Dipartimento
di Matematica
Università di Pisa

APPUNTI DEL CORSO DI

ANALISI MATEMATICA I

A cura di Chiara Di Sano
c.disano1@studenti.unipi.it

SECONDO SEMESTRE

Rielaborazione delle lezioni dei prof.
M. Novaga
C. Carminati
A.A. 2021-2022

01-03-2022 lezione 37 Prof. Novaga

DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = f^{(n)} \qquad \text{Derivata } n^a \text{ di } f$$

PROP: $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A$ aperto $\quad x_0 \in A$

f è derivabile due volte in x_0 (in un intorno di x_0) allora:

1) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale stretto cioè

$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),\ x \neq x_0$

2) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un massimo locale stretto

3) x_0 è un minimo locale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$

4) x_0 è un massimo locale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$

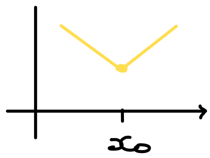
OSS: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ in generale non possiamo dire niente

ES: $f(x) = x^n \quad (n \geq 3) \qquad f'(x) = nx^{n-1},\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

DIM: 1) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

Quindi per la permanenza del segno $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),\ x \neq x_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f \text{ è str. crescente} \\ f'(x) < 0 & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \Rightarrow f \text{ è str. decrescente} \end{cases}$$

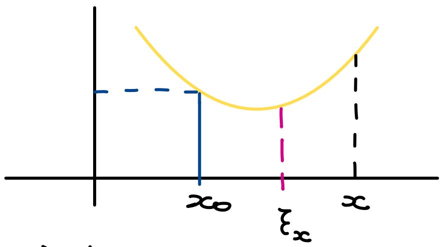


$\Rightarrow x_0$ è minimo locale stretto

2) Si fa come 1

3) x_0 minimo locale per $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\exists\, \varepsilon$ tc $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$



Per Lagrange $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)\ \exists\, \xi_x \in (x_0, x)$ tc

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x) - f'(x_0)}{\xi_x - x_0} \geq 0$$

4) Si fa come 3

Più in generale si ha:

PROP: $f: A \to \mathbb{R}$ A intorno di x_0 cioè $A = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

f derivabile n volte in x_0, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$$\boxed{f^{(k)}(x_0) = 0 \quad 1 \leq k < n \quad e \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0}$$

Allora:

1. n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale stretto
2. n pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un max locale stretto
3. n dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è str. crescente in un intorno di x_0, quindi x_0 non è max o min
4. n dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ è str. decrescente in un intorno di x_0

DIM: Si dimostra con il polinomio di Taylor, più avanti nel corso

Notazione: $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, si indica con:

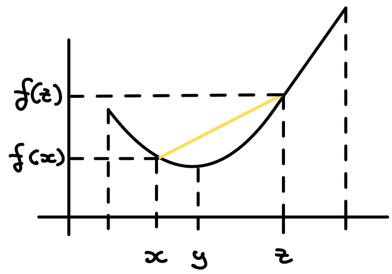
$C^n(A) = \{ f: A \to \mathbb{R}$ derivabili n-volte con $f^{(n)}$ continua $\}$ sp. vettoriale su cui si può mettere la norma: $\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in A} f^{(k)}(x)$

FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

DEF: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, è convessa se

$\forall x < y < z$ si ha $f(y) \leq f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$

f è concava se $-f$ è convessa.



OSS: La disuguaglianza si può scrivere equiv $y = \lambda x + (1 - \lambda) z$ $\lambda \in [0,1]$

COMB. CONVESSA DI x E z

$f(y) = f(\lambda x + (1 - \lambda) z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z) \quad \forall x, z \in I$ e $\forall \lambda \in [0,1]$

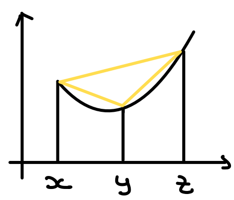
ES: x^n per n pari è convessa, $|x|$ è convessa, x è convessa,

C.ES: x^n per $n \geq 3$ dispari non è convessa.

PROP: $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $\Rightarrow$ f convessa $\Leftrightarrow$ f' crescente

DIM: $\Rightarrow$) $x < y < z$

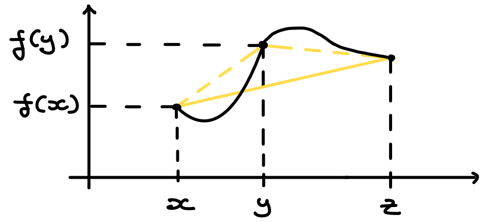
$$(*) \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$



(*) $\xrightarrow{y \to x}$ $f'(x) \le \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \le f'(z) \Rightarrow f'$ è crescente

($\Leftarrow$) f' crescente, supponiamo per assurdo f non convessa, cioè $\exists\, x<y<z$ tc

$$f(y) > f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$$



In particolare $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

Per Lagrange $\exists\, \alpha \in (x,y),\ \beta \in (y,z)$ tc $f'(\alpha) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(\beta)$

Assurdo perché f' deve essere crescente.

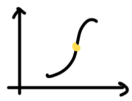
COR 1: $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte, f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \ge 0\ \forall x \in I$

COR 2: $f: I \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile 2 volte in $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \ge 0$

Lo stesso vale per f concava con ≤ 0 invece di ≥ 0.

OSS: Il segno di f'' definisce gli intervalli di convessità e concavità di f

DEF: $f: (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, f derivabile in x_0, f "cambia concavità" in x_0 cioè f è convessa in $(x_0-\varepsilon, x_0)$ e concava in $(x_0, x_0+\varepsilon)$ o viceversa, allora x_0 si dice punto di flesso per f



DEF: $f: (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ continua in x_0, cambia concavità in x_0,

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow +\infty$ o $\longrightarrow -\infty$ allora x_0 è un punto di flesso a tangente verticale.

PROP: $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo aperto, f convessa $\Rightarrow$

① f continua in I

② $\forall x \in J\ \exists\ \underbrace{\dfrac{df}{dx^-}(x)}_{\text{DERIV. SX}} \le \underbrace{\dfrac{df}{dx^+}(x)}_{\text{DERIV. DX}}$

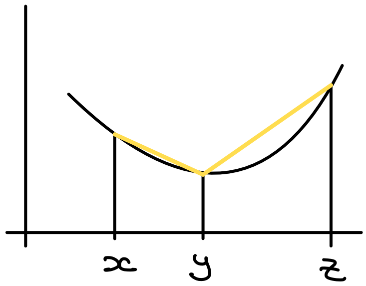
③ $x \le y \Rightarrow \dfrac{df}{dx^\pm}(x) \le \dfrac{df}{dx^\pm}(y)$

④ $\text{disc}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \text{disc}\left(\dfrac{df}{dx^\pm}\right)$ insieme numerabile di punti angolosi

e f è derivabile $\forall x \notin \text{dis}\left(\dfrac{df}{dx^\pm}\right)$

DIM: Basta dimostrare ② e ③

$x < y < z$



$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

MONOTONO CRESCENTE IN x — MONOTONO CRESCENTE IN z

Facendo il limite $x \to y$ e $z \to y$ si ha $\frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(y) \Rightarrow$ ②

③ Segue dalla monotonia dei rapp. incrementali

03-03-2022 Lezione 38 Prof. Carminati

Teoremi di de L'Hôpital

TEO $\left(H; \frac{0}{0}\right)$: $x_0 \in \mathbb{R}$, I intorno di x_0 $(x_0 \in I)$,

- f, g continue su I, $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- f, g derivabili su $I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

— ∘ —

OSS: Non vale il viceversa $(\Leftarrow)$

es: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$g(x) = \sin x$ $\qquad g'(x) = \cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\text{infinites.}} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 1/x + x^2\cos 1/x\,(-1/x^2)}{\cos x}$$

$\hookrightarrow$ NON ESISTE

$f(x) = x - \sin x$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

$g(x) = x^3$

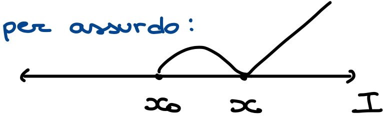
$\sin x \sim x \longrightarrow \sin x = x + o(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Si arriva ad un loop logico perché è da qui che sappiamo $(\sin x)' = \cos x$

DIM: OSS: g non si annulla in $I \setminus \{x_0\}$

per assurdo:



Perché se $g(x_1) = 0 = g(x_0) \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, c \in (x_0, x_1) \subset I$ per cui $f'(c) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \xrightarrow{x \to x_0} \ell$$ per limite di una composizione

$$\Rightarrow \exists\, \xi_x \in (x_0, x) \text{ tc } \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

TEO $\left(H, \frac{0}{0}, x_0 = +\infty\right)$: $f, g \in C((a, +\infty))$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

f, g derivabili su $(a, +\infty)$ $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$

Allora $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

— o —

Oss / esercizio: Non vale ($\Leftarrow$); trovare un controesempio

Dim: $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ $\tilde{g}(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$

$\tilde{f}, \tilde{g}$ sono continue $(0, 1/a)$, $\lim_{t \to 0} \tilde{f}(t) = 0 = \lim_{t \to 0} \tilde{g}(t)$

$\tilde{f}'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, $\tilde{g}'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \underset{x = 1/t}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$ $\square$

$x = -\infty$: dim. analoga

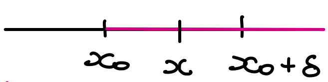
TEO $\left(H, \frac{\infty}{\infty}\right)$: I intorno di x_0; $I^* = I \setminus \{x_0\}$

$f, g \in C(I^*)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

f, g derivabili I^*, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I^*$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

DIM: (caso $\ell \in \mathbb{R}$) Dimostro $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$



$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tc } \ell - \varepsilon \le \frac{f'(x)}{g'(x)} \le \ell + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, \overbrace{x_0 + \delta}^{x_1})$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \boxed{\frac{f(x)}{f(x)-f(x_1)} \cdot \frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \boxed{\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}}$$

$h(x) = 1 + o(1)$
$x \to +\infty$

$$\exists\ \xi_x \in (x, x_1) \text{ tc } \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot h(x)$$

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x\to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \overbrace{\lim_{x\to x_0} h(x)}^{1} \leq \ell + \varepsilon$$

$$\liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \ell - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \leq \liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \varepsilon$$

arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow \liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \limsup \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

□

I casi $\ell = +\infty$ e $\ell = -\infty$ per esercizio.

USI & ABUSI

- $\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}}_{0} \rightsquigarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ USO LEGITTIMO

- $\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}}_{+\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty$ Non è un caso del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ USO ILLEGITTIMO

  NO

- $f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

  $g(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

  $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \longrightarrow$ De L'Hôpital loop (ATTENZIONE)

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} \overset{H}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = -\frac{\cancel{x}}{1+x} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}$

OSS: $\frac{\log(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$ per $x \to 0$

$$\log(1+x) = x + x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + 1/x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}}^{f(x)}}{\underbrace{1/x^3}_{g(x)}} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2(1+x^2)}$$

$$g'(x) = -3x^{-4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2(1+x^2)}}{3x^{-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x + \sin x^2}^{f(x)}}{\underbrace{1+x^2}_{g(x)}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$f'(x) = 1 + 2x\cos x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} + \cos x^2$$

$\Rightarrow$ non ha limite, non posso usare De L'Hôpital

Si fa con i carabinieri:

$$\frac{x-1}{1+x^2} \le \frac{x+\sin x^2}{1+x^2} \le \frac{x+1}{1+x^2} \qquad \frac{x\pm 1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x\to+\infty$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f(x) = \boxed{(1+x)^{1/x}} - e = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} - e \qquad f'(x) = \boxed{e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}$$

$$g(x) = x \qquad\qquad g'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \boxed{(1+x)^{1/x}}\ \boxed{\frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}\ \circledast} = -\frac{e}{2}$$

$\circledast \downarrow \left[\frac{0}{0}\right]$

$f_1(x) = 1 - \log(1+x) - \frac{1}{1+x}$ $\qquad f_1'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$

$g_1(x) = x^2$ $\qquad g_1'(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$ $\qquad \left[\frac{0}{0}\right]$

$f(x) = \tan x - x$ $\qquad f'(x) = \cancel{1} + \tan^2 x - \cancel{1}$

$g(x) = x^2 \tan x$ $\qquad g'(x) = 2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\frac{x}{\tan x} + \frac{x^2}{\tan^2 x}(1+\tan^2 x)} = \frac{1}{3}$$

04-03-2022 lezione 39 Prof. Novaga

STUDI DI FUNZIONE

$f: D \to \mathbb{R}$ $\qquad D =$ dominio di f

OBIETTIVO: Tracciare un grafico qualitativo di f in $\mathbb{R}^2$

$\Gamma_f = \{(x,y) : y = f(x),\ x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad$ Grafico di f

PASSI PRINCIPALI:

- Dominio massimale di f
- Segno di f
- Simmetrie: Pari $(f(x) = f(-x))$, Dispari $(f(x) = -f(-x))$,
  Periodiche $(f(x+T) = f(x)$, T periodo$)$
- Discontinuità
- Limiti agli estremi del dominio (incluso $\pm\infty$)
- Asintoti (verticali, orizzontali, obliqui)
- Derivabilità di f
- Discontinuità di f (Punti angolosi, cuspidi, flessi verticali)
- Segno di f', monotonia di f, massimi e minimi locali
- Derivabilità di f''

⊙ Segno di f'', int. di concavità/convessità, flessi, massimi e minimi

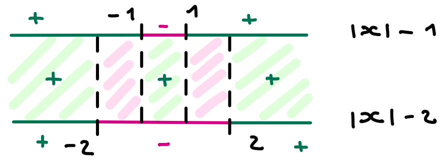
⊙ Disegnare il grafico nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (conviene farlo fin da subito)

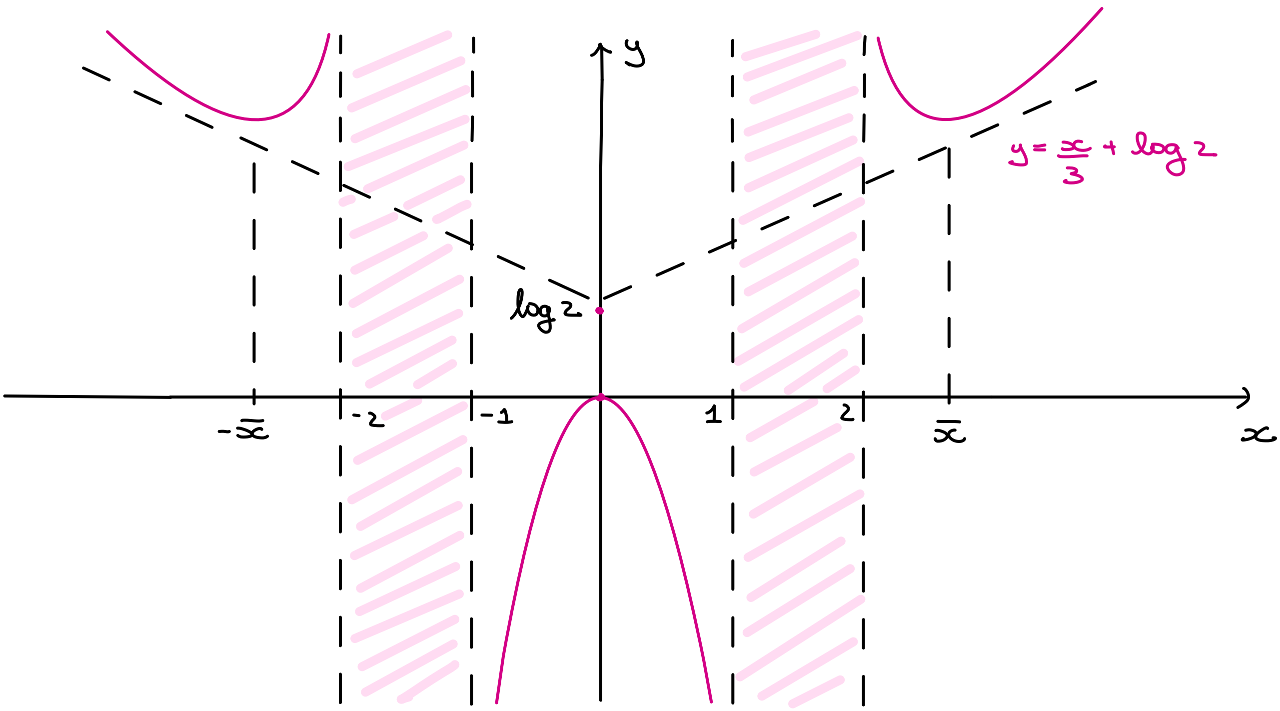
ESEMPI:

• $f(x) = \frac{|x|}{3} + \log\left(2\,\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$

f pari, basta studiarla per $x \geq 0$

$\text{Dom} f = \left\{ x : \frac{|x|-1}{|x|-2} > 0 \right\} = (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,+\infty)$





$f(0) = 0 + \log(1) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{3} + \lim_{x\to 1^-} \log\left(\frac{2|x|-1}{|x|-2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{3} + \lim_{x\to 2^+} \log\left(\frac{2|x|-1}{|x|-2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoto obliquo: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3} + \lim \frac{1}{x} \overbrace{\log\left(\frac{2(x-1)}{x-2}\right)}^{\log 2} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{3} = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{2(x-1)}{x-2}\right) = \log 2$$

$$\boxed{y = \frac{x}{3} + \log 2}$$ ASINTOTO OBLIQUO

$f'(x)$ per $x>0$, $f(x) + \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \log 2$

$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{x-2}{x-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)' = \frac{1}{3} + \frac{\cancel{x-2}}{x-1} \cdot \frac{x-2-(x-1)}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} =$

$= \frac{x^2-3x+2-3}{3(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-3x-1}{3(x-1)(x-2)}$

Per $x>0$ $\quad \text{sgn}(f') = \text{sgn}(x^2-3x-1)$

$x^2-3x-1=0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

f' cambia segno per $\bar{x} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \in (3,4)$ unico punto stazionario con $x>0$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{6} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{6}$ punto angoloso in $x=0$

f PARI

f DISPARI

Calcoliamo per $x>0$,

$f''(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3x+2-3}{x^2-3x+2}\right)' = \frac{1}{3}\left(1-3\cdot\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' = \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' =$

$= \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2}$

$\text{sgn} f'' = \text{sgn}(3-2x)$ per $x>0$

$f''(x)<0$ in $(0,1)$ e $f''(x)>0$ in $(2,+\infty)$

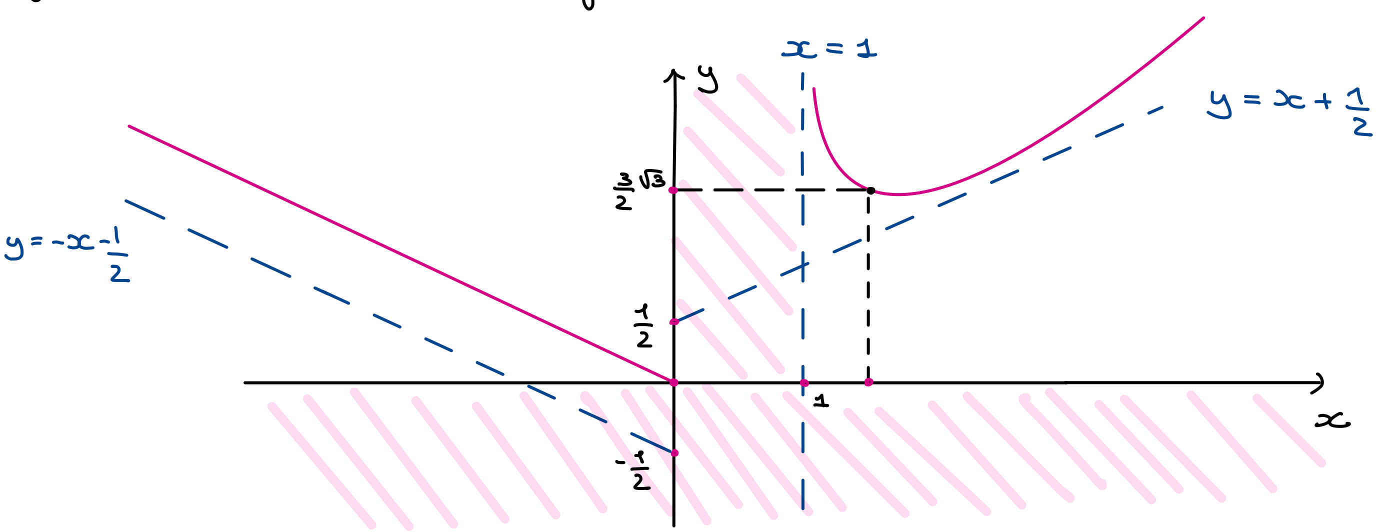
f concava $\qquad$ f convessa

- $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ $\qquad$ Dom f : $x \neq 1$, $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$

○ Dom $f = (-\infty, 0] \cup (1,+\infty)$ $\qquad f(0)=0$

○ Non ci sono simmetrie

○ $f(x)>0$, $\forall x \neq 0$ $\quad x \in$ Dom f



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty \quad \text{asintoto verticale } x = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty \quad (f \text{ si comporta come } |x|)$$

Asintoti obliqui: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x-1}} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x\right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\underbrace{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x\right)}_{\sim 2x^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x + \frac{1}{2}} \quad \text{AS OBL. PER } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = -\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-1)}} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x^2}{x-1}} - x\right)} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{y = -x - \frac{1}{2}}$ AS. OBLIQUO per $x \to -\infty$

Calcoliamo $\displaystyle f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\left(\frac{x^3}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\,\frac{3x^2(x-1) - x^2}{(x-1)^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \cdot \frac{x^2}{(x-1)^2}(2x-3)$$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{27}{2}\cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ unico punto stazion. e minimo locale

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^-} \sqrt{-\frac{1}{x^3}}\cdot x^2 = 0$$

$\exists \frac{df}{dx^-}(0) = 0 \qquad x = 0$ minimo assoluto di f

$$f'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}, \quad f''(x) = \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}} - \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x}}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)^4} \overset{?}{\geq} 0$$

$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) \overset{?}{\leq} (x-1)^{\cancel{4}}\cdot\frac{x}{\cancel{(x-1)^3}} = x^2 - x \Rightarrow x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x}_{-x} \overset{?}{\leq} x^2 - x \quad \text{OK}$$

$\Rightarrow f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$, f è convessa in $(-\infty, 0]$ e $(1, +\infty)$.

08-03-2022 Lezione 40 Prof. Novaga

FORMULA DI TAYLOR

PROBLEMA: Data $f(x)$ regolare, $x_0 \in \operatorname{dom} f$, $n \in \mathbb{N}$, trovare il polinomio $P_n(x)$ di grado n che "approssima meglio" f vicino a x_0

Es: $n=0$ $P_0(x) = f(x_0)$, $n=1$ $P_1(x) = f(x_1) + f'(x_0)(x-x_0)$

cioè cerchiamo $P_n(x)$ t.c. $f(x) = P_n(x) + o(|x-x_0|^n)$

Oss: Non è detto che esista

Oss: Se esiste è unico: P, Q di grado n, $P-Q = o(|x-x_0|^n) \Rightarrow P=Q$

Def: Data $f: I \to \mathbb{R}$, I aperto, diff n-volte in $x_0 \in I$,

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ si dice polinomio di Taylor di grado n di f in x_0.

Oss: $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\forall k < n$

Teo (Peano): f diff. n volte in x_0, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{o(|x-x_0|^n)}_{\text{RESTO DI PEANO}}$

Dim: Applico l'Hôpital $(n-1)$ volte a:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(n)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0$$

Cor (Max/min): f derivabile n volte in x_0, $n > 1$,

$f^{(k)}(x_0) = 0$ $\forall 1 \le k \le n$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

1. n dispari, f è localmente strettamente monotona
2. n pari, $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 minimo locale stretto
3. n pari, $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 massimo locale stretto

Dim: $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$

Vediamo 2, cioè n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$

$\exists \varepsilon > 0$ tc $|o(x-x_0)^n| \le \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}(x-x_0)^n$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$\Rightarrow f(x) \geq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}(x-x_0)^n \quad \forall n \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow x_0$ è un minimo locale

Gli altri punti si fanno in modo simile.

Calcolo di $T_n(f, x_0)$:

- $T_n(af+bg, x_0) = a T_n(f, x_0) + b T_n(g, x_0) \quad a, b \in \mathbb{R}$
- $T_{n-1}(f', x_0) = T_n(f, x_0)'$

Esempi: 1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \ \forall k \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, ..., $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

$$f^{(k)}(0) = k! \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

3) $f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$T_{n+1}(f)' = T_n(f') = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \Rightarrow T_{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cancel{f(0)}$$

4) $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f'' = -\sin(x)$, $f''' = -\cos(x)$, $f^{(4)} = \sin(x)$

$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ e analogamente $f = \cos(x)$, $x=0 \Rightarrow T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Oss: f pari e $x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x)$ ha solo monomi con esponenti pari

f dispari e $x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x)$ ha solo monomi con esponenti dispari

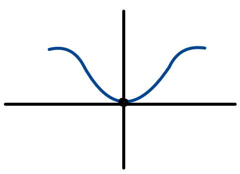
5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x_0 = 0 \Rightarrow T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$

6) $f(x) = \arctan(x) \quad x_0 = 0 \Rightarrow T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

7) $(1+x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, $x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

OSS: Anche se f è derivabile ∞ volte in x_0 non è detto che $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$ per $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

ES: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \ \forall n \Rightarrow T_n(x) = 0 \ \forall n$



DOMANDA: Quando $T_n(x) \to f(x)$ in un intorno di x_0?

Teo (Lagrange): f derivabile $(n+1)$-volte in $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = T_n(f, x_0)(x) + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad t \in (x_0, x) \text{ o } t \in (x, x_0)$$

RESTO DI LAGRANGE

OSS: $n=0$ è il teorema di Lagrange

Lemma: g derivabile $(n+1)$-volte in (a,b), $g^{(k)}(a) = g(b) = 0 \quad 0 \le k \le n$

$\Rightarrow \exists\, t \in (a,b)$ tc $g^{(n+1)}(t) = 0$

Dim: Applico Rolle a g:

$\exists\, t_1$ tc $g'(t_1) = 0$, applico Rolle a g' in $[a, t_1]$

$\vdots$

$\exists\, t_n$ tc $g^{(n)}(t_n) = 0$, " " " $g^{(n)}$ in $[a, t_n]$

$\exists\, t = t_{n+1}$ tc $g^{(n+1)}(t) = 0$

Dim (Teo): Fissiamo $x > x_0$, applico il lemma in (x_0, x), con

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t - x_0)^{n+1}$$

$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \le n$, $g(x) = 0 \Rightarrow \exists\, t \in (x_0, x)$ tc $g^{(n+1)}(t) = 0$

$$0 = f^{(n+1)}(t) \cdot (n+1)! \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \Rightarrow f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cor: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dim: $e^x - T_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^t \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (|t| < |x|)$

$$|e^x - T_n(x)| \le \frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n]{} 0$$

Def: f è derivabile infinite volte in x_0, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ si dice serie di Taylor di f in x_0.

Lo stesso funziona per $\sin(x)$, $\cos(x)$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e anche per $\log(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$ ma solo per $|x| < 1$

Es: Approssimare e a meno dell' $1/1000$

$e = T_n(1) + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n \qquad R_n = \frac{e^{t_n}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \qquad t_n \in (0,1)$

Scelgo n tc $R_n < \frac{1}{1000}$, cioè $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ $\quad (n+1)! > 3000$ per $n=6$

$T_6(1) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$

Def: $f: A \to \mathbb{R}$ A aperto, $f \in C^\infty(A)$ è analitica in A se $\forall x_0 \in A$ f coincide con la sua serie di Taylor in x_0, in un intorno di x_0.

ES: e^x è analitica su $\mathbb{R}$, $\arctan(x)$ è analitica su $\mathbb{R}$,

$\frac{1}{1+x}$ è analitica su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \\ 0 \end{cases}$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, anche se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

10-03-2022 Lezione 41 Prof. Carminati

Formula di Taylor con resto di
- Peano ← serve per calcolare $\lim_{x \to x_0}$
- Lagrange ← utile per ottenere info di tipo "globale"

L) f derivabile $(n+1)$ volte in I intorno di x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \xi \in (x_0, x)$$

Es: Calcolare $\sin(1)$ con errore inferiore a $\frac{1}{100}$

OSS: Il polinomio di Taylor-Mclaurin di una funzione dispari ha solo monomi di grado dispari

$$f(x) = \sin x \longrightarrow \sin(x) = \overbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0}^{\text{sviluppo di ordine } 2n} + R_n(x)$$

con $|R_n(x)| = |\sin(\xi)| \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \xi \in (0, x)$

Usare questa formula per $x = 1$.

Determinare n in modo che $|R_n(1)| < \frac{1}{100}$.

$$|R_n(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$$

n	$\frac{1}{(2n+1)!}$
1	$1/3!$
2	$1/5!$

$$R_2(1) \leq \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

$$\sin(1) = \underbrace{1 - \frac{1}{6}}_{5/6} + R_2(1)$$

ES: fare lo stesso conto per ottenere un'approssimazione a meno di 10^{-4}

ES. Dimostrare che:

i) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DIM: i) Scrivo la formula di Taylor con resto di Lagrange con $x_0 = 0$,

$n=1$, $f(x) = \cos x$: $\cos x = 1 + 0 + \frac{f''(\xi)}{2} x^2$ con $f''(x) = -\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{\cos \xi}{2} x^2 \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$ perché $-(\cos \xi) x^2 \geq -x^2$

ii) Per esercizio

ES: Dimostrare i) e ii) facendo uno studio di funzione

P) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R(x)$, $R(x) = o(x-x_0)^{n+1}$ per $x \to x_0$

TAYLOR vs DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x \qquad g(x) = x^4$

$f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} + \sin x \qquad g'(x) = 4x^3$

Continuando a derivare si dovrebbe riuscire in al più 4 passi.

OSS: $\left(p(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = \left(p' - xp\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = (-1 + x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + \cos x \qquad g''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = (3x - x^3) e^{-\frac{x^2}{2}} - \sin x \qquad g'''(x) = 24x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{(3\cancel{x} - x^{\cancel{3}\,2})\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\cancel{x}} - \frac{\sin x}{x} \right] \cdot \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Stesso esercizio con Taylor:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \qquad y = -\frac{x^2}{2}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{3}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \frac{1}{12}$$

LEMMA: f, g infinitesime definite in un intorno di 0:

$$f(x) = O(x^m) \qquad g(x) = o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono $o(x^{n \cdot m})$, sinteticamente: $o(O(x^m)^n) = o(x^{n\cdot m})$

$$O((o(x^n))^m) = o(x^{n\cdot m})$$

DIM: $f(g(x)) \leq c\,|g(x)|^m$ $\quad \exists c: |f(x)| \leq c|x|^m$ in un intorno di 0

$$\leq c\,|x|^{n\cdot m} \cdot |\omega(x)|^m \qquad g(x) = x^n\,\omega(x) \text{ con } \omega(x) = o(1)$$

$$= |x|^{n\cdot m} \cdot o(1) \quad \Rightarrow f \cdot g(x) = o(x^{n\cdot m})$$

ES: verificare che $g \circ f(x) = o(x^{n\cdot m})$

LIMITI GIÀ VISTI (03-03-22)

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad * \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3\left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) \overset{*}{=}$ $\quad$ * Sostituzione: $x = \frac{1}{t}$ $\quad t > 0, \; t \to 0^+$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan\frac{1}{t} - \pi/2 + t}{t^3} \overset{*}{=} \qquad * \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t - \arctan t}{t^3} \overset{*}{=} \qquad * \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^3}{3} + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{3}$$

OSS: $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$

$\displaystyle\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \dots$

• $\lim_{x \to 0} \dfrac{\boxed{(1+x)^{1/x} - e}}{x}$ $\to f(x)$

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$$f(x) = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)} - e = e\left(e^{-\frac{x}{2}+o(x)} - 1\right)$$

$*\ e^y - 1 = y + o(y)$

$$\overset{*}{=} e\left(\underbrace{-\frac{x}{2}+o(x)}_{y} + o\left(\underbrace{\frac{x}{2}+o(x)}_{O(x)}\right)\right) = -\frac{e}{2}x + o(x)$$

— o —

• $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ converge $\quad a_n = -f\left(\frac{1}{n}\right)$ con $f(x) = (1+x)^{1/x} - e$

$f(x) = -\frac{e}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$

$$a_n = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n \sim c \cdot \frac{1}{n}$$

$c = \frac{e}{2}$

ESERCIZIO: $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ dire per quali α converge la serie.

ES: Calcolare con Taylor $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right)$

ES: Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ $x_0 \in \mathbb{R}$

Calcolare $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$

→ Usando Taylor

→ Usando De L'Hôpital

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+\sin x) - \sin\log(1+x)}{x^\alpha}$$

determinare α in modo che $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (provare con sagemath)

11-03-2022 Lezione 42 Prof. Novaga

SERIE DI TAYLOR E FUNZIONI ANALITICHE

Se f è C^∞ in x_0, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ si dice serie di Taylor di f in x_0

Prop: $f(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n$ $\quad x \in I = (x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$ raggio di convergenza

$$\Rightarrow f \in C^\infty(I) \text{ e } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Dim: Abbiamo visto $f \in C^\infty$ e $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dx^k}(x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k}$

$\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = a_k k!$

Def: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f \in C^\infty(A)$ è analitica se $\forall x_0 \in A$ $\exists r$ tale che

$f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$

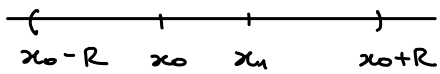
Prop: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad x \in I = (x_0 - R, x_0 + R) \quad R>0$ raggio di convergenza

$\Rightarrow f$ è analitica in I, cioè $\forall x_1 \in I$ $\exists r = r(x_1)$ tc $f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_1)^n \quad x \in (x_1 - r, x_1 + r)$

Lemma: $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |x|<1$

Dim: $k=0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$ derivo k-volte $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Dim (Prop): Fissiamo $x_1 \in I$ e calcoliamo



$f^{(k)}(x_1) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k}, \quad \forall r < R \quad |a_n| \leq \frac{c}{r^n}$

$|f^{(k)}(x_1)| \leq \frac{c}{r^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{|x_1 - x_0|}{r}\right)^{n-k} \quad r \in (|x_1 - x_0|, R)$, applico il lemma

$|f^{(k)}(x_1)| \leq \frac{c \cdot r}{r^{k+1}} \cdot \frac{k!}{\left(1 - \frac{|x_1 - x_0|}{r}\right)^{k+1}} = \frac{c \cdot r}{r - |x_1 - x_0|} \cdot \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k} = c' \cdot \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k}$

$\Rightarrow \left| \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \right| \leq \frac{c'}{(r - |x_1 - x_0|)^k} \Rightarrow$ la serie $\sum \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_1)^k$

Se $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$ in particolare converge in $(x_1 - (R - |x_1 - x_0|), x_1 - R - |x_1 - x_0|)$.

Sia $g(x)$ la sua somma, voglio vedere che $g = f$.

Siano S_n le somme parziali, quindi $S_n \xrightarrow[n]{} g$, stimiamo $f - S_n$.

Per Lagrange $|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |x - x_1|^{n+1}$ y è tra x e x_1

$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{c\,|x - x_1|^{n+1}}{(r - |y - x_0|)^{n+1}} \xrightarrow[n]{} 0$ se $|x - x_1| < r - |y - x_0|$, $x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1)$

È vero se $r_1 < R - |x_0 - x_1| - r_1$. $f = g \Rightarrow f$ analitica.

Cor: f, g analitiche su I intervallo aperto, $\forall k$ $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \Rightarrow f = g$ su I

Dim: Sia $A = \{x \in I \mid f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) \quad \forall k\}$

$x \in A \Rightarrow \exists r$ tc $(x - r, x + r) \subseteq A$ e $g = f$ in $(x - r, x + r)$. A è aperto in I.

Viceversa $x_n \in A$, $x_n \to x \in I$ $\Rightarrow$ per continuità $x \in A$.

A è chiuso in I $\Rightarrow$ $A = I$.

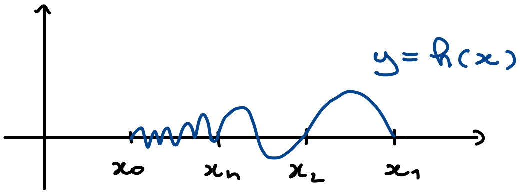
Cor: $f, g : I \to \mathbb{R}$ analitiche, I intervallo aperto, $I \ni x_n$ succ. conv. in I

$x_n \to x_0 \in I$, $f(x_n) = g(x_n)$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $f = g$ in I.

Oss: f, g analitiche $\Rightarrow$ $(af + bg)$ analitica $\forall a, b \in \mathbb{R}$, cioè le funzioni analitiche sono uno spazio vettoriale.

Dim: Consideriamo $h(x) = f(x) - g(x)$ analitica con $h(x_n) = 0$ $\forall n$.

Vogliamo mostrare $h \equiv 0$ passando al limite ho $h(x_0) = 0$.



Per Rolle $\forall x$ $\exists x_n^{(1)}$ e (x_0, x_n) o (x_n, x_0) tale che $h'(x_n^{(1)}) = 0$ $\forall n$.

Passando al limite $h'(x_0) = 0$. Iterando l'argomento ho $h^{(k)}(x_0) = 0$ $\forall k$

$\Rightarrow$ $h \equiv 0$ cioè $f \equiv g$ in I.

cioè per il corollario precedente

Cor: e^x è analitica in $\mathbb{R}$, $\sin x, \cos x$ sono analitiche in $\mathbb{R}$, $\frac{1}{1 \pm x}$ è analitica in $(-1, 1)$, $P(x)$ polinomio è analitica su $\mathbb{R}$

Teo:
1. f, g analitiche in I $\Rightarrow$ $f \cdot g$ analitica
2. " " ", $g \neq 0$ $\Rightarrow$ f/g analitica
3. $f : I \to J$ analitica $g : J \to K$ analitica $\Rightarrow$ $g \circ f$ è analitica
4. $f : I \to \mathbb{R}$ analitica con I intervallo e $f' \neq 0$ in I $\Rightarrow$ f^{-1} è analit.

Prop: $f : I \to \mathbb{R}$ analitica $\Leftrightarrow$ $f \in C^\infty(I)$ e $\forall x_0 \in I$ $\exists r > 0$, $c, R > 0$ tc $\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \leq CR^k$ $\forall k$ e $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Dim: Come nella proposizione precedente

Def: $f : I \to \mathbb{R}$ analitica, I intervallo,

$g = \cup \{ h : J \to \mathbb{R}$ analitica, $J \subseteq I$ intervallo, $h|_I = f$ $\{$

Dove $h_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ e $h_2 : J_2 \to \mathbb{R}$

$$h_1 \cup h_2 (x) = \begin{cases} h_1(x) & x \in J_1 \\ h_2(x) & x \in J_2 \end{cases}$$

È ben definito dato che $h_1 = h_2$ su $J_1 \cap J_2$

$g : J_{MAX} \to \mathbb{R}$ si dice prolungamento analitico di f ed è univocamente determinato da f.

15-03-2022 Lezione 43 Prof. Carminati

ES: 1) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0$

via studio di funzione

1) $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ (1) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x$

$\boxed{f(0) = 0 \qquad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0}$

$f'(x) = -\sin x + x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$, in part. $\forall x \in \mathbb{R}$ perché f è pari

2) $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ (2) $\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$\boxed{g(0) = 0 \qquad g' \geq 0 \Rightarrow g \text{ crescente}}$

$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = f(x) \geq 0$

$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

ESERCIZIO: Mostrare che:

1) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x \geq 0$

E generalizzare il risultato

ES 1: $f \in C^2(\mathbb{R})$ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = (*)$

Si usa De l'Hôpital o Taylor

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2 + o(h^2)$

$f(x_0 - h) = f(x_0) + f'(x_0)(-h) + \frac{f''(x_0)}{2}(-h)^2 + o(h^2)$

$-2f(x_0)$

$\oplus$

$N = 0 + 0 + f''(x_0) h^2 + o(h^2)$

$(*) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f''(x_0) + \boxed{\underbrace{\dfrac{o(h^2)}{h^2}}_{\substack{= \\ 0}}}_{h\to 0} = f''(x_0)$

2) $\displaystyle\sum_{n=2} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \qquad \alpha \geq 0$

Domanda: Per quali α la serie converge?

Oss: 1) La serie non è a termini positivi

2) Con l'assoluta convergenza ho che la serie converge per $\alpha \geq 1$

3) Con Leibnitz non funziona perché non si ha l'hp di decrescenza

4) Proviamo Taylor:

$\omega(x) = x - \log(1+x) \quad \rightarrow \quad \log(1+x) = x - \omega(x)$

$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \omega\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

$\quad = a_n - b_n$

$\downarrow$

è un'armonica generalizzata che studio con Leibnitz

Studiamo b_n:

$\omega(x) \geq 0 \quad \forall x > -1 \Rightarrow b_n$ è a termini positivi $\rightarrow$ si usa il confronto as.

$\omega(x) = x - \log(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$\quad = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \omega(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$b_n = \omega\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 = \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$

$\sum b_n$ converge $\underset{\text{confronto asintotico}}{\Leftrightarrow}$ $\alpha > \frac{1}{2}$

Se $\alpha > \frac{1}{2}$ $\quad \sum x_n$ converge

Se $\alpha \leq \frac{1}{2}$ $\quad \sum x_n$ diverge a $-\infty$ perché il contributo di a_n è limitato e $b_n \to +\infty \Rightarrow a_n - b_n \to -\infty$

ES 2: Determinare $\alpha \geq 0$ in modo che:

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\log(1+\sin x) - \sin\log(1+x)}^{N(x)}}{x^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

parte principale di $N(x)$ per $x \to 0$

↳ primo termine $\neq 0$ nello sviluppo di T.

ordine di infinitesimo

Quanto deve essere α in modo che $N(x) \sim \ell \cdot x^\alpha$ con $\ell \neq 0$

Sviluppi noti :

i) $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^6)$

ii) $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^5)$

Ci "appoggiamo" a questi sviluppi noti per risolvere il nostro problema.

Esempio: • $\log(1+\sin x) \overset{(ii)}{=} \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x)$ per $x \to 0$ NON è un polinomio

Continuiamo usando i): $= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Oss: $o(\sin^2 x) = o(x^2)$, $\sin^3 x = O(x^3)$

• $\sin \log(1+x) = \log(1+x) + \boxed{O(\log^3(1+x))} = o(x^2)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$N(x) = o(x^2) \Rightarrow \alpha > 2$

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + \overbrace{o(\sin^4 x)}^{o(x^4)}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - o(x^2)\right)^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\overset{(*)}{=} x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

(*) non considero i termini di ordine minore (per questo mancano)

$$\sin \log(1+x) = \log(1+x) - \frac{1}{6}\log^3(1+x) + o(\log^4(1+x))$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\left[x^3 - \frac{3x^4}{2}\right] + o(x^4)$$

Vediamo la differenza:

$$\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{6}x^4 + \cancel{\frac{1}{3}x^3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{x^4}{4} \cancel{-\frac{1}{6}}\left[\cancel{x^3} - \frac{3x^4}{2}\right] + o(x^4)$$

$\ominus$

$$N(x) = x^4\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{6 \cdot 2}\right)\right) + o(x^4)$$

$$= \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$$

ES 3: Sia $f(x) = e^{x^2} + ax^2 - b\cos x \qquad a, b \in \mathbb{R}$ **Oss:** $f(0) = 0 \Rightarrow b = 1$

Determinare a, b in modo che f si annulli di ordine massimo.

- $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) \qquad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$f(x) = e^{x^2} + ax^2 - \cos x = \frac{3x^2}{2} + ax^2 + x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}\right) + o(x^4)$$

R: $b = 1 \quad a = -\frac{1}{2} \qquad f(x) \sim \frac{11}{24}x^4$ per $x \to 0$

ES 4: Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che risulti finito il limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1-(ax)^2} - \frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{x^4}$$ ← basta lo sviluppo fino al secondo ordine

Oss: $\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \cancel{\frac{1}{16}y^3} + o(y^2)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

$$\sqrt{1-(ax)^2} = 1 - \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{8}a^4x^4$$

$$\sqrt{1-(ax)^2} - \frac{\sin x}{x} = -x^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{a^2}{2}\right) - x^4\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{8}a^4\right)$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{1}{6} \qquad a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

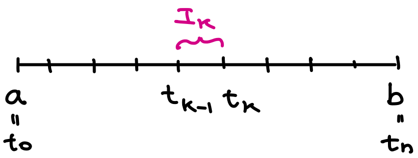
Per casa: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - (1+x)^{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin x}{x} - \cos x}$

17-03-2022 Lezione 44 Prof. Carminati

INTEGRALE DI RIEMANN: Calcolo area sottografico di una funzione

Sia $a < b$, $[a,b]$,

$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $t_0 = a$, $t_n = b$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ — ↪ insieme dei punti — suddivisione = partizione di $[a,b]$ ↪ famiglia di intervalli

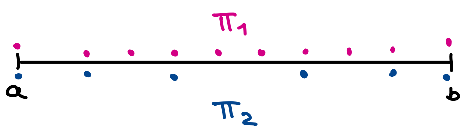


$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \qquad I_k = [t_{k-1}, t_k]$$

$|I_k| \doteq$ ampiezza dell'intervallo $\doteq x_k - x_{k-1}$

Def: Π_1, Π_2 partizioni di $[a,b]$ dico che Π_1 è più fine di Π_2

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \Pi_2 \subset \Pi_1$



Oss 1: Date π_1 e π_2 partizioni è sempre possibile trovare una partizione
$\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ più fina di entrambe.

Oss 2: $\pi_0 = \{a, b\}$ è la partizione meno fina (più grezza) di tutte

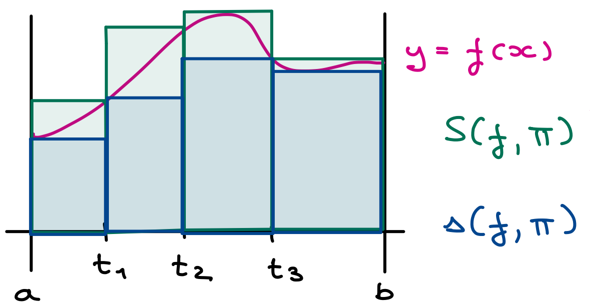
Considero $[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f limitata

π partizione di $[a,b]$. Chiamo *somma superiore di f relativa a π*:

$$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sup_{[t_{k-1},t_k]} f = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \cdot M_k$$

Chiamo *somma inferiore di f relativa a π*: $s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| m_k$

Notazione: $I_k \doteq [x_{k-1}, x_k]$, $|I_k| \doteq x_k - x_{k-1}$, $M_k \doteq \sup_{I_k} f$, $m_k \doteq \inf_{I_k} f$



il valore dell'area è compreso tra questi

Oss: $M_k \geq m_k \quad \forall k \quad 1 \leq k \leq n$

$$S(f,\pi) \geq s(f,\pi)$$

Prop: π_1, π_2 partizione di $[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>limitata</u>.

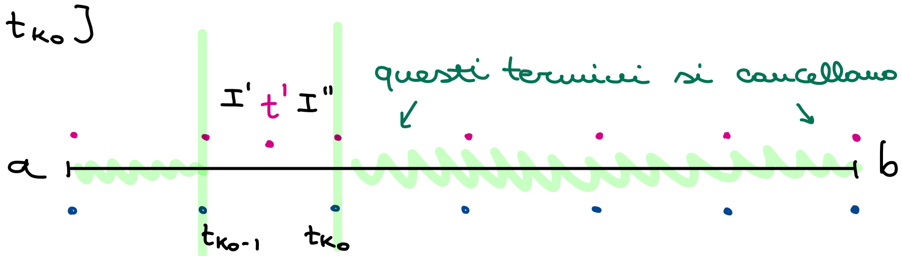
Se π_2 è più fina di π_1 $\quad S(f,\pi_2) \leq S(f,\pi_1)$ e $s(f,\pi_2) \geq s(f,\pi_1)$

Dim: Dimostro solo (2). SPG $\pi_1 = \pi$, $\pi_2 = \pi \cup \{t'\}$

$$S(f,\pi_1) - S(f,\pi_2) = |I_{k_0}| \sup_{I_{k_0}} f - \left(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f \right)$$ dove si ha

$I' = [t_{k_0-1}, t']$ e $I'' = [t', t_{k_0}]$

$$|I'| \sup_{I'} f \leq |I'| M_{k_0}$$
$$|I''| \sup_{I''} f \leq |I''| M_{k_0} \quad \oplus$$



$$\left(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f \right) \geq -|I_{k_0}| M_{k_0} \Rightarrow S(f,\pi_2) - S(f,\pi_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow S(f,\pi_2) \leq S(f,\pi_1)$$

Analogamente si dimostra $s(f,\pi_2) \geq s(f,\pi_1)$ $\square$

TEO: $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata, π_1,π_2 partizioni di $[a,b]$

Allora $S(f,\pi_1)\geq s(f,\pi_2)$.

Dim: $\pi=\pi_1\cup\pi_2$ è una partizione che raffina sia π_1 che π_2

$$S(f,\pi_1)\geq S(f,\pi_1\cup\pi_2)\geq s(f,\pi_1\cup\pi_2)\geq s(f,\pi_2)$$

Def: • $\int^* = S(f) =$ integrale superiore su $[a,b]$

$$S(f)=\inf\{S(f,\pi): \pi \text{ suddivisione finita}\}$$

• $\int_* = s(f) =$ integrale inferiore di $[a,b]$

$$s(f)=\sup\{s(f,\pi): \pi \text{ suddivisione finita}\}$$

Prop: $S(f)\geq s(f)$

Dim: Se π_1 è partizione di $[a,b]$,

$S(f,\pi_1)\geq s(f,\pi_1)$ $\forall\pi$ partizione di $[a,b]$,

$S(f,\pi_1)$ è un maggiorante $\{s(f,\pi): \pi \text{ partizione di } [a,b]\}$

$S(f,\pi_1)\geq s(f)$ $(=\sup\{s(f,\pi):\pi \text{ partizione di } [a,b]\})$ $\forall\pi_1$ part. di $[a,b]$

$s(f)$ è un minorante $\{S(f,\pi_1),\ \pi_1 \text{ partizione}\}$

$S(f)=\inf\{S(f,\pi_1):\pi \text{ partizione}\}\geq s(f)$ $\square$

⚠ Può essere che $S(f)>s(f)$

Esempio: $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ $\quad f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$S(f,\pi)=\sum_{k=1}^{n}|I_k|M_k=\sum_{k=1}^{n}|I_k|=b-a$$

$$s(f,\pi)=\sum_{k=1}^{n}|I_k|m_k=0$$

Def: $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, f limitata è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $S(f)=s(f)$ e il valore comune si indica con $\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{integrale di } f \text{ tra } a \text{ e } b}$

Oss: Se f integrabile $\Rightarrow m(b-a)\leq\int_a^b f(t)\,dt\leq M(b-a)$

$M=\sup\limits_{[a,b]} f$, $\quad m=\inf\limits_{[a,b]} f$, $\quad \pi_0=\{a,b\}$

$$\overbrace{S(f,\pi_0)}^{M(b-a)}\geq S(f)=\int_a^b f(t)\,dt\geq s(f)\geq\overbrace{s(f,\pi_0)}^{m(b-a)}$$

Prop: f è integrabile $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \pi$ partizione tale che

$(0 \leq)\ S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$

Dim: $\Rightarrow)$ $S(f) = \int_a^b f(t)\,dt = s(f)$. Fisso $\varepsilon > 0$,

$\exists \pi_1 \quad S(f) + \varepsilon/2 \geq S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi)$

$\exists \pi_2 \ -s(f) + \varepsilon/2 \geq -s(f,\pi_2) \geq -s(f,\pi)$

$\pi = \pi_1 \cup \pi_2$

$\oplus$

$\varepsilon \geq S(f,\pi) - s(f,\pi) \quad (\geq 0)$

$\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \pi$ partizione tc $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$

$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow S(f) - s(f) = 0 \Rightarrow f$ è integrabile. $\square$

Prop 1: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona allora è integrabile

Prop 2: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è L-Lipschitz allora è integrabile

Teo: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora è integrabile

Dim (Prop 1): SPG suppongo f crescente, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $(\Rightarrow f$ limitata$)$

$\pi_n = \{x_k : 0 \leq k \leq n\}$ $\quad t_k \doteq a + k\frac{b-a}{n}$ partizione uniforme

$S(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-1)}{n} f(t_k)$

$s(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f(t_{k-1})$

$0 \leq S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_{k-1})] = \underbrace{\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))}_{\downarrow\ n\to+\infty\ \ 0}$

$S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n)$ tende a 0

$n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ ho che $S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) < \varepsilon \Rightarrow f$ integrabile

Dim (Prop 2): f L-Lip $\Rightarrow f$ continua, f limitata

$*)$ $S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq L\delta(b-a)$ con $\delta = \max\{|I_k| : 1 \leq k \leq n\}$, $\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$

δ: parametro di finezza

$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| M_k \qquad I_k = [t_{k_0-1}, t_{k_0}]$

$s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| m_k \qquad M_k = \sup_{I_k} f = \max_{I_k} f \qquad m_k = \inf_{I_k} f = \min_{I_k} f = f(\eta_k)$

$\xi_k, \eta_k \in I_k, \quad |\xi_k - \eta_k| \leq |I_k| \leq \delta$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|(M_k - m_k) \leq L\delta \overbrace{\sum_{k=1}^{n} |I_k|}^{b-a}$$

$$0 \leq M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) \leq L|\xi_k - \eta_k| \leq L\delta$$

Def: I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, y \in I \quad (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Es: Se f è Lip $\Rightarrow f$ è uniformemente continua

$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \text{ non è unif. continua su } \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x} \text{ è unif. su } [0, +\infty) \end{array}\right\}$ es.

TEO (HEINE-CANTOR):

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua. Allora f è anche unif. continua.

18-03-2022 lezione 45 Konstantinos Bessas

Sia $P_n(x)$ polinomio di grado n a coefficienti reali con n zeri reali distinti. Cosa possiamo dire sugli zeri di $P_n'(x)$

$P_n(x) \overset{\circledast}{=} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, siano $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ le radici di $P_n(x)$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$ $\qquad P(x_i) = 0 \quad \forall i = \{1, \dots, n\}$ $\qquad x_i \quad \xi_i \quad x_{i+1}$ $\quad i \in \{1, \dots, n-1\}$

Il teorema di Rolle ci dice che $\exists \, \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ tc $P_n'(\xi_i) = 0$

e si ha che gli ξ_i sono tutti distinti, $\xi_1 < \dots < \xi_{n-1}$ Oss: $\deg P_n' = n-1$

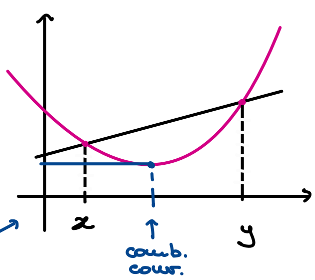
Oss: Si vede facilmente con la scrittura $\circledast$ e derivando: $P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots$

Esercizio: Se ho una funzione strettamente convessa su $\mathbb{R}$ posso dire qualcosa sui minimi?

l'importante è che la somma = 1

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [0,1]$ $f(\underbrace{tx + (1-t)y}_{\text{combinazione convessa}}) \leq$

$\leq t f(x) + (1-t) f(y)$ $\to$ Graficamente:



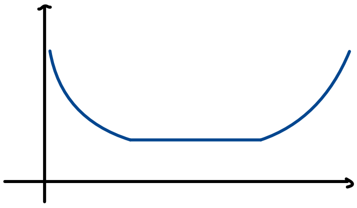
$x \quad t \quad y$

Si dice strettamente convessa $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ vale $<$ anziché $\leq$ ad esempio:

Domanda: f str. conv. $\Rightarrow f$ convessa, vale $\Leftarrow$? No, sono def. distinte

Esempio:



nelle zone piatte si perde la convessità

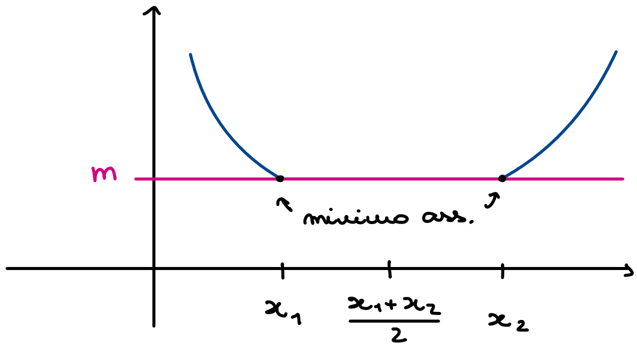
x punto stazionario di f convessa $\Rightarrow$ x è minimo assoluto di f

Si può dire qualcosa sui minimi assoluti di una convessa?

Ad esempio, se ne possono avere due? No (se f str. convessa)

Ragionamento grafico: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente convessa.

Per assurdo $\exists\, x_1 < x_2$ tc $f(x_1) = f(x_2) = \inf_{\mathbb{R}} f = m$



$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)$$
$$= \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m = m$$

Ragionamento analitico

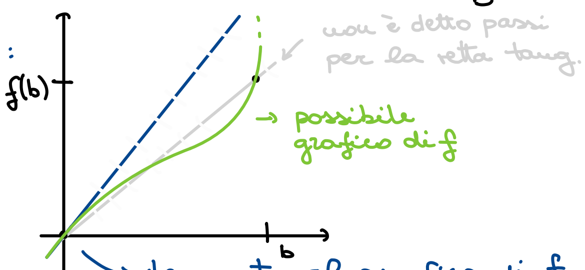
va bene perché $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Esercizio (23/01/2020):

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $f(0) = 0$ $\quad \exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$

$b > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta < \frac{f(b)}{b}$, Tesi: $\exists\, c \in (0, b)$ tc $\frac{f(c)}{c} = \beta$

sol:



tangente al grafico di f in $(0,0)$ (SPG $\alpha > 0$)

Oss: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \alpha \Rightarrow f(x)$ è derivabile in 0 e la retta tangente ha coef ang. α

Oss: $F(x) := \frac{f(x)}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è continua, $\lim_{x \to 0} F(x) = \alpha$. Estendo $F(x)$:

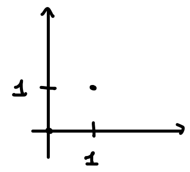
$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{è continua su } \mathbb{R}$$

$\tilde{F}(0) = \alpha$, $\tilde{F}(b) = \frac{f(b)}{b}$ $\Rightarrow$ per il Teo. dei valori intermedi $\exists c \in (0, b)$: $\tilde{F}(c) = \beta$

Poiché $\tilde{F}(c) = \frac{f(c)}{c}$ $\Rightarrow$ Tesi

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$

Tesi: $\exists\, x \in (0,1) : f'(x) > 1$

sol: 

Teorema di Lagrange: $\exists\, \xi \in (0,1) : f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$ (però voglio >1)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\ ,\quad \text{fissiamo } 0<\varepsilon<1\ ,$$

$$\exists\, \delta_\varepsilon \in (0,1) \quad \forall x \in (0,\delta_\varepsilon] \subset (0,1),\ -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \varepsilon \iff -\varepsilon x < f(x) < \varepsilon x$$

$$\Rightarrow f(\delta_\varepsilon) < \varepsilon \cdot \delta_\varepsilon$$

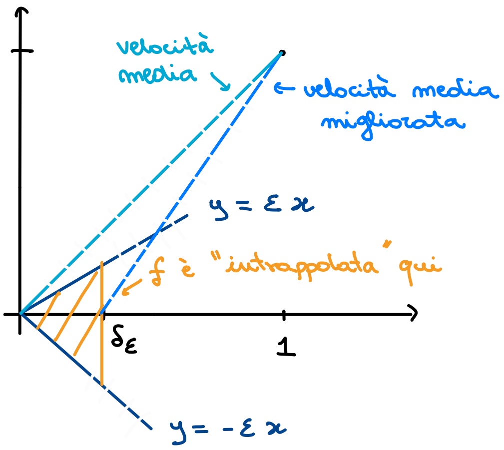
Idea: Applicare Lagrange in $[\delta_\varepsilon, 1] \subset (0,1)$: $\exists\, x \in (\delta_\varepsilon, 1)$ tc $\dfrac{f(1)-f(\delta_\varepsilon)}{1-\delta_\varepsilon} = f'(x)$

Oss: $$\frac{f(1)-f(\delta_\varepsilon)}{1-\delta_\varepsilon} > \frac{1-\varepsilon\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon}$$

$$= \frac{1-\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon-\varepsilon\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{\delta_\varepsilon\overbrace{(1-\varepsilon)}^{>0}}{\underbrace{1-\delta_\varepsilon}_{>0}}}_{>1} \Rightarrow >0 \quad \Rightarrow \text{Tesi}$$

Graficamente: possiamo pensare alle derivate come "velocità media" come in Fisica



22-03-2022 Lezione 46 Prof. Novaga

INTEGRABILITÀ FUNZIONI CONTINUE

Teo (HEINE-CANTOR): $f : C \to \mathbb{R}$ continua, $C \subseteq \mathbb{R}$ compatto (es: $C = [a,b]$)

$\Rightarrow f$ è unif. continua, cioè $\forall \varepsilon\ \exists \delta$ tc $|x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$, $x,y \in C$

Dim: Per assurdo, $\exists\, \varepsilon_0$ tc $\forall \delta_n < \frac{1}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$\exists\, x_n, y_n \in C$ tc $|x_n - y_n| \le \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

C compatto $\exists\, n_k$ tc $x_{n_k} \to x$ e $y_{n_k} \to y$ per $x \to \infty$ e $x = y$.

$\varepsilon \le \lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = |f(x_n) - f(x)| = 0 \quad ↯$

Oss: $f(x) = x^2$ è continua su $\mathbb{R}$ ma non unif. continua

Teo: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ è integrabile

Dim: f è limitata ed è unif. continua fissiamo $\varepsilon>0$ e $n\in\mathbb{N}$ e prendiamo $\pi=\{t_0=a, t_1, \dots, t_n=b\}$ con $t_{i+1}-t_i=\frac{b-a}{n}$

Calcoliamo $S(f,\pi)-s(f,\pi)=\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(t_{k+1}-t_k)}_{=\frac{b-a}{n}}\left(\sup_{(t_k,t_{k+1})} f-\inf_{(t_k,t_{k+1})} f\right)\leq$

$$\leq \frac{b-a}{n}\sum \max_{[t_k,t_{k+1}]} f-\min_{[t_k,t_{k+1}]} f \leq \frac{b-a}{n}\cdot n\varepsilon\cdot(b-a)\varepsilon$$

la f è continua

Se scegliamo n tc $\frac{b-a}{n}\leq\delta(\varepsilon)$ dato dall'unif. cont. di f.

Oss: La stessa dim. funziona per $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua e limitata.

Infatti, fissiamo $\varepsilon>0$ e sia $\pi=[t_0,\dots,t_{n+2}]$ tc $t_0=a$, $t_1=a+c$, $t_{n+1}-t_k=\frac{b-a-2\varepsilon}{n}$, $t_{n+1}=b-\varepsilon$, $t_{n+2}=b$

uniforme in n intervalli

$$S(f,\pi)-s(f,\pi)=4c\varepsilon+\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a-2\varepsilon}{2}\left(\sup_{(t_k,t_{k+1})}f-\inf_{(t_k,t_{k+1})}f\right)\leq 4c\varepsilon+(b-a)\varepsilon \text{ per } n \text{ grande}$$

Oss: Più in generale la dim. funziona per $f: I\to\mathbb{R}$ limitata con disc(f) finito.

Anche più in generale si ha:

Teo: $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ limita con disc(f) finito o numerabile $\Rightarrow$ f è integ.

Teo (VITALI - LEBESGUE): $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata è integrabile $\Leftrightarrow$

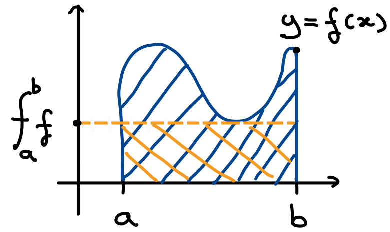
$\Leftrightarrow$ disc(f) è TRASCURABILE (o di misura nulla).

Def: $E\subseteq\mathbb{R}$ è trascurabile se $\forall\varepsilon$ $\exists\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$I_n\subset\mathbb{R}$ intervallo tc $E\subseteq\bigcup_n I_n$ e $\sum_n|I_n|\leq\varepsilon$

Oss: E numerabile $\Rightarrow$ E trascurabile ma non vale il viceversa (Cantor)

Teo (MEDIA INTEGRALE):



$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

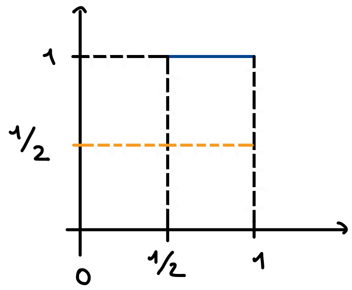
$\exists\ \bar{x} \in [a,b]$ tc $f(\bar{x}) = ⨍_a^b f(x)\,dx := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$,

cioè $(b-a) f(\bar{x}) = \int_a^b f(x)\,dx$

Dim: Si ha $(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\max_{[a,b]} f \Rightarrow \min_{[a,b]} f \leq ⨍_a^b f \leq \max_{[a,b]} f$

$\Rightarrow \exists\ \bar{x}$ tc $f(\bar{x}) = ⨍_a^b f$.

Oss: f int. non continua non è vero



$⨍ f = \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } [0,\frac{1}{2}] \\ 1 & \text{se } [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

Def: Si indica con $\mathcal{R}(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \text{ integrabili} \}$

Prop: $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow$

1. $cf \in \mathcal{R}(I)$ $\forall c \in \mathbb{R}$ e $\int_I cf = c\int_I f$,
2. $f+g \in \mathcal{R}(I)$ e $\int f+g = \int f + \int g$

In particolare $\mathcal{R}(I)$ è uno spazio vettoriale e $f \to \int_I f$ è una funzione lineare su $\mathcal{R}(I)$.

Dim: (1) $a \geq 0$ $\quad S(a\cdot f,\pi) = aS(f,\pi)$ $\quad \forall \pi$

$s(af,\pi) = as(f,\pi)$

$\sup_\pi s(af,\pi) = a\sup(f,\pi) = a\inf_\pi S(f,\pi) = \inf_\pi S(af,\pi) = a\int_I f$

(1 bis) $-f \in \mathcal{R}(I)$ infatti: $S(-f,\pi) = -s(f,\pi)$, $s(-f,\pi) = -S(f,\pi)$ $\quad \forall \pi$

$\Rightarrow \sup_\pi s(-f,\pi) = \inf_\pi S(-f,\pi) = -\int_I f$

(2) $S(f+g,\pi) = \sum_k (t_{k+1}-t_k) \sup_{(t_k t_{k+1})} (f+g) \leq \sum_k (t_{k+1}-t_k)(\sup f + \sup g) =$

$= S(f,\pi) + S(g,\pi)$

$s(f+g,\pi) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi)$ $\quad \forall \pi$

$\int f + \int g = \sup_{\pi_1} s(f,\pi_o) + \sup_{\pi_2} s(g,\pi_2) = \sup_\pi (s(f,\pi) + s(g,\pi))$

$\leq \sup_\pi s(f+g,\pi) \leq S(f+g,\pi) \leq \inf_{\pi_1} S(f,\pi_1) + \inf_{\pi_2} S(g,\pi_2) = \int f + \int g$

$\Rightarrow$ TESI

Prop (ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO):

$I = I_1 \cup I_2$, $\quad I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $\quad f \in \mathcal{R}(I)$, $\quad I$ intervallo

$\Rightarrow f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1)$, $\quad f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2)$ e $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.

Dim: Siano $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_1 \\ 0 & x \in I_2 \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in I_1 \\ f(x) & x \in I_2 \end{cases}$, $\quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Dico che $f_I \in \mathcal{R}(I)$ e $\int_I f_1 = \int_{I_1} f$ e lo stesso per f_2.

Se questo è vero, per linearità,

$$\int_I f = \int_I (f_1 + f_2) = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia π partizione di I tc $S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon$ posso supporre $I_1 \leq I_2$ e $\pi_1 = \pi|_{I_1}$ sia partizione di I_1 e $\pi_2 = \pi|_{I_2}$ per I_2.

Per questo aggiungo a π il punto $\sup I_1 = \inf I_2$.

Si ha $\left.\begin{array}{l} S(f|_{I_1}, \pi_1) - s(f|_{I_1}, \pi_1) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon \\ \text{e } S(f|_{I_1}, \pi_1) - s(f|_{I_1}, \pi_1) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1) \\ \text{e} \\ f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2) \end{array}$

Si ha anche $S(f|_{I_1}, \pi_1) = S(f_1, \pi)$ e $s(f|_{I_1}, \pi_1)$ e $s(f_1,\pi)$

$\Rightarrow f_1 \in \mathcal{R}(I)$ con $\int_I f_1 = \int_{I_1} f$ e $f_2 \in \mathcal{R}(I)$ con $\int_I f_2 = \int_{I_2} f$.

Oss: Quanto detto si scrive $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

dove $I = (a,c)$, $I_1 = (a,b)$, $I_2 = (b,c)$ $\quad \forall a < b < c$

Per convenzione si pone $\int_a^b f = 0$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$ se $a > b$, in modo da avere:

$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Oss: $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$

Prop: $f \in \mathcal{R}(I) \overset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} |f| \in \mathcal{R}(I)$ e $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

Dim: Sia ε, π tc $S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon$

$\sup\limits_{(t_k,t_{k+1})} f - \inf\limits_{(t_k,t_{k+1})} f \geq \sup\limits_{(t_k,t_{k+1})} |f| - \inf\limits_{(t_k,t_{k+1})} |f| \Leftarrow |a-b| \geq \big||a| - |b|\big| \quad \forall a,b$

$\Rightarrow S(|f|,\pi) - s(|f|,\pi) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(I)$

Osserviamo che $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad \forall x \Rightarrow -\int |f| \le \int f \le \int |f| \Leftrightarrow \left|\int f\right| \le \int |f|$

24-03-2022 Lezione 47 Prof. Carminati

UNIFORME CONTINUITÀ

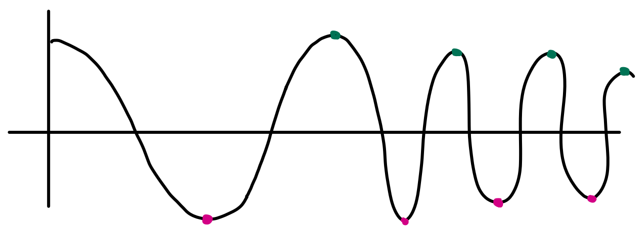
$f: C \to \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in C$

Esempio: • $f(x) = x^2$ $\quad x_n = n$, $\quad y_n = n + \frac{1}{n}$ $\quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$

$f(y_n) - f(x_n) = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 \geq 2$ È continua ma non unif. continua

Proviamo con una f. limitata:

• $f(x) = \cos(x^2)$



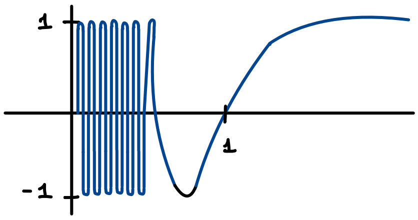
$y_n = \sqrt{(2n+1)\pi} \qquad f(y_n) = -1$

$x_n = \sqrt{2n\pi} \qquad f(x_n) = 1$

$0 \le y_n - x_n = \sqrt{2(n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2(n+1)\pi} + \sqrt{2n\pi}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proviamo con una funzione limitata con intervallo limitato

• $\cos\frac{1}{x} \qquad x \in (0,1)$ $\qquad$ Es: verificare che è U.C.



y_n tc $1/y_n = (2n+1) \qquad f(y_n) = -1 \qquad y_n \to 0$

x_n tc $1/x_n = 2n\pi \qquad f(x_n) = 1 \qquad x_n \to 0$

Es: Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$

(i) è unif. continua su $(0,1)$

(ii) " " " $(0,+\infty)$

Sol: • $\alpha \le 0$ $\quad f$ non è unif. continua su $(0,1)$ (e anche $(0,+\infty)$)

• $\alpha > 0$ $\quad f$ è est. per continuità su $[0,1] \overset{HC}{\Rightarrow} \tilde{f}$ è U.C. su $[0,1]$

$\Rightarrow f$ è U.C. su $(0,1)$

$(\exists\, \tilde{f}: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tc $\tilde{f}|_{(0,1)} = f)$

Per casa: per quali $\alpha > 0$ f è U.C. su $(0,+\infty)$?

Sugg: se $\alpha = 1$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{(*)}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1 \quad$ (*) $y = \frac{1}{x}$

$0<\alpha<1 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad$ $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x\to\infty$

$f(x) \sim x^{\alpha-1}$ si può dim. che è UC su $[0,+\infty) \iff 0<\alpha\le 2$

Prop: (i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = m$ $\quad \ell, m\in\mathbb{R}$ allora f è U.C. In generale se ammette limiti agli estremi è U.C.

(ii) $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ U.C. e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua tale che

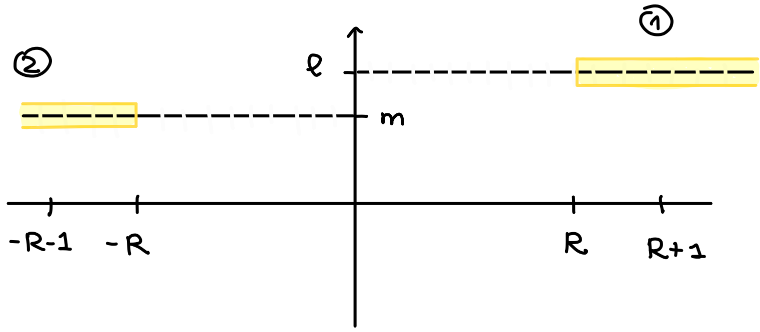
$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-f_0(x)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-f_0(x)\right) = 0 \Rightarrow f$ è U.C.

Dim: (i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R_+>0 \cdot \forall x > R_+\ |f(x)-\ell| < \varepsilon/2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R_->0 \cdot \forall x < -R_-\ |f(x)-m| < \varepsilon/2$

$R = \max\{R_+, R_-, 1\}$

Fissati $\varepsilon>0$, prendo R come sopra e $\delta\in(0,1)$ che viene fuori dalla UC di $f|_{[-R-1,R+1]}$



$x, y\in\mathbb{R} \quad |x-y|<\delta$

① $x,y>R \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \underbrace{|f(x)-\ell|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|\ell-f(y)|}_{\varepsilon/2}$

② $x,y<-R \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ stesso ragionamento

③ $x\in[-R,R] \Rightarrow x,y\in[-R-1, R+1]$
$|x-y|<\delta\le 1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$
per UC di $f|_{[-R-1,R+1]}$

(ii) per esercizio

Sugg: Somma di funz. U.C. è U.C. (*) dimostrare questo

$f(x) = f_0(x) + \underbrace{f(x)-f_0(x)}_{\text{infinitesima}}$

MODULO DI CONTINUITÀ (MdC)

$\omega: [0,+\infty] \to [0,+\infty]$

$C\subseteq\mathbb{R}$

(*)
- $\omega(0)=0$
- ω monotona crescente (debol.)
- $\lim_{t\to0^+}\omega(t) = 0$

DEF. (1) $f: C \to \mathbb{R}$, dico che ω è un MdC per f se:

(i) ω soddisfa (*)

(ii) $|f(x)-f(y)| \leq \omega(|x-y|)$

(2) f ammette un MdC se esiste ω che è un MdC per f

Esempi: (banale) $\omega(t)=t$ o $\omega(t)=L\cdot t$ (con $L>0$)

ω_L MdC per $f \iff f$ è L-Lip.

- $\omega_{L,\alpha}(t) = L\cdot t^{\alpha}$ ($\alpha \in (0,1)$) funzioni Hölderiana (es: $f=\sqrt{x}$)

Prop: $f: C \to \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti

(i) f è U.C. (su C) * $C \neq \emptyset$

(ii) f ammette un MdC

Dim: [$\Rightarrow$] Definisco $\omega_f(t) := \sup\left\{ |f(x)-f(y)| : \begin{matrix} x,y \in L \\ |x-y| \leq t \end{matrix} \right\}$

MdC per f (ottimale)

- $\omega_f \geq 0$ (basta prendere $x=y\in C$)
- ω_f è monotona per la monotonia del sup al crescere dell'insieme
- $\forall \varepsilon>0$ prendo δ dell'UC di f e ho che $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ $\forall x,y \in C$
- Se $t<\delta$ e $|x-y| \leq t \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\omega_f(t)<\varepsilon \quad \forall t<\delta \quad \Rightarrow \lim_{t\to 0} \omega_f(t)=0$

Ovviamente $|f(x)-f(y)| \leq \omega_f(|x-y|)$ (per costr.)

[$\Leftarrow$] $|x-y| \doteq t$

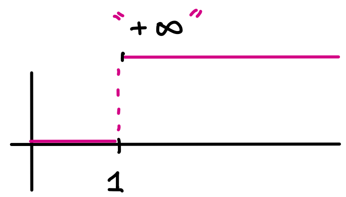
$|f(x)-f(y)| \leq \omega(|x-y|)$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \ \omega(t)<\varepsilon \ \forall t<\delta \Rightarrow t=|x-y|<\delta$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \omega(t) < \varepsilon$

Esempio: $C=\mathbb{N}$ $f: C \to \mathbb{R}$ $f(n)=n^2$

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<1 \\ +\infty & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$



Prop: Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è UC e ω_f è il suo MdC ottimale
↳ intervallo

Allora ω_f è sub-additivo, $\omega_f(t+s) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$

Lemma: Se ω crescente positiva, $\omega: [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, ω è sub-additiva, ω infinitesima, allora $\exists\, a, b$ tc $\omega(t) \leq at + b \quad \forall t \geq 0$

Cor: Se $f: I \to \mathbb{R}$ è UC allora ha crescita sublineare

Dim: $s, t \geq 0$

$$\omega_f(s+t) = \sup\{\, |f(x) - f(y)| : \underbrace{|x-y| \leq s+t}_{(*)},\ x, y \in I \,\}$$

(*) $z = x - t \dfrac{x-y}{|x-y|}$, $z \in I$ e inoltre:

$$|x-z| = \left| t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| = t \quad , \quad |z-y| = \left| x-y - t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| \leq s$$

Osservo che $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| \leq$

$$\leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

Dim (Lemma). $\exists\, \delta_0 : \omega(\delta_0) < 1$

$\omega(n\delta_0) \leq n\,\omega(\delta_0)$ per sub-additività

$t \in [0, +\infty) \Rightarrow n\delta_0 \leq t < (n+1)\delta_0$

$\omega(n\delta_0) \leq \omega(t) \leq \omega((n+1)\delta_0)$

$$\omega(t) \leq (n+1)\,\omega(\delta_0) = n\,\omega(\delta_0) + \omega(\delta_0) \leq t \overbrace{\frac{\omega(\delta_0)}{\delta_0}}^{a} + \overbrace{\omega(\delta_0)}^{b}$$

$\square$

Prop: Se $f: [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ è U.C. allora f è estendibile per cont. a $[0, 1]$

Dim: Basta vedere che $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x)$

o eq: $\exists\, \ell \in \mathbb{R} : \forall x_n \to 1^- \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

Se $x_n \to 1^-$ $\quad f(x_n)$ è limitata $\Rightarrow f(x_n) \to \ell$ per $n \to \infty$

Se $y_n \to 1^-$ è un'altra succ. allora $f(y_n) = f(x_n) + \underbrace{f(y_n) - f(x_n)}_{\varepsilon(n)}$

$|\varepsilon(n)| \leq \omega_f(|y_n - x_n|) \longrightarrow 0$

$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \ell \quad \forall y_n$

Oss: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (UC), ω è MdC per f,

Π part. di $[a,b]$.

$$s(\Pi, f) - s(\Pi, f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \overbrace{(f(\xi_k) - f(\eta_k))}^{\omega(|I_k|)} \qquad \xi_k, \eta_k \in I_k$$

se $\delta_\Pi = \max\{|I_k|\}$ $\hookrightarrow \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k| \, \omega(|I_k|) \leq (b-a)\, \omega(d_\Pi)$

INTEGRALI VIA CALCOLO DIRETTO:

$f(x) = x \qquad [a,b] \qquad \int_a^b f(x)\,dx$

$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ part. unif. Π_n

$$S(\Pi_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \geq \underbrace{(b-a)a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k}_{} \qquad \frac{n(n+1)}{2}$$

$\downarrow n \to \infty$

$$(b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b-a)(2a+b-a)\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

Es: Fare lo stesso calcolo per:

$f(x) = x^2 \qquad [0, \ell]$

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad [1, 2]$

Calcolare $\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$

Es: Se f è continua su $[a,b]$

$f \geq 0$ e $f(x_0) > 0$ $(x_0 \in [a,b])$

allora $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

25-03-2022 lezione 48 Prof. Novaga

PRIMITIVE E TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Def: $f: I \to \mathbb{R}$ funzione integrabile, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

$F: I \to \mathbb{R}$ funzione derivabile,

se $F' = f$, F si dice PRIMITIVA di f

Oss: Se F_1, F_2 sono primitive di $f \Rightarrow (F_1 - F_2)' = f - f = 0$

$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in I$ per $c \in \mathbb{R}$

Si indica con $\int f\,dx = \{F: I \to \mathbb{R},\ F' = f\}$ INTEGRALE INDEFINITO.

Teo: $f: I \to \mathbb{R}$ continua, I int. chiuso, $x_0 \in I$, sia $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in I$

allora F_{x_0} è una primitiva di f, cioè F_{x_0} è derivabile e $F_{x_0}' = f$.

(La costante si ottiene ponendo $F_{x_0}(x)=0$)

Dim: Calcoliamo $F'_{x_0}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right) =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\text{MEDIA}}{=} \lim_{h\to 0} f(\underbrace{x_h}) = f(x)$$

$x_h \in (x-|h|, x+|h|) \cap I$

Oss: $a,b \in I$, $a<b \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) = F(b) - F(a)$

Dove F è una qualunque primitiva di f.

In particolare per calcolare $\int_a^b f$ è sufficiente trovare una primitiva.

COME SI CALCOLA UNA PRIMITIVA DI f

Oss: Diversamente dalla derivata, non sempre la primitiva di una "funzione elementare" è ancora una "funzione elementare".

Es: e^{x^2}, e^{-x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, ...

TABELLA DELLE PRIMITIVE

DERIVATE

F	F'
c	0
x^a	$a x^{a-1}$
$\log(x)$	$1/x$
e^{ax}	$a e^{ax}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

PRIMITIVE

f	$\int f$	
0	c	
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$	$a \neq 1$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert + c$	
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$	$a \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	

REGOLE DI INTEGRAZIONE

1. $(F \pm G)' = F' \pm G' \Rightarrow \int f \pm g = \int f \pm \int g$ LINEARITÀ
2. $(F\cdot G)' = F'G + FG' \Rightarrow FG + c = \int F'G + \int FG'$ cioè $\int F'G = F\cdot G - \int FG'$

Con estremi diventa $\int_a^b F'G = F\cdot G\Big|_a^b - \int_a^b FG'$ dove $FG\Big|_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$

$\hookrightarrow$ INTEGRAZIONE PER PARTI

Es: ⊙ $\int \underbrace{\log(x)}_{G} \cdot \underbrace{1}_{F'} = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x = x \log x - x + c$

⊙ $\int \underbrace{e^x}_{F'} \underbrace{\sin(x)}_{G} = e^x \sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{F'} \underbrace{\cos(x)}_{G} = e^x \sin(x) - e^x\cos(x) + \int e^x(-\sin(x))$

$\Rightarrow \int e^x \sin(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x) + \cos(x)) + c$

⊙ $\int e^x P(x)$ $\quad$ P polinomio

⊙ $\int \sin(x) P(x)$ $\quad$ P polinomio

Si integra e^x o $\sin(x)$ e si deriva $P(x)$

⊙ $\int \sin^2(x) = \int \sin(x)\cdot\sin(x) = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)$ $\longrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \int \sin^2(x)$

$\Rightarrow \int \sin^2(x) = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$

③ $(F\circ\varphi)' = F'(\varphi)\cdot\varphi'$ $\qquad f = F'$

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c = \int f(y)\,dy \Big|_{y=\varphi(x)}$$

Con gli estremi diventa: $\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$ (attenzione al cambio d'estremi)

FORMALMENTE

$y = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x)\,dx = dy$ $\qquad$ INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Es: ⊙ $\int F(e^x)\cdot e^x = \int F(y)\,dy \Big|_{y=e^x}$

⊙ $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=e^x} = \arctan(e^x) + c$ $\qquad F(y) = \frac{1}{1+y^2}$, $y = e^x$

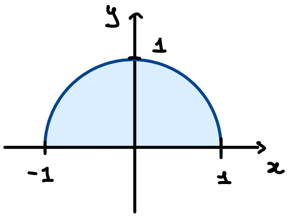
⊙ $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy \Big|_{y=\varphi(x)} = \log|\varphi(x)| + c$ $\qquad F(y) = \frac{1}{y}$

⊙ $\int \tan(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\int \frac{\varphi'}{\varphi} = -\log|\cos(x)| + c$ $\qquad \varphi(x) = \cos(x)$

⊙ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt$ $\rightarrow \cos(t) \geq 0$

$= \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) + c = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + c$

$x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$, $t = \arcsin(x)$



Area Cerchio $= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} = \arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} \Big|_{-1}^{1} = 2\arcsin(1) = \pi$

$\odot$ $\int f(\sqrt{x})\,dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{f(y)}{y}\,dy \Big|_{y=\sqrt{x}}$ $\qquad (*): \; y=\sqrt{x},\; dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

es: $\odot$ $\int x e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{e^y y^2}{y} = \frac{1}{2}\int e^y \cdot y \underset{\uparrow \text{PARTI}}{=} \frac{1}{2} e^y \cdot y - \frac{1}{2}\int e^y = \frac{1}{2} e^y (y-1) + c \Big|_{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$

$\odot$ $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \doteq \int \sqrt{1+\sinh^2(t)}\cosh(t)\,dt = \int \cosh^2(t)\,dt = \sinh(t)\cosh(t) - \int \sinh^2(t) =$

$= t + \sinh(t)\cosh(t) - \int \cosh^2(t) = \frac{1}{2}(t + \sinh(t)\cosh(t)) + c =$

$= \frac{1}{2}\left(\text{arcsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + c$ $\quad$ • SOSTITUZIONE: $x = \sinh(t)$, $dx = \cosh(t)\,dt$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\sinh(x)' = \cosh(x)$, $\int \sinh(x) = \cosh(x) + c$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\cosh(x)' = \sinh(x)$, $\int \cosh(x) = \sinh(x) + c$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$

$x = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t}-1}{2e^t} \Rightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$

$e^t = x + \sqrt{1+x^2} \qquad t = \text{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

29-03-2022 $\qquad$ Lezione 49 $\qquad$ Prof. Novaga

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad P, Q$ polinomi

Calcolare $\int f(x)\,dx$

① Fattorizzare $Q(x)$:

$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(x)^{\alpha_i} \qquad \alpha_i \in \mathbb{N} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \deg Q_i = \deg Q \qquad \deg Q_i \in \{1, 2\}$

② $\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q}$ con $\deg P_2 < \deg Q$

③ $\deg P < \deg Q$, $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}(x)}{Q_i(x)^j}$ con $\deg P_{i,j} < \deg Q_i$, $\deg P_{ij} \in \{0, 1\}$

Vediamo i diversi casi:

$\frac{P}{Q^j}$ con $\deg Q \in \{1, 2\}$ e $\deg P < \deg Q$, $j \in \mathbb{N}$

④ $\deg Q = 1$, $P(x) = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^j}\,dx = \begin{cases} \log|x+a| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\cdot\frac{1}{(x+a)^{j-1}} & j>1 \end{cases}$

⑤ $\deg Q = 2$, $Q(x) = x^2 + ax + b$, a meno di molt. per costante scriviamo:

$P(x) = (2x+a) + c = Q'(x) + c$

$$\int \frac{P}{Q^j} = \int \frac{Q'(x)}{Q(x)^j} + c\int\frac{1}{Q(x)^j}$$

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)^j}\,dx \underset{y=Q(x)}{=} \int \frac{1}{y^j}\,dy = \begin{cases} \log|y| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\cdot\frac{1}{y^{j-1}} & j>1 \end{cases}$$

⑥ Resta da fare $\displaystyle\int \frac{1}{Q(x)^j}$ con $\deg Q = 2$

$$Q(x) = x^2 + ax + b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{2}}}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \left(b-\frac{a^2}{4}\right)(y^2+1) \qquad y = \frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}$$ → CAMBIO DI VARIABILE

Resta quindi da fare $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^j}$

$j=1$, $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + c$

$j>1$, abbassiamo il grado integrando per parti:

$$I_j = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^j} = I_{j-1} - \frac{1}{2}\int\frac{2x\cdot x}{(x^2+1)^j} \overset{(*)}{=} I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{j-1}} - \frac{1}{2(j-1)}\, I_{j-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{j-1}} = \dots$$

$(*)$ $\displaystyle\frac{2x}{(x^2+1)^j} = -\left(\frac{1}{j-1}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{j-1}}\right)'$

... Iterando il procedimento si arriva a $\frac{1}{x^2+1}$, che è $\arctan(x)+c$

Oss: $\displaystyle\int f(x)\log Q(x) = \int P(x)\arctan(Q(x))$

integrando per parti diventano integrali di funzioni razionali

Es: $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx \qquad x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{x^3-1} =$$

$$= \frac{\overbrace{(A+B)}^{0}x^2 + \overbrace{(A-B+C)}^{0}x + \overbrace{A-C}^{1}}{x^3-1}$$

Otteniamo il sistema lineare 3×3

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \quad \Big\} \; 2A-B \Rightarrow 3A=1$$

$A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot(x+2)}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\int\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \qquad y = x+\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{1}{x^2+x+1} = \int\frac{1}{y^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)+c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{y^2+a^2}\,dy = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right)+c \qquad a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\;\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2}}{y^2+a^2}\;\right]$$

Es: $\displaystyle\int\frac{1}{x^4+1}$

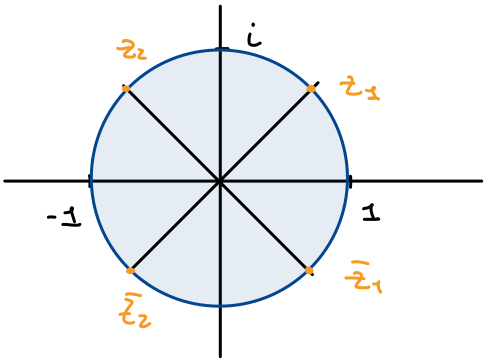
$$x^4+1 = (x^2+ax+1)(x^2-ax+1) = (x^2+1)^2-a^2x^2$$

$$= x^4+2x^2+1-a^2x^2 \Rightarrow a^2=2, \quad a=\sqrt{2}$$

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$$

Alternativamente possiamo fattorizzarlo in $\mathbb{C}$

$x^4+1=0 \qquad x\in\mathbb{C}$ sono le radici 4^e di -1



$$-1 = e^{\frac{i\pi}{4}} \qquad \sqrt[4]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \ , \quad z_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x^4+1 = \underbrace{(x-z_1)(x-\bar{z}_1)}\underbrace{(x-z_2)(x-\bar{z}_2)}$$

$$= (x^2-(z_1+\bar{z}_1)x+1)\cdot(x^2-(z_2+\bar{z}_2)x+1)$$

$$= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^4+1}$$

$$1 = (A+C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + B + D$$

Da cui il sistema lineare 4×4:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ \cancel{A}+\sqrt{2}B+\cancel{C}-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=D=\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A-C=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ , \quad C=\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}-1}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

Passiamo all'integrale:

$$\int\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \qquad y = x+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \int\frac{1}{y^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}y)+c = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+c$$

$$\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+c$$

Es: $\int \arctan(x)\cdot 1 = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}$

$$= x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Ci sono alcuni integrali che si riducono ad integrali "classici"

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Sia $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$ una funzione razionale

○ $\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x}\cdot e^x\,dx = \int \underbrace{\frac{R(y)}{y}}_{\text{FUNZIONE RAZIONALE}}\,dy \qquad y=e^x \quad dy=e^x dx$

○ $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int \overbrace{R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}^{\text{F. RAZ.}}\frac{1}{1+y^2}\,dy$

$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\quad x = 2\arctan(y) \qquad dx = \frac{1}{1+y^2}\,dy$

$\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

Es: $\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,dy = \log|y| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$

○ $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \qquad n\in\mathbb{N}$

[tipico caso: $\int R(\sqrt[n]{x})\,dx \quad y=\sqrt[n]{x}$]

○ $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx \qquad x = a\sin(t) \qquad dx = a\cos(t)$

$$= \int R(a\sin(t), a\cos(t))\,a\cdot\cos(t)\,dt$$

○ $\int R(x, \sqrt{x^2+c})\,dx \qquad \boxed{c>0}\ x = \sqrt{c}\cdot\sinh(t) \qquad \boxed{c<0}\ x = \sqrt{-c}\cosh(t)$

Diventa del tipo $\int \tilde{R}(e^t)\,dt$

In alternativa si può porre $(x+y)^2 = x^2+c \qquad y = -x+\sqrt{x^2+c}$

Diventa del tipo $\int \tilde{R}(y)\,dy \qquad x = \frac{-y^2+c}{2y} \qquad dx = \left(\frac{-y^2+c}{2y}\right)'dy$

Es: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\cosh(t)}\cdot \cosh(t)\,dt = t + c$

$x = \sinh(t)$
$dx = \cosh(t)\,dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{arcsinh}(x) + c = -\log\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$$

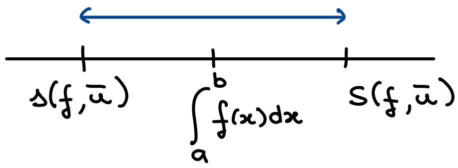
31-03-2022 lezione 50 Prof. Cannarsa

Es: $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$$0 \le S(f,\pi) - s(f,\pi) \le (b-a)\,\omega_f(\delta_\pi)$$

$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \qquad \delta_\pi = \max(x_k - x_{k-1})$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $[a,b] = [1,2]$



π_n partizione uniforme

$$\left| \int_1^2 f(x)\,dx - s(f,\pi_n) \right| \le \omega_f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$s(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{h=n+k}{=} \sum_{h=n+1}^{2n} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{2n}\frac{1}{h} - \sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h} = H(2n) - H(n)$$

$H(n) = \log n + \gamma + \omega(n)$, $H(2n) = \log 2n + \gamma + \omega(2n)$

$$H(2n) - H(n) = \log 2 + \underbrace{\omega(2n) - \omega(n)}_{o(1)} \xrightarrow{n\to\infty} \log 2$$

METODO "INDIRETTO"

Usando il TFCI , $f(x) = \frac{1}{x}$, $F'(x) = f(x)$ prendo $F(x) = \log x$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = F(2) - F(1)$$

CALCOLO DELLE AREE $\xleftrightarrow{\text{TFCI}}$ RICERCA DELLE PRIMITIVE

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ $\xleftarrow[\text{calcoli espliciti}]{}$ $\displaystyle\int f(x)\,dx$ ← insieme di tutte le primitive di f

$\xrightarrow[\text{esistenza delle primitive di una funzione continua}]{}$

Esercizio: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua,

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ partizione di $[a,b]$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (arbitrari).

Allora $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(c_k)}_{\text{Somme di Cauchy}} \right| \le (b-a)\,\omega_f(\delta_\pi) \qquad \delta_\pi = \min(x_k - x_{k-1})$

METODI DI INTEGRAZIONE

- Integrazione per parti
- Integrazione per sostituzione
- Integrazione di funzioni razionali

Es: $\int \sin^5(x)\,dx = \int (\sin^2(x))^2 \sin(x)\,dx = \int (1-\cos^2(x))^2 \sin(x)\,dx \overset{(*)}{=}$ $\quad y=\cos x$, $dy = -\sin x\,dx$

$$= -\int (1-y^2)^2\,dy = -\int [1-2y^2+y^4]\,dy = -\left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right] + c =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

Es: $\int \frac{1}{\sinh(x)}\,dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\,dx \underset{\substack{y=e^x \\ dy=e^x dx}}{=} \int \frac{2}{y^2-1}\,dy =$ $\quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$$

$$= \log|y-1| - \log|y+1| + c = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$$

Es: $\int \log^3 x\,dx = \int y^3 e^y\,dy = p(y)e^y = (y^3 - 3y^2 + 6y + 6)e^y + c$

$\boxed{x=e^y,\ dx = e^y dy \quad y = \log x}$

$$[p(y)e^y]' = [p'(y) + p(y)]\,e^y$$

$$\left.\begin{aligned} p(y) &= y^3 + by^2 + cy + d \\ p'(y) &= 3y^2 + 2by + c \end{aligned}\right] *$$

$*$ $\quad p'(y) + p(y) = y^3 + \underbrace{(b+3)}_{b=-3}y^2 + \underbrace{(c+2)}_{c=6}y + \underbrace{c+d}_{d=-6}$

$$\int \log^3 x\,dx = x(\log^3 x - 3\log^2 x + 6\log x - 6) + c$$

Es: $x>0 \quad \int \frac{1}{x\log x}\,dx \qquad F'(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \log x$

$$G(x) = \frac{1}{\log x} \qquad G'(x) = -\frac{1}{x\log^2 x}$$

$$\cancel{\int \frac{1}{x\log x}\,dx} = \log(x)\frac{1}{\log(x)} - \int \log x\left(-\frac{1}{x\log^2(x)}\right) = 1 + \cancel{\int \frac{1}{x\log x}\,dx} \Rightarrow \cancel{0=1} \ ?$$

Es: $\int \sin\log x\,dx \overset{*}{=} \int \sin y\, e^y\,dy = \sin y\, e^y + \int (-\cos y)e^y\,dy$ $\quad *: x=e^y,\ \log x = y,\ dx = e^y dy$

$$= \sin y\, e^y - \cos y\, e^y - \int \sin y\, e^y\,dy = \frac{1}{2}(\sin y - \cos y)\,e^y + c$$

$$\int \sin\log x\,dx = \frac{1}{2}(\sin\log x - \cos\log x)\,x + c$$

Es: $\int \frac{1}{2\sin x + \sin x\cos x}\,dx \underset{\substack{y=\cos x \\ dy=-\sin x\,dx}}{=} -\int \frac{(-\sin x)}{(1-\cos^2 x)(2+\cos x)}\,dx$

$$= +\int \frac{dy}{(y^2-1)(2+y)}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$, $x = 2\arctan t$,

$dx = \frac{2}{1+t^2}$ $\quad \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$\frac{1}{(y+1)(y-1)(2+y)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{2+y} \qquad \exists A,B,C \text{ tc } \forall y \notin \{1,-1,-2\}$$

$$1 = A(y-1)(2+y) + B(y+1)(2+y) + C(y+1)(y-1)$$

$$1 = 0 + B\cdot 2\cdot 3 + 0 \quad \Rightarrow B = \frac{1}{6} \leftarrow y=1$$

$$1 = A(-2) + 0 + 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \leftarrow y=-1$$

$$1 = 0 + 0 + C\cdot 3 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{3} \leftarrow y=-2$$

$$\frac{1}{(y^2-1)(2+y)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{y-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2+y}$$

$$\int \frac{1}{(y^2-1)(2+y)}\,dy = -\frac{1}{2}\log|y+1| + \frac{1}{6}\log|y-1| + \frac{1}{3}\log|2+y| + c$$

$$\int \frac{1}{2\sin x + \sin x\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\log|\cos x+1| + \frac{1}{6}\log|\cos x - 1| + \frac{1}{3}\log|2+\cos x| + c$$

— o —

$$\boxed{I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos x}$$

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos^3 x}\,dx \overset{y=\cos x}{=} -\int \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2} + c$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2\cos^2 x} + c}$$

$$I = \int \tan x (\tan x)'\,dx \overset{y=\tan x}{=} \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c \quad \longrightarrow \text{ sono entrambi giusti!}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\tan^2 x + c}$$

Oss: $\frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$ costante!

— o —

$$H(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Studiare $H(x)$ senza calcolare espicitamente l'integrale.

$$H'(x) = F'(\cos x)\cdot(-\sin x) - F'(\sin x)\cos x$$

$$= \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x$$

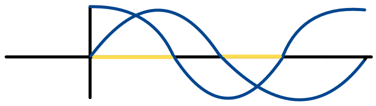
$$= -\left(|\sin x|\sin x + |\cos x|\cos x\right)$$

$H(\pi/4) = 0$

Se $F'(y) = \sqrt{1-y^2}$

$H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$

Oss: se $x\in[0,\pi/2]$, $H'(x)\equiv -1$, se $x\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$ $H'(x)\equiv 1$



Es1 per casa: Determinare intervalli di crescenza e decrescenza

Es2: Fare il calcolo esplicito (scrivendo l'espressione analitica di $F(y)$)

— o —

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2F(x)-F(2x)}{x-F(x)}$$

$$\sin t = t-\frac{t^3}{6}+R(t) \qquad R(t)=O(t^5),\ |R(t)|\le c|t|^5 \text{ per } t\to 0$$

$$\frac{\sin t}{t}=1-\frac{t^2}{6}+r(t) \qquad r(t)=O(t^4) \text{ per } t\to 0$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x-\frac{x^3}{18}+\int_0^x R(t)\,dt \qquad \left|\int_0^x r(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^x |r(t)|\,dt\right| \le c\left|\int_0^x t^4\,dt\right| \le c'x^5$$

$$F(x)=x-\frac{x^3}{18}+O(x^5) \text{ per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2F(x)-F(2x)}{x-F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{2}{18}x^3-2x+\frac{(2x)^3}{18}+O(x^5)}{\frac{x^3}{18}+O(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{18}+\frac{8}{18}+O(x^2)}{\frac{1}{18}+O(x^2)}=6$$

Per casa: $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx$

01-04-2022 Lezione 51 Prof. Carminati

$$\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{y}\,dy=\log|y|+c=\log|\log x|$$

$D=(0,+\infty)\setminus\{1\}$

$$\begin{cases} y=\log x\\ dy=\frac{dx}{x}\end{cases}$$

— o —

$$h(x)=F(\cos x)-F(\sin x) \qquad F=\int\sqrt{1-t^2}\,dt \quad -1\le t\le 1,\ -\pi/2\le x\le \pi/2$$

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\int\cos x\cdot\cos x\,dx=\int\cos^2 x\,dx \qquad t=\sin x,\quad dt=\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[1+\cos 2x\right]dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]+c=\frac{1}{2}\left[x+\sin x\cos x\right]+c=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}\right]+c$$

$$I=\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x)} \quad \left(=-\frac{1}{2}\log(1+\cos x)+\frac{1}{6}\log(1-\cos x)+\frac{1}{3}\log(2+\cos x)\right) \quad \text{(calcolo di ieri)}$$

$$=\int\frac{1}{\boxed{\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}}\left(2+\boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\,dt}_{dx}=\int\frac{dt}{t\cdot\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{1+t^2}{t(3+t^2)}\,dt=\circledast$$

$$\begin{cases} t=\tan\frac{x}{2}\iff x=2\arctan t\\ \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ \boxed{\sin x}=\frac{2t}{t^2+1}\\ \boxed{\cos x}=\frac{1-t^2}{t^2+1}\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1+t^2}{t(3+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{3+t^2} = \frac{A(3+t^2)+Bt^2+Ct}{t(3+t^2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t} + \frac{2t}{3+t^2}\right] \qquad A = 1/3,\ B = 2/3,\ C = 0}$$

$$= \frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{t}+\frac{2t}{3+t^2}\right]dt = \frac{1}{3}\left[\log|t| + \log|3+t^2|\right] + c = \frac{1}{3}\left[\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \log\left|3+\tan^2\frac{x}{2}\right|\right] + c$$

Oss: (✱) $\displaystyle\int \frac{1+t^2}{3t+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\log(3t+t^3)+c$

$\hookrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{N'}{N}$ con $N = 3t+t^3$

$R^c\left(x, \sqrt{x^2+c}\right)$ $\quad c=1$, $c>0$

$x = \sqrt{c}\sinh(t)$

$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh(t)\,dt}{1+\cosh(t)} = \int \frac{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})}{1+\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})}\,dt = \int \frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)}{2+\left(y+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{dy}{y}$$

$dx = \cosh(t)\,dt$, $x = \sinh(t)$ $\qquad$ $e^t = y$, $t = \log y$, $dt = \frac{dy}{y}$

$$= \int \frac{y^2+1}{2y+y^2+1}\cdot\frac{dy}{y} = \int \frac{y^2+1}{(y+1)^2\cdot y}\,dy \overset{(✱)}{=}$$

$\displaystyle\frac{y^2+1}{(y+1)^2 y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{(y+1)^2}$ $\quad\leftarrow$ aggiungo e tolgo $2y$ al numeratore

$$(✱) = \int\left[\frac{1}{y} - \frac{2}{(y+1)^2}\right]dy = \log|y| + \frac{2}{y+1} =$$

$$= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{2}{1+x+\sqrt{x^2+1}} + c$$

$x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)$, $2xy = y^2-1$

$y^2 - 2xy - 1 = 0$,

$y_\pm = x + \sqrt{x^2+1}$ $\quad y>0$!

□

— o —

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{2y\,dy}{1+y} = \int\left[2 - \frac{2}{1+y}\right]dy = 2y - 2\log(1+y) + c = 2\sqrt{1+x} - 2\log(1+\sqrt{1+x})$$

$y = \sqrt{1+x}$, $y^2 = 1+x$, $2y\,dy = dx$

□

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c$$

— o —

METODO DI HERMITE (SCOMPOSIZIONE)

$P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $gr(P) < gr(Q)$, $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}\right]$, $\begin{cases} gr P^* < gr Q^* \\ gr \hat{P} < gr \hat{Q} \end{cases}$

incognite (P^*, $\hat{P}$)

con $Q^*(x)$ con le stesse radici di Q ma tutte semplici

$\hat{Q}(x)$ ha le stesse radici multiple di Q ma con molteplicità diminuita di 1

Esempio: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^4 - x^3 + 2}{x^3(x-1)^2}$ $gr(P^*) = 1, \; gr(\hat{P}) = 2$

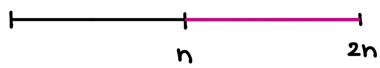
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{x(x-1)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{x^2(x-1)}\right] = \left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{bx^2 + cx + d}{x^2(x-1)}\right] = (\star)$$

Es per casa: derivare e calcolare a_0, a_1, b, c, d in modo che l'espressione $(\star)$ coincida con P/Q dato iniziale.

$$\int P/Q \, dx = a_0 \log|x| + a_1 \log|x-1| + \frac{bx^2 + cx + d}{x^2(x-1)} + c$$

Es: fare lo stesso integrale con il metodo classico visto a lezione

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ $\sin \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$ per $t \to +\infty$



$\displaystyle\int \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = -\int \sin(y) \frac{dy}{y^2}$ non ha espressione esplicita in termini di f. elementari

$\sin \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \omega\left(\frac{1}{t}\right)$ con $\omega\left(\frac{1}{t}\right) = O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ per $t \to +\infty$ $\boxed{\exists R, C : \left|\omega\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq C \cdot \frac{1}{|t^3|} \text{ su } [R, +\infty)}$

Se $n \geq R$ $\displaystyle\int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_n^{2n} \frac{1}{t} dt + \int_n^{2n} \omega\left(\frac{1}{t}\right) = [\log 2n - \log n] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \log 2$

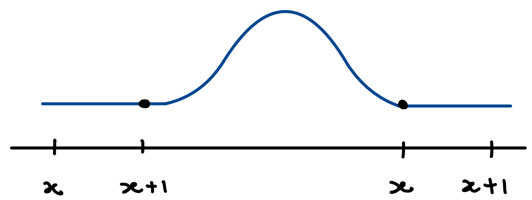
$$\left|\int_n^{2n} \omega\left(\frac{1}{t}\right) dt\right| \leq \cancel{n} \cdot \frac{C}{n^{\cancel{3}\,2}} \leq \frac{C}{n^2}$$

- Sia $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\sin^2 x} e^{-t^2} dt$, mostrare che f ammette massimo globale su $\mathbb{R}$

Oss: $\begin{cases} f \geq 0 \text{ continua} \\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f$ ammette massimo

$f(0) = 0$, $f(k\pi) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x \leq x + \sin^2 x$ e $e^{-t^2} > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$x \geq R > 0$ $0 \leq f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\sin^2 x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \underset{x>0}{\leq} e^{-x^2}$,



$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f$ ammette massimo

Oss: f è continua anzi, è derivabile TFCI $\Rightarrow$ $\exists F \in C^1(\mathbb{R})$ tc $F'(t) = e^{-t^2}$; $f(x) = F(x + \sin^2 x) - F(x)$

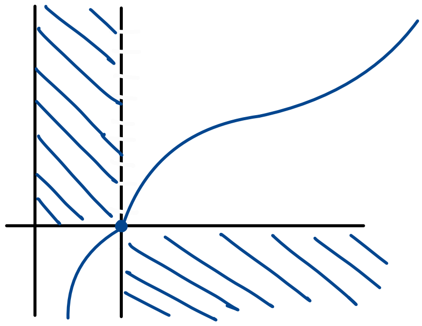
$$f'(x) = F'(x + \sin^2 x)(1 + 2\sin x \cos x) - F'(x) =$$
$$= e^{-(x+\sin^2 x)^2}(1 + 2\sin x \cos x) - e^{-x^2}$$

Sia $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$, studiare F per $x > 0$

TFCI $\Rightarrow$ $\boxed{F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \qquad F'(x) = f(x)}$

$F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} > 0 \qquad F''(x)$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ verificarlo e dare una stima asintotica



$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \ell \in [-\infty, 0)$ è finito

Il limite per $x \to 0$ è finito

$0 \geq \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt = -\int_x^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$

$x < 1$

$0 \leq \int_x^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt \leq e \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = e \cdot 2\sqrt{t}\Big|_x^1 = 2e - 2e\sqrt{x} \leq 2e$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ell \geq -2e$

se $t \in [x, 1]$, $e^t \leq e^1$

<u>Per casa</u>: Studiare la funzione $F(x) = (1-x^2)\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

05-04-2022 Lezione 52 Prof. Novaga

<u>INTEGRALI IMPROPRI</u> (GENERALIZZATI)

$f: [a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, f integrabile su $[a,c]$ $\forall c < b$,

si dice che f è integrabile (in senso improprio) su $[a,b)$ se

$\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, lo stesso si può fare per $f: (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e f integrabile su $[c,b]$ $\forall c > a$.

Più in generale $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, è integrabile se, dato $x_0 \in (a,b)$, f è integrabile su $(a, x_0]$ e $[x_0, b)$ e si pone:

$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$ <u>Oss</u>. La def. non dipende dalla scelta di x_0.

<u>Esempi</u>: $f(x) = x^\alpha \quad x \in (0, 1] \quad \alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha \geq 0$ f è integrabile
- $\alpha < 0$ f non è limitata. Fisso $\varepsilon > 0$ e calcolo:

$(\alpha \neq -1)$ $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha < -1 \end{cases}$

$(\alpha = -1)$ $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(x) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = x^\alpha \text{ è integrabile su } (0, x_0] \Leftrightarrow \alpha > -1}$

Se considero $[1, +\infty)$, con lo stesso calcolo,

$\boxed{x^\alpha \text{ è integrabile su } [x_0, +\infty) \Leftrightarrow \alpha < -1}$

Oss: x^α non è mai integrabile su $(0, +\infty)$

$f(x) = e^{-x}$ su $[0, +\infty)$

$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} -e^{x} \Big|_0^M = \lim_M (1 - e^{-M}) = 1$

TEOREMA (CONFRONTO)

$f, g : [x_0, +\infty) \to [0, +\infty)$, f, g integrabile su $[x_0, M]$ $\forall M < +\infty$,

- $f \leq g$ e g integrabile su $[x_0, +\infty)$ $\Rightarrow$ f integrabile su $[x_0, +\infty)$
- $f \leq g$ e f non è integrabile $\Rightarrow$ g non è integrabile su $[x_0, +\infty)$

Oss: $f \geq 0$, f non è integrabile su $[x_0, +\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{M \to +\infty} \int_{x_0}^M f = +\infty$

infatti $M \to \int_{x_0}^M f$ è una funzione monotona crescente

Cor (CONFRONTO ASINTOTICO): f, g definite positive per $x \to +\infty$ $f \sim g$,

cioè $\lim_{x \to +\infty} f/g = 1$ (va bene anche $f \sim c \cdot g$, $c \in (0, +\infty)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ è integrabile su } [x_0, +\infty) \Leftrightarrow g \text{ è integrabile su } [x_0, +\infty)}$

Dim (Teo): $0 \leq f \leq g$ $\quad$ g integrabile su $[a_0, +\infty)$

$0 \leq \int_{x_0}^M f(x)\,dx \leq \int_{x_0}^M g(x)\,dx$, $\limsup_{M \to +\infty} \int_{x_0}^M f(x)\,dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g < +\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $M \to \int_{x_0}^M f$ è crescente e limitata $\Rightarrow$ $\exists \lim_{M \to +\infty} \int_{x_0}^M f = \int_{x_0}^{+\infty} f \leq \int_{x_0}^{+\infty} g$

Def: $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo anche illimitato,

f è assolutamente integrabile su I se:

- f è integrabile su $[a, b] \subseteq I$ con $-\infty < a < b < +\infty$,
- $|f|$ è integrabile (in senso improprio) su I.

Teo: $f: I \to \mathbb{R}$ assolutamente integrabile $\Rightarrow$ f è integrabile

Dim: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ parte positiva di f

$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ parte negativa

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $x \in I$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ in particolare,

$0 \le f^\pm(x) \le |f|(x)$. Per confronto $f^+(x)$ e $f^-(x)$ sono integrabili su I

$\Rightarrow$ per additività del limite f è integrabile e $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Oss: $|f|$ è integrabile su I $\Rightarrow$ $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$, $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$.

In particolare $\left|\int_I f\right| = \left|\int_I f^+ - \int_I f^-\right| \le \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I |f|$.

Esempi: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$

① Su $(0,1]$ $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$, $f(x) \sim x^{1-\alpha}$ per $x \to 0$

f è integrabile $\Leftrightarrow$ $1-\alpha > -1$ cioè $\alpha < 2$

CONFR. ASINTOTICO

② Su $[1, +\infty)$ assoluta integrabilità:

$\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$ integrabile se $\alpha > 1$ $\Rightarrow$ f è integrabile per $\alpha > 1$

Per $\alpha \in (0,1]$? Consideriamo $\int_1^M \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \overset{\text{PER PARTI}}{=} -\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\Big|_1^M - \alpha \int_1^M \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}$

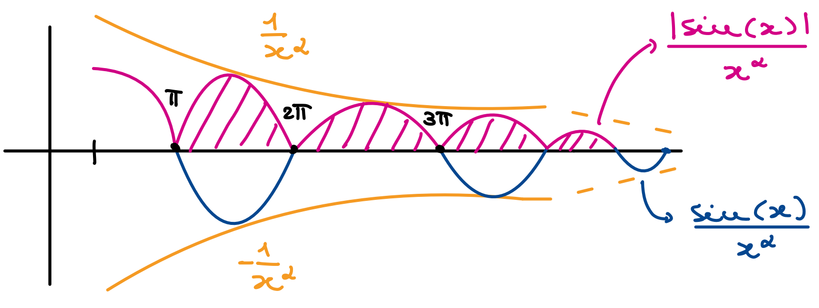
$\left|\frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\right| \le \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ integrabile su $[1, +\infty)$

Per il teo. $\exists \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}\Big|_1^M = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos(M)}{M^\alpha} - \cos(1)\right)$

$= -\cos(1)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_1^M \frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \cos(1) - \alpha \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$

③ Si può mostrare che $\frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ non è assolutamente integrabile su $[1, +\infty)$ per $\alpha \in (0,1]$, cioè $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} = +\infty$



$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} \geq \frac{2}{\pi^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} = +\infty$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(k\pi+y)|}{(k\pi+y)^{\alpha}}\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{(k\pi+y)^{\alpha}} \geq \frac{\int_0^{\pi} \sin(y)}{(k+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}} \qquad x = k\pi + y, \quad y \in [0,\pi]$$

Oss: Scrivendo $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$ per $\alpha > 0$

Si può ottenere l'integrabilità di $\frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$ dal criterio di Leibnitz.

07-04-2022 Lezione 53 Prof. Comminati

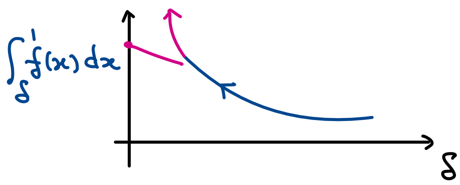
INTEGRALI IMPROPRI

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\log(1+x)}$ dire se l'integrale è convergente.

$f(x) = \dfrac{1}{\log(1+x)}$

- ▷ non è limitata in un intorno di 0
- ▷ è integrabile su $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$
- ▷ $f(x) \geq 0$ per $x > 0$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{\log(1+x)}$$



$\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

$\dfrac{1}{\log(1+x)} \sim \dfrac{1}{x}$ per $x \to 0$

per il criterio del confronto asintotico

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)}\,dx$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ converge

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta \to 0} (-\log \delta) = +\infty$$

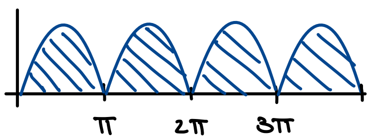
Questo integrale NON converge

Prop: f_1, f_0 funzioni positive; integrabile su $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 1$ allora $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1} f_1(x)\,dx$ e $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1} f_2(x)\,dx$

o è finito per entrambi o è infinito per entrambi.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2 x\,dx$



$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{n} \sin^2 x\,dx = +\infty$$

- $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)}\, dx$ converge o no? $\lim_{x \to \infty} f(x)$ non esiste

$y = x^2$, $x = \sqrt{y}$, $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy, \quad \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy, \quad \begin{cases} x = n\pi \\ \sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy$$

$$I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin((k-1)\pi + x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}}\, dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}}\, dx}_{a_k}$$

$y = (k-1)\pi + x$

$a_k \geq 0 \quad a_k \downarrow$: Questa serie converge

$$\int_0^{x} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy + \boxed{\int_{n\pi}^{n\pi + x'} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}} \quad x = n\pi + x' \text{ con } x' \in [0, \pi)$$

$R(x)$

$$= I_n + R(x) \qquad x \to 0 \qquad |R(x)| \leq \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$I_n \to \sum_1^{+\infty} (-1)^k a_k$, $R(x) \to 0$

Es per casa: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\log t}\, dt$ dire se esiste e è finito

Es: $\int_0^1 \log^2 x\, dx$ converge?

Sostituiamo: $y = -\log x$, $x = e^{-y}$, $dx = -e^{-y}\, dy$

$$= \int_{\infty}^{0} y^2 (-e^{-y})\, dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy \quad \text{converge (per parti)}$$

- $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\, dt$

$(m = 0)$ $\quad I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$

$(m \geq 1)$ $\quad I_m = \left[t^m (-e^{-t}) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} m t^{m-1} (+e^{-t})\, dt = 0 + m I_{m-1}$

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_m = m I_{m-1} \end{cases} \Rightarrow I_m = m!$$

- $(\lambda > 0)$ $\quad \int_0^{+\infty} t^m e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda^m} \int_0^{+\infty} y^m e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{m!}{\lambda^{m+1}}$ $\quad (*)$ $\qquad \lambda t = y$, $t^m = \frac{y^m}{\lambda^m}$, $dt = \frac{dy}{\lambda}$

Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^\alpha \left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta dt$$

problemi $\to$ a zero, se $\alpha<0$; a 1, se $\beta<0$

$y = \log\frac{1}{t}$, $t = e^{-y}$, $dt = -e^{-y}dy$

$$I(\alpha,\beta) = \int_\infty^0 e^{-\alpha y} y^\beta (-e^{-y})\, dy = \int_0^\infty y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy$$ $\leftarrow$ problemi a 0 e $+\infty$

$\int_1^{+\infty} y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy$ converge $\Leftrightarrow \alpha+1>0$

$\int_1^{+\infty} y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy$ converge $\Leftrightarrow \beta>-1$ per il criterio del confronto asintotico

Basta confrontarlo con $\int_0 y^m e^{-(\alpha+1)y} dy$ con $m \geq \beta$, $0 \leq y^\beta \leq y^m$ (vedi $*$)

$$\boxed{I(\alpha,\beta) \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>-1 \\ \beta<-1 \end{cases}}$$

☆ $I(\alpha, m) = \int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy = \frac{m!}{(\alpha+1)^{m+1}}$ (in alcuni casi si può fare il calcolo esplicito)

Γ di Eulero

Def: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

(a) L'integrale è finito $\forall x>0$ (vedi es. precedente)

(b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (per parti)

(c) $\Gamma(n) = (n-1)!$

(d) Γ è una funzione C^∞ (nella x)

Lemma: Posto $\Gamma_m(x) \doteq \int_0^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} dt$

a) Γ_m è ASSOLUTAMENTE convergente $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall x>0$

b) $\Gamma_m(x+h) = \Gamma_m(x) + h\cdot\Gamma_{m+1}(x) + o(h)$ per $h\to0$ $(x>0)$

c) $\Gamma_m'(x) = \Gamma_{m+1}(x)$ (da (b), usando la definizione di derivata)

d) $\Gamma_m(x) = (\Gamma_0(x))^{(m)}$ derivata m-esima (per induzione da (c))

Oss: $\Gamma_0(x) = \Gamma(x)$

Dim: a) convergenza assoluta: $\int_0^{+\infty} |\log t|^m t^{x-1} e^{-t} dt$ lo "spezzo":

$$\int_0^1 |\log t|^m t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} |\log t|^m t^{x-1} e^{-t} dt$$

a₀) $$\int_1^{+\infty} \left(\log \frac{1}{t}\right)^m t^{x-1} e^{-t} dt \underset{e^{-t} \le 1}{\le} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^m t^{x-1} dt \overset{\text{per } *}{=} \frac{m!}{x^{m+1}}$$

a₁) $$\int_1^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} dt \underset{0 \le \log t \le t}{\le} \int_1^{+\infty} t^{x+m-1} e^{-t} dt \le \Gamma(x+m)$$

b) Fisso $x > 0$, $\delta \in (0, x)$, $|h| \le \delta$,

$$R(h) = \Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x) - h\Gamma_{m+1}(x)$$ tesi: $R(h) = o(h)$ per $h \to 0$

$$= \int_0^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} \left[\underbrace{t^h - 1 - h \log t}\right] dt$$

$$\left[\begin{array}{l} g(s) = t^s \\ g'(s) = (\log t) t^s \\ g''(s) = (\log t)^2 t^s \end{array}\right.$$

$g(h) = g(0) + h g'(0) + \frac{h^2}{2} g''(\xi)$ sviluppo di Taylor con resto di Lagrange

$[t^h - 1 - h \log t] = \frac{h^2}{2} (\log t)^2 t^\xi$ con $|\xi| \le \delta$

t^s è convessa, $\max_{|s| \le \delta} t^s = \max(t^\delta, t^{-\delta}) \le t^\delta + t^{-\delta}$

$$0 \le t^h - 1 - h \log t \le \frac{h^2}{2} (\log t)^2 (t^\delta + t^{-\delta})$$

$$|R(h)| \le \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x-1} e^{-t} (t^\delta + t^{-\delta}) dt = \frac{h^2}{2} (J^+ + J^-)$$

con $J^\pm = \int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x \pm \delta - 1} e^{-t} dt < +\infty$ se $0 < \delta < x$

Quindi $|R(h)| \le c h^2$ cioè $R(h)$ è $O(h^2)$ e quindi è $o(h)$ □

Per casa: Mostrare che se f continua su $[1, +\infty)$, f decrescente $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Allora esiste $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$

(Sugg: procedere come per $\int_1^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$)

Es: Dire se converge $$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2} dx = \int_{\infty}^{1} \frac{e^{-y}}{y^2} (-dy) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} dy \le \int_1^{\infty} e^{-y} dy$$

Dire se converge: $$\int_0^1 x^{\log x} dx \overset{*}{=} \int_0^1 e^{\log^2 x} dx = \int_0^{\infty} e^{y^2} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} e^{y^2 - y} dy$$ non conv.

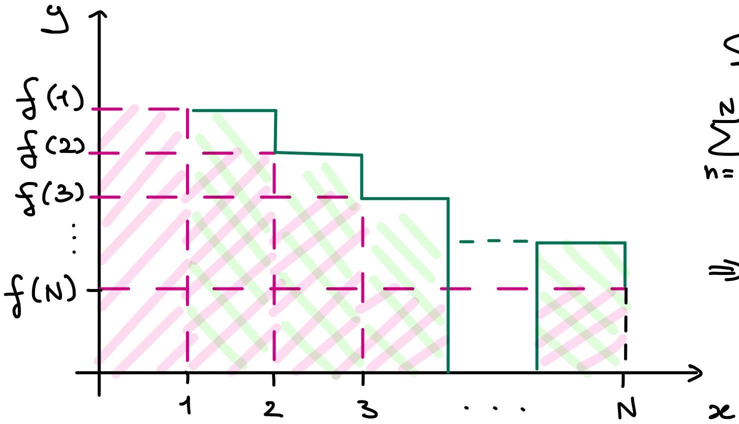
$\log x = -y$, $dx = -e^{-y} dy$

$*$: $x^{\log x} = e^{\log^2 x}$, se $x \to 0^+ \Rightarrow \log^2 x \to \infty$

Per casa: $\int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin x} dx$ dire se converge o diverge

CRITERIO INTEGRALE PER LE SERIE

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n)$, $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, f decrescente, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\sum_{n=1}^{N} f(n)$



Si hanno le disuguaglianze:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{N} f(n) \quad \forall N \geq 2$$

Teo: $f \geq 0$, f decrescente, allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \iff \int_1^{\infty} f(x) < +\infty$

Dim: Segue dal teorema del confronto per i limiti.

Oss: Passando al limite $N \to +\infty$ si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} f(x) - f(1)$$

Es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, la serie converge $\iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \iff \alpha > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \text{ converge} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} < +\infty$$

$y = \log x \longrightarrow \parallel$

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{y^\alpha} \iff \alpha > 1$$

Oss: Consideriamo la successione $b_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N} f(x)\,dx \in [0, f(1)] \ \forall N$

In particolare b_N è limitata, inoltre si ha:

$$b_{N+1} - b_N = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N+1} f(x) + \int_1^{N} f(x) = f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x) \leq 0 \text{, cioè}$$

b_N è decrescente $\Rightarrow b_N \xrightarrow[N]{} \inf_N b_N = b \in [0, f(1)]$.

Quindi $\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^{N} f(x)\,dx + b + o(1)$ per $N \to \infty$ con $b \in [0, f(1)]$.

Questo vale anche quando $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$.

Esempi: • $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\log(N)+\gamma+o(1)$, $\int_1^N \frac{1}{x}=\log(N)$

$\gamma\in[0,1]$, $\gamma\approx 0{,}577\ldots$ si chiama COSTANTE DI EULERO-MASCHERONI

• $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha\in(0,1)$, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}=\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}+\gamma_\alpha+o(1)$, $\gamma_\alpha\in[0,1]$

$$\int_1^N\frac{1}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^N=\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}.$$

$\alpha>1$, possiamo mandare $N\to+\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}+\gamma_\alpha$, $\gamma_\alpha\in[0,1]$

ESERCIZI SU INTEGRALI IMPROPRI

• Studiare l'integrabilità di $\int_0^1|\log(x)|^\alpha\,dx$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

1 Vediamo $x\to1^-$. $\log(x)=x-1+o(1)$ $\quad x\to1^-\Rightarrow|\log(x)|^\alpha=(1-x)^\alpha+o(1)$

$$\int_{1-\varepsilon}^1|\log x|^\alpha\sim\int_{1-\varepsilon}^1(1-x)^\alpha<+\infty \quad \text{per} \quad \alpha>-1$$

2 Vediamo $x\to0^+$ $\quad x^\beta|\log x|^\alpha\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ $\forall\beta>0$, $|\log x|^\alpha=o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ $\forall\beta>0$ $x\to0^+$

Per confronto con $\frac{1}{x^\beta}$, $\beta\in(0,1)$, si ha $\int_0^\varepsilon|\log x|^\alpha<+\infty$ $\forall\alpha$, $\varepsilon\in(0,1)$

$\Rightarrow|\log x|^\alpha$ è integrabile su $(0,1)\Leftrightarrow\alpha>-1$.

• Studiare l'integrale di $\int_0^\infty x^\alpha\sin(x^\beta)\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Se $\beta=0$ abbiamo $\int_0^\infty x^\alpha\sin(x^\beta)=\sin(1)\int_0^\infty x^\alpha=+\infty$ $\forall\alpha$

Facciamo il cambio di variabile $y=x^\beta$, $\beta\neq0$: $x=y^{\frac{1}{\beta}}$, $dx=\frac{1}{\beta}y^{\frac{1}{\beta}-1}dy$

$$\int_0^\infty x^\alpha\sin(x^\beta)\sim\frac{1}{|\beta|}\int_0^\infty y^{\frac{1}{\beta}-1}\cdot y^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sin(y)\,dy=\frac{1}{|\beta|}\int y^\gamma\sin(y)\,dy,\quad \gamma=\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}$$

$y^\gamma\sin(y)$ è integrabile su $[1,+\infty)\Leftrightarrow\gamma<0$

$y^\gamma\sin(y)\sim y^{\gamma+1}$ per $y\to0$ è integrabile su $(0,1]\Leftrightarrow\gamma+1>-1\Leftrightarrow\gamma>-2$

$y^\gamma\sin(y)$ è integrabile su $(0,+\infty)\Leftrightarrow-2<\gamma<0$

$x^\alpha\sin(x^\beta)$ è integrabile su $(0,+\infty)\Leftrightarrow-2<\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}<0$ e $\beta\neq0$.

Ad esempio, se $\alpha=0$, $\sin(x^\beta)$ è integrabile $\Leftrightarrow$ $-2<\frac{1-\beta}{\beta}<0$,

- $\beta>0\Rightarrow-2\beta<1-\beta<0\Rightarrow\beta>1$
- $\beta<0\Rightarrow-2\beta>1-\beta>0\Rightarrow-\beta>1\Rightarrow\beta<-1$

invece per $x\to0$ non ci sono mai problemi

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

L'incognita è una funzione $y(x): I \to \mathbb{R}$, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

dove n è l'ordine dell'equazione.

L'equazione si dice autonoma se F non dipende da x.

Se $F(x, y, \dots, y^{(n)}(x)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(j)}(x) + b(x)$ l'equazione si dice lineare,

se $b(x) = 0$ si dice lineare omogenea.

Es: • $y''(x) = 0$, integriamo $\Rightarrow y'(x) = c$, integriamo $\Rightarrow y(x) = cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$

Sono tutte le soluzioni dell'equazione.

Allo stesso modo $y^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow y(x) = P(x)$, P polinomio $\deg P = n-1$.

- Non c'è unicità
- lo spazio delle soluzioni ha dimensione n
- L'insieme delle soluzioni ha n "gradi di libertà"

• $h''(t) = -g$ caduta verticale di un "grave"

$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$

Dati iniziali: $\begin{cases} h(0) = h_0 & \text{altezza iniziale} \\ h'(0) = v_0 & \text{velocità iniziale} \end{cases}$

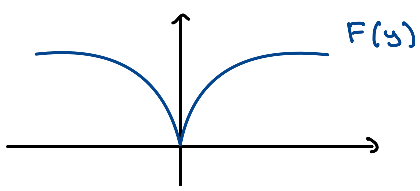
PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ \left.\begin{aligned} & y(x_0) = y_0 \\ & \vdots \\ & y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{n dati iniziali} \end{cases}$$

In molti casi ci aspettiamo soluzione unica del problema di Cauchy

Oss: Non è sempre vero, F deve essere abbastanza regolare

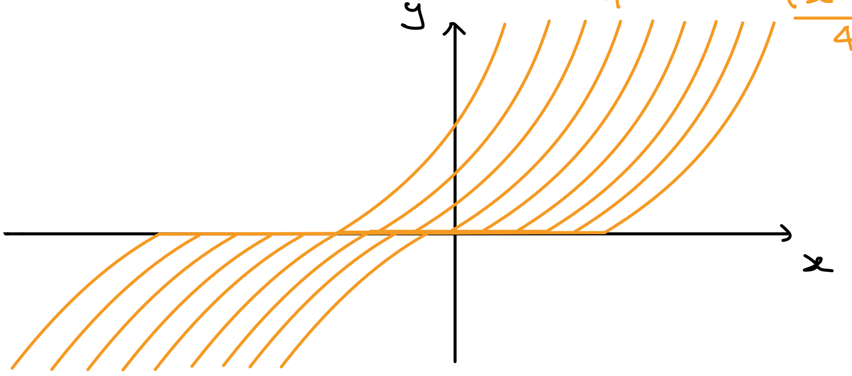
$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



⊙ $y(x) = 0 \ \forall x$ è soluzione, cerchiamo sol. del tipo $y(x) = ax^2$ $(x \geq 0)$

$y'(x) = 2ax = \sqrt{y(x)} = \sqrt{a} \cdot x \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$\odot$ $y(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & x > 0 \end{cases}$ è soluzione. NON C'È UNICITÀ



BAFFO DI PEANO

Oss: Questo fenomeno non c'è se F è C^1

EQUAZIONE DEL PRIMO ORDINE IN FORMA "NORMALE"

$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

Teo (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE)

Se f è continua in (x,y) e Lipschitziana in y, cioè:

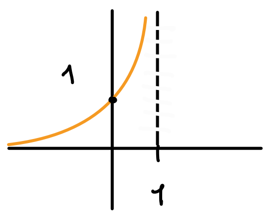
$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$ con $L > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ con $(x_0+\delta, x_0-\delta) \subseteq (a,b)$

e $\exists!\, y \in C^1((x_0-\delta, x_0+\delta))$ soluzione del problema di Cauchy.

Oss: δ può essere molto piccolo.

Le soluzioni possono avere asintoti verticali.

Es: $\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ NON HA SOLUZIONE GLOBALE



Divido per $y^2(x)$: $\dfrac{y'}{y^2} = 1$

integro $\int \dfrac{y'}{y^2} = x + c = -\dfrac{1}{y}$, $y(x) = -\dfrac{1}{x+c}$ $c \in \mathbb{R}$, $c = -1$

Esempio: $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, $a, b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue

Siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

Si può trovare la soluzione generale.

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè $A'(x) = a(x)$, scriviamo l'equaz.

$y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$ moltiplichiamo per $e^{-A(x)}$ e otteniamo:

$e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(s)} b(s)\, ds + c \quad c \in \mathbb{R}$, da cui $\boxed{y(x) = c e^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(s)} b(s)\, ds}$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

In particolare, la soluzione di $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è:

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(s)} b(s)\, ds \quad \text{con } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s) ds,\ A(x_0) = 0.$$

Oss: Tutte le soluzioni sono definite globalmente, cioè $\forall x \in \mathbb{R}$

14-04-2022 Lezione 56 Prof. Carminati

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO INTEGRALE

Prop: Se f è integrabile n volte e $f^{(n)}$ è integrabile allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt} \to R_n \quad (T_n)$$

Dim (Per induzione):

$(n=1)$ $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) dt$ (vera per TFCI)

Oss: $\frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right] = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$

Suppongo la formula (T_n) vera e scrivo:

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{\text{integro}} \cdot \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{derivo}} dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}$$

(T_n) vera $\Rightarrow$ (T_{n+1}) è vera $\square$

Confronto l'espressione di R_n con Lagrange:

$\xi \in [x_0, x]$ $\quad f^{(n)}(\xi)\frac{(x-x_0)}{n!} = R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$

$$f^{(n)}(\xi) = \underbrace{\left[\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right]^{-1}}_{} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{} dt$$

$\to P_n(t) \leftarrow$ $\quad P_n(t) \geq 0$

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\, P_n(t)\, dt \quad \text{con} \quad \int_{x_0}^{x} P_n(t)\, dt = 1$$

Oss: Se $f^{(n)}$ è continua posso dimostrare la formula di Taylor con resto di Lagrange a partire da quella con resto integrale.

Infatti osservo che $m_n \int_{x_0}^{x} P_n(t)\,dt \le \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) P_n(t)\,dt \le M_n \underbrace{\int_{x_0}^{x} P_n(t)\,dt}_{\to 1}$

$M_n = \max_{[x_0,x]} f^{(n)}$

$m_n = \min_{[x_0,x]} f^{(n)}$

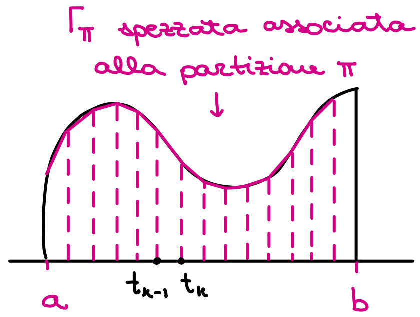
Se $f^{(n)}$ continua $\Rightarrow \exists\, \xi \in [x_0, x]$ tc $f^{(n)}(\xi) = \int^{x} f^{(n)}(t) P_n(t)\,dt$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) P_n(t)\,dt$$

La formula con resto integrale produce stime più precise di quelle che si ottengono col resto di Lagrange.

LUNGHEZZA DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

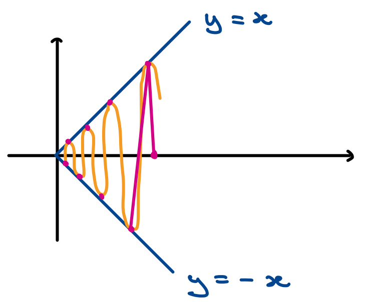


$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad :=$ partizione π

$\ell(\Gamma_\pi) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}$

$\Gamma_f \doteq \{ (x,y) : y = f(x) \quad a \le x \le b \}$

$\ell(\Gamma) = \sup_\pi \ell(\Gamma_\pi)$



Oss: Anche se f è continua $\ell(\Gamma_f)$ può valere $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

f continua

$\ell(\Gamma_f) = +\infty$

Fatto: Si può costruire $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $\ell\left(\Gamma_{f|_{[a,b]}}\right) = +\infty$, $a,b \in (0,1)$

Def: Γ_f è rettificabile $\Leftrightarrow \ell(\Gamma_f) < +\infty$

Oss: Se f è M-Lip. $\Rightarrow \Gamma_f$ è rettificabile

$$\ell(\Gamma_\pi) \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + M^2 (t_k - t_{k-1})^2} \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{1 + M^2} = \sqrt{1+M^2}\,(b-a)$$

Prop: Se $f \in C^1([a,b])$ allora Γ_f è rettificabile e $\ell(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Dim: Sia π partizione,

$$\ell(\Gamma_\pi) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2} \quad \text{con } t_{k-1} \le \xi_k \le t_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$$

È una somma di Cauchy per $g(x) \doteq \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

$\sum (t_k - t_{k-1})\, m_k \le \ell(\Gamma_\pi) \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\, M_k$ con $M_k = \sup_{[t_{k-1},t_k]} g$, $m_k = \inf_{[t_{k-1},t_k]} g$

$s(\pi,g) \le \ell(\Gamma_\pi) \le S(\pi,g)$, $|\ell(\Gamma_\pi) - L| \le S(\pi,g) - s(\pi,g) \le (b-a)\,\omega_g(\delta_\pi)$ *

$s(\pi,g)$ $\qquad$ $S(\pi,g)$

$\int_a^b g(t)\,dt = L$

Oss: Se π_n è la partizione uniforme questo mostra

che $|\ell(\Gamma_{\pi_n}) - L| \le (b-a)\,\omega_g\left(\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Per terminare la dimostrazione basta verificare che $\ell(\Gamma_\pi) \le L$ $\forall \pi$ part.

Se π partizione, $\ell(\Gamma_\pi) \le \ell(\Gamma_{\pi\cup\pi_n}) \overset{*}{\le} L + (b-a)\,\omega_g(\delta_{\pi\cup\pi_n}) \le L + \underbrace{(b-a)\,\omega_g(\delta_{\pi_n})}_{\to 0 \text{ per } n\to\infty}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \ell(\Gamma_\pi) \le L$ (da cui L è il sup). □

Esempio: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad \Gamma_f = \{ (x, f(x)) : 0 \le x \le T \}$

$$\ell(\Gamma_f) = \int_0^T \sqrt{1+x^2}\,dx \overset{*}{=} \int_0^\sigma \sqrt{\cosh^2(t)}\,\cosh(t)\,dt \quad \text{con } \sigma \doteq \sinh^{-1}(T)$$

* $x = \sinh(t)$
$dx = \cosh(t)\,dt$
$1+x^2 = 1 + \sinh^2(t)$
$= \cosh^2(t)$

$$= \int_0^\sigma \cosh^2(t)\,dt \qquad \cosh^2(t) = \frac{1}{2}(1+\cosh(2t))$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\sigma [1+\cosh(2t)]\,dt \le \frac{\sigma}{2} + \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^\sigma$$

$\sin(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$ $\qquad = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\left[\sinh(t)\cosh(t)\right]_0^\sigma = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} T\sqrt{1-T^2}$

con $\sigma = \sinh^{-1}(T)$ $\qquad = \frac{1}{2}\left[\log(T+\sqrt{1+T^2}) + T\sqrt{1-T^2}\right]$

Esercizio: Verificare che $\sinh^{-1}(T) = \log(T + \sqrt{1+T^2})$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (del primo ordine)

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con a, b funzioni reali

Ammette un'unica soluzione (fatto generale)

(CL) $y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(s)}\, b(s)\,ds$ dove $A'(x) = a(x)$

Esempio: $\begin{cases} y' = 2yx + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad a(x) = 2x$, $A(x) = x^2$

(CL) $\Rightarrow y(x) = e^{x^2} + \int_{x_0}^{x} e^{x^2-s^2}\,ds$

Es: Sia $b(x)$ una funzione limitata su $[0,+\infty)$. Mostrare che l'equazione (E) $y' = y + b(x)$ ammette un'unica sol. limitata su $[0,+\infty)$.

Per (CL) otteniamo che la soluzione di (E) con $y(0)=y_0$ è :

$$y(x) = y_0 e^x + \int_0^x e^{x-s} b(s)\,ds = e^x \left[y_0 + \int_0^x e^{-s} b(s)\,ds \right]$$

Come scegliere y_0 in modo che questa quantità si mantenga limitata?

$$y_0 \doteq -\int_0^{+\infty} e^{-s} b(s)\,ds$$

Oss: l'integrale è assolutamente convergente, $B \doteq \sup|b(s)|$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s}|b(s)|ds \leq B\int_0^{+\infty} e^{-s}ds = B$$

Con questa scelta di y_0 otteniamo che $y(x) = e^x\left[-\int_x^{+\infty} e^{-s} b(s)\,ds\right]$

$$|y(x)| = \int_x^{+\infty} e^{x-s}|b(s)|\,ds \leq B\int_x^{+\infty} e^{x-s}ds = B \qquad (\forall x>0)$$

Quindi la soluzione è limitata su $[0,+\infty)$ □

Es: Mostrare che, se $\alpha \notin \{0,1\}$ allora $y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$ si riconduce a un'equazione lineare del I ordine ponendo $v \doteq y^{1-\alpha}$

$[v' + (1-\alpha)p(x)\, v = g(x)]$

Risolvere $y' + 2xy = y^3x^3$ $(p(x) = 2x,\ g(x) = x^3,\ \alpha = 3)$

Es. per casa: ① Dire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale $\int_0^\infty \left[\frac{1}{x^\alpha} - \sin\frac{1}{x^\alpha}\right]dx$

② Calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right)dx$

26-04-2022 Lezione 57 Prof. Novaga

Teorema (esistenza e unicità)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, y_0) \in (a,b)\times(c,d) \end{array}$$

f continua in x e y e Lip. in y

$\Rightarrow \exists\, \delta$ e $\exists$ unica $y(x) \in C^1((x_0-\delta, x_0+\delta))$ soluzione

Oss: Senza f Lip. non c'è unicità: $y' = \sqrt{|y|}$ BAFFO DI PEANO

Teo (Peano):

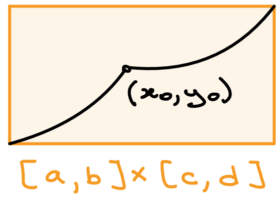
Se f è solo continua, $\exists$ una sol. $y \in C^1((x_0-\delta, x_0+\delta))$, in generale non unica.

Def: Si dice sol. massimale del problema di Cauchy una soluzione

$y \in C^1(I)$, $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$, tale che se $z \in C^1(I')$ è un'altra sol. $\Rightarrow I' \subseteq I$

Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità $\exists!\ y \in C^1(I)$ sol. massimale del problema di Cauchy con $I \subseteq [a,b]$

Teo: Nelle ipotesi del Teo di $\exists!$, sia $y \in C^1([a',b'])$ la sol. massimale si ha:



① $b' = b$ o ($b' < b$ e $\lim_{x \to b'^-} y(x) \in \{c, d\}$)

② $a' = a$ o ($a' > a$ e $\lim_{x \to a'^+} y(x) \in \{c, d\}$)

Oss: Se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora

① $b' = +\infty$ o $\lim_{x \to b'^-} y(x) = \pm\infty$ (ASINTOTO VERTICALE)

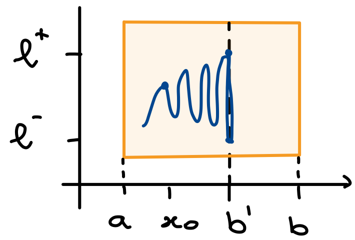
② $a' = -\infty$ o $\lim_{x \to a'^+} y(x) = \pm\infty$

Dim: Dimostriamo ① e supponiamo $b' < b$.

Mostriamo che $\exists \lim_{y \to b'^-} y(x) = \alpha \in [c,d]$. Ma allora $\alpha \in \{c,d\}$, altrimenti potremmo prolungare la soluzione e non sarebbe massimale.

Suppongo per assurdo che $\limsup_{y \to b'^-} y(x) = \ell^+ > \ell^- = \liminf_{x \to b'^-} y(x)$

Per Lagrange, $\exists\, x_n \to b'^-$ tale che:



$|y'(x_n)| = |f(x_n, y(x_n))| \to +\infty$ ma

$|f(x_n, y(x_n)) \leq \max_{[b'-\delta, b'] \times [\ell^+ - \varepsilon, \ell^- + \varepsilon]} |f(x,y)| < +\infty$ per $n \gg 1$ $\lightning$

Teo (Confronto): $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ soluzione di $y' = f(x,y)$, I intervallo, con f continua e (loc.) lip. in y $\Rightarrow$ ho 3 possibilità:

① $y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x \in I$

② $y_1(x) < y_2(x)$ $\forall x \in I$

③ $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in I$

Dim: Supponiamo che $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ per qualche $x_0 \in I$

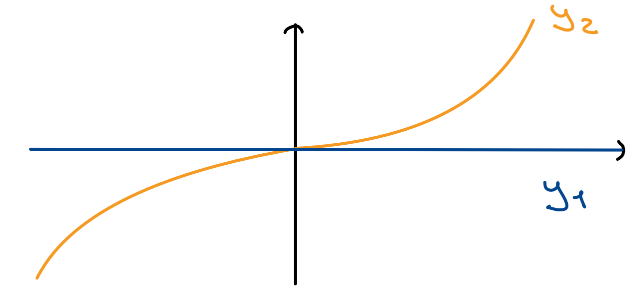
$\Rightarrow$ per unicità $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in I$

Oss: Non vale per f solo continua

$y' = \sqrt{|y|}$

$y_1(x) = 0$ è soluzione

$$y_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$ è soluzione



Def: $y \in C^1(I)$ è una SOPRASOLUZIONE (risp. SOTTOSOLUZIONE) di $y' = f(t,y)$ se $y'(x) \geq f(x, y(x))$ $\forall x \in I$ (risp. $\leq$).

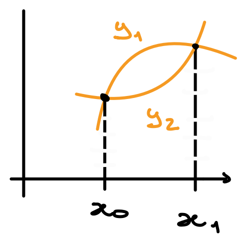
La sopra/sottosoluzione si dice STRETTA se c'è la disug. stretta.

Teo: $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ y_1 soprasoluzione di $y' = f(x,y)$
$x_0 \in I$ y_2 sottosoluzione di $y' = f(x,y)$ — una delle due stretta

① $y_1(x_0) \geq y_2(x_0) \Rightarrow y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x > x_0$, $x \in I$

② $y_1(x_0) \leq y_2(x) \Rightarrow y_1(x) < y_2(x)$ $\forall x < x_0$, $x \in I$

Dim. Dimostriamo ①



Osserviamo che, se $y_1(x_0) = y_2(x_0)$,

$\Rightarrow y_1'(x_0) > y_2'(x_0) \Rightarrow y_1(x) > y_2(x)$ per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

Posso supporre che $y_1(x_0) > y_2(x_0)$.

Suppoiamo per assurdo che $\exists x_1 > x_0$ t.c. $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ e $y_1(x) > y_2(x)$ $\forall x \in (x_0, x_1) \Rightarrow y_1'(x_1) \leq y_2'(x_1)$, assurdo.

STUDIO QUALITATIVO DELLE SOLUZIONI DI $y' = f(x, y(x))$

OBIETTIVO: Disegnare tutte le soluzioni

PASSI: ① Dominio di f

② Segno di f, zone di monotonia delle soluzioni $y(x)$

③ Soluzioni costanti, cioè $y \in \mathbb{R}$ tc $f(x,y) = 0$ $\forall x$

④ Simmetrie di f

⑤ Asintoti orizzontali e verticali (usando sopra/sottosolut.)

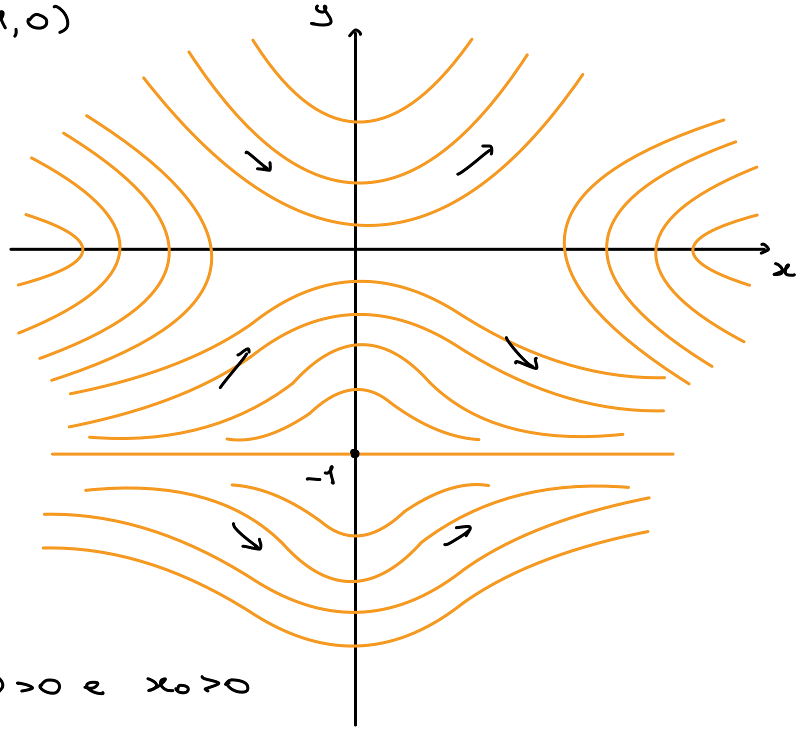
⑥ Derivate seconde di $y(a)$

Esempio: $y'(x) = x\left(1+\frac{1}{y}\right)$ $\qquad f(x,y) = x\left(1+\frac{1}{y}\right)$

$\text{dom}(f) = \{(x,y) : y \neq 0\}$ $\quad f$ è loc. lip. in y nel $\text{dom}(f)$

Segno di f: $f(x,-1) = 0 \ \forall x$, $y(x) = -1$ sol. costante, $f(0,y) = 0 \ \forall y$

Guardiamo le $y(x)$ con $y(0) \in (-1,0)$



$y'(x) < 0 \quad x > 0$, $\quad y'(x) > 0 \quad x < 0$

$y(x) \in (0,1) \ \forall x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = y_\infty \in (0,1)$

$\exists \ x_n \to +\infty$ t.c. $y'(x_n) \to 0$

$$\Rightarrow 0 = \lim_n y'(x_n) = \lim_n f(x_n, y(x_n)) =$$

$$= \lim_n x_n \cdot \frac{y_\infty + 1}{y_\infty} \Rightarrow y_\infty = -1$$

Va capito se le soluzioni con $y(x_0) > 0$ e $x_0 > 0$ sono definite $\forall x > x_0$ o hanno un asintoto verticale

Sia $y(x)$ una tale soluzione, osserviamo che $y(x_0) < y(x) \ \forall x > x_0 \Rightarrow$

$$x \leq f(x, y(x)) \leq x\left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right)$$

$\Rightarrow y_1(x)$ soluzioni di $y' = x$ è sottosoluzione stretta per $x > x_0$,

e $y_2(x)$ soluzioni di $y' = \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right)x$ è soprasoluzione stretta.

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + \left(y(x_0) - \frac{x_0^2}{2}\right), \quad y_2(x) = \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right)\frac{x^2}{2} + \left(y(x_0) - \left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right)\frac{x_0^2}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ per confronto $y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x) \quad \forall x > x_0$ c'è sempre esist. globale

Teo (ESISTENZA GLOBALE):

y è sol. massimale di $y' = f(x, y(x))$ con $|f(x, y(x))| \leq a(x) + b(x)|y|$

a, b continue e positive $\Rightarrow$ y è definita globalmente

Dim: le eq. lineari $y' = a(x) \pm b(x) y$ hanno sol. globali ed esplicite, con cui posso confrontare la soluzione $y(x)$

28-04-2022 lezione 58 Prof. Carminati

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{x^\alpha} - \sin \frac{1}{x^\alpha} \right]}_{\varphi(x)} dx$$

per quali $\alpha > 0$ converge

Oss: $\sin t \leq t$, $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$

Devo verificare che convergono $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

$\int_0^1 \sin \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ esiste e $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ è finito $\Leftrightarrow \alpha < 1$

$x \to +\infty$, $y := \frac{1}{x^\alpha}$, $y \to 0 \Rightarrow y - \sin y \sim \frac{y^3}{6}$ per $y \to 0$ (Taylor)

$\varphi(x) \sim \frac{1}{6 \cdot x^{3\alpha}}$ per $x \to +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow 3\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}$

Quindi $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \alpha < 1$

- $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx$

$$\int_0^1 1 \cdot \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx = ⊛$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) \qquad g'(x) = \frac{n^2}{(n+x)^2 + n^2x^2}$

$$\int_0^1 f' \cdot g\,dx = \left[f \cdot g \right]_0^1 - \int_0^1 f \cdot g'\,dx$$

$$⊛ = \left[x \arctan \frac{nx}{n+x} \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + x^2}\,dx}_{b_n}$$

$a_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \to \frac{\pi}{4}$

$$\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} \leq \frac{x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + x^2} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{c+x^2}\,dx \qquad c = 1, \ c = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\left[\frac{1}{2} \log(c+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log \frac{c+1}{c} =$$

$c = 1 \to \frac{1}{2} \log 2$

$c = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} \log \left[\frac{(1+1/n)^2 + 1}{(1+1/n)^2} \right] \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2} \log 2$

$b_n \to \frac{1}{2} \log 2$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

$$\begin{cases} y'(x) = f(y)\cdot a(x) & \text{(E)} \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I,\ y_0 \in J \end{cases}$$

$F: I \times J$, $y' = F(x,y)$, $F(x,y) = f(y)\cdot a(x)$

$a: I \to \mathbb{R}$, $f: J \to \mathbb{R}$ continue

Oss 1: Se $f(y_0) = 0$ allora $y(x) = y_0$ è soluzione

Oss 2: Se f è anche localmente lip. la soluzione locale è unica (Valgono le ipotesi del teorema di Cauchy Lip)

$f(y_0) \neq 0$, chiamo J_0 la componente connessa di $\{y : f(y) \neq 0\}$ che contiene y_0; f non cambia segno su J_0

(E) la riscrivo come $\dfrac{y'(x)}{f(y(x))} = a(x)$ se $G' = \dfrac{1}{f}$, $A' = a$

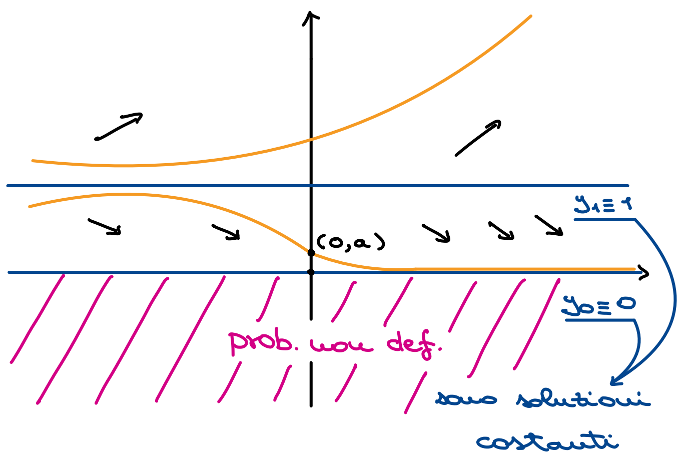
$$\frac{d}{dx}\left[G(y(x))\right] " = \frac{d}{dx}\left[A(x)\right] \xrightarrow[\text{su } x - x_0]{\text{TFCI: integrando}} G(y(x)) - G(y(x_0)) = A(x) - A(x_0)$$

$$\Rightarrow G(y(x)) = G(y_0) + A(x) - A(x_0) \Rightarrow y(x) = G^{-1}\left(\underline{G(y_0) + A(x) - A(x_0)}\right)$$

per gli x per cui l'argomento appartiene a $G(J_0)$, $G: J_0 \to G(J_0)$

$y' = f(y)\,a(x) \quad (x,y) \in I \times J$

Studiamo le soluzioni di $\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$



$y' = f(y)$ con $f(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \\ y \log y & y > 0 \end{cases}$

Oss: f è continua su $[0, +\infty)$

Oss: $a(x) \equiv 1$ (caso autonomo) $\to$ se $y(x)$ è sol., $y(x - \alpha)$ è sol.

Oss: $I = \mathbb{R}$, $J = [0, +\infty)$

$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq L \cdot |(y_1 - y_2)|$ (L) localmente per $(x,y_1), (x,y_1) \in Q$ ← intorno di $(0,a)$

Oss: $F(x,y) = f(y)$

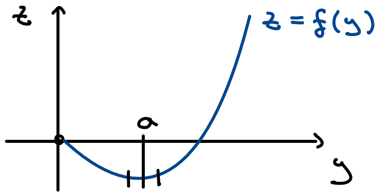
Se $\delta > 0$ è piccolo, $y_1, y_2 \in [a - \delta, a + \delta]$, e si ha:

$$F(x,y_1) - F(x,y_2) = f(y_1) - f(y_2) = f'(\xi)\,|y_1 - y_2|$$

Quindi la condizione (L) è verificata con $L = \max\limits_{|\xi - a| \leq \delta} |f'(\xi)|$.

$f(y) < 0$ se $0 < y < 1$

$f(y) > 0$ se $y > 1$



Oss: Se $a \in (0,1)$ la soluzione del problema di Cauchy è definita su $(-\infty, a]$

perché $a \leq y(x) \leq 1$ se $x \in (-\infty, 0]$

$\exists \lim_{x \to -\infty} y(x) = \ell$ (perché $y(x)$ è monotona) e tale limite ℓ deve soddisfare $f(\ell) = 0$

(perché altrimenti si avrebbe $\lim_{x\to-\infty} y'(x) = \lim_{x \to -\infty} f(y(x)) = f(\ell) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} y(x) = 1$

Un discorso analogo vale nel caso $a > 1$.

$y'(x) = f(y(x)) \qquad f'(y) = \log y + 1$

$y''(x) = f'(y(x))\,y'(x) = f'(y(x))\,f(y(x))$

$y''(x) = y \log y (\log y + 1)$

$y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < y < 1$

		$1/e$		1	
$\log y$	$-$		$-$		$+$
$\log y + 1$	$-$		$+$		$+$

- Calcolo la soluzione usando quanto visto prima

$a(x) = 1 \qquad A(x) = x$

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y \log y} \qquad G(y) = \log|\log y|$

$G(y(x)) = G(y(0)) + A(x) - A(0) \qquad G = \log|\log y|$

$\log|\log y(x)| = \log|\log a| + x$

$|\log y(x)| = |\log a|\, e^x$

Se $a > 1$ $\quad \log y(x) = (\log a) e^x \qquad y = \exp((\log a) e^x)$

Se $0 < a < 1$ $\quad \log y(x) = -|\log a|\, e^x \qquad y(x) = \exp(-|\log a|\, e^x)$

Esercizio: Fare lo studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione $y' = \sin y$ e calcolare l'espressione esplicita della soluzione del problema di Cauchy nel caso $y(0) = \frac{\pi}{2}$ e $y(0) = \frac{3}{2}\pi$

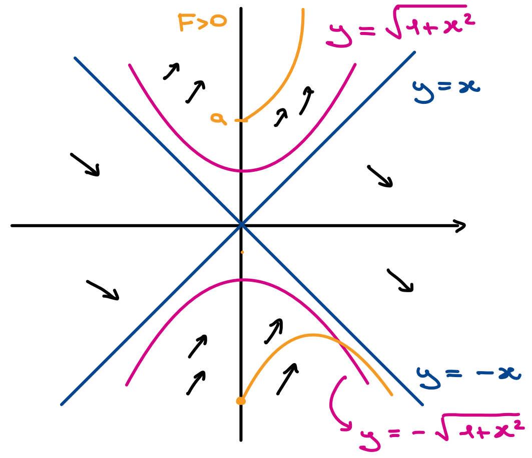
Esercizio: $y' = y^2 - x^2 - 1 = F(x,y)$ $(*)$, fare lo studio qualitativo delle sol.

- $F(x,y)$ è continua in (x,y) e loc. lip. in y

Oss: $y(x) = -x$ è sol. dell'equazione

$z(x) = x + y(x)$

$z' = z(z-x)$



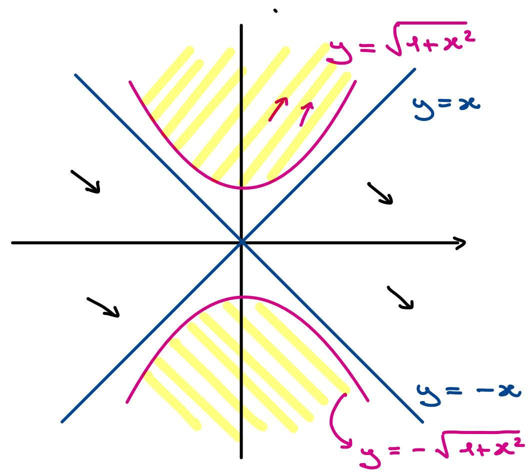
$\{F(x,y)=0\}$

Es: Finire lo studio qualitativo

Esercizio: Se $F(x,y) = F(-x,-y)$ e se y è soluzione di $y' = F(x,y)$ allora $v(x) = -y(-x)$ è ancora soluzione della stessa equazione $v' = F(x,v)$

29-04-2022 Lezione 59 Prof. Carminati

$$\underbrace{y' = y^2 - x^2 - 1}_{F(x,y)} \qquad (E)$$

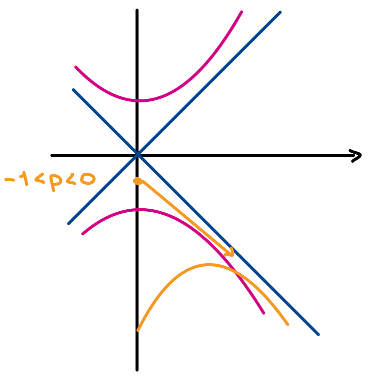


1. Valgono le ipotesi del teorema di Cauchy-Lip
2. $y(x) = -x$ è soluzione
3. Crescenza/decrescenza
4. $F(-x,-y) = F(-x,y) = F(x,-y)$

Se $y(x)$ è sol. di (E) anche $v(x) \doteq -y(-x)$

è sol. di (E): $v'(x) = -y'(-x)\cdot(-1) = F(-x, y(x)) = F(x, y(-x)) = F(x, v(x))$

$$(C_p) \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(0) = p \end{cases}$$



Prop: Sia y_p soluzione di (C_p) allora $\exists!\, P_* \in \mathbb{R}$ tc

a) $p < P_*$ allora y_p è definita su $[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} y_p(x) + x = 0$$

b) $p > P_*$ allora $\exists\, \omega = \omega(p)$ tc $\lim_{x\to\omega} y_p(x) = +\infty$

c) $p = P_*$, y_{P_*} è definita su $[0,+\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} y_{P_*} = +\infty$

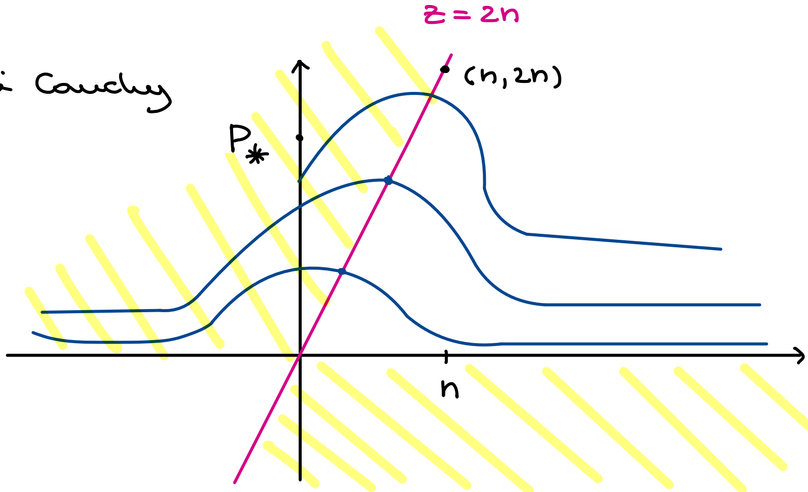
$$x + \frac{1}{x} \leq y_{P_*}(x) \leq x + \frac{1}{x} + \frac{1}{p} \quad \text{per } x \gg 1$$

Se $p < 0$ $\quad y_p(x) \to -x \quad$ per $x \to +\infty$

Se $p > 0$ $\quad z_p(x) = y_p(x) + x \quad$ se y_p è sol. di (C_p) $\quad z' = y' + 1 = \overbrace{(z-x)^2}^{y^2} - x^2 \cancel{-1} \cancel{+1}$

$= z^2 - 2xz$

(z_p) $\begin{cases} z' = z(z-2x) \\ z(0) = p \end{cases}$



ξ_n : la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \xi' = \xi(\xi - 2x) \\ \xi(n) = 2n \end{cases}$$

$$\xi_*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \xi_n(x)$$

Prop: $\xi_*(x) < +\infty \quad \forall x \in [0, +\infty)$

Sia $\xi(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; ξ è una soluzione per $z' = z(z-2x)$

$G(x,z) = z(z-2x)$, $\xi' < G(x,\xi)$

$$G(x,\xi) - \xi' = \left(2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$= 2 + \text{"positivo"} - 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$$

$\xi_n(x) \leq \xi(x)$, $\xi_*(x) \leq \xi(x)$

Fatto: Se φ_n definite su $[a,b]$ e continue su $[a,b]$, $\boxed{\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq 0}$,

$\varphi_n(x) \searrow 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \to 0$ uniformemente, $\sup_{x_0 \in [a,b]} \varphi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Oss: Senza la monotonia questo potrebbe non essere vero.

$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$, $\varphi_n(x) \doteq \varphi(nx)$, $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ma $\sup_{x \in [0,1]} \varphi_n(k) = 1$

Grazie a questo fatto otteniamo $\xi_n \longrightarrow \xi_*$ uniform. su ogni intervallo $[0,b]$

$\hookrightarrow \varphi_n(x) \doteq \xi_* - \xi_n$

E di conseguenza $\int_0^b G(x, \xi_n(x))\,dx \longrightarrow \int_0^b G(x, \xi_*(x))\,dx$ per $n \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \xi_n(b) - \xi_n(0) = \int_0^b \xi_*'(x)\,dx = \int_0^b G(x, \xi_n(x))\,dx \\ \big\downarrow n \to \infty \\ \xi_*(b) = \xi_*(0) + \int_0^b G(x, \xi_*(x))\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_*'(b) = G(b, \xi_*(b))$$

- Sia ξ_a la soluzione del problema di Cauchy: $\begin{cases} \xi' = \frac{\xi^2}{2} \\ \xi(a) = 4a \end{cases}$ per $a > 1$

$$\xi_a'(a) = \frac{(4a)^2}{2} = 8a^2 > 4$$

ξ_a convessa $\Rightarrow \xi_a(x) \geq 4x \quad \forall x \geq a$, ha asintoti verticali

$$\xi' = \frac{\xi^2}{2} = \xi\left(\xi - \frac{\xi}{2}\right) \leq \xi\left(\xi - \frac{4x}{x}\right) \qquad \xi' \leq G(x,\xi)$$

$p > p_*$, se $\left(y_p - y_{p_*}\right)' = \left(y_p^2 - x^2 - 1\right) - \left(y_*^2 - x^2 - 1\right) = y_p^2 - y_*^2$

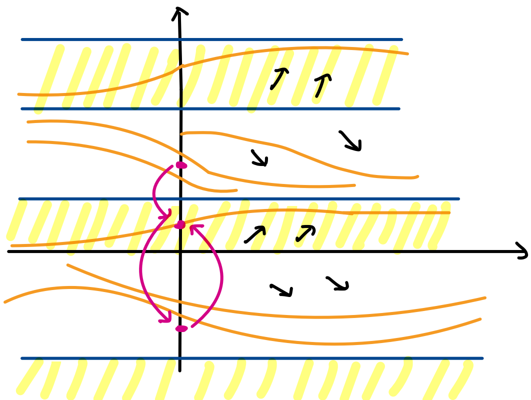
$$= (y_p - y_*)\underbrace{(y_p + y_*)}_{\to +\infty}$$

Di conseguenza per $x \gg 1$, $\varphi(x) \doteq y_p - y_*$, $\varphi' \geq \varphi$

$\Rightarrow \varphi$ cresce più che esponenzialmente. Quindi se $p > p_*$,

$y_p(x) - 4x \longrightarrow +\infty$ e quindi y_p ha un tempo di vita finito. $\square$

- $\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = a \end{cases}$



soluzione stazionaria $y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Se $y(x)$ è sol. di $y' = \sin y$ allora anche

a) $y(x+a)$ è sol. $(\forall a \in \mathbb{R})$

b) $y(x) + 2\pi$ è sol.

c) $-y(x)$ è sol.

$v(x) = -y(x) \qquad v'(x) = -y'(x) = -\sin y(x) = \sin -y(x) = \sin v(x)$

Per trovare tutte le soluzioni basta trovare quelle per $a \in (0,\pi)$

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = a \in (0,\pi) \end{cases} \qquad \frac{y'}{\sin y} = 1$$

$$G'(y) = \frac{1}{\sin y} \qquad \int \frac{1}{\sin y}\,dy \overset{=}{} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|$$

$t = \tan \frac{y}{2} \longrightarrow = \log\left|\tan\frac{y}{2}\right| \quad$ se $0 < y < \pi$

$$\log \tan \frac{y}{2} = \log \tan \frac{a}{2} + x$$

$$\tan \frac{y}{2} = \left(\tan \frac{a}{2}\right) e^x$$

$0 < \frac{y(x)}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow y(x) = 2 \arctan\left(\left(\tan\frac{a}{2}\right)e^x\right) \quad$ se $a \in (0,\pi)$

E la soluzione per $a_1 = \frac{3}{2}\pi$ qual è ?

$$y_{\frac{3}{2}\pi} = 2\pi + y_{-\frac{\pi}{2}} = 2\pi - y_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 2\arctan(e^x)$$

Es: (C_0) $\begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ mostrare che $y(x) = \underbrace{-y(-x)}_{v(x)}$

Basta vedere che v soddisfa lo stesso problema di Cauchy

$v(0)=0$ ovvio, $v'(x) = -y'(-x)\cdot(-1) = \cos(y(-x)) = \cos(-y(-x)) = \cos(v(x))$

v e y soddisfano $C_0 \xrightarrow[\text{UNICITÀ}]{} v(x) = y(x)\ \forall x$

Per esercizio: Calcolare le soluzioni

Es: Calcolare tutte le soluzioni di $y' = y\log^2 y$ $(y \geq 0)$

- non c'è unicità
- alcune soluzioni hanno un asintoto verticale

Es: Trovare tutte le soluzioni del problema di Cauchy:

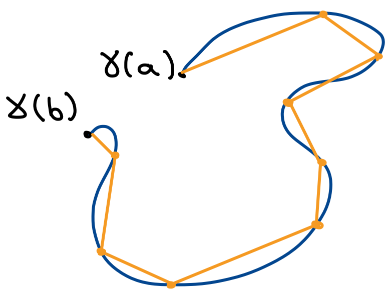
$$\begin{cases} y' = \left(\log\sqrt{1+\sin^2 y}\right)^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Es: Trovare le sol. di $y'(x) = \sin(x + y(x) + 1)$

Suggerimento: $z(x) \doteq x + y(x) + 1$

03-05-2022 Lezione 60 Prof. Novaga

CURVE IN $\mathbb{R}^n$



$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua, curva

$\gamma([a,b])$ supporto della curva

La curva è "chiusa" se $\gamma(a) = \gamma(b)$

LUNGHEZZA:

$\Pi = \{t_i\}_{i \in \{0,\dots,N\}}$ $\quad t_0 = a < t_1 < \dots t_N = b$

$L(\gamma) = \sup_{\Pi} \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \in [0, +\infty]$, lunghezza di γ

La curva è RETTIFICABILE se $L < +\infty$.

Es: $\mu : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\gamma(x) = (x, \mu(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva, $\operatorname{supp}(\gamma) = \Gamma_\mu$

Abbiamo visto che, se $\mu \in C^1$, $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+\mu'(x)^2}\, dx < +\infty$

Più in generale:

Prop: $\gamma \in C^1 \Rightarrow \gamma$ rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

Dim: Fissiamo π partizione di $[a,b]$, $\pi = \{t_0, \dots, t_N\}$

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|\, dt$$

Sommando in i: $L(\gamma) = \sup_\pi \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

Mostriamo che $L(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo π_ε tc $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon \quad \forall s,t \in [t_i, t_{i+1}]$, si può fare perché γ' è unif. continua

Si ha che $\left| \gamma'(t) - \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)\, ds \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ quindi si ha:

$$\fint_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| - \left| \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)\, ds \right| < \varepsilon \quad \forall i$$, quindi sommando in i:

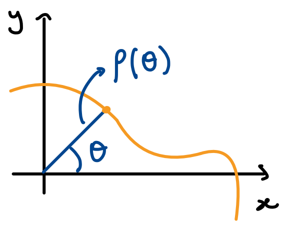
$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) \right| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \right) = \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) + \varepsilon(b-a)$$
$$\leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$$

Oss: Il risultato è vero anche per curve Lipschitziane

Oss: Se γ non è iniettiva $L(\gamma)$ è una "lunghezza con molteplicità"

CURVE IN COORDINATE POLARI:

Data $\rho(\theta) : [\theta_1, \theta_2] \to [0, +\infty)$ continua.



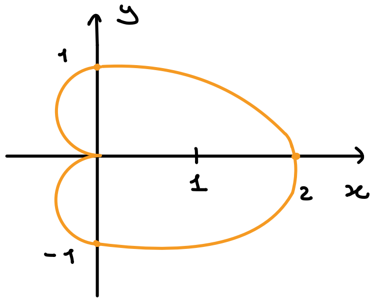
Posso considerare la curva $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta)$

$$\rho \in C^1 \Rightarrow \gamma \in C^1 \Rightarrow L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\gamma'(\theta)| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho\sin\theta + \rho\cos\theta)^2 \right]^{1/2} d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}\, d\theta$$

ESEMPI:

CERCHIO: $\rho(\theta) = R$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = 2\pi R$



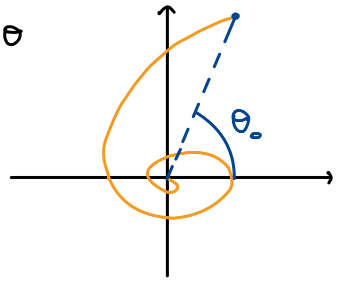
CARDIOIDE: $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho'(\theta) = \sin\theta$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta$$

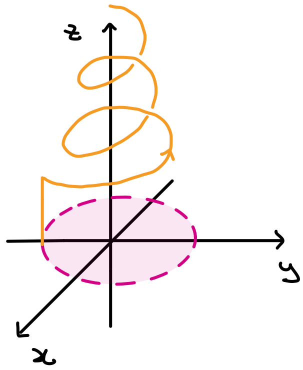
$$\left[\begin{array}{l} \cos\theta = \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\ \sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2} \cdot \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \end{array}\right.$$

$$L(\gamma) = 2 \int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 4 \int_0^{\pi} |\cos(t)| = 8 \int_0^{\pi/2} \cos t = 8 \qquad t = \frac{\theta}{2},\ 2dt = d\theta$$



SPIRALE LOGARITMICA: $\rho(\theta) = e^{-\theta}$ $\theta \in [\theta_0, +\infty)$, $\rho'(\theta) = -e^{-\theta}$

$$L(\gamma) = \int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{2} \int_{\theta_0}^{+\infty} e^{-\theta} = \sqrt{2}\, e^{-\theta_0}$$



ELICA: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $t \in [a,b]$, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_a^b \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}(b-a)$$

Oss: ○ $\gamma'(t)$ si dice velocità della curva γ, $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

○ $\tau(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma(t)|}$ (se $|\gamma'(t)| \neq 0$), $|\tau(t)| = 1$ si dice vettore tangente alla curva γ

05-05-2022 Lezione 61 Prof. Camminati

EQ. LINEARI DI ORDINE SUPERIORE

$$(cs) \begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} I \subseteq \mathbb{R} \quad J \subseteq \mathbb{R}^n \quad (x_0, y_0) \in I \times J \\ f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \ f \text{ loc. lip. in } y \end{array}$$

allora (cs) ammette soluzione unica (localmente)

Inoltre se $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $|f(x,y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x)$ con $\alpha, \beta \geq 0$ continua

allora la soluzione di (CS) è definita su I

- (E) $a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x)$ Eq. lineare di ord. n

$a_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $a_n(x) > 0$, anzi $a_n(x) \equiv 1$, u funzione scalare incognita

Pongo $y_j(x) := u^{(j)}(x)$ $0 \le j \le n-1$, $y(x) = \big(y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)\big)$ è sol. del sistema:

$$\begin{cases} y_j'(x) = \left(u^{(j)}(x)\right)' = u^{(j+1)}(x) & 0 \le j \le n-2 \\ y_{n-1}'(x) = u^{(n)}(x) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} + b(x) \end{cases}$$

(S) $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{B}(x)$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ -a_0(x), & \dots & & , -a_{n-1}(x) & \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Soluzioni del sistema (S) $\longleftrightarrow$ sol. di (E)

$\vec{y}$ sol. di (S) $\Longleftrightarrow$ $u \doteq y_0$ è sol di (E)

Es: Verificare che $f(x,y) = A(x)\cdot y + B(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di CL e $|f(x,y)| \le \alpha(x)|y| + \beta(x)$

La soluzione di (S) è unica se si fissano le condizioni iniziali

Pertanto anche l'equazione $Lu \doteq u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u$

$$\begin{cases} Lu = b \\ u^{(j)}(x_0) = c_j & 0 \le j \le l-1 \end{cases}$$

Questo problema di Cauchy di ordine n ha soluzione unica

Struttura delle soluzioni:

Prop: L'insieme delle soluzioni di $Lu = b$ (E) è uno spazio affine di dim n

Dim. Se u_1 e u_2 sono soluzioni di (E) equazione non omogenea.

$w \doteq u_1 - u_2$ soddisfa $Lw = 0$ (E_0) equazione omogenea.

$Lu_1 = b$ $\qquad Lw = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = b - b = 0$

$Lu_2 = b$

$Lw = 0$ è spazio vettoriale perché è $\mathrm{Ker}(L)$, $L : C^n(I) \to C^0(I)$

Considero w_k la soluzione dell'equazione $\begin{cases} Lw = 0 \\ w^{(j)}(x_0) = \delta_{kj} \end{cases}$ $\quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$

Fatto: $\{w_k : 0 \le k \le n-1\}$ è base di $\operatorname{Ker} L$

(a) w_k sono indipendenti

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k \qquad \mu_k \in \mathbb{R} \qquad 0 \le k \le n-1$$

$0 = D^\ell\left(\sum \mu_k w_k\right) = \sum \mu_k w_k^\ell(x) \quad \forall x \in I$. Valutando in x_0

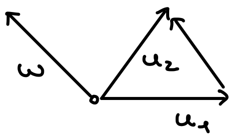
$$0 \le \ell \le n-1 \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \underbrace{w_k^\ell(x_0)}_{\delta_{k\ell}} = \mu_\ell$$

Se $Lu = 0$ allora è combinazione lineare dei w_k, $u^k(x_0) = \mu_k \quad 0 \le k \le n-1$

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$$

$$\bar{u}^{(\ell)}(x_0) = \sum \mu_k w_k^{(\ell)}(x_0) = \mu_\ell \qquad 0 \le \ell \le n-1 \qquad \begin{cases} L\bar{u} = 0 \\ \bar{u}^{(\ell)} = \mu_\ell \end{cases}$$

u e $\bar{u}$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy $\Rightarrow u = \bar{u}$



Oss: L'insieme delle soluzioni di $Lu = b$ si ottiene da una soluzione di $Lu_0 = b$ sommando una combinazione di $\sum \mu_k w_k$

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$$

CASO DI COEFFICIENTI COSTANTI

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = b(x) \qquad a_j \in \mathbb{R} \qquad 0 \le j \le n-1$$

- (EN) $P(D)u = b(x)$ $\qquad P \in \mathbb{R}[x]$, $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$

  polinomio caratteristico dell'equazione

Esempio: $u'' - u = 0$

$$Du^2 - u = 0 \Rightarrow (D^2 - I)u = 0, \quad D : C^\infty(I) \longrightarrow C^\infty(I) \text{ operatore lineare}$$

$$P, Q \in \mathbb{R}[\lambda] \qquad P = \sum a_i \lambda^i, \quad Q = \sum b_j \lambda^j$$

prodotto di polinomi

$$P(D) \circ Q(D)\, u = P(D)\left(\sum b_j u^{(j)}\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j u^{(j+1)} = (P \cdot Q)(D)\, u$$

composizione di operatori

Esempio: $P(\lambda) = \lambda - 1$, $Q(\lambda) = \lambda + 1$, $P(D) \cdot Q(D) = (P \cdot Q)(D) = D^2 - I$

① Come trovare le soluzioni di $P(D)u = 0$?

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \quad \lambda_j \text{ sono radici distinte}, \quad \sum_{j=1}^{r} n_j = n = gr(P)$$

$$\operatorname{Ker} P(D) \supseteq \operatorname{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j} \qquad \forall\, 1 \le j \le r$$

$P(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$, $P(D)u = \hat{P}_j(D) \circ \underline{(D-\lambda_j)^{m_j} u}$ $u \in Ker(D-\lambda_j)^{m_j} \Rightarrow u \in Ker\, P(D)$

Teorema: $Ker(P(D)) = \bigoplus_{j=1}^{r} Ker(D-\lambda_j)^{m_j}$

Lemma$_0$: $Ker(D^m) = \{ q \in \mathbb{R}[x] : gr(q) < m \}$

Lemma$_1$: a) $D - \lambda = E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda}$ $(E_\lambda u)(x) := u(x) e^{\lambda x}$

b) $(D-\lambda)^m = E_\lambda \circ D^m \circ E_{-\lambda}$ $E_\lambda \circ E_{-\lambda} = I$

Dim (a): $E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda} u = u' - \lambda u = (D-\lambda) u$

$$u(x) \xrightarrow{E_{-\lambda}} u(x) e^{-\lambda x} \xrightarrow{D} (u'(x) - \lambda u(x)) e^{-\lambda x} \longrightarrow u'(x) - \lambda u(x)$$

(b) è ovvio

Lemma$_2$: $Ker(D-\lambda)^m = \{ u = q(x) e^{\lambda x} \quad q \in \mathbb{R}[x], gr(p) < m \}$

Dim: $(D-\lambda)^m q(x) e^{\lambda x} = E_\lambda D^m E_{-\lambda}(q(x) e^{\lambda x}) = E_\lambda D^m (q(x)) = 0$

Questo dimostra $Ker(D-\lambda)^m \supset \{ u = q(x) e^{\lambda x} \quad gr(p) < m \}$.

Vale = per una questione di dimensione $\square$

$\sum_{j=1}^{r} Ker(D-\lambda_j)^{m_j} \subseteq Ker\, P(D)$

Considero l'applicazione: $\dim V = m_1 + \ldots + m_r = n$

$$V \doteq Ker(D-\lambda_1)^{m_1} \times \ldots \times Ker(D-\lambda_r)^{m_r} \longrightarrow Ker(P(D))$$

$$(v_1, \ldots, v_r) \longmapsto v_1 + \ldots + v_r$$

Per terminare la dimostrazione del teorema basta verificare che

$v_1 + . + v_r = 0 \Rightarrow v_j = 0 \;\forall j \in \{1, \ldots, r\}$.

Lemma: Se $\lambda \neq \mu$ allora $D - \mu : Ker(D-\lambda)^m \xrightarrow{\sim} Ker(D-\lambda)^m$ è un iso

Dim: $\mu(x) = q(x) e^{\lambda x}$, $gr(p) < n$, $(D-\mu) u = E_\mu \circ D \circ E_{-\mu} u$

$$u(x) = q(x) e^{\lambda x} \xrightarrow{E_{-\mu}} q(x) e^{(\lambda-\mu)x} \xrightarrow{D} (q' + (\lambda-\mu) q) e^{(\lambda-\mu)x} \xrightarrow{E_\mu} (q' + (\lambda-\mu) q) e^{\lambda x}$$

$gr(q) = gr(q' + (\lambda-\mu) q)$ $\lambda \neq \mu$, $q' + (\lambda-\mu) q = 0 \Leftrightarrow q = 0$

L'applicazione è iniettiva e anche surgettiva (su $Ker(D-\lambda)^m$)

Dim (Teo): $1 \leq j \leq r$ fissato, $P(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$

$v_1 + \ldots + v_r = 0 \Rightarrow 0 = \hat{P}_j(D)(v_1 + \ldots + v_r) = \hat{P}_j(0)(v_1 + \ldots + v_r) = \hat{P}_j(D) v_j$

$\hat{P}_j(D) : \mathrm{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j} \Rightarrow v_j = 0$ vale $\forall j \Rightarrow$ tesi $\square$

- $u'' - 4u = 0 \qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 4, \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2$

$u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$, $\quad u'' - 4u' + 4u = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

$\Updownarrow$

$u = (c_0 + c_1 x) e^{2x}$

- E se ho radici complesse?

Tutto quello che ho detto funziona su $C^\infty(I, \mathbb{C})$.

Seguendo il ragionamento esposto sopra trovo $\mathrm{Ker}(P(D))$ come spazio di $C^\infty(I, \mathbb{C})$; $\mathrm{Ker}(D-\lambda)^m = \{u = q(x) e^{\lambda x},\ q \in \mathbb{C}[x]\ \ gr(q) < m\}$

06-05-2022 Lezione 62 Prof. Carminati

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI

$\underbrace{u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u}_{P(D)u} = b(x)$ ← eq. non omogenea

↑ funzione continua

$P \in \mathbb{R}[x]$, $a_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n-1$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ polinomio caratteristico dell'equazione

- $P(D)u = 0$ eq omogenea per $b = 0$

$\mathrm{Ker}(P(D))$

$\left.\begin{array}{l} u'' - u = \sin x \\ (D^2 - I)u = \sin x \end{array}\right\}$ eq. non omogenea

ℝ $D : C^\infty(I, \mathbb{R}) \to C^\infty(I, \mathbb{R})$

ℂ $D : C^\infty(I, \mathbb{C}) \to C^\infty(I, \mathbb{C})$

ℂ $\mathrm{Ker}((D-\lambda)^m) = \{u = q(x) e^{\lambda x} \quad q \in \mathbb{C}[x];\ gr(q) < m\}$

$\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0 \quad e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$

$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$, $\ \mathrm{Ker}(P(D)) = \bigoplus \mathrm{Ker}((D-\lambda_i)^m)$

Come faccio a trovare una base reale nel caso ci siano radici complesse?

$\xi = \alpha + i\beta \quad P(\xi) = 0$, $z(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin \beta x)$ è sol. a val. compl., $z \in \mathrm{Ker}(D - \xi)$

$u = \mathrm{Re}(z) \qquad P(D)u = P(D)\mathrm{Re}\, z \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Re}(P(D)z) = 0$

linearità di $P(D)$ + $P \in \mathbb{R}[x]$

$u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ è soluzione di $P(D)u = 0$ $\quad u \notin \mathrm{Ker}(D-\xi)$

$u \in \mathrm{Ker}(D-\xi) \oplus \mathrm{Ker}(D-\bar{\xi})$

$$[\mathrm{Ker}(D-\xi)^m \oplus \mathrm{Ker}(D-\bar{\xi})^m] \cap C^\infty(I,\mathbb{R}) =$$

$$= \{ u = q_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + q_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \ , \ q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x] \ , \ gr(q_i) < m \}$$

Es: $u'' + u = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \qquad \xi = \pm i \qquad u(x) = a\cos x + b\sin x$

METODO DI SOMIGLIANZA (per EQ. DIFF. A C.C.)

$P \in \mathbb{R}[x]$, $P(D)u = b$ (N) con $b \in \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell$ ($\ell :=$ moltepl. di μ ↳ esp+1 $\quad \mu :=$ radice ↳ esponente di e)

CASO NON RISONANTE

Prop: a) Se $P(\mu) \neq 0$ allora $\exists!$ soluzione di (N) della forma

$$u(x) = q(x)e^{\mu x} \quad \text{con } gr(q) < \ell$$

b) Se $P(\mu) = 0$ allora $\exists!$ soluzione di (N) della forma

$$x^m q(x) e^{\mu x} \quad \text{con } gr(q) < \ell \qquad m = \ell - 1$$

- $u'' + 9u = x^1 e^{2x}$, $\quad \mu = 2$, $\ell = 1+1 = 2$ $\quad P(\lambda) = \lambda^2 + 9 \quad P(2) = 13 \neq 0$

cerco una soluzione $\quad u(x) = (a + bx)e^{2x}$

$$u'(x) = e^{2x}(b + 2a + 2bx)$$

$$u''(x) = e^{2x}(2b + 2b + 4a + 4bx)$$

$$u'' + 9u = e^{2x}(4b + 4a + 4bx + 9a + 9bx) \overset{?}{=} xe^{2x}$$

$$4a + 4b + 9a = 0 \qquad 13b = 1 \qquad b = \frac{1}{13} \qquad a = -\frac{4}{13^2}$$

Dim: a) Se $\lambda \neq \mu \Rightarrow (D-\lambda) : \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell$

Se λ_i è radice di P $\quad (D-\lambda_i)^{m_i}$ è autom. di $\mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell$

$\Rightarrow P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1} \dots (D-\lambda_r)^{m_r}$ è autom. di $\mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell$

$P(D) : \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell$ è surgettivo

Se $b \in \mathrm{Ker}(D-\lambda)^\ell \quad \exists! u \in \mathrm{Ker}(D-\lambda)^\ell : P(D)u = b$ $\square$

(b) $P(\mu) = 0$ cioè $\mu = \lambda_i$ per qualche i

$P(D) = (D-\mu)^m \hat{P}(D) \qquad \hat{P}(\mu) \neq 0 \qquad X : u(x) \longrightarrow x\,u(x)$

$P(D) : X^m \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell \qquad P(D) = \hat{P}(D)(D-\mu)^m$

$$X^m \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow[\sim]{(D-\mu)^m} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow[\sim]{\hat{P}(D)} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$$

e si conclude come nel caso precedente.

Attenzione: Nel caso b sia del tipo $q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, $q(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x$

(NR) $u''+u'+u = \sin x$ $\quad P(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$, $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ $\quad \mu=i$, $P(i)=i\neq 0$

$\mu(x) = a\cos x + b\sin x$

$\mu'(x) = -a\sin x + b\cos x$

$\mu''(x) = -a\cos x - b\sin x$ $\quad \oplus$

$u''+u'+u = -a\sin x + b\cos x \overset{?}{=} \sin x \Rightarrow a=-1,\ b=0 \Rightarrow \mu(x) = -\cos x$

Metodo alternativo: Considero l'equazione $z''+z'+z = e^{ix}$ (NC) su $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$z(x) = ce^{ix}$ con $c\in\mathbb{C}$

$z'(x) = ice^{ix}$

$z''(x) = -ce^{ix}$

$\Rightarrow z''+z'+z = ice^{ix} \overset{?}{=} e^{ix}$, $\overset{c=-i}{\ }$ $z=-ie^{ix}$ è soluzione di (NC) $\Rightarrow \operatorname{Im}(-ie^{ix})$ è sol di (NR)

$-ie^{ix} = (-i\cos x \pm \sin x)$, $\operatorname{Im}(-ie^{ix}) = -\cos x$

(N) $u''+2u'+5u = \underset{\operatorname{Im} e^{(1+2i)x}}{\underset{\uparrow}{e^x \sin 2x}}$ ← Trovare tutte le soluzione di questa equazione

$P(D)u = 6$

$P(\lambda) = \lambda^2+2\lambda+5$

$\lambda^2+2\lambda+5=0$

$\lambda_\pm = -1 \pm\sqrt{1-5} = \begin{cases} -1+2i \\ -1-2i \end{cases}$ $\qquad e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$

$\operatorname{Ker} P(D) = \{ e^{-x}(a\cos 2x + b\sin 2x) \}$ soluzione dell'omogenea

Cerco soluzioni di (N) della forma $u(x) = Ae^x\sin 2x + Be^x\cos 2x$

Es: Finire i conti per casa

Es*: Trovare tutte le soluzioni nel caso $b=e^{-x}\sin 2x$, $u''+2u'+5u = e^{-x}\sin 2x$

Es: Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni omogenee : $u'''-2u''-3u'=0$

- Trovare tutte le soluzioni di $\underbrace{u'''-2u''+u'-2u}_{P(D)u} = \sin x + x^2e^x$

$P(D)u_1 = \sin x$

$P(D)u_2 = x^2 e^x$

$P(D)(u_1 + u_2) = \sin x + x^2 e^x$

<u>METODO DI VARIAZIONI DELLE COSTANTI</u> (per eq. diff. del II ordine)

$Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u$

$Lu = b$

Suppongo di avere w_1, w_2 soluzioni linearmente indipendenti di $Lw = 0$

Cerco una soluzione $u(x) = c_1(x)w_1(x) + c_2(x)w_2(x)$ dove c_1, c_2

funzioni incognite determinabili con <u>una</u> integrazione

$u'(x) = c_1'(x)w_1(x) + c_2'(x)w_2(x) + c_1 w_1' + c_2 w_2'$

$u''(x) = c_1' w_1' + c_2' w_2' + c_1 w_1'' + c_2 w_2''$

$Lu = b \iff c_1(\underbrace{Lw_1}_{0}) + c_2(\underbrace{Lw_2}_{0}) + c_1' w_1' + c_2' w_2' = b$

$$\begin{cases} c_1' w_1 + c_2' w_2 = 0 \\ c_1' w_1' + c_2' w_2' = b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

<u>Es_1</u>: Verificare che se w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti allora la matrice è sempre invertibile.

<u>Es_2</u>: Verificare che, detto $\Delta(x)$ il determinante della matrice, vale $\Delta' = -a(x)\Delta$

dove $\Delta = w_1 w_2' - w_1' w_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} w_2' & -w_2 \\ -w_1' & w_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} c_1' = -\frac{1}{\Delta} w_2 b \\ c_2' = \frac{1}{\Delta} w_1 b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ricavo c_1 e c_2 mediante integrazione, sono definite a meno di costanti

<u>Es/esercizio</u>: $(*)$ $u'' - u = b(x)$ con $\lim_{|x| \to +\infty} b(x) = 0$

a) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione $(*)$

b) Mostrare che $\exists!$ sol. di $(*)$ tc $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$

$u'' - u = 0 \qquad w_1 = e^{-x} \qquad w_2 = e^x$

Cerco una soluzione della forma $u(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^x$

$$\begin{cases} c_1' = -\frac{1}{2}e^{x}\,b(x) \\ c_2' = \frac{1}{2}e^{-x}\,b(x) \end{cases}$$

$$w_1' = -e^{-x} \qquad w_2' = e^{x}$$

$$\Delta = w_1 w_2' - w_1' w_2 = 2$$

$$c_1(x) = k_1 - \frac{1}{2}\int_0^x e^t\, b(t)\,dt \quad , \quad c_2(x) = k_2 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\, b(t)\,dt$$

$$u(x) = \underbrace{e^{-x}\left(k_1 - \frac{1}{2}\int_0^x e^t\, b(t)\,dt\right)}_{A(x)} + \underbrace{e^{x}\left(k_2 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\, b(t)\,dt\right)}_{B(x)}$$

Se $k_1 = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^t\, b(t)\,dt$, $k_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\, b(t)\,dt$

Ottengo che $\lim_{|x|\to+\infty} A(x) = \lim_{|x|\to+\infty} B(x) = 0$ finire per casa

$$A(x) = -\frac{e^{-x}}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^t\, b(t) + \int_0^x e^t\, b(t)\right) = -\frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^t\, b(t)$$

26 - 05 - 2022 Lezione 63 Prof. Novaga e Carminati

Seconda prova in itinere.

Esercizio 1. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione con n zeri distinti.

(1) Mostrare che f' ha almeno $n-1$ zeri distinti.

(2) Mostrare che la funzione $f_c = f' + cf$ ha almeno $n-1$ zeri distinti, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Discutere la convergenza dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\beta}{(1+t^2)^2} \left[\sin\left(\frac{1}{1+|t|^{4\alpha}}\right)\right]^2 \left[\cos\left(e^{-|t|}\right)\right]^{2\alpha-1} \mathrm{d}t,$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcolare l'integrale quando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Esercizio 3. Al variare del parametro $\lambda \in (-1,1)$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 + \lambda \cos u \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

(1) Dire se il problema ammette un'unica soluzione e se è definita globalmente.

(2) Mostrare che la soluzione è dispari e tracciarne un grafico qualitativo.

(3) Calcolare l'espressione analitica di u in un intorno dell'origine.

(4) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x}$.