ str. monotona



$\Rightarrow f^{-1}: f(I) \to I$ str. monotona

$\Rightarrow f^{-1}$ può avere solo disc. a salto

Ma se c'è una disc. a salto $\Rightarrow f(I) = I$ non è connesso $\lightning$

Cor: $\arcsin(x) = \left(\sin(x)\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$ è continua (e str. crescente)

$\arccos(x) = \left(\cos(x)\big|_{[0,\pi]} \right)^{-1}$ è continua

$\log_a(x) = (a^x)^{-1}$ è continua

$\arctan(x) = \left(\tan(x)\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$ è continua

19-11-2021 Lezione 24 Prof. Carminati

Esercizi per casa:

1) $\limsup_{x \to x_0} f(x) + \liminf_{x \to x_0} g(x) \leq \limsup_{x \to x_0}$ [sugg: $f(x) = (f(x) + g(x)) + (-g(x))$ e sfruttare la subadd. di limsup]

2) Data (x_n) definita da $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \end{cases}$

i) $\lim_{n \to \infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ e determinare ℓ

ii) Calcolare $\lim_{n \to \infty} n^2 (x_n - \ell)$

3) i) $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^3 - n - 1}{n^3 - 5n + 1} \right)^n$

ii) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

Es: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\right)^n$

$$\frac{2n^2+1}{2n^2+n} = \frac{2n^2+n}{2n^2+n} - \frac{1}{n}\left(\frac{n^2-n}{2n^2+n}\right) = \overbrace{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}^{1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)} \quad \text{per } n\to\infty$$

(pausa)

Lemma: $\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^a$

$$\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \overset{*}{=} \exp(a+o(1)) \to e^a$$

$$*)\; n\log\Big(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}(a+o(1))}_{x}\Big) \overset{**}{=} n\left(\frac{1}{n}(a+o(1))\right)\left(1+o(1)\right) =$$

$$= a+o(1)+a\cdot o(1)+[o(1)]^2 = a+o(1) \quad \text{per } n\to\infty$$

$$**)\; \log(1+x) = x+o(x) = x(1+o(1)) \quad \text{per } x\to 0$$

Torniamo al limite originario:

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Lemma}} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Es: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}_{*}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$

$$*)\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\cos x = x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) \text{ per } x\to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \text{ per } x\to 0$$

$$\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right) \longrightarrow e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

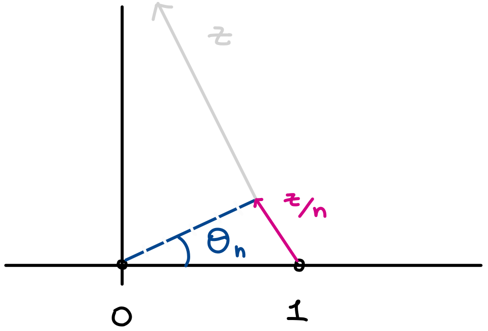
Es: $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)}_{e^\alpha\cdot e^{i\beta}}$ con $z\in\mathbb{C} \Rightarrow z = \alpha+i\beta$

Oss/Es: $w_n \to w^*$ in $\mathbb{C} \iff \left(\left(\begin{matrix}\rho_n\to 0\\ \rho^*=0\end{matrix}\right) \vee \left(\rho_n\to\rho^* \text{ e } \theta_n\to\theta^*\right)\right)$

$w_n = \rho_n e^{i\theta_n}$

$w^* = \rho^* e^{i\theta^*}$

a meno di multipli di 2π



$$1+\frac{z}{n} = \rho(n)\, e^{i\theta(n)}$$

$$\rho_n = \sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{2\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } n \gg 1}}{\theta_n} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\operatorname{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right)}\right)$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{\beta/n}{1+\alpha/n}\right) = \arctan\left(\frac{\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\alpha/n}\right)$$ se $\operatorname{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right) > 0$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{\beta}{n}\cdot\left(1+o(1)\right)\right) \qquad \rho_n = \sqrt{1+\frac{2\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\rho(n)\, e^{i\theta_n}\right)^n = \boxed{\rho^n(n)}\cdot e^{i\boxed{n\theta(n)}}$$

- $$\left(\rho(n)\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{2\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{\alpha}$$

$\omega(x_n) = o(1)$ per $n\to\infty$

- $$n\theta_n = n\arctan\Big(\underbrace{\frac{\beta}{n}\big(1+o(1)\big)}_{x_n}\Big) = \cancel{n}\left(\frac{\beta}{\cancel{n}}\big(1+o(1)\big)\big(1+\omega(x_n)\big)\right)$$

$n\to\infty$

uso lo sviluppo con $x = \frac{\beta}{n}(1+o(1)) \to 0$ per $n\to\infty$

$$= \beta(1+o(1))(1+o(1)) = \beta(1+o(1))$$

(*) $\arctan x = x + o(x) = x\,(1+\omega(x))$ per $x\to 0$

$\lim_{x\to 0}$ " $= 0$

$n\theta_n \to \beta$, per il criterio visto sopra. $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\alpha}\cdot e^{i\beta}$

(*) Per dimostrarlo basta verificare che $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Basta porre $y := \arctan x \Rightarrow x = \tan y \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$

Attenzione: $\tan(\arctan x) = x$

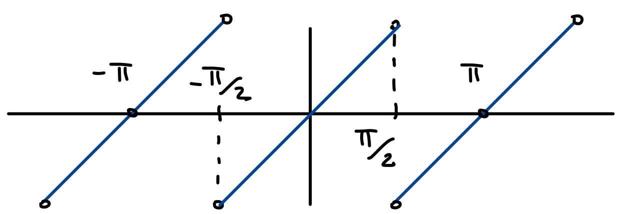
$\arctan(\tan x) = x$ solo se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) \doteq \arctan(\tan x)$

$\tan$ è π-periodica

$$\arctan = \left(\tan\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$$

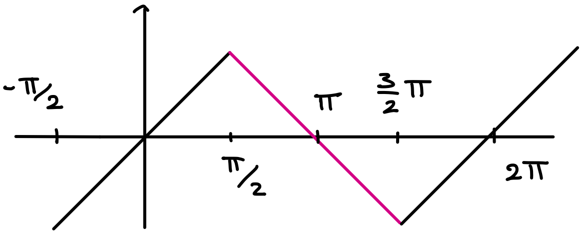
↳ inversa insiemistica



$g(x) = \arcsin(\sin x)$

g è 2π-periodica

$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x}$



Es: Mostrare che $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Dim: inj: $\left.\begin{array}{l} x \longmapsto 2x^3 \text{ è str. crescente} \\ x \longmapsto 3x-3 \text{ è str. crescente} \end{array}\right\}$ f è str. crescente $\Rightarrow f$ è inj.

surj: **Oss:** se $p \in \mathbb{R}[x]$ gr(p) dispari $\Rightarrow \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}$

$p(x) = a x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$ per $x \to +\infty$ (e anche per $x \to -\infty$)

SPG $a > 0$: $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} a x^{2m+1} + o(x^{2m+1}) = \lim_{x\to\infty} x^{2m+1}(\overbrace{a + o(1)}^{a}) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$

Quindi se $y_0 \in \mathbb{R}$ $\exists b > 0$ tc $p(b) > y_0$, $\exists a < 0$ tc $p(a) < y_0$

p continua su $[a,b] \Rightarrow$ Assume tutti i valori in $[p(a), p(b)] \ni y_0$

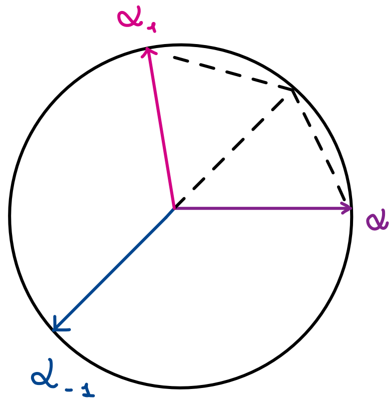
$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]: p(x_0) = y_0$

Es: Mostrare che se $f: [0,1] \to [0,1]$ continua allora $\exists \alpha \in [0,1]$ t.c. $f(\alpha) = \alpha$

— o —

$\sum_{k\in T} \binom{n}{k} = \circledast$ $\qquad T \doteq 3\mathbb{Z} = \{ k \in \mathbb{Z} : k = 3h \text{ con } h \in \mathbb{Z} \}$

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = \boxed{2^n}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k = (\underbrace{1 + e^{\frac{2\pi i}{3}}}_{1+\alpha_1})^n = (-\alpha_{-1})^n = \left(e^{i\pi} e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^n = \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}n}}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^k = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}n}}$



$z^3 - 1 = 0$

$\parallel$

$(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_{-1})$

$\delta(k) \doteq \frac{1}{3}\left(\underbrace{1}_{\alpha_0} + \underbrace{\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k}_{\alpha_1} + \underbrace{\left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^k}_{\alpha_{-1}}\right)$

$\circledast = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\delta(k) = \frac{1}{3}(\bullet + \bullet + \bullet)$

$= \frac{1}{3}\left[2^n + e^{i\frac{\pi}{3}n} + e^{-i\frac{\pi}{3}n}\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]$ $\square$

SERIE

Una serie è una somma formale di elementi di uno spazio vettoriale metrico V (tipicamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$

Le quantità $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} x_n \in V$ si dicono SOMME PARZIALI. $(N \geq n_0)$

Def: La serie converge a $x \in V \iff S_N \to x$ per $N \to \infty$

Nel caso $V = \mathbb{R}$ distinguiamo 3 comportamenti:

- SERIE CONVERGENTE $\iff S_N \to x \in \mathbb{R}$, $N \to +\infty$
- SERIE DIVERGENTE A $\pm\infty \iff S_N \to \pm\infty$, $N \to +\infty$
- SERIE NON CONVERGENTE

OSS: $V = \mathbb{C}$, $\sum x_n$ $x_n = a_n + i b_n \in \mathbb{C}$

La serie converge in $\mathbb{C} \iff$ convergono $\sum a_n, \sum b_n \in \mathbb{R}$ e nel caso si ha $\sum x_n = \sum a_n + i \sum b_n$. (Ci concentreremo sulle serie in $\mathbb{R}$)

Esempi: $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ SERIE ARMONICA

$(\alpha > 0)$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ SERIE GEOMETRICA

DUE DOMANDE:

1. La serie converge? (Criteri generali)
2. A quanto converge? (Più difficile)

Prop: $\sum x_n$ converge $\iff \{S_N\}_N$ converge $\iff S_N$ è di Cauchy

↳ Criterio di Cauchy: $\iff \forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon$ TC $\left| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right| = |S_M - S_N| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq n_\varepsilon$

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ e consideriamo $S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \sum_{2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} > \sum_{2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k}$

$= \frac{1}{2^k}(2^k - 2^{k-1}) = \frac{1}{2} \Rightarrow S_N$ non è di Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Non converge in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Dato che S_N è crescente $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty}$

$\sum x_n$ si dice **a termini positivi** se $x_n \geq 0 \ \forall n$, cioè se S_N è crescente

$\Rightarrow$ due sole possibilità:

① S_N è limitata e $\sum_n x_n = \sup_N S_N \in \mathbb{R}$

② $S_N \to +\infty$ e $\sum_n x_n = +\infty$

Prop (Condizione necessaria)

$$\sum_n x_n = S \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} S_N \xrightarrow[N]{} S \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n]{} S - S = 0$$

Esempio: $\sum_n (-1)^n$ Non converge

Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ SERIE GEOMETRICA

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \begin{cases} N+1 & x = 1 \\ \frac{1-x^{N+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}$$

Sappiamo che $\begin{cases} x^N \to 0 & |x| < 1 \\ x^N \to +\infty & x > 1 \\ x^N \text{ non conv.} & x \leq -1 \\ x^N = 1 & x = 1 \end{cases}$

Otteniamo che $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$ Riesco a trovare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = +\infty \quad \text{se } x \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ non converge se } x \leq -1$$

Esempio: (serie telescopiche)

a_n successione convergente, $a_n \to a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = a - a_0$$

$S_0 = a_1 - a_0$, $S_1 = a_1 - a_0 + a_2 - a_1$, $S_2 = a_2 - a_0 + a_3 - a_2$, ..., $S_N = a_{N+1} - a_0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} a - a_0$

$a_n = \frac{1}{n+1}$ $\quad a_n \to a = 0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)(n+2)} = -1$

cioè $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ $\quad$ * cambio di indice

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Prop (Confronto):

$0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0$ (definitivamente in n)

$\odot \; \sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty$

$\Updownarrow$

$\odot \; \sum_{n=0}^{\infty} y_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty$

Dim: $0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0$

$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$, $T_N = \sum_{n=0}^{N} y_n$ sono successioni crescenti per $N \geq n_0$,

quindi o convergono o divergono a $+\infty$, e si ha $S_N - S_{n_0} \leq T_N - T_{n_0}$

ES: $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{=1} = 2$

$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$

Cioè $\sum \frac{1}{n^2}$ converge a $S \in (1,2)$

A quanto converge? ($\pi^2/6$)

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

$\alpha = 1$ DIVERGE

$\alpha = 2$ CONERGE

GIÀ VISTO

$\alpha > 2 \quad n^\alpha > n^2, \quad \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2} \overset{CFR}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$

$\alpha < 1 \quad n^\alpha < n, \quad \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n} \underset{CFR}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

Cosa succede per $\alpha \in (1,2)$?

Prop (Criterio di condensazione):

$x_n \geq 0, \; x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k} \quad (2^{k_0} \geq n_0)$

Applicazione:

$\sum_k \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \sum_k 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} < +\infty$

SERIE GEOMETRICA

$\sum_k \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_k \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_k \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k < +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$

Esempio: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^\alpha} \Rightarrow \frac{1}{n \log(n)^\alpha} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

Per condensazione: $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \sum_k \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k}(\log 2 \cdot k)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$

Dim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

$$y_k = \sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_n \ , \ x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \frac{1}{2}\left(2^{k+1} x_{2^{k+1}}\right) = 2^k x_{2^{k+1}} \leq y_k \leq 2^k x_{2^k}$$

Per confronto: $\sum y_k$ converge $\Leftrightarrow \sum 2^k x_{2^k}$ converge

25-11-2021 Lezione 26 Prof. Novaga

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$a_n > 0 \ , \ b_n > 0$

$a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, cioè $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora $\sum_n a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum b_n < +\infty$

Dim. Per $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ tc $(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon) b_n$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. Per il confronto segue la tesi.

Oss: È sufficiente che $\exists c, C > 0$ tc $c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C$ $\forall n$ suff. grande, cioè che $0 < \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < +\infty$

Esempi:

① $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ $\Rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \left[\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]^2 \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ per $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

② $$\sum_n \frac{\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right]\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

"si comporta come"

③ $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - 1\right) \sim \pm \sum \frac{1}{n} = \pm\infty$$

sgn (log a)

$a > 0$ $\quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ $\qquad (a^x - 1) \sim (\log a) \cdot x$ per $x \to 0$

④ $\sum \frac{x^n}{n!}$ $(= e^x)$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ $\qquad \frac{x^n}{n} \sim \frac{(x \cdot e)^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$

in particolare $\left|\frac{x^n}{n!}\right| < \frac{1}{2^n}$ per n suf. grande

$\Rightarrow \sum_n \frac{x^n}{n!} < +\infty \quad \forall x > 0$

CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE (CFR CON LA SERIE GEOMETRICA)

RAPPORTO: $a_n > 0 \quad \forall n$

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \leq 1$ definit. in $n \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ definitivamente in $n \Rightarrow a_n \not\to 0 \quad \sum_n a_n = +\infty$

Dim: 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ per $n \geq n_0$

$a_{n_0+1} \leq r a_{n_0}, \quad a_{n_0+k} \leq r^k a_{n_0} \qquad n = n_0 + K$

$a_n \leq r^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}\right) \cdot r^n \qquad \forall n \geq n_0$

$\sum_n r^n < +\infty \xrightarrow[\text{CFR}]{} \sum_n a_n < +\infty$

2. ovvio

OSS: Se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow r < 1 \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

$r > 1 \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$

$r = 1 \Rightarrow \boxed{?}$

ES: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} \to 1 \qquad \forall \alpha > 0$

RADICE: $a_n \geq 0 \quad \forall n$

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq r \leq 1$ Def. in $n \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \iff a_n \geq 1$ Def. in $n \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

In particolare se $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = r \Rightarrow \begin{cases} r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty \\ r > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ r = 1 \Rightarrow \boxed{?} \end{cases}$

Dim: 1. $\sqrt[n]{a_n} \leq r \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq r^n \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_n r^n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

PRODUTTORIE:

$a_n > 0$ $\forall n$ possiamo chiederci se "converge" $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \overset{DEF}{=} \lim_{N \to +\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} a_n \right)$

dove $\prod_1^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{N-1} \cdot a_N$

Prop. $\prod_n (1+a_n)$ $a_n \geq 0$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ converge

Dim. $\prod_1^N (1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2) \ldots (1+a_n)$

$$= 1 + \sum_1^N a_n + \sum_{1 \neq j}^N a_i a_j + \sum_{1<j<k} a_i a_j a_k \ldots + \prod_1^N a_n \geq 1 + \sum_1^N a_n$$

$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) = \lim_N \prod_1^N (1+a_n) \geq 1 + \sum a_n$

quindi $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \prod_1^{\infty} (1+a_n) = +\infty$.

Voglio ottenere l'altra implicazione:

$\log \left(\prod_1^N (1+a_n) \right) = \sum_1^N \log(1+a_n) \leq \sum_1^N a_n$

OSS: $\log(1+x) \leq x$ $\forall x \geq 0$

$(e^{+\infty} = +\infty)$

$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) \leq e^{\sum_1^N a_r} \Rightarrow \lim \prod_1^N (1+a_n) = e^{\sum_1^{\infty} a_n}$ quindi $\sum_n a_n < +\infty \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) < +\infty$

OSS: $\prod_n \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \sim \sum_n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \sim \sum_n \frac{\log n}{n} = +\infty$

$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\log \sqrt[n]{n}} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

ESEMPIO: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} \right) \to$ Serie geometrica

$\overset{2}{\overset{\shortparallel}{p_1}} < p_2 < \ldots < p_i$ numeri primi

$n = \prod_{k=1}^{N} p_{i_k}^{n_k}$ $\to$ molteplicità di p_{i_k}

$\prod_i \sum_k \frac{1}{p_i^k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots\right)$

$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1} \sim \sum_i \frac{p_i}{p_i - 1} - 1 = \sum_i \frac{1}{p_i - 1}$

Quindi $\sum_i \frac{1}{p_i} \sim \sum \frac{1}{p_i - 1} \sim \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$

Più in generale, dato $\alpha > 0$, $\sum_i \frac{1}{p_i^\alpha} \sim \sum_n \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

ESEMPI: $\log n! \sim \log\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\right] = n \log n - n + \frac{1}{2} \log(2\pi n) \sim n \log n$

$\alpha > 0 \quad \sum_n \frac{\log n!}{n^\alpha} \sim \sum_n \frac{n \log n}{n^\alpha} = \sum_n \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} \Rightarrow \sum_n \frac{\log n!}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \alpha > 2 \\ +\infty & \alpha \leq 2 \end{cases}$

$\alpha > 0 \qquad 2^{n^\alpha} = 2^{(n^\alpha)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^\alpha}}$ vediamo i due casi possibili

$\alpha \geq 1 \Rightarrow n^\alpha = n \cdot n^{\alpha-1} \geq n \Rightarrow 2^{n^\alpha} \geq 2^n \Rightarrow \sum \frac{1}{2^{n^\alpha}} \leq \sum \frac{1}{2^n} = 2$

$\alpha \in (0,1)$ è vero che $\frac{1}{2^{n^\alpha}} < \frac{1}{n^2}$ def in n?
cioè $2^{n^\alpha} > n^2$ def., cioè passando ai logaritmi $\log(2^{n^\alpha}) = n^\alpha \cdot (\log 2) > 2 \log n$ def., cioè $\frac{n^\alpha}{\log n} > \frac{2}{\log 2}$ def.? Sì, dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\log n} = +\infty \quad \forall \alpha > 0$

26-11-2021 Lezione 27 Prof. Carminati

- $\limsup_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x) \leq \limsup_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$

$f(x) = [f(x)+g(x)] + (-g(x))$

$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] + \underbrace{\limsup_{x\to x_0}(-g(x))}_{-\liminf_{x\to x_0} g(x)}$ da cui la tesi. □

- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n-1}{n^2-5n+2} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^4$

$\frac{n^2-n-1}{n^2-5n+2} = 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{4n^2-3n}{n^2-5n+2} = 1 + \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$ ⊛ $a_n > 0$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$a_n := \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \searrow \frac{1}{e}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{n!}}}_{a_n}$ Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ questa serie converge? $\begin{cases} \alpha = 0 & \text{non conv.} \\ \alpha > 0 & \text{non conv.} \\ \alpha < 0 & \text{converge} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$, $a_n \sim \frac{e}{n^{1-\alpha}}$ ← armonica generalizzata $e \cdot \frac{1}{n^\beta}$
$\beta = 1-\alpha$, converge $\forall \beta > 1$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge per crit. della radice

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$ converge per confronto con $\frac{1}{n^2}$

$$0 \leq \frac{\log n}{n^3} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\log n}{n} \leq c\cdot\frac{1}{n^2} \qquad \frac{\log n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\log n}{n} \leq c$$

- $\sum_{n=1} \frac{\log n}{n^\alpha}$ per quali α converge? $\forall\, \alpha > 1$: se $\alpha = 1+2\delta$ con $\delta > 0$

$$\frac{\log n}{n^{1+2\delta}} = \frac{1}{n^{1+\delta}}\cdot\frac{\log n}{n^\delta} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}\cdot c \qquad \frac{\log n}{n^\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists\, c>0 : \frac{\log n}{n^\alpha} \leq n$$

— o —

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$ converge? $\sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}} = \frac{n^{1/\sqrt{n}}}{2} = \frac{e^{(\log n)/\sqrt{n}}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge

- $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\dots$ converge o diverge?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

$\sum_{n \text{ cubo di un naturale}} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{27}}+\dots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ converge

— o —

$S = \{ n \in \mathbb{N}$: la cifra 0 non compare nello sviluppo decimale di $n \}$

$S_k = \{ n \in S : n$ ha k cifre $\}$

$\sum_{n\in S} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n\in S_1}\frac{1}{n} + \sum_{n\in S_2}\frac{1}{n} + \dots\right)$ Idea: procedere come nella dim. del criterio di condensazione

$$0 \leq \sum_{n\in S_k}\frac{1}{n} \leq \frac{9^k}{10^k}\cdot 10 \qquad \begin{cases} |S_1| = 9, \ |S_2| = 9^2, \dots, \ |S_k| = 9^k \\ n\in S_1 : \frac{1}{n} < 1, \ n\in S_2 : \frac{1}{n} < \frac{1}{10}, \ n \in S_3 : \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \end{cases}$$

$$\sum_{n\in S}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n\in S_k}\frac{1}{n} \leq 10\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k \leq 10\cdot\frac{9}{10-9} = 90$$

— o —

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sqrt[n]{n}-1\right]^\alpha \qquad \frac{1}{n}\log n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

$$\left[\sqrt[n]{n}-1\right]^\alpha = \left[e^{\frac{1}{n}\log n} - 1\right]^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} \left[\frac{1}{n}\log n\right]^\alpha \qquad ⊛ \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\log n \text{ diverge}$$

Se $\alpha \le 1$ la serie diverge

Se $\alpha > 1$ converge sempre : sia $\alpha = 1 + 2\delta \Rightarrow \frac{\delta}{1+2\delta} > 0$

$$0 \le \frac{(\log n)^{1+2\delta}}{n^{1+2\delta}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \left[\frac{\log n}{n^{\delta/1+2\delta}} \right]^{1+2\delta} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot O(1)$$

— o —

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$ per quali $x \in [0, +\infty)$ converge ?

$$0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \le \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$$

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow x^n \to +\infty & \text{la serie converge } (*) \\ x = 1 \Rightarrow x^n = 1 & \text{la serie diverge} \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow x^n \to 0 & \text{la serie converge} \end{cases}$$

$\sum \frac{1}{x^n}$ converge se $x > 1$

$(*)$ $x > 1$, $x^n \to \infty$ $\quad \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \sim \frac{1}{x^n}$

— o —

• $\boxed{\alpha > 0}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\log\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $\begin{cases} \text{conv. per } \alpha > 1/2 \\ \text{diverge altrimenti} \end{cases}$

$(*)$ $\frac{1}{n^\alpha} := x$, se $n \to \infty$ $\Rightarrow x \to 0$

$*$ $\log\cos x = \log(1 + \overbrace{\cos x - 1}^{x \to 0}) \sim \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$$-\log\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ diverge perché non è verificato il criterio necessario

Oss: $\binom{2n}{n} \le (1+1)^{2n} = 4^n$

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ esercizio

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$ $\quad a_n = \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{\cancel{n+1}}(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{3^n}\cancel{(n!)^2}} = \frac{\overset{3n^2}{\wr}\;3(n+1)^2}{\underset{4n^2}{\wr}\;(2n+2)(2n+1)} \to \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ La serie converge

30-11-2021 Lezione 28 Prof. Novaga

SERIE A TERMINI GENERALI

Def: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

- Converge semplicemente se la succ. $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} a_n$ converge per $N \to \infty$
- Converge assolutamente se la serie a termini positivi $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge

Prop: $\sum a_n$ conv. assolutamente $\Rightarrow$ conv. semplicemente

Dim: Per il crit. di Cauchy

① $\sum a_n$ conv. semp. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon$ tc $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_\varepsilon$

② $\sum a_n$ conv. ass. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N'_\varepsilon$ tc $\sum_{n=N}^{M} |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N'_\varepsilon$.

Per dis. triangolare $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n| \underset{\text{per hp}}{\leq} \varepsilon \quad \forall N, M \geq N'_\varepsilon$

$\Rightarrow \sum a_n$ conv. semplicemente

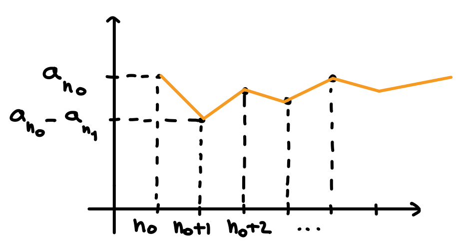
Oss: Non vale il viceversa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv. semplicemente ma non assolutamente, infatti: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Oss: Posso guardare la conv. di $\sum |a_n|$ a cui posso applicare confronto, rapporto, radice

CRITERIO DI LEIBNITZ

Sia $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente e $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, allora la serie a segni alterni $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (semplicemente)

Dim.



Supponiamo n_0 pari, n_0 dispari si fa in modo simile

S_{n_0+2k} è una succ. decrescente in k
S_{n_0+2k+1} è " " crescente in k
Poichè a_n è decresc.

Inoltre sono limitate, infatti: $S_{n_0+2k} \geq S_{n_0+1}$ e $S_{n_0+2k+1} \leq S_{n_0} \quad \forall k \geq 1$

$S_{n_0+2k} \to \ell$ e $S_{n_0+2k+1} \to \ell'$ per $k \to +\infty$ però si ha

$0 \xleftarrow{hp} a_{n+2k+1} = |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}| \to |\ell - \ell'| \Rightarrow \ell = \ell'$ e $\sum (-1)^n a_n$ conv. a ℓ.

SOMMA PER PARTI DI UNA SERIE PRODOTTO

a_i, b_i successioni in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$$\sum_{i=N}^{M} a_i b_i = \sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) B_i + \underbrace{a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}}_{\text{"termini di bordo"}} \quad \text{con} \quad B_i = \sum_{i=n_0}^{i} b_k \quad \forall N, M > n_0$$

<u>Dim:</u> $b_i = B_i - B_{i-1} \quad \forall i$,

$$\sum_{i=N}^{M} a_i b_i = \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \sum_{i=N}^{M} a_i B_{i-1} \overset{\substack{\text{cambio di}\\ \text{indici}}}{=} \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \sum_{i=N-1}^{M-1} a_{i+1} B_i =$$

$$= \sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) B_i - a_N B_{N-1} + a_{M+1} B_M$$

CRITERIO DI DIRICHLET

a_n, b_n in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

1. $a_n \to 0$ per $n \to \infty$
2. a_n ha variazione limitata, cioè $\sum_n |a_{n+1} - a_n| < +\infty$
3. $B_N = \sum_{n=n_0}^{N} b_n$ allora $|B_N| \leq C \quad \forall N \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ converge (semplicemente)

<u>Oss:</u> Se $a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 2 può essere sostituita con 2' a_n monotona, infatti se a_n è monotona e limitata si ha:

$$\sum_{n=n_0}^{N} |a_{n+1} - a_n| = \left| \sum_{n=n_0}^{N} (a_{n+1} - a_n) \right| = \left| a_{N+1} - a_{n_0} \right| \leq C \quad \forall N \quad \text{e}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1} - a_{n_0}| = \left| \lim_n a_n - a_{n_0} \right| < +\infty$$

<u>Oss:</u> Prendendo $b_n = (-1)^n$ Dirichlet estende Leibnitz

<u>Dim:</u> Per Cauchy devo verificare che $\forall \varepsilon \ \exists N_\varepsilon$ tc $\left| \sum_{n=N}^{M} a_n b_n \right| \leq \varepsilon$ $\forall N, M \geq N_\varepsilon$ per la somma per parti, abbiamo

$$\left| \sum_{N}^{M} a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \cdot |B_n| + |a_{n+1}| \cdot |B_M| + |a_N| \cdot |B_{N-1}| \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| + |a_{M+1}| + |a_N| \right) \leq 3\varepsilon$$

se prendo $N, M \geq N_\varepsilon$ dove N_ε è tc $\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{C}$ e $|a_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$.

Mi vanno bene perché nel primo caso ho che $\sum_n |a_n - a_{n+1}| < +\infty$ e nel secondo ho che $a_n \to 0$.

VARIANTE: CRITERIO DI ABEL

a_n, b_n in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tali che

① a_n ha variazione limitata ($\Rightarrow a_n$ converge)

② $\sum b_n$ converge, cioè B_n è convergente $\Rightarrow \sum a_n b_n$ converge

Dim. Variante della precedente

Oss: $\sum |a_n - a_{n+1}| < +\infty \Rightarrow a_n$ è di Cauchy $\Rightarrow a_n$ converge

Infatti $|a_N - a_M| = \left| \sum_{n=N}^{M-1} (a_n - a_{n+1}) \right| \le \sum_{n=N}^{M-1} |a_n - a_{n+1}| \le \varepsilon$ se $N, M \ge N_\varepsilon$

SERIE DI POTENZE COMPLESSE

$\sum a_n z^n \quad z \in \mathbb{C}, \; a_n \in \mathbb{C}$ serie di potenze in $\mathbb{C}$

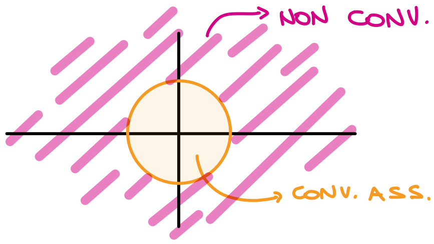
Domanda: Per quali $z \in \mathbb{C}$ converge?

Vediamo la conv. assoluta, cioè guardo $\sum_n |a_n| \cdot |z|^n$

Idea: Uso il criterio della radice $\Rightarrow$ la serie converge se

$\lim_n \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} = |z| \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$: va bene se si ha

$|z| < R = \dfrac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$ RAGGIO DI CONVERGENZA



Osserviamo che se $a_n \to 0 \Rightarrow R \ge 1$.

Viceversa se $|z| \cdot \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \limsup_n |z^n a_n| > 1 \Rightarrow z^n a_n \not\to 0$ e $\sum a_n z^n$ non conv.

Ricapitolando:
- $|z| < R \Rightarrow$ converge assolutamente
- $|z| > R \Rightarrow$ non converge ($a_n z^n \not\to 0$)

Fin qui non serve nessuna ipotesi di a_n. Cosa succede per $|z| = R$?

Applico Dirichlet: $\sum_n a_n z^n = \sum_n (a_n R^n) \left(\frac{z}{R} \right)^n$ osservando che se

$|z| \le R$ e $|z| \neq R$ $\quad B_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z}{R} \right)^n = \dfrac{1 - \left(\frac{z}{R} \right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{R}}$ ho che

$$|B_N| \le \frac{1}{\left| 1 - \frac{z}{R} \right|} \left(1 + \left| \frac{z}{R} \right|^{N+1} \right) \le \frac{2}{\left| 1 - \frac{z}{R} \right|} \quad \forall N$$

Quindi se $a_n R^n \to 0$ ed ha variazione limitata ottengo che

$\sum a_n z^n$ converge (per Dirichlet) $\forall z$ con $|z| = R$, $z \neq R$.

Il caso $z = R$ va visto a parte.

Oss: R si dice raggio di convergenza della serie di potenze

Esempio: $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$ $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ $R = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (raggio di conv.)

$|z| < 1 \Rightarrow$ conv. assoluta

$|z| > 1 \Rightarrow \frac{z^n}{n} \not\to 0 \Rightarrow$ la serie non converge

$|z| = 1$, $z \neq 1$ $\Rightarrow |B_N| = \left| \sum_{n=n_0}^{N} z^n \right| = \left| \frac{1-z^{N+1}}{1-z} - \frac{1-z^{n_0}}{1-z} \right| = \left| \frac{z^{n_0} - z^{N+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|}$

Inoltre $\frac{1}{n} \to 0$ ed è monotona $\Rightarrow$ ha variazione limitata $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ per Dirichlet $\sum \frac{z^n}{n}$ converge (non assolutamente) $\forall z$ tc $|z| = 1$, $z \neq 1$

$z = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n} = +\infty$ non converge

02-12-2021 Lezione 29 Prof Novaga

Esempio (Serie di Fourier):

$\sum a_n \sin(nx)$, $\sum a_n \cos(nx)$ $x \in \mathbb{R}$ fissato

Si può applicare Dirichlet con $b_n = \sin(nx)$ o $b_n = \cos(nx)$ se a_n è infinitesima o ha variazione limitata va verificato:

$\left| \sum_{n=0}^{N} \sin(nx) \right| \leq C$ $\forall N$ e lo stesso per $\cos(nx)$.

Osserviamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ quindi $\sin(nx) = \mathrm{Im}(e^{inx})$, $\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx})$

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \mathrm{Im} \sum_{n=0}^{N} (\underset{\substack{\downarrow \\ z,\ |z|=1}}{e^{ix}})^n = \begin{cases} \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \right) & \text{se } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x = 2k\pi \end{cases}$$

$\left| \sum_{n=0}^{N} \sin(nx) \right| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|}$ $x \neq 2k\pi$ $\forall N$, $\sum_{n=0}^{N} \sin(2kn\pi) = 0$ $\forall N$

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall x$. Nel caso $\sum a_n \cos(nx)$ ho, allo stesso modo, convergenza $\forall x \neq 2k\pi$, invece per $x = 2k\pi$ devo studiare la serie $\sum a_n$

SERIE DI POTENZE

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ $c_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ "centro" della serie

$\exists R \in [0, +\infty]$ raggio di convergenza

$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}$ (con la conv. $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$) tale che la serie

conv. ass. se $|z - z_0| < R$ e non conv. se $|z - z_0| > R$ cerchio di convergenza

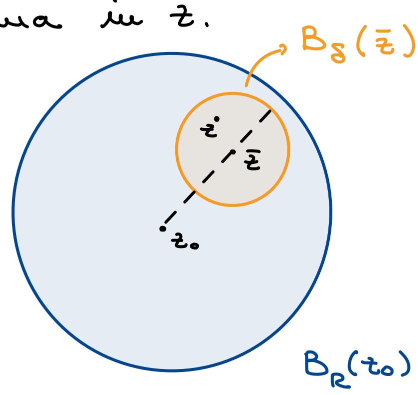
La conv. al bordo, cioè per $|z - z_0| = R$, si studia col criterio di

Dirichlet o col criterio della conv. assoluta. In ogni caso è def.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0) = \{ z : |z - z_0| < R \}$

Prop: f è continua su $B_R(z_0)$

Dim: Sia $\bar{z} \in B_R(z_0)$ voglio vedere che f è continua in $\bar{z}$.



Sia δ tc $B_\delta(\bar{z}) \subseteq B_R(z_0)$, cioè $|\bar{z} - z_0| + \delta < R$.

$\forall z \in B_\delta(\bar{z}) \quad \sum c_n (z - z_0)^n$ conv. assol. a $f(z)$

inoltre tale conv. è uniforme in $z \in B_\delta(\bar{z})$.

Infatti $\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} c_n (z - z_0)^n \right| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right|$

$$\le \sum_{N+1}^{\infty} |c_n| |z - z_0|^n \le \sum_{N+1}^{\infty} |c_n| \Big(\underbrace{|z_0 - \bar{z}| + \delta}_{R'} \Big)^n \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

NB: I polinomi $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n (z - z_0)^n$ convergono uniformemente a $f(z)$

in ogni cerchio $B_{R'}(z_0)$ con $R' < R$. Ora stimiamo:

$$|f(z) - f(\bar{z})| = |S_N(z) - S_N(\bar{z}) + f(z) - S_N(z) + S_N(\bar{z}) - f(\bar{z})|$$
$$\le |S_N(z) - S_N(\bar{z})| + |f(z) - S_N(z)| + |f(\bar{z}) - S_N(\bar{z})|$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo N_ε tc $|f(\varepsilon') - S_N(z')| < \varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon$.

Lo posso fare $\forall z' \in B_\delta(\bar{z})$ per la conv. uniforme fissato tale N,

$S_N(z)$ è continua, $\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon$ tale che $|S_N(z) - S_N(\bar{z})| \le \varepsilon$ se $z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$.

Per tale δ_ε ho quindi $|f(z) - f(\bar{z})| \le 3\varepsilon \quad \forall z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$

$\Rightarrow f$ è continua in $\bar{z}$.

Oss: Con la stessa dimostrazione ho che f è uniformemente

continua in $B_{R'}(z_0)$ $\forall R' < R$.

Non è detto che lo sia in $B_R(z_0)$.

RIORDINAMENTI

Def: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è un riordinamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva tale che $b_n = a_{f(n)}$.

Domanda: Se $\sum a_n$ converge cosa posso dire di $\sum b_n$?

Teo: $\sum a_n$ converge assolutamente a S

$\Rightarrow$ $\sum b_n$ converge assolutamente, sempre a S

Dim: $b_n = a_{f(n)}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists M \geq N$ tc $\{a_1, \dots, a_N\} \subseteq \{b_1, \dots, b_M\}$

Fisso $N' \geq M$ e guardo la differenza delle somme parziali:

$\left| \sum_{n=0}^{N'} (a_n - b_n) \right| \leq 2 \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$ se N è abbastanza grande.

In generale non è vero se $\sum a_n$ converge semplic. ma non assolut.

Sia $S^+ = \sum \max(a_n, 0) \in [0, +\infty]$

$S^- = -\sum \min(a_n, 0) \in [0, +\infty]$

Osserviamo che $\sum a_n$ conv. assolutamente $\Leftrightarrow S^{\pm} < +\infty$.

La somma è $S = S^+ - S^-$.

Prop: $\sum a_n$ converge semplicemente non assolutamente (quindi $S^+ = S^- = +\infty$)

$\Rightarrow \forall S \in [-\infty, \infty]$ $\exists$ un riordinamento $b_n = a_{f(n)}$ tale che $\sum b_n = S$.

Dim: Per esercizio

Oss:
- Se $S^+ = +\infty$ e $S^- < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$
- Se $S^- = +\infty$ e $S^+ < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n = -\infty$

e lo stesso per ogni riordinamento

PRODOTTI DI DUE SERIE

Siano $\sum a_i = S_a$ e $\sum b_j = S_b$ due serie convergenti.

Posso esprimere $(\sum a_i)(\sum b_j)$ come somma di una serie?

$$S_a \cdot S_b = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \right) = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j \right) = \text{"} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j \text{"}$$

La serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right)$ si dice prodotto di Cauchy delle due serie.

Teo: Se le serie convergono assolutamente $\Rightarrow$ la serie prodotto $\sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j$ converge assolutamente a $S_a \cdot S_b$.

Dim: So che $\sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} |a_i b_j| \leq \sum_{i=0}^{N} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{N} |b_i| \leq T_a \cdot T_b < +\infty$ quindi la serie prodotto converge assolutamente $\Rightarrow$ a meno di riordinamento

$$\sum_n \sum_{i+j} a_i b_j = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j \right) = S_a \cdot S_b .$$

Oss: Non vale senza l'assoluta convergenza. Se però $\sum a_n$ converge assolut. e $\sum b_n$ conv. sempl. posso dire ancora che la serie prodotto converge a $S_a \cdot S_b$ (Teorema di Mertens).

Applicazione: $f(z) = \sum_n a_n z^n$ $\quad R_a > 0$ raggio di convergenza

$g(z) = \sum_n b_n z^n$ $\quad R_b > 0$ raggio di convergenza

$\Rightarrow$ la serie prodotto $\sum_n c_n z^n = f(z) g(z)$, con $c_n = \sum_{i+j<n} a_i b_j$, ha raggio di convergenza $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

03-12-2021 Lezione 30 Prof. Carminati

Esercizi per casa.

1) Calcolare $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

2) Sia a_n definita da $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log(1+a_n^2) \end{cases}$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

b) Calcolare il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^{-1/n}$

4) $\sum \frac{(-1)^n}{n \log^{\alpha} n}$ Dire per quali α la serie converge semplicemente e assolutam.

Serie armonica a segni alterni

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge per Leibnitz

Oss: Avevamo visto $H(n) \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1)$ per $n \to +\infty$.

Possiamo prendere anziché $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e otteniamo dunque una funzione

$H(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + o(1)$ per $x \to \infty$. Se prendiamo $n \doteq \lfloor x \rfloor$ otteniamo

$H(x) = H(n)$, infatti: $0 \le \log x - \log n < \log n+1 - \log n < \frac{1}{n}$ con $n \le x < n+1$

Consideriamo $A(n) \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k}$ che equivale a

$$= \sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k} - \boxed{2 \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k}} \overset{k=2h}{=} \cancel{2} \sum_{1 \le h \le \frac{n}{2}} \frac{1}{\cancel{2}h} = H\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$A(n) = H(n) - H\left(\frac{n}{2}\right) = \log n + \gamma + o(1) - \left(\log \frac{n}{2} + \gamma + o(1)\right) = \log \cancel{n} \cdot \frac{2}{\cancel{n}} + o(1)$$

$$= \log(2) + o(1) \longrightarrow \log 2$$

(Per casa) Calcolare la serie $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots = ?$

$\circledast$ $\sum \frac{\sqrt{2^n + 3^n}}{(n+1)^2} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ per quali $z \in \mathbb{C}$ converge?

Serie di potenze centrata in 0.

$L = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ Raggio di Convergenza $R = \frac{1}{L}$

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2^n + 3^n}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{(n+1)^{-2/n}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[2n]{2^n + 3^n}}_{\to \sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3^n \le 2^n + 3^n \le 2 \cdot 3^n \rightsquigarrow \sqrt[2n]{3^n} \le \sqrt[2n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[2n]{2 \cdot 3^n}$$

La serie $\circledast$ converge se $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ e non converge se $|z| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Se $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $|c_n z^n| = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \sqrt{2^n + 3^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^n}} = \frac{1}{(n+1)^2} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \sim \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum |c_n z^n|$ converge per il criterio del confronto asintotico $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ anche $\sum c_n z^n$ converge.

(S) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{x_n}$ $x_n \to 0$? Sì

(S) è assolutamente convergente? $\sum |x_n| < +\infty$? No

$|x_n| = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ non converge

<u>Posso applicare Leibnitz?</u> Sì: $x_n = (-1)^n a_n$ con $a_n \to 0$, $a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$\sqrt{n}$ cresc. $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}$ decresc. $\in [0,1]$, $\sin x$ è cresc. su $[0,1] \Rightarrow a_n$ è decrescente

$\Rightarrow \sum (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge semplicemente (ma non assolutamente)

per il criterio di Leibnitz.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}}_{x_n}$ dire se converge

$x_n = (-1)^n \cdot \underbrace{\dfrac{n + (-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}}_{a_n \to 0}$

Metodo 1: ~~Per Leibnitz la serie converge~~. NO serve a_n decrescente

Metodo 2: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \underbrace{\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}_{o(1)}\right) \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

~~Quindi per il criterio del confronto asintotico converge anche la serie di partenza~~. NO serve $x_n \geq 0$

$$x_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + H(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. La $\sum x_n$ diverge positivamente.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^{n!}$ per quali $z \in \mathbb{C}$ converge? SERIE DI POTENZE LACUNARIA

$\sum c_k z^k$ con $c_k \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n! \quad n \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } k = n! \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\limsup\limits_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = ?$

Studio la conv. di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2^n |z|^{n!}}_{a_n(z)}$ al variare di $z \in \mathbb{C}$.

Usando il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} |z|^{[(n+1)\cdot n!]}}{2^n |z|^{n!}} = 2 \cdot |z|^{n(n!)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } |z| < 1 \\ +\infty & \text{se } |z| > 1 \end{cases}$$

La serie converge se $|z| < 1$ e non converge se $|z| > 1$.

$|z| = 1$? La serie non converge.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2}}_{x_n \to 0 \quad n \to \infty}$

$\sum |x_n|$ converge? No: $|x_n| \sim \dfrac{\log n}{n}$

Posso usare Leibnitz: $a_n = \dfrac{n \log n}{1+n^2}$ $a_n \to 0$, a_n decrescente def. $\forall n \geq n_0$

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)\log(n+1)}{1+(n+1)^2} < \frac{n \log n}{1+n^2} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(n+1)(1+n^2)}{n(1+(n+1)^2)}}_{r_n} < \underbrace{\frac{\log n}{\log(n+1)}}_{s_n} < 1$$

$\xRightarrow{\text{Leibnitz}}$ la serie converge

$$r_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}+O(1/n^2)}{1+\frac{2}{n}+O(1/n^2)} = 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$s_n = \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1 - \frac{-\log n + \log(n+1)}{\log(n+1)} = 1 - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n+1} = 1 - \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n \log n}\right)$$

$1-r_n \sim \frac{1}{n}$, $1-s_n \sim \frac{1}{n\log n}$, def. $\frac{1}{n \log n} < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $1-r_n < 1-s_n \quad \forall n \geq n_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{r_n < s_n \quad \forall n \geq n_0}$

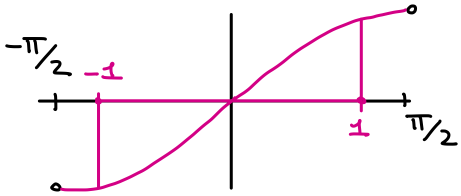
— o —

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = -\sin x_n \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = \ ? \ ;$$

1) $\sum x_n$ converge ?

2) $\sum x_n$ converge assolutamente ?

Oss: x_n è definita $\forall n$, $|x_n| \leq 1$ $\forall n$



$f(x) = \sin|x|$, $g(x) = |\sin x|$ $\Big\}$ sono funzioni diverse ma coincidono su $[-1,1]$

$a_n = |x_n|$ $\quad a_{n+1} = |x_{n+1}| = |-\sin x_n| = |\sin x_n| = \sin|x_n| \underset{\uparrow}{=} \sin a_n$

perché $|x_n| \leq 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases} \Rightarrow a_n \text{ def. } \forall n \qquad 0 \leq a_n \leq 1$$

$\sin x < x \Rightarrow a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ $\quad a_n$ decrescente

$\lim_{n\to\infty} a_n = l \geq 0$, $l=0$ perché 0 è l'unica soluzione di $l = \sin l$ su $[0,1]$

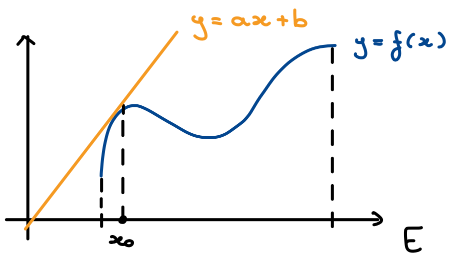
Per induzione si mostra che $x_n = (-1)^n a_n$ e quindi possiamo concludere che $\sum x_n$ converge per il criterio di Leibnitz. $\square$

Suggerimento: $\sum x_n$ non converge assolutamente perché $\sum a_n$ non converge

$a_n \geq \frac{c}{n}$ per qualche valore di c.

07-12-2021 Lezione 31 Prof. Novaga

CALCOLO DIFFERENZIALE



$f: E \to \mathbb{R}$ $\qquad E \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in E$ pt. di accumulazione

Cerchiamo la retta che approssima meglio $f(x)$ vicino a x_0 := RETTA TANGENTE

Cerchiamo $y = ax + b$ tc $f(x) - (a(x - x_0) + b) = o(x - x_0)$

Se pongo $x = x_0$ ho subito $b = f(x_0)$ $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0)$

Dividendo per $x - x_0$ ottengo $a = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{\text{DEF}}{=:} f'(x_0)$, che possiamo anche indicare come $\dfrac{df(x_0)}{dx} \in \mathbb{R}$ cioè la DERIVATA DI f IN x_0.

Se questo limite esiste f si dice derivabile in x_0 e $f'(x_0)$ è il coeff. della retta tangente al grafico f in $(x_0, f(x_0))$ di eq. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

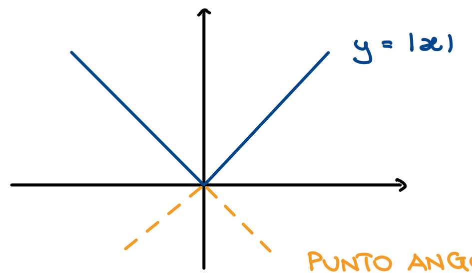
Oss: f derivabile, cioè $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$ in x_0

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ è continua in x_0

Non è vero il viceversa:

- $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$

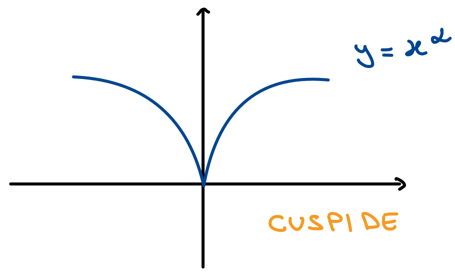
$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm 1$$



- $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \geq 0 \\ (-x)^\alpha & x < 0 \end{cases}$

non è derivabile in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm \infty$$



Facendo il limite destro e sinistro definiamo:

DERIVATA DESTRA: $\dfrac{df}{dx^+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

DERIVATA SINISTRA: $\dfrac{df}{dx^-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Oss: f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ le derivate destra e sinistra coincidono

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLA DERIVATA

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari se $f(x) = f(-x)$

è dispari se $f(x) = -f(-x)$

- f pari $\Rightarrow f'$ dispari, f dispari $\Rightarrow f'$ pari ($h = x - x_0$)

supponiamo f pari $\Rightarrow f'(-x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$

f dispari si fa allo stesso modo.

- $(cf)'(x) = c \cdot f'(x) \quad c \in \mathbb{R}$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ additività del limite
- $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$$(f \cdot g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right]$$

$$= g(x) \lim_{h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= g \cdot f' + f \cdot g'$$

- f derivabile in x e $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ deriv. in x e $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{-[f(x+h) - f(x)]}{h\, f(x+h)\, f(x)}$$

Oss: Dalle ultime due proprietà otteniamo

- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ se $g(x) \neq 0$

CHAIN RULE, DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

$f, g \quad g$ deriv. in x_0, f deriv. in $g(x_0) \Rightarrow f \circ g$ derivabile in x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Dobbiamo vedere che $f(g(x)) - f(g(x_0)) \overset{?}{=} f'(g(x_0))\, g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

Sappiamo
1. $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
2. $f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0))$

$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\, g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

usando 1

DERIVATA DI FUNZIONI ELEMENTARI

$(c)' = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$(ax+b)' = a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{n x^{n-1} h + o(h)}{h} = n x^{n-1}$$

Oss: $P(x)$ pol. di grado $n \Rightarrow P'(x)$ è un pol. di grado $n-1$

$$\boxed{\sin(x)' = \cos(x)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h} \underbrace{\sin(x) \frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \cdot \cos(h) = \cos(h)$$

$$\boxed{\cos(x)' = \sin(x)}$$ Analogo

$$\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)'\cos(x) - \sin(x)\cos(x)'}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

$(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

$\log(x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$ [Più in generale: $\log(|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$]

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$\log(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} = \frac{1}{x}$$

- f deriv $\Rightarrow (e^f)' = e^f \cdot f'$
- f deriv. e $f>0 \Rightarrow \log(f)' = \frac{f'}{f}$

Più in generale f, g derivabili $f>0 \Rightarrow f^g = e^{\log(f^g)} = e^{g\log(f)}$

- $(f^g)' = e^{g\log(f)} \cdot [g\log(f)]' = f^g \left(g'\log(f) + \frac{gf'}{f}\right)$

Esempi:

- $x^\alpha \quad x>0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x^\alpha = e^{\alpha\log x} \quad (x^\alpha)' = x^\alpha \cdot (\alpha \log x)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- $a^x \quad a>0 \quad x\in\mathbb{R} \Rightarrow a^x = e^{x\cdot\log a} \quad (a^x)' = a^x (x\log a)' = (\log a)\cdot a^x$
- $x^x = e^{x\log x} \quad x>0 \Rightarrow (x^x)' = x^x (x\log x)' = x^x(\log x + 1)$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE INVERSA

f invertibile in un intorno di x_0 e derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $f(x_0)$ e si ha $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Sappiamo $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ per x in un intorno di x_0

e $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$f^{-1}\Big(\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}_{y}\Big) = \underset{\substack{\downarrow \\ f^{-1}(y_0)}}{x_0} + x - x_0 \qquad y_0 = f(x_0)$$

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

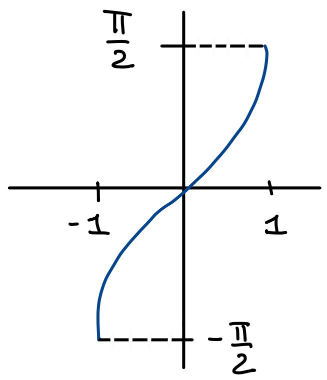
$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + x - x_0 = f^{-1}(y_0) + \frac{y - y_0}{f'(x_0)} + o(y - y_0)$$

Quindi $\displaystyle\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Oss: Se $f'(x_0) = 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \pm\infty$

Esempi.

$y = \sin(x)$ $\qquad \arcsin(y) = \sin(x)\Big|^{-1}_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$



$$\arcsin(y)' = \frac{1}{\sin(x)'} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \forall y \in (-1, 1)$$

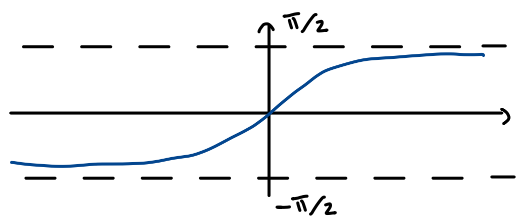
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - y^2}$

$$\arccos(y)' = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \forall y \in (-1, 1)$$

$\arccos(y) = \cos(x)\Big|^{-1}_{[0, \pi]}$ $\qquad \arctan(y) = \tan(x)\Big|^{-1}_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

$$\arctan(y)' = \frac{1}{\tan(x)'} = \frac{1}{1 + \tan(x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$



09 - 12 - 2021 Lezione 32 Prof. Carminati

Es per casa:

① Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}$

a) Verificare che f è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Mostrare che $f'(0) = 1$ ma f non è crescente in alcun intorno dell'origine

② Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \log\left(\frac{3+x}{1+2x}\right) & x > 0 \end{cases}$ è derivabile su $\mathbb{R}$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

x_0 è un punto di MASSIMO RELATIVO (o LOCALE) di f su $A \overset{def}{\iff}$

$\overset{def}{\iff} \exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$

x_0 è un punto di MINIMO RELATIVO (o LOCALE) di f su $A \overset{def}{\iff}$

$\overset{def}{\iff} \exists \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$

x_0 è un punto di MASSIMO ASSOLUTO (o GLOBALE) di f su $A \overset{def}{\iff}$

$\overset{def}{\iff} f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$

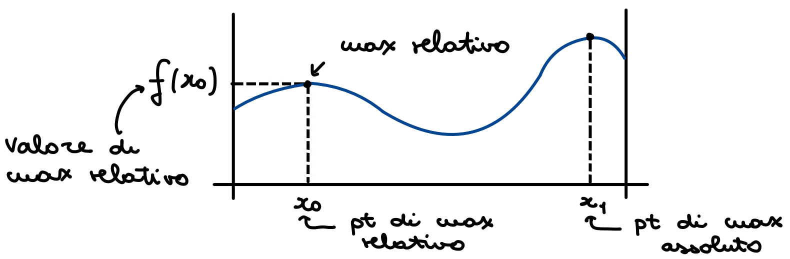
x_0 è un punto di MINIMO ASSOLUTO (o GLOBALE) di f su $A \overset{def}{\iff}$

$\overset{def}{\iff} f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$

Oss: x_0 punto di max. assoluto

$\Rightarrow x_0$ punto di max. relativo.

Non è vero il viceversa.



Teo (CRITERIO DI FERMAT):

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \text{int}(A)$ punto interno, x_0 pt. di massimo o minimo relativo per f su A, f derivabile in x_0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Oss: Non vale $\Leftarrow$: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ non è pt. di max nè di min relativo

Dim: SPG x_0 pt. min relativo

x_0 pt. interno $\Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 : B_{\delta_1}(x_0) \subset A$

x_0 pt. min relativo $\Rightarrow \exists\, \delta_1 > \delta > 0 \quad f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

Se $x \in B_\delta(x_0) \rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\nearrow \ge 0$ se $x > x_0$, $\searrow \le 0$ se $x < x_0$ (numeratore ≥ 0)

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \qquad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$

$0 \le f'(x_0) \le 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. $\square$

— o —

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ ammette massimo e minimo

i) il pt. max potrebbe coincidere con gli estremi ($x_0 \in \{a,b\}$)

ii) il pt. max potrebbe essere interno $x_0 \in (a,b)$ ma f non deriv. in x_0

iii) il pt. max è interno e f derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Es: $f(x) = \dfrac{\log x}{x} \quad (x > 0)$

Determinare inf e sup di f e dire se sono o no max e min

TEOREMA DI ROLLE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$, f derivabile su (a,b),

$\ell := f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

— o —

f continua $\Rightarrow f$ ammette massimo e minimo

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) \ge \ell \ge \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

[caso A] $\max f = \min f \Rightarrow f(x) = \ell \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

[caso B] $\max f \ne \min f \Rightarrow$ almeno uno dei due è diverso da ℓ

(spg il max) $\exists\, \xi \in [a,b] \quad f(\xi) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) > \ell \Rightarrow \xi \notin \{a,b\}$

$\Rightarrow \xi \in (a,b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$ per il Teorema precedente

$\square$

TEOREMA DI DARBOUX

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile su $[a,b]$,

$f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : f'(\xi) = 0$

Dim: Per Weierstrass f ammette massimo e minimo.

Il punto di minimo ξ deve essere INTERNO : $\xi \in (a,b)$

b non può essere punto di minimo locale $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \xrightarrow{x \to b^-} f'(b) > 0$

Quindi $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} > 0$ in un intorno sinistro di b : $[b-\delta, b)$

$\Rightarrow f(b) - f(x) > 0 \quad \forall x \in (b-\delta, b) \Rightarrow f(b) > f(x) \quad \forall x \in (b-\delta, b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(b)$ non è un punto di minimo

Con un ragionamento analogo segue $f(a)$ non è un punto di minimo

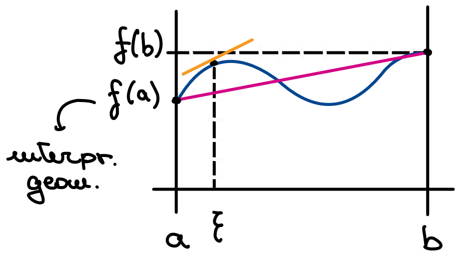
$\Rightarrow \xi \in (a,b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$

Cor: f' manda intervalli in intervalli (per esercizio)

TEOREMA DI LAGRANGE

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$, f derivabile su (a,b)

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : \quad f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dim:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

- h è continua su $[a,b]$
- h è derivabile in (a,b), $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

  $h(a) = f(a)$, $h(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a)$
- $h(b) = h(a)$

Posso applicare ad h il th di Rolle :

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) \quad 0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioè $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\square$

Cor: Se $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua,

f derivabile in $\text{int}(I)$

i) Se $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ è deb. decrescente

ii) Se $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ è deb. crescente

iii) se $f'(x) = 0$ $\forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f$ è costante

Oss: Serve che I sia un intervallo

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\qquad f(-1) = -1 < f(1) = 1$

f non è decrescente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$

Dim: i) Se $a, b \in I$ con $a < b$ allora $[a, b] \subset I$

Applico Lagrange $\exists \xi \in (a, b)$ $\quad \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \leq 0$

Pertanto visto che $b - a > 0$ $\quad f(b) - f(a) \leq 0 \Rightarrow f(b) \leq f(a)$

ii) identica (per esercizio)

iii) Se vale (iii) $\Rightarrow$ vale sia (i) e (ii)

$\Rightarrow f$ è sia deb. crescente che f decrescente $\Rightarrow f$ costante

$\square$

Es di applicazione:

$n \mapsto a_n = \dfrac{n \log n}{1 + n^2}$ è decrescente $\forall n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$

$\varphi(x) = \dfrac{x \log x}{1 + x^2}$ è decrescente su $[a, +\infty)$

$a_n = \varphi(n)$ per verificare la decrescenza di a_n $\forall n \geq n_0$ basta verificare la decrescenza di φ su una semiretta positiva

$$\varphi'(x) = \frac{(\log x + 1)(1 + x^2) - x \log x\,(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{N(x)}{D(x)} \qquad D(x) > 0$$

$$N(x) = \log x + 1 + \boxed{\cancel{x^2 \log x}} + x^2 - \boxed{\cancel{2}}\, x^2 \log x = -x^2 \log x + o(x^2 \log x) \qquad x \to +\infty$$

$\lim_{x \to +\infty} N(x) = -\infty \Rightarrow N(x) < 0$ su una semiretta positiva $[a, +\infty)$

$\Rightarrow \varphi$ decrescente su $[a, +\infty)$

Es: Studiare la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

TEOREMA DI CAUCHY

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f,g continua su $[a,b]$, f,g derivabili su (a,b)
$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b)$ tale che $[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi)$

Cor: Se nelle stesse ipotesi assumiamo anche che $g'(\xi)\neq 0$ su (a,b)

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Oss: Se pongo $g(x)=x$ riottengo Lagrange

Dim: $h(x)\doteq[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$

h è continua su $[a,b]$, h è derivabile su (a,b) e

$h'(x)=[f(b)-f(a)]g'(x)-[g(b)-g(a)]f'(x)$

h soddisfa le ipotesi di Rolle

$h(a)=[f(b)-f(a)]g(a)-[g(b)-g(a)]f(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$
$\parallel$
$h(b)=[f(b)-f(a)]g(b)-[g(b)-g(a)]f(b)=-f(a)g(b)+g(a)f(b)$

$\Rightarrow \exists\,\xi: h'(\xi)=0 \Rightarrow [f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi)$ □

Esempio/esercizio:

f deriv. in un intorno di 0, $f(0)=0$, $f'(x)=o(x^n)$ per $x\to 0$ $(n\geq 1)$

Allora $f(x)=o(x^{n+1})$ per $x\to 0$.

[Sugg: usare Cauchy con $g(x)=x^{n+1}$]

- Sia $f:I\to\mathbb{R}$ derivabile su I (intervallo) $|f'(x)|\leq M$ $\forall x\in I$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ $\forall x,y\in I$ cioè f è M-Lip

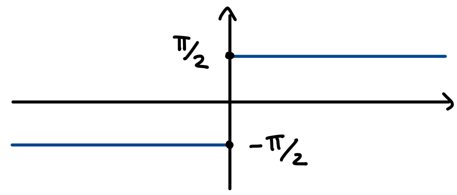
10-12-2021 Lezione 33 Prof. Carminati

- $f(x)=\arctan x+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow f=\text{cost}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$



$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$

• $$\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{a_n} = ?$$

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n-1)}\right]\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right]\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{2}^{N} a_n = -\frac{1}{2}\left[\sum_{2}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{2}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{N} - 1\right)\right] \xrightarrow{N\to\infty} \frac{3}{4}$$

• $$\sum_{N=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-1/n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n n^{-1/n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

L'addendo non è infinitesimo $\Rightarrow$ la serie non converge

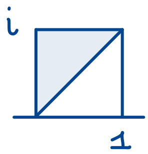
o

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{\frac{\log n}{n}(1+i)^n} z^n \qquad z\in\mathbb{C}$$

c_n

Q1: Raggio di convergenza

Q2: Comportamento al bordo



$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \qquad |c_n| = \frac{\log n}{n}|1+i|^n = \frac{\log}{n}2^{n/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n}}\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

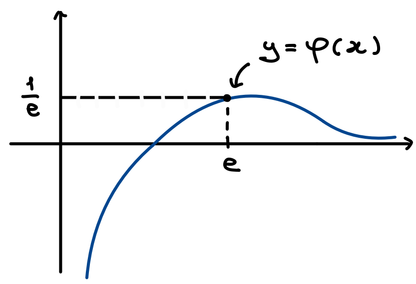
Se $z\in\partial B_R(0) \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$

$$c_n z^n = \frac{\log n}{n}\cdot\underbrace{(1+i)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{in\theta}}_{b_n}$$

Oss: Se $|z| = R$ la serie non è assolutamente conv. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n}$

$$\varphi(x) \doteq \frac{\log x}{x} \qquad \varphi'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} < 0 \text{ per } x>e$$

$n \mapsto \frac{\log n}{n}$ è decrescente per $n\geq 3$



$\Rightarrow \frac{\log n}{n}$ è a variazione limitata

Per utilizzare Dirichlet devo verificare che b_n è a somma limitata

$$b_n = (1+i)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{in\theta} = e^{i\pi/4 n}\cdot e^{i\theta n} = e^{i(\pi/4+\theta)n} \qquad 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$$

Per quali valori di θ $\quad B_N \doteq \sum_{n=1}^{N} e^{i(\pi/4+\theta)n}$ è limitata.

Se $\theta \neq -\frac{\pi}{4} \Rightarrow B_N = e^{i(\pi/4+\theta)}\cdot\dfrac{1-e^{i(\pi/4+\theta)(N-1)}}{1-e^{i(\pi/4+\theta)}}$

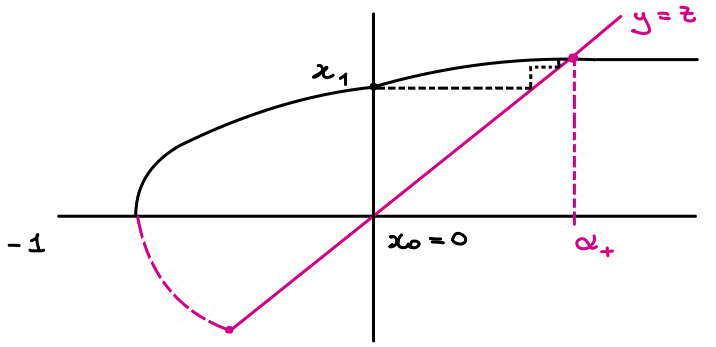
$|B_N| \leq \dfrac{2}{|1-e^{i(\pi/4+\theta)}|}$ è limitata uniformemente in $\mathbb{N}$

Se $\theta = \pi/4$ l'addendo della serie è esattamente $\dfrac{\log n}{n}$ $\Rightarrow$ la serie diverge □

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4
x_n	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1+\sqrt{2}}$	$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad \sqrt{1+x} > x \iff \}x<0\{ > \}x>0 \wedge 1+x > x^2\{$



$x^2 - x - 1 = 0$

$\alpha_\pm = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, $\quad \not\Leftarrow$

$\sqrt{1+x} \geq x$ sse $x \in [-1, \alpha_+]$

$f([-1,\alpha_+]) = [0,\alpha_+] \subset [-1,\alpha_+]$

$x_0 \in [-1,\alpha_+] \Rightarrow x_n \in [-1,\alpha_+]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per induzione

$f(x) \geq x$ se $x \in [-1,\alpha_+]$

$\Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) > x_n \Rightarrow x_n$ crescente, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \leq \alpha_+$

$\Rightarrow \ell = f(\ell) \Rightarrow \ell = \alpha_+$ $\qquad x_n \to \alpha_+$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha_+ \qquad \lim_{n\to\infty} n^2(\underbrace{x_n - \alpha_+}_{-\varepsilon_n}) = ?$

$\varepsilon_n \doteq \alpha_+ - x_n > 0$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{f(\alpha_+) - f(x_n)}{\alpha_+ - x_n} \longrightarrow \lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(\alpha_+)-f(x)}{\alpha_+ - x} = f'(\alpha_+)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \qquad 0 < f'(\alpha^+) < 1$$

Quindi ε_n converge a zero con velocità esponenziale

$$\lim_{n\to+\infty} -n^2 \varepsilon_n = 0$$

Q3: Quanto vale il Raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$?

$R = \frac{1}{f'(\alpha_+)}$ c'è convergenza anche in $|z| = R$ e $z \neq R$ (Dirichlet)

$z = R$ boh! $\rightsquigarrow$ assoluta convergenza

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3}} - \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}} - \frac{1}{4} + \dots$$

Riordinamento di $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$\oplus$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$
$\ominus$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$

Più in generale:

Suppongo di sommare $p(n)$ addendi positivi
$q(n)$ addendi negativi
con $p(n) + q(n) = n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha \in \mathbb{R} \qquad \left(\text{nel caso sopra } \alpha = \frac{2}{3}\right)$$

$$S_n = \sum_{\substack{k \text{ disp} \\ k \le 2p(n)}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k \text{ pari} \\ k \le 2q(n)}} \frac{1}{k}$$

$$H(x) \doteq \sum_{1 \le k \le x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + o(1) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$\sum_{\substack{k \text{ disp} \\ k \le 2p(n)}} \frac{1}{k} = H(2p_n) - \sum_{\substack{k \text{ pari} \\ k \le 2q(n)}} \frac{1}{k} = \log(2p_n) + \gamma + o(1) - \left[\frac{1}{2}\log p_n + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\log p_n + \frac{\gamma}{2} + \log 2 + o(1)$$

$$S_n = \frac{1}{2}(\log p_n - \log q_n) + \log 2 + o(1)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{p_n/n}{q_n/n} + \log 2 + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\log\frac{\alpha}{1-\alpha} + \log 2$$

Nel caso da cui siamo partiti $\alpha = 1/2$ e il limite

$$\frac{1}{2}\log\frac{2/3}{1/3} + \log 2 = \frac{3}{2}\log 2$$

Es: Mostrare che $f(\alpha) = \log \frac{\alpha}{1-\alpha}$ si ha $f((0,1)) = \mathbb{R}$

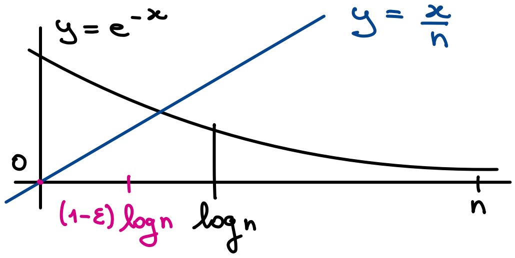
— o —

$e^{-x} = \frac{x}{n}$ (E) $(n \in \mathbb{N}_*)$

(a) Mostrare che (E) ha un'unica soluzione $\alpha(n)$

(b) Mostrare che $\alpha_n \sim \log n$ per $n \to \infty$

$\varphi_n(x) = e^{-x} - \frac{x}{n}$ $\quad \varphi_n(\alpha_n) = 0$?



$\varphi_n(0) = 1 > 0$

$\varphi(n) = e^{-n} - 1 < 0 \quad \forall n \geq 1$

φ_n è continua

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_n(0) > 0 \\ \varphi_n(n) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \alpha_n \in [0, n] \quad \varphi_n(\alpha_n) = 0$$

φ_n è somma di due funzioni strett. decrescenti $\Rightarrow$ è str. decresc.

— o —

$-x = \log x - \log n \qquad x + \log x = \log n$ $\qquad [\cdots]$

$\alpha_n + \log \alpha_n = \log n$

— o —

$\varphi_n(\log n) = e^{-\log n} - \frac{\log n}{n} = \frac{1 - \log n}{n} < 0$ se $n > e$

$\Rightarrow \alpha_n \in [1, \log n]$ se $n > e$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\log n} = 1 \qquad \alpha_n \leq \log n \qquad \frac{\alpha_n}{\log n} \leq 1$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \frac{\alpha_n}{\log n} > 1 - \varepsilon$ definitivamente

$\hookrightarrow \alpha_n > (1-\varepsilon)\log n$

$\varphi_n((1-\varepsilon)\log n) = e^{(-1+\varepsilon)\log n} - \frac{(1-\varepsilon)\log n}{n}$

$= \frac{n^{\varepsilon} - (1-\varepsilon)\log n}{n}$ è $> 0 \ \forall n \geq \bar{n}_\varepsilon$

$0 < \varepsilon < 1 \qquad n^{\varepsilon} - (1-\varepsilon)\log n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

Se $n > \max(e, \bar{n}_\varepsilon) \Rightarrow \varphi_n((1-\varepsilon)\log n) > 0$, $\varphi_n(\log n) < 0$

$\alpha_n \in [(1-\varepsilon)\log n, \log n] \quad \forall n > \max(\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon)$

14-12-2021 Lezione 34 Prof. Carminati

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha}_{x_n} \qquad (\alpha > 0)$$

Q: 1) Per quali α converge

2) Per quali α converge assolutamente

$$|x_n| = (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha \sim \frac{(\log n)^\alpha}{n^\alpha}$$

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n}$$

$\sum \frac{(\log n)^\alpha}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

Se $\alpha = 1 + 2\delta$ con $\delta > 0$ $\quad \frac{(\log n)^\alpha}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \frac{(\log n)^{1+\delta}}{n^\delta} \to o(1) \quad n \to \infty$

$$0 \leq \frac{(\log n)^\alpha}{n^\alpha} \leq \frac{c}{n^{1+\delta}}$$

- la serie converge assolutamente $\forall \alpha > 1$
- Non converge assolutamente se $\alpha \leq 1$
- Se $\alpha \in (0,1)$ la serie converge semplicemente

Oss: $(\alpha > 0)$ $\quad n \mapsto (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ è decrescente per $n \geq 3$, è infinitesima

$\Rightarrow$ Per Leibnitz la serie converge anche per $\alpha \in (0,1]$

— o —

$$\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4}\right) + \dots$$ converge o diverge?

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1/k^2}{1 - 1/k}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - k} = 1$$

converge

serie telescopica

è il riordinamento di una serie assolutamente convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \qquad \text{per } |x| < 1$$

con la formula del prodotto di serie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \underset{\substack{\text{vale per} \\ |x| < \min(R_A, R_B)}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{\text{nel nostro caso}} x^k$$

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

F_n succ. dei numeri di Fibonacci

$F_{n+2} \le 2 F_{n+1}$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$$

che raggio di convergenza ha?

$0 \le F_n \le 2^n \Rightarrow$ Raggio di convergenza è positivo

$$\phi(x) = F_0 x^0 + F_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2}$$

$$x\phi(x) = F_0 x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2}$$

$$x^2 \phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2}$$

$$\phi(x) - x\phi(x) - x^2\phi(x) = F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{\left(F_{n+2} - F_{n+1} - F_n\right)}^{\to 0} x^{n+2}$$

$$\phi(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$\phi(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad \text{per } |x| < R$$

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

dove α, β sono radici di $1 - x - x^2 = 0$ $(\alpha \neq \beta)$

$$-\frac{x}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} \qquad x \in \}\alpha, \beta\{$$

$$\Updownarrow$$

$$-x = A(x - \beta) + B(x - \alpha)$$

se vale $\forall x \neq \alpha, \beta$ per continuità vale anche per $x = \alpha$ e $x = \beta$

$$-\beta = B(\beta - \alpha) \Rightarrow B = \frac{\beta}{\alpha - \beta} \qquad -\alpha = A(\alpha - \beta) \Rightarrow A = -\frac{\alpha}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{A}{x - \alpha} = \left(\frac{A}{-\alpha}\right) \frac{1}{1 - (x/\alpha)} = -\frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^k$$

Es: Ricavare l'espressione di F_n scrivendo $\sum F_n x^n$ come comb. lineare di due serie geometriche

Esercizio: $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n \quad \forall |x|<\delta \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n$

SVILUPPI IN BASE:

$p\in\mathbb{N}, \quad p\geq 2 \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k} \qquad \varepsilon_k \in \{0,\dots,p-1\}$

$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}_*}$

$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$

$p=10$ sviluppi decimali

$p=2$ sviluppi binari

$$\phi : \{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}_*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{\varepsilon} \longmapsto \phi(\underline{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k}$$

$$0\leq \phi(\underline{\varepsilon}) \leq (p-1)\sum_{k=1}^{+\infty} p^{-k} = (p-1)\frac{p^{-1}}{1-p^{-1}} = (p-1)\frac{1}{p-1} = 1$$

$0\leq \phi(\underline{\varepsilon}) \leq 1$ e $\phi(\underline{\varepsilon}) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_k = p-1 \quad \forall k$

$\phi(\underline{\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_k = 0 \quad \forall k$

$\mathrm{Im}(\phi) \subseteq [0,1] \qquad \varepsilon_0 = 0 \qquad \begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \lfloor p\alpha_n \rfloor \\ \alpha_{n+1} = p\alpha_n - \lfloor p\alpha_n \rfloor \in [0,1) \end{cases}$

$\alpha_0 = \alpha$

Dimostrare per induzione che $\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p^{-k} + p^{-(n+1)}\alpha_{n+1} \quad \forall n\geq 0$

$\alpha_0 = \alpha \qquad\qquad \alpha = \varepsilon_1/p + p^{-2}\alpha_2$

$\alpha_1 = p\alpha - \lfloor p\alpha \rfloor = p\alpha - \varepsilon_1 \quad \rightsquigarrow \alpha_0 = p^{-1}(\alpha_1 + \varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1}{p} + \frac{\alpha_1}{p}$

Per $n\to\infty$ $\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p^{-k} = \alpha - p^{-(n+1)}\alpha_{n+1} \longrightarrow \alpha$ ovvero $\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k} = \alpha$

$(\underline{\varepsilon}'), (\underline{\varepsilon}) \in \{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}_*}$

$$\begin{cases} \varepsilon_k = \varepsilon'_k & \forall k<k_0 \\ \varepsilon_{k_0} > \varepsilon'_{k_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}') = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k) p^{-k} \quad (*)$$

$$|\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}')| \leq (p-1)\sum_{k=k_0}^{+\infty} p^{-k} = (p-1)\frac{(1/p)^{k_0}}{1-1/p} = \left(\frac{1}{p}\right)^{k_0-1}$$

$$\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}') \geq (\varepsilon_{k_0} - \varepsilon'_{k_0})p^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty}(\varepsilon_k - \varepsilon'_k)p^{-k} \geq (\varepsilon_{k_0} - \varepsilon'_{k_0})p^{-k_0} - p^{-k_0}$$

vale l'uguale $\Leftrightarrow \varepsilon_{k_0} = \varepsilon'_{k_0} + 1$ e $\varepsilon_k = 0 \wedge \varepsilon'_k = p-1 \quad \forall k>k_0 \geq 0$

Esercizio: $p = 2$

1) Mostrare che $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \Leftrightarrow \alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 2^{-k}$ con ε_k pre-periodica

2) $\alpha = \frac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$ q dispari $\Leftrightarrow \alpha = \sum \varepsilon_k 2^{-k}$ ε_k periodica

3) Se $F(x) = \sum \varepsilon_k x^k$ con $\varepsilon_k \in \{0,1\}$ $\forall k$ e $F\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi

$C = \{ x \in [0,1] : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k} \quad \varepsilon_k \in \{0,2\} \}$

C è chiuso, $\partial C = C$, C non contiene alcun intervallo

$x_n \in C \quad x_n \to \bar{x} \Rightarrow \varepsilon_k(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{\varepsilon}_k \quad \forall k, \quad x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(n) 3^{-n}$

Per verificare le altre due proprietà basta vedere che

$x \in C \quad x = \sum \varepsilon_k 3^{-k}, \quad \tilde{x} = \sum \tilde{\varepsilon}_k 3^{-k} \quad \varepsilon_k \in \{0,2\}$

con $\tilde{\varepsilon}_k = \begin{cases} \varepsilon_k & k \le k_0 \\ 1 & k > k_0 \end{cases}$ allora $\tilde{x} \notin C$ e $\tilde{x}$ può essere reso arbitrariam. vicino a x con k_0 grande

Esercizio: Sia $F : C \twoheadrightarrow [0,1]$ definita da:

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k} \longmapsto F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon_k}{2}\right) 2^{-k}$$

- Verificare che F è surgettiva e debolmente crescente
- $\tilde{F}(x) = \sup_{\substack{t \in C \\ t \le x}} F(t)$, $\tilde{F}(x)$ debolmente crescente, $\tilde{F}(x) = F(x)$ $\forall x \in C$, $\tilde{F}$ è continua

16 - 12 - 2021 Lezione 35 Prof. Novaga

Def: ○ $f : M \to N$ M, N spazi metrici è Lipschitziana di costante $C > 0$ se $d_N(f(x), f(y)) \le C\, d_M(x,y)$ $\forall x, y \in M$

○ $f : M \to M$ è una contrazione se è Lipschitziana con costante $C < 1$

TEOREMA CONTRAZIONI

M sp. metrico completo, $f : M \to M$ è una contrazione

$\Rightarrow \exists! \, \bar{x} \in M$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$ (punto fisso per f). Inoltre $\forall x_0 \in M$ la successione per ricorrenza, $x_{n+1} = f(x_n)$ con dato init. x_0 conv. a $\bar{x}$.

Dim: Il punto fisso $\bar{x}$ (se esiste) è unico.

Infatti, se $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono punti fissi $\Rightarrow$

$\Rightarrow d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)) \leq C\, d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ $(c<1)$ $\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2$

Per l'esistenza di $\bar{x}$, fissiamo $x_0 \in M$ e consideriamo $x_{n+1} = f(x_n)$

Osserviamo che $d(x_{M+1}, x_n) \leq C\, d(x_n, x_{n-1}) \leq C^n d(x_1, x_0)$ $\forall n$

Vediamo che x_n è di Cauchy. $\forall m > n$ si ha:

$$d(x_m, x_n) \underset{\text{dis. triang.}}{\leq} \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} c^k$$

$$\leq c^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} c^j = \frac{d(x_0, x_1)}{1-c}\, c^n$$

$\Rightarrow x_n$ è di Cauchy $\Rightarrow x_n \to \bar{x}$

Per vedere che $\bar{x}$ è un punto fisso, passiamo al limite in $x_{n+1} = f(x_n)$,

osservando che una contrazione è continua,

$\Rightarrow \bar{x} = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$

ESERCIZI:

① Sia $P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$ $n \in \mathbb{N}$. Trovare le soluzioni $P(z) = 0$.

$P(z)(z-1) = (1 + z + z^2 + \ldots + z^n)(z-1) = z^{n+1} - 1 = 0$

$z = 1$ o $P(z) = 0$

$1 = e^{2k\pi i}$ $k \in \mathbb{Z}$ $\quad z^{n+1} = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1} i}$ $\quad k \in \{0, \ldots, n\}$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1} i} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)$ $\quad k \in \{1, \ldots, n\}$

② $a_n \geq 0$, $\boxed{a_{n+1} \leq a_n}$, $\sum a_n < +\infty$ (LEMMA DI ABEL)

Mostrare che $\lim_{n \to \infty} n \cdot a_n = 0$.

Per condensazione, sappiamo che $\sum 2^k a_{2^k} < +\infty \Rightarrow \lim_k 2^k a_{2^k} = 0$.

Supponiamo per assurdo che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $n_k a_{n_k} \geq \varepsilon$ per una succ.

$n_k \xrightarrow[k]{} +\infty$. A meno di passare a una sottosuccessione possiamo

supporre $n_{k+1} \geq 2 n_k$, $n_k \leq n_{k+1}/2$ $\forall k$.

Osserviamo che $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_n \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} = (n_{k+1}-n_k)\, a_{n_{k+1}} \geq \frac{n_{k+1}}{2} a_{n_{k+1}} \geq \frac{\varepsilon}{2}$

a_n decrescente

Questo contraddice il criterio di Cauchy:

$\left[\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \sum_{k=n}^{m} a_k \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq n_\varepsilon \right]$

Assurdo, quindi $n a_n \xrightarrow[n]{} 0$.

Oss: $n a_n \xrightarrow[n]{} 0$ e $a_{n+1} \leq a_n \not\Rightarrow \sum a_n < +\infty$, Es: $a_n = \frac{1}{n \log n}$

⊙ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ manda compatti in compatti e intervalli in intervalli.

Devo dimostrare che, data $x_n \to x_0$, si ha $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.

$K = \left(\bigcup_n x_n \right) \cup x_0$ è un compatto, $f(K) = \left(\bigcup f(x_n) \right) \cup f(x_0)$ è un compatto

$\Rightarrow f(x_0) = \lim_n f(x_n)$ o la succ. $f(x_n)$ ha un punto di acc. $y_1 \neq f(x_0)$, $y_1 \in f(K)$

Supponiamo per assurdo che esista un tale y_1.

A meno di passare a una sottosuccessione.

Posso supporre $f(x_n) \xrightarrow[n]{} y_1 = f(x_{\bar{n}})$.

• Questo può succedere:

es: $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad x_n = \frac{1}{n} \quad$ $f(x_n) = 1 = y_1$, $f(0) = 0$

• Non ho usato che f manda intervalli in intervalli

La stessa proprietà vale per $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ quindi supporre $f(x_n) = y_1 \neq f(x_0)$ $\forall n$

Posso supporre $x_{n+1} \leq x_n$ come in figura.

f manda intervalli in intervalli $\rightarrow$ supponiamo $y_1 > f(x_0)$

$f([x_0, x_n]) = I_n \supseteq [f(x_0), y_1]$ $\forall n$

$\Rightarrow \exists \tilde{x}_n \in (x_0, x_n)$ tc $f(\tilde{x}_n) \in \left(y_1 - \frac{1}{n}, y_1 \right)$.

Ottengo una successione $\tilde{x}_n$ tale che $\tilde{x}_n \to x_0$ e $f(\tilde{x}_n) \xrightarrow[n]{} y_1 \neq f(x_0)$

ma $f(\tilde{x}_n) \neq y_1$ $\forall n \Rightarrow f\left(\bigcup \tilde{x}_n \cup x_0\right) = \bigcup f(\tilde{x}_n) \cup f(x_1)$ non è compatto.

CPT

Non contiene y_1. Assurdo.

17-12-2021 Lezione 36 Prof. Novaga e Carminati

Prima prova in itinere.

Esercizio 1. Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$\cos(x/n) = x$$

ha un'unica soluzione (che nel seguito chiameremo x_n).

Mostrare che la successione (x_n) è limitata, e calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} x_n, \qquad \lim_{n \to +\infty} n \log x_n$$

Esercizio 2. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i/n)^n}{1+n^2} z^n.$$

Discutere poi la convergenza sul bordo del disco di convergenza.

Esercizio 3. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$(n^2+n)^\pi - n^{2\pi} = an^b + o(n^b) \quad \text{per } n \to +\infty$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)^\pi - n^{2\pi}}{(\pi - 2\arctan(n))^\alpha}.$$