



Dipartimento
di Matematica
Università di Pisa

APPUNTI DEL CORSO DI **ANALISI MATEMATICA II**

A cura di Chiara Di Sano
c.disano1@studenti.unipi.it

Con il contributo di Alessandra Cattafi e Arianna Misuraca

Rielaborazione delle lezioni dei prof.
M. Novaga
C. Carminati
A.A. 2022-2023

RIPASSO DI ANALISI 1SPAZI METRICI:

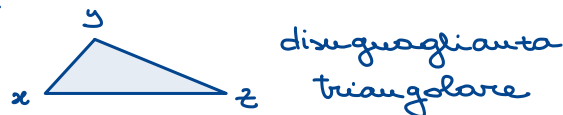
(X, d) è uno spazio metrico se X è un insieme e $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

è una distanza, cioè:

○ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y$

○ $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$ simmetria

○ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z$



Oss: $Y \subseteq X \Rightarrow (Y, d|_Y)$ è uno sp. metrico

Es: $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ distanza euclidea

Una classe importante di spazi metrici sono gli spazi normati:

$(E, \|\cdot\|)$, E sp. vettoriale (su \mathbb{R}), $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, +\infty)$ è una norma su E

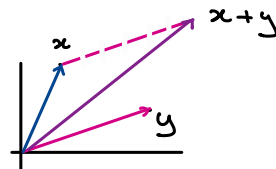
$(E, d_{\|\cdot\|})$ è uno spazio metrico, $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y$

$\|\cdot\|$ è una norma su E se

○ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x$

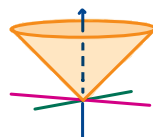
○ $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

○ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "disuguaglianza triangolare"



Es: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ $p \geq 1$, $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$ $p=2$: norma euclidea
 $p < 1$ non è più una norma

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$



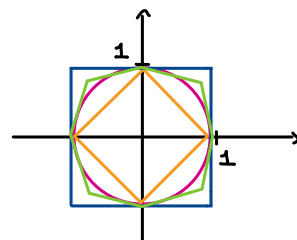
$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oss: Il grafico di una norma è un cono.

La subadditività della norma è equivalente a chiedere

la convessità della funzione conica

- 1
- 2
- > 2
- ∞



Es: $E = C([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua} \}$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} & p \geq 1 \\ \max_{x \in [a, b]} |f(x)| & p = +\infty \end{cases}$$

TOPOLOGIA (X, d) sp. metrico, $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ ($r > 0$)

$A \subseteq X$ è aperto se $\forall x \in A \exists r$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$

$C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C$ è aperto

Una topologia su X è $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ aperto}\}$

PROPRIETÀ

• \emptyset, X sono aperti e chiusi

• $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

intersezione finita di aperti

• $\{A_i\}_{i \in I}, A_i \text{ aperti} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

unione infinita di aperti

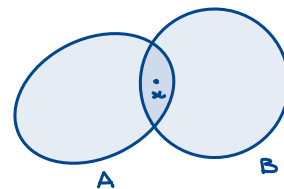
• C, B chiusi $\Rightarrow C \cup B$ chiuso

unione finita di chiusi

• C_i chiuso $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_i C_i$ chiuso

intersezione infinita di chiusi

sono chiusi



Oss: A_i aperti $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i$ è aperta ma in generale $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ non è aperta

Es: $\bigcap_n B_{1+\frac{1}{n}}(0) = \overline{B_1(0)} = \{x \text{ t.c. } d(x, 0) \leq 1\}$

Def: $x \in X, U \subseteq X$ è un intorno di x se esiste A aperto t.c. $x \in A \subseteq U$, equivalentemente

$\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq U$

SUCCESIONI CONVERGENTI

$\{x_n\}_n$ succ. in $X, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ o $\lim_n x_n = x$ se

• $\lim_n d(x, x_n) = 0$

o equiv.

• $\forall U$ intorno di $x \exists n_0$ t.c. $x_n \in U \forall n > n_0$

o equiv.

• $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ t.c. $x_n \in B_\varepsilon(x) \forall n > n_\varepsilon$

Prop: C chiuso $\Leftrightarrow \forall x_n \in C$ con $x_n \rightarrow x \in X$ si ha $x \in C$

Dim: (\Rightarrow) Per assurdo $x \in A = X \setminus C$ aperto $\Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$ ma $x_n \in B_r(x)$

defin. in $n \Rightarrow x_n \notin C$ definitivamente in n . Assurdo

(\Leftarrow) Per assurdo supponiamo che $A = X \setminus C$ non è aperto $\Rightarrow \exists x \in A$ tale che $\forall r > 0$

$B_r(x) \cap C \neq \emptyset$, scelgo $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C$ è una succ. t.c. $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \in C$ ∇

INSIEMI COMPATTI

Def: $C \subseteq X$ è compatto (per successioni) se $\forall x_n \in C$ succ. $\exists x_{n_k}$ sottosucc.

ed $\exists x \in C$ t.c. $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$

Def: $C \subseteq X$ è limitato se $C \subseteq B_r(x)$ per qualche r e x

Prop: C compatto $\Rightarrow C$ chiuso e limitato

Dim: ① Chiuso: $x_n \in C$, $x_n \rightarrow x \in X$. $\exists n_k$ t.c. $x_{n_k} \rightarrow y \in C$, ma $y = x \Rightarrow x \in C$

② limitato: Se C non fosse limitato $\Rightarrow \forall n \exists x_n \in C \setminus B_n(x)$. $\exists n_k$ ^{per compattezza} t.c. $x_{n_k} \rightarrow y \in C$

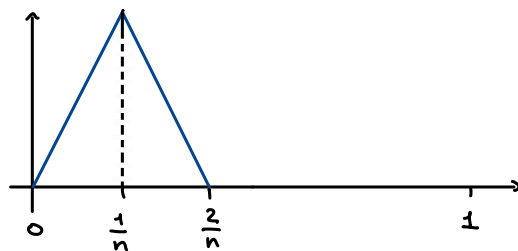
$+\infty \leftarrow_k d(x_{n_k}, x) \leq d(x, y) + d(x_{n_k}, y) \xrightarrow{k} d(x, y) \in \mathbb{R}$ Assurdo

Oss: Non vale il viceversa: esistono chiusi e limitati che non sono compatti ($X \neq \mathbb{R}^n$)

$C = \overline{B_1(0)}$ in uno sp. normato di dim. ∞ . $X = C([0, 1])$, $\|f\| = \max_x |f(x)|$

$\overline{B_1} = \{f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \text{ continue}\}$

$$\partial B_1 \ni f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2-nx & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$



$f_n(x) \xrightarrow{n} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ ma $\|f_n - 0\| = 1 \quad \forall n$ $f_n \not\rightarrow 0$ in (X, d)

$\overline{B_1}$ e ∂B_1 sono chiusi e limitati ma non compatti

Prop: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato è compatto

Dim: Segue dal Teo di Bolzano - Weierstrass in \mathbb{R}^n :

x_n è limitata $\Rightarrow \exists x_{n_k}$ cov. in \mathbb{R}^n . Se x_n sta in C chiuso $\Rightarrow \lim_k x_{n_k} \in C$

COMPLETEZZA

Def: x_n succ. in X è di Cauchy se $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ t.c. $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$

Def: (X, d) si dice completo se $\forall x_n$ succ. di Cauchy $\exists x \in X$ t.c. $x_n \xrightarrow{n} x$

Es: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è completo (perché \mathbb{R} è completo \Rightarrow tutte le componenti delle suc. di Cauchy convergono)

$(\mathbb{Q}^n, \|\cdot\|)$ non è completo

Def: $(X, \|\cdot\|)$ sp. normato completo si dice spazio di Banach

Es: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ con $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma, è sempre completo

Tutte le norme su \mathbb{R}^n sono equivalenti a $|\cdot|$, cioè $\exists m < M : m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \forall x$,
↳ DA DIM.

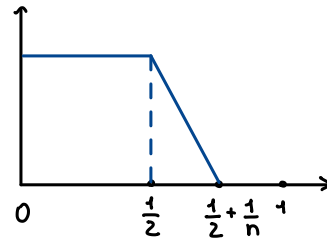
Quindi x_n di Cauchy per $\|x\| \Leftrightarrow$ lo è per $|\cdot|$.

Es: $X = C([a, b])$

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach (per esercizio)

$(X, \|\cdot\|_p)$ non è completo

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{n}{2} - nx & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$



f_n è di Cauchy ma $f_n \rightarrow \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > 0 \end{cases} \notin X$

Prop: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ $p \geq 1$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ sono norme su \mathbb{R}^n

Dim: $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0 \ \forall i \Leftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_i |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p$

Va visto che $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. (dis. di Minkowski)

$p = \infty$: $\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$p \in [1, +\infty)$ usiamo il:

Lemma (disuguaglianza di Hölder):

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Disuguaglianza di Young: $a, b \geq 0$, $a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Dim (Hölder): Mostriamo che $\sum |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ (*)

Dividendo per $\|x\|_p \cdot \|y\|_q$: $\sum_i \underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|_p}}_a \cdot \underbrace{\frac{|y_i|}{\|y\|_q}}_b \leq \frac{1}{p} \underbrace{\frac{\sum |x_i|^p}{\|x\|_p^p}}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\frac{\sum |y_i|^q}{\|y\|_q^q}}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (*)$

Torniamo alla prop:

Consideriamo $\|x+y\|_p^p = \sum_i |x_i + y_i|^p = \sum_i |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$

disuguaglianza triangolare $\rightarrow \leq \sum_i (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$

$\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_i |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \rightarrow \left(\sum_i |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$

HÖLDER

f continua su $[a, b]$

$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p-1} \Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

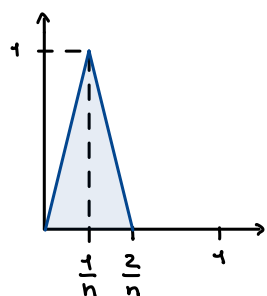
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

Prop: $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach, cioè f_n di Cauchy $\Rightarrow \exists f \in C([a, b])$
 \hookrightarrow normato + completo

tale che $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ [si dice che f_n converge uniformemente a f]

Oss: la convergenza uniforme è più restrittiva della convergenza puntuale



$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

Dim: f_n di Cauchy in $C([a, b])$, cioè $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ t.c. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$
 $\forall n, m > n_\varepsilon$

$\forall x \in [a, b]$, $f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ converge (\mathbb{R} compl.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

Dobbiamo verificare che $f \in C([a, b])$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $n > n_\varepsilon$.

Dato che f_n è unif. continua, $\exists \delta$ t.c. $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon \quad \text{se } |x - y| < \delta$$

$\Rightarrow f$ è unif. continua

FUNZIONI CONTINUE

Def: (X, d) , (Y, \tilde{d}) sp. metrici, $f: X \rightarrow Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $x_n \xrightarrow{n} x_0$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0)$ equiv. se $\forall U$ intorno di $f(x_0) \exists U$ int. di x_0 t.c. $f(x_0) \in U$

TEOREMI

(X, d) sp. metrico compatto, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua \Rightarrow

1) f è unif. continua (HEINE-CANTOR)

2) f ammette max e min (WEIERSTRASS)

Prop: (X, d) sp. metrico $\Rightarrow d(x, y)$ è continua in x e in y .

Infatti se $x_n \rightarrow x$: $0 \leftarrow^n -d(x_n, x) \leq d(x, y) - d(x_n, y) \leq d(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$

Prop: $\|\cdot\|$ norma su $\mathbb{R}^n \Rightarrow \|\cdot\|$ è equiv. a $|\cdot|$ (NORMA EUCLIDEA),

cioè $\exists m, M > 0$ t.c. $m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dim: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ $m = \min_{x \in S^{n-1}} \|x\|$ $M = \max_{x \in S^{n-1}} \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \Rightarrow m \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq M \Rightarrow m|x| \leq \|x\| \leq M|x|$$

Oss: In particolare tutti gli spazi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ hanno la stessa topologia e sono tutti completi, cioè spazi di Banach

Def: $f: X \rightarrow Y$ è L -Lipschitziana ($L \geq 0$) se $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Oss: $f \text{ Lip} \Rightarrow f$ è unif. continua

CONTRAZIONI: $f: X \rightarrow X$ L -Lip. con $L < 1$ si chiama contrazione

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI (BANACH-CACCIOPOLI)

(X, d) sp. metrico completo, $f: X \rightarrow X$ contrazione $\Rightarrow \exists! \bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$ pt. fisso di f

Inoltre $\forall x_0 \in X$ la succ. $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a \bar{x}

Come sono fatti i compatti in $C([a, b])$?

Teo (ASCOLI - ARZELÀ):

$(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, sia $f_n \in C(K)$ successione (di f. continue) t.c.

① $\exists M > 0 : \|f_n\|_\infty \leq M \quad \forall n$ \rightarrow equis. \Leftrightarrow tutti i suoi elementi hanno medesimo M dC

② f_n equicontinua, cioè $\forall \varepsilon \exists \delta$ tale che $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall |x - y| < \delta, \quad \forall n$

Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} convergente uniformemente

Dim: Prendiamo una succ $x_i \in K$ densa in K , cioè $\forall \varepsilon$ e $\forall x \in K, \exists x_i \in B_\varepsilon(x) \cap K$

$f_n(x_i)$ è una succ. limitata in \mathbb{R} . Per BW \exists sottosucc. $f_{n_k^{(1)}}$ t.c. $f_{n_k^{(1)}}(x_1) \xrightarrow{k} y_1 \in \mathbb{R}$

\exists sottosucc. $f_{n_k^{(2)}}$ t.c. $f_{n_k^{(2)}}(x_1) \rightarrow y_1, f_{n_k^{(2)}}(x_2) \rightarrow y_2$

Per procedimento diagonale la sottosucc. $f_{n_k^{(k)}}(x_i) \rightarrow y_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$

Chiamo $f_k = f_{n_k^{(k)}}$. Mostriamo che f_k è di Cauchy. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ dato da ② e

sia $x_1 \dots x_n$ un sottoinsieme dell'insieme denso t.c. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\delta(x_i)$, questo si può fare perché

K è compatto e $K \subseteq \bigcup_i B_\delta(x_i)$.

Vogliamo mostrare che $\exists K_\varepsilon$ t.c. $|f_k(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K, \forall k, j > K_\varepsilon$

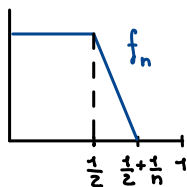
Scelgo K_ε t.c. $|f_k(x_i) - f_j(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall k, j > K_\varepsilon$

Per $x \in K \exists x_i$ t.c. $|x - x_i| < \delta$, quindi:

$$|f_k(x) - f_j(x)| \leq |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \stackrel{②}{\leq} 3\varepsilon \quad \forall k, j > K_\varepsilon$$

$\Rightarrow f_k$ converge in $C(K)$.

Oss: f_k equilineare non basta



Oss: f_k equilineare e equilipshitziana basta cioè $|f_k(x) - f_k(y)| \leq L|x - y|$

Si possono caratterizzare i compatti di $C(K)$:

Teorema: $E \subseteq C(K)$ chiuso

E compatto \Leftrightarrow tutte le funzioni $f \in E$ sono equilineari ed equicontinue

Ricevimento studenti: mercoledì ore 16

Norme p in \mathbb{R}^n

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq p \leq \infty \Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ se } p < +\infty$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Oss: $x \in \mathbb{R}^n$ finito, $p \mapsto \|x\|_p$ è deb. decrescente, in particolare $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

Dim: Mostro che se $\|x\|_p = 1$ e $p' > p$ allora $\|x\|_{p'} \leq 1$

$$\|x\|_{p'} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p'} \right)^{1/p'} = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{p'/p} \right)^{1/p'} \stackrel{*}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p'} \leq 1$$

↳ Quando è un $< ?$

Vale l' \Rightarrow ho un'unica componente non nulla ($\Rightarrow x \in \mathbb{R}$)

$$(*) \|x\|_p \leq 1 \Rightarrow \sum |x_i|^p \leq 1 \Rightarrow p'/p > 1$$

Prop: $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$
↳ norma euclidea

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\text{Dim: } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum x_i \cdot \text{sgn } x_i = x \cdot \xi \quad \xi = \text{sgn}(x_i)$$

$$x \cdot \xi \leq \|x\|_2 \cdot \|\xi\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

↑ Cauchy-Schwartz \leftrightarrow Hölder con $p=q=2$

Queste disuguaglianze hanno effetto su come sono messe le palle

$$B_p(x_0, r) \doteq \{x : \|x - x_0\|_p < r\}$$

$$B_1(x_0, r) \subset B_p(x_0, r) \subset B_\infty(x_0, r)$$

$$B_\infty(x_0, r/\sqrt{n}) \subset B_2(x_0, r) \subset B_1(x_0, \sqrt{n} r)$$

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_i)_{i=1}^\infty : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < +\infty\} \text{ spazio di successioni}$$

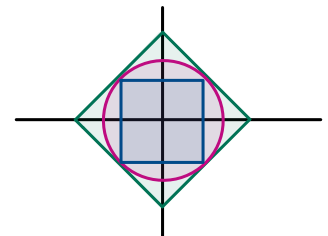
$$\|x\|_p \doteq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad (\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p) \text{ è spazio NORMATO e di BANACH}$$

Oss: Cambiando p cambia anche lo spazio

$$\text{es: } x = (x_i)_{i=1}^\infty \quad x_i = \frac{1}{i} \quad x \in \ell^p(\mathbb{N}) \Leftrightarrow p > 1$$

Es: Dati $p < p'$ trovare un elemento che sta in $\ell^{p'}$ ma non in ℓ^p .

Graficamente:



• $\|\cdot\|_p$ è una norma. Verifico solo la dis. triangolare: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

Considero $\pi_n: l^p(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

$\|\pi_n(x+y)\|_p \leq \|\pi_n x\|_p + \|\pi_n y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, passando al sup su $n \Rightarrow$ tesi

• $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$, $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ succ. in l^p

Se $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy per $\|\cdot\|_p$ allora converge per $\|\cdot\|_p$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: n, m > N, \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

\Rightarrow per ogni componente j $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, $x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}_j$

Devo verificare $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: n, m > N \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$; continua a valere anche per K fissato anziché $\infty \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^K |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$

passando al limite

passando al sup su K

Oss: $p \mapsto \|x\|_p$ è deb. decrescente, $x \in l^p(\mathbb{N}) \Rightarrow x \in l^{p'}(\mathbb{N}) \quad \forall p' \geq p$

detto di $l^p(\mathbb{N}) \hookrightarrow l^{p'}(\mathbb{N})$ è un'applicazione continua
 $\hookrightarrow \|\cdot\|_p \quad \hookrightarrow \|\cdot\|_{p'}$

Es: 1) Mostrare che $l^1(\mathbb{N})$ come sottospazio è denso in ogni $l^p(\mathbb{N})$ con $\|\cdot\|_p$

2) $l^1(\mathbb{N})$ non è denso in $l^{\infty}(\mathbb{N})$

3) Chi è la chiusura di $l^1(\mathbb{N})$ in $l^{\infty}(\mathbb{N})$?

Distanza da un insieme

$(X, d) \quad f: X \rightarrow \mathbb{R}$

f è L-Lip $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |f(x) - f(y)| \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad *$

Oss 1: f è L-lip $\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + L d(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad **$

(\Rightarrow) ovvio dalla def.

(\Leftarrow) se $(**)$ vale $\forall x, y$ allora $f(y) \leq f(x) + L d(y, x) \quad (***)$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - f(y) \leq L d(x, y) \text{ per } (**) \\ f(y) - f(x) \leq L d(x, y) \text{ per } (***) \end{array} \right\} \Rightarrow (*)$$

Lemma: $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha \in A, f_\alpha \text{ L-lip. } \forall \alpha \in A$ con la stessa L!

Definisco $f(x) := \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$. Se $\exists x_0 \in X: f(x_0) > -\infty \Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è L-lip.

• $(-\infty <) f(x_0) \leq f_\alpha(x_0) \leq f_\alpha(y) + Ld(x_0, y)$

$f(x_0) - Ld(x_0, y) \leq f_\alpha(y) \xrightarrow{\inf_{\alpha \in A}} f(x_0) - Ld(x_0, y) \leq f(y) \quad \forall \alpha, \forall x, y$

f assume solo valori finiti.

$f(x) \leq f_\alpha(x) \leq f_\alpha(y) + Ld(x, y)$

Passando all'inf su $\alpha: f(x) \leq f(y) + Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X \xrightarrow{\text{oss}} f \text{ è L-lip. } \square$

• (X, d) sp. metrico $A \subseteq X, d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ $x \mapsto d(x, A)$ è 1-Lip

Dim: $f_a(x) = d(x, a) \quad f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} f_a(x)$

$f_a(x) \geq 0$

f_a è 1-Lip infatti

$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \rightsquigarrow d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$

$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \rightsquigarrow d(y, a) - d(x, a) \leq d(x, y)$

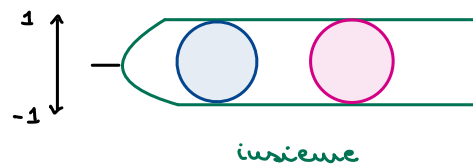
$\Rightarrow |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) \xrightarrow{\text{LEMMA}} f \text{ è 1-lip.}$

Oss: $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ (chiusura di A)

Es: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato mostrare che Ω contiene una palla (euclidea)

di raggio massimo. Oss: la limitatezza è necessaria

$\varphi(x) := d(x, \Omega^c) \quad \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \Omega$



$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ considero $r_0 \doteq \max_{x \in \Omega} \varphi(x)$

$\bar{\Omega}$ è chiuso, limitato $\subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ è compatto, φ è continua

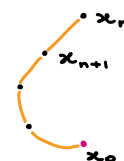
1) $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$

2) $\forall r > r_0 \quad \forall y_0 \quad B_r(y_0) \cap \Omega^c \neq \emptyset$

1) $x \in \Omega^c \Rightarrow d(x_0, x) \geq d(x_0, \Omega^c) = r_0$, quindi se

$d(x_0, x) < r_0 \Rightarrow x \notin \Omega^c$ cioè $x \in \Omega, B(x_0, r_0)$ ovvero $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$

2) Se $B_r(y_0) \subset \Omega$ con $r > r_0 \Rightarrow d(y_0, \Omega^c) \geq r > r_0$, assurdo

LIMITI E FUNZIONI CONTINUE IN \mathbb{R}^n Prop: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $x_0 \in A$ f è continua in $x_0 \Leftrightarrow f \circ \gamma(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $t=0$ per ogni curva (continua) $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma(0) = x_0$.Dim: (\Rightarrow) f continua $\Rightarrow f \circ \gamma$ continua $\forall \gamma$ (comp. di f. continue)(\Leftarrow) Se f non è continua, $\exists x_n \rightarrow x_0$ t.c. $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ (\nexists lim o è $\neq x_0$) $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva t.c. $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(t_n) = x_n$ con $t_n \searrow 0$ $f \circ \gamma(t_n) \stackrel{\text{hp}}{=} f(x_n) \not\rightarrow f(x_0) = f \circ \gamma(0) \Rightarrow f \circ \gamma$ non è continua \nexists Oss: Per vedere che f non è continua "basta" trovare γ t.c. $f \circ \gamma$ non è continuaTipicamente prendo le rette: $\gamma(t) = t \cdot v$, $f \circ \gamma(t) = f(t \cdot v)$

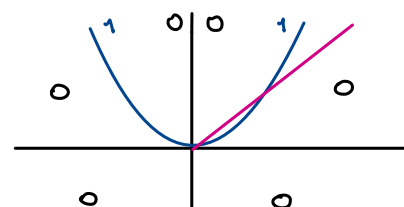
$$\text{Es: } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mi chiedo: $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$?

$$f(0,y) = f(x,0) = 0 \quad \forall x, \forall y$$

Prendo $\gamma(t) = (t,t)$, allora $f \circ \gamma(t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \quad \forall t \Rightarrow 0 = f \circ \gamma(0) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \nexists$ limite perché non c'è unicità del limite, il quale deve essere $f(x_0)$ in tutta la curva.

Quindi la funzione non è continua.

Oss: $\lim_t f(tv) = f(0) \quad \forall v \neq 0 \nRightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
tutte le semiretteEs: 1) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \quad f(tv) = 0, t \ll 1$ 

$$2) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{sugli assi fa } 0, \text{ per essere continua deve fare } 0$$

Se la prendo sulla parabola $f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 0$ non ha limite 0 $\Rightarrow f$ non è cont.Però se la guardo sulla retta $f(x, \lambda x)$ (metto λx al posto di y)

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \frac{x}{\lambda} + o(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Come faccio a vedere che f è continua?

ad es. lineare

Si può cercare $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $g(0)=0$, $g \geq 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq g(|x - x_0|) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$
 \downarrow
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow |x|=0$

Esempi: $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^2}$ $\alpha, \beta > 0$. Per quali $\alpha, \beta \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$?

Concludiamo g t.c. $f(x,y) \leq g(\sqrt{x^2 + y^2})$, $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x,y) \leq \sqrt{x^2 + y^2}^{\alpha + \beta - 2}$

$\alpha + \beta > 2 \Rightarrow f$ è continua. D'altro canto $f(x,x) = |x|^{\alpha + \beta - 2} \not\rightarrow 0$ se $\alpha + \beta \leq 2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{|x|^\alpha + |y|^\beta} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

$\Phi(x,y) = (X(x,y), Y(x,y)) \quad \Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cont., $\Phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cont. (Φ omeomorfismo)

$$\begin{cases} X = \operatorname{sgn}(x) |x|^{\alpha/2} \\ Y = \operatorname{sgn}(y) |y|^{\beta/2} \end{cases}$$

f continua in $(0,0) \Leftrightarrow f \circ \Phi^{-1}(X,Y)$ è continua in $(0,0)$

$$f \circ \Phi^{-1}(X,Y) = \frac{|X|^{\alpha/2} \cdot |Y|^{\beta/2}}{X^2 + Y^2} \xrightarrow{(X,Y) \rightarrow (0,0)} 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} > 2, \quad \alpha + \beta - \alpha\beta > 0$$

CALCOLO DIFFERENZIALE:

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $x_0 \in A$

La derivata parziale i° è la derivata di f nella variabile x_i , cioè è il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} = f_{x_i}(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad D_{x_i} f(x_0)$$

Se \exists tutte le derivate parziali il vettore $\nabla f(x_0) = \left(\dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \dots \right) \in \mathbb{R}^n$ si dice gradiente di f in x_0

Dato $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t v) - f(x_0)}{t} = D_v f(x_0)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ si dice

derivata direzionale di f lungo v .

Prop (FERMAT): Se x_0 è di max/min locale per $f \Rightarrow t=0$ è max/min locale per $f(x_0 + t v) \forall v$

\Rightarrow se $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ esiste, si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$ in particolare $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ (se esiste)

Def: f è differenziabile in $x_0 \in A$ se $\exists v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x) = f(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$

Oss: Stiamo dicendo che $f(x)$ è approssimata, a meno di un $o(|x - x_0|)$ dall'applicazione affine $x \mapsto f(x_0) + v \cdot (x - x_0)$.

Prop: f differenziabile in $x_0 \Rightarrow \exists \nabla f(x_0)$ e si ha $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$

Dim: Sappiamo che $f(x) = f(x_0) + v(x-x_0) + o(|x-x_0|)$ fissiamo i e prendiamo $x = x_0 + te_i$

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \cancel{t} v_i + o(\cancel{t}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Oss: lo stesso conto con $x = x_0 + tw$ ci dà che $\frac{\partial f}{\partial w} = \nabla f(x_0) \cdot w$

In particolare il massimo: $\max_{w: |w|=1} \frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = |\nabla f(x_0)|$ ed è assunto nella direzione

$$w = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \quad \text{cioè } \nabla f(x_0) \text{ individua la direzione di "massima pendenza" di } f.$$

Teo (DIFF. TOTALE): $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, suppongo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $\forall i$ e $\forall x \in B_r(x_0)$ e che

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sia continua in $x_0 \forall i \Rightarrow f$ è differenziabile in x_0

Dim: ($n=2$) $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) =$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{LAGRANGE}}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y-y_0)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1) \right] (x-x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \right] (y-y_0) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

Quindi f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Oss: le stesse definizioni valgono per $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$

f continua in $x_0 \Leftrightarrow f_i$ continua in $x_0 \forall i$

f differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f_i$ differenziabile in $x_0 \forall i$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

Dove $Df(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$ si dice **matrice Jacobiana** di f in x_0 .

Oss: la def. è analoga in spazi di Banach:

$f: B_1 \rightarrow B_2$ B_i spazi di Banach

f è differenziabile in x_0 se $\exists L: B_1 \rightarrow B_2$ lineare e continua (!) tale che

$$f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

Distanza di Hausdorff

(X, d) spazio metrico, $A, B \subset X$ non vuoti e limitati

$$\partial(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\} \quad \text{distanza tra } A \text{ e } B \text{ (se sono chiusi)}$$

$$\partial(A, B) = \partial(A, \bar{B}) = \partial(\bar{A}, B) = \partial(\bar{A}, \bar{B})$$

$$\mathcal{F}(X) = \{ A \subseteq X : A \text{ chiuso, limitato, } A \neq \emptyset \} \rightarrow \text{è definita solo qui}$$

$\hookrightarrow \sup \emptyset = -\infty$

Prop: $(\mathcal{F}(X), \partial)$ è uno sp metrico (cioè ∂ è una distanza)

Dim: (1a) $\partial \geq 0$ (segue dalla def.)

(1b) $\partial(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ (\Leftarrow) ovvio

(\Rightarrow) $\partial(A, B) = 0 \Rightarrow \boxed{\sup_{x \in A} d(x, B) = 0} \text{ e } \boxed{\sup_{x \in B} d(x, A) = 0},$

• $x \in A \Rightarrow d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in \bar{B} = B \Rightarrow A \subseteq B = \bar{B}$

• analogamente $B \subseteq A \Rightarrow B = A$

(2) $\partial(A, B) = \partial(B, A)$ ovvio perché ∂ è simmetrica

(3) $\partial(A, C) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \sup_{x \in A} d(x, C) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon & \forall \varepsilon > 0 \quad (*) \\ \sup_{x \in C} d(x, A) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon & \forall \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Dimostriamo (*) l'altra è analoga (basta scambiare A con C). $\varepsilon > 0$ fissato.

$$x \in A \quad \exists b \in B : d(x, b) < d(x, B) + \varepsilon/2 \leq \partial(A, B) + \varepsilon/2$$

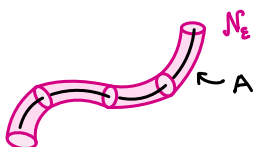
$$\exists c \in C : d(b, c) \leq \partial(B, C) + \varepsilon/2 \quad \text{come sopra}$$

$$\boxed{d(x, C) \leq d(x, c) \leq d(x, b) + d(b, c) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon}$$

\swarrow vale $\forall x \in A$ e quindi passa anche al sup \searrow

Def: $A \subset X$, $\mathcal{N}_\varepsilon(A) \doteq \{ x \in X : d(x, A) < \varepsilon \} = \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$ è detto intorno tubolare di A

Esempio:



se A è un "filo", $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ è un tubo

Proprietà: (0) $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ è aperto

$$(1) \mathcal{N}_\varepsilon(A \cup B) = \mathcal{N}_\varepsilon(A) \cup \mathcal{N}_\varepsilon(B)$$

$$(2) \overline{\mathcal{N}_\varepsilon(A)} \subset \underbrace{\{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}}_{\text{è chiuso} \Rightarrow \text{è il più piccolo chiuso che contiene } \mathcal{N}_\varepsilon(A)}$$

$\triangle \not\subsetneq$ non è detto siano =

$$(3) \mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\mathcal{N}_{\varepsilon_2}(A)) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(A) \quad \triangle \not\subsetneq \text{ non è detto siano =}$$

Prop: $\partial(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \text{ e } B \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A) \}$

$$\begin{aligned} \text{Dim: } \partial(A, B) &= \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\} = \\ &= \max \left\{ \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \}, \inf \{ \varepsilon > 0 : B \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A) \} \right\} \end{aligned}$$

Lemma: $d_0 =: \sup_{x \in A} d(x, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \} := \varepsilon_0$

La dimostrazione della prop è conseguenza del lemma

Dim: $[d_0 \geq \varepsilon_0] \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \quad d_0 \geq \varepsilon,$

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \quad A \not\subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \Rightarrow \exists a \in A : \varepsilon \leq d(a, B) \leq d_0 \quad \text{immediata}$$

$$[d_0 \leq \varepsilon_0] \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0 \quad d_0 \leq \varepsilon,$$

$$\varepsilon > \varepsilon_0 \quad A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \Rightarrow \forall a \in A \quad d(a, B) < \varepsilon \Rightarrow d_0 \leq \varepsilon \quad \leftarrow \text{passando al } \sup_{a \in A}$$

□

Molte proprietà della metrica di X vengono ereditate dalla metrica di $\mathfrak{F}(X)$

Teo (Ereditarietà per ∂): (X, d) sp. metrico

a) Se (X, d) è completo $\Rightarrow (\mathfrak{F}(X), \partial)$ è completo

b) Se (X, d) è totalmente limitato $\Rightarrow (\mathfrak{F}(X), \partial)$ è tot. lim.

c) Se (X, d) è compatto $\Rightarrow (\mathfrak{F}(X), \partial)$ è compatto

Def: X è totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1, \dots, x_m \text{ t.c. } X \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)}_{\varepsilon\text{-vet}} \quad (m < +\infty)$

Cor: $0 < \mu < 1$, $X = \mathbb{R}^n$ con metrica euclidea

$$S_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ contrazioni, } |S_\alpha(x) - S_\alpha(y)| \leq \mu |x - y| \quad 1 \leq \alpha \leq m$$

$$\Phi(A) = \bigcup_{\alpha=1}^m S_\alpha(A)$$

$$1) \Phi: \mathfrak{F}(X) \rightarrow \mathfrak{F}(X) \quad \partial(\Phi(A), \Phi(B)) \leq \mu \partial(A, B) \quad \Phi \text{ è una contrazione}$$

$$2) \exists! A_\infty \in \mathcal{F} \quad \Phi(A_\infty) = A_\infty$$

$$3) A_0 \in \mathcal{F} \quad \partial(\Phi^n(A_0), A_\infty) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Esempio: $X = \mathbb{R}$, $S_1(x) = \frac{x}{3}$, $S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, X_∞ è l'insieme di Cantor
 ↗ attrattore
 ↘ trasformazioni

Si chiamano sistemi di funzioni iterate.

Dim (Cor): 1) $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow S_d(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ sono compatti

Φ è contrattivo: $\delta > \partial(A, B) \Rightarrow \mu\delta > \partial(\Phi(A), \Phi(B))$
 (*)
 $\Phi(A) \subset \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(B))$ e $\Phi(B) \subset \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(A))$

(*) $\Rightarrow A \subset \mathcal{N}_\delta(B) \Rightarrow S_d(A) \subset \mathcal{N}_{\mu\delta}(S_d(B)) \Rightarrow 1 \leq d \leq m$ e si ha:

$$\Phi(A) = \bigcup_{1 \leq d \leq m} S_d(A) \subseteq \bigcup_{1 \leq d \leq m} \mathcal{N}_{\mu\delta}(S_d(B)) = \mathcal{N}_{\mu\delta}\left(\bigcup_d S_d(B)\right) = \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(B))$$

I punti (2) e (3) del cor. sono conseguenza del teorema delle contrazioni.

Lemma: (X, d) è sp. metrico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora:

$$1) \text{ Se } \exists n_k \nearrow \infty \text{ t.c. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

$$2) \text{ Se } \varepsilon_k \searrow 0 \text{ allora } \exists n_k \nearrow \infty \text{ t.c. } d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$$

Dim: 1) $\forall \varepsilon > 0 \exists N: d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > N$

$$\text{Se } n \geq N, \text{ scelgo } n_k > n > N, d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\hookrightarrow n_k: d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: n > N \quad d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

$$2) N_k := \min \{ N: d(x_n, x_m) < \varepsilon_k \quad \forall n, m \geq N \}$$

$$N_k \text{ deb. crescente} \quad n_k = N_k + k$$

$$n_{k+1} > n_k \geq N_k \quad d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$$

Dim (Teo (a)): $(\mathcal{F}(X), \partial)$ è completo (se (X, d) lo è)

$$A_n \text{ succ. di Cauchy per } \partial, \text{ SPG } \partial(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ se } k > n \quad \partial(A_n, A_k) < \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j} < 2^{-n+1}$$

$$A \doteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k} \quad \triangle! \text{ non è evidente che } A \neq \emptyset$$

$\partial(A_n, A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ da verificare

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad \partial(A_n, A) < \varepsilon$

Se $N: 2^{-N+1} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \quad \begin{cases} \sup_{x \in A_n} d(x, A) \leq 2^{-N+1} & (D1) \\ \sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq 2^{-N+1} & (D2) \end{cases}$

Oss: (D1) $\Rightarrow A_n \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A)$

(D2) $\Rightarrow A \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A_n)$

(D1) $x \in A_n$ fissato, $\exists \bar{x} \in A : d(x, \bar{x}) \leq 2^{-N+1}$ (voglio dim. questo)

$(x_k)_{k=n}^\infty$ def. per induzione: $x_n = x, \begin{cases} x_{k+1} \in A_{k+1} \\ d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k} \end{cases}$

$x_k \in A_k \quad d(x_k, A_{k+1}) \leq \partial(A_k, A_{k+1}) < 2^{-k} \Rightarrow x_{k+1} \in A_{k+1} : d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k}$

è possibile costruire (x_k) ed è di Cauchy

$\Rightarrow x_k \rightarrow \bar{x}$ perché lo sp. metrico è completo; inoltre $\bar{x} \in A$

D1

(D2) $\sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq 2^{-N+1}$ da dimostrare

$\sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq \sup_{\substack{x \in \bigcup_{k \geq m} A_k}} d(x, A_n), \quad m > n \quad (\text{SPG})$
 \rightarrow mettere la chiusura
 o no è uguale

$$\leq \sup_{k \geq m} \sup_{x \in A_k} d(x, A_n) \leq 2^{-n+1} \leq 2^{-N+1}$$

\uparrow

$\sup_{x \in A_k} d(x, A_n) \leq \partial(A_k, A_n) \leq 2^{-n+1} \quad \forall k \geq m > n \geq N$

D2

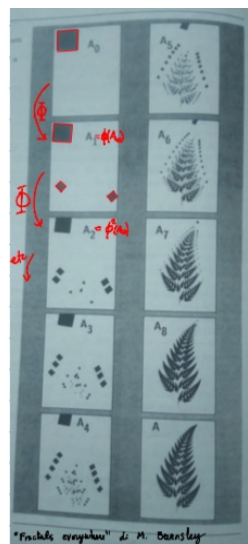
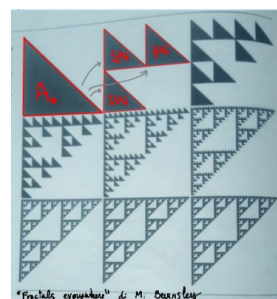
Teorema: (X, d) metrico. Sono equivalenti:

a) X è compatto per successioni

b) X è completo e totalmente limitato

c) Se $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ A_α aperti $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ t.c. $X \subset \bigcup_{j=1}^m A_{\alpha_j}$

Esempi dell'effetto delle prime iterazioni della mappa Φ in un paio di casi. L'insieme A_∞ dipende solo dal set di contrazioni scelto, mentre risulta irrilevante il particolare insieme A_0 di partenza



Teorema: (X, d) sp. metrico

a) Se (X, d) è completo $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \partial)$ è completo ✓ dimostrato

b) Se (X, d) è totalmente limitato $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \partial)$ è tot. lim.

c) Se (X, d) è compatto $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \partial)$ è compatto

Ricorda: $\partial(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : B \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A) \text{ e } A \subset \mathcal{N}_\varepsilon(B) \}$

Dim: (b) (X, d) tot. lim. $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \partial)$ è tot. lim.

Ricorda: X è tot. lim. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \exists \varepsilon$ -net, cioè $\exists \vec{x} \in X : X = \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i) = \mathcal{N}_\varepsilon(\{x_1, \dots, x_m\})$

$\varepsilon > 0 \quad \exists F \subset X \quad \# F < \infty \quad X \subset \mathcal{N}_\varepsilon(F)$

$\mathcal{P}(F)$ è una ε -rete per ∂

Dato $C \in \mathcal{F}(X)$ considero $F_\varepsilon = F \cap \mathcal{N}_\varepsilon(C)$

$$F_\varepsilon \subset \mathcal{N}_\varepsilon(C) \quad C \subset \bigcup_{\varepsilon \in F} B_\varepsilon(\xi) \quad \xi \in F \setminus F_\varepsilon, d(\xi, C) \geq \varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon(\xi) \cap C = \emptyset$$

$$C \subset \mathcal{N}_\varepsilon(F_\varepsilon) \quad C \subset \bigcup_{\xi \in F_\varepsilon} B_\varepsilon(\xi) = \mathcal{N}_\varepsilon(F_\varepsilon)$$

Teorema: (X, d) metrico. Sono equivalenti:

a') (X, d) è compatto per successioni

b') (X, d) è completo e totalmente limitato

c') Se $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ A_α aperti $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ t.c. $X \subset \bigcup_{j=1}^m A_{\alpha_j}$



Lo spazio X è compatto per ricoprimenti

Oss: c') \Rightarrow c)

Oss/Es: Mostrare che:

1) X tot. limitato $\Leftrightarrow X = \bigcup_{i=1}^m C_i$ $\text{diam}(C_i) < \varepsilon$

2) $(X \text{ tot. lim. e } Y \subseteq X) \Rightarrow Y \text{ tot. lim.}$

$$\text{diam } B_\varepsilon(\xi) \leq 2\varepsilon, \text{ diam}(C) < \varepsilon \rightarrow C \subset B_{2\varepsilon}(\xi) \quad \forall \xi \in C$$

↳ serve 2ε perché C potrebbe essere chiuso

Dim: (a') \Rightarrow (b') Se $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di Cauchy $\Rightarrow \exists n_k : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x} \in X \Rightarrow$

CAUCHY
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$

Per assurdo, suppongo X non tot. lim. $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. \nexists una ε -rete

$x_0 \in X$ qualsiasi, $x_1 \in X \setminus B_{\varepsilon_0}(x_0)$, $x_2 \in X \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_0) \cup B_{\varepsilon_0}(x_1)) = N_{\varepsilon_0}(\{x_0, x_1\})$

dato x_0, \dots, x_k scelgo $x_{k+1} \in X \setminus N_{\varepsilon_0}(\{x_0, \dots, x_k\})$. Si noti che $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \neq m$

$\Rightarrow x_n$ non ha suce. convergenti. Assurdo.

(b') \Rightarrow (c') (X, d) completo tot. lim. $\Rightarrow X$ è compatto per ricoprimenti

Per assurdo suppongo $\exists (A_\alpha)_{\alpha \in A}$ di aperti, $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \supset X$ ma X non ammette ricoprimenti finiti.

Fisso $\varepsilon_k = 1/k$, $X_0 = X = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_1} C$, \mathcal{F}_1 famiglia finita di insiemi, $\text{diam}(C) < \varepsilon_1 \quad \forall C \in \mathcal{F}_1$

$X_1 = \overline{C} \in \mathcal{F}$ non ricopribile da finiti A_α

X_1 è tot. lim. ma non finitamente ricopribile, e continuiamo per induzione:

\vdots

X_{k-1} è tot. lim. ma non finitamente ricopribile,

$X_{k-1} = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_k} C$ \mathcal{F}_k famiglia finita di insiemi, $\text{diam}(C) < \varepsilon_k \quad \forall C \in \mathcal{F}_k$

$X_k = \overline{C} \in \mathcal{F}_k$ non fin. ricopribile da A , X_k tot. lim. non fin. ricopribile con (A_α)

$X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_k \supset \dots$

$\varepsilon_k \in X_k$ se $k \geq N$, $\varepsilon_k \in X_N \quad \forall k \geq n$, $d(\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}) \leq \text{diam}(X_k) = \varepsilon_N = \frac{1}{N} \quad \forall k_1, k_2 \geq N$

$\Rightarrow (\varepsilon_k)$ è di Cauchy $\Rightarrow \varepsilon_k \rightarrow \bar{\varepsilon} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$

$\exists \bar{\alpha}$ t.c. $\bar{\varepsilon} \in A_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(\bar{\varepsilon}) \subset A_{\bar{\alpha}}$ se $N > \frac{1}{2\delta}$, $X_N \subset B_\delta(\bar{\varepsilon}) \subset A_{\bar{\alpha}} \Rightarrow$

\hookrightarrow aperto

$\Rightarrow X_N$ è fin. ricopribile. Assurdo

(c') \Rightarrow (d') X compatto per ricoprimenti $\Rightarrow X$ compatto per successioni

Per assurdo: X non compatto per successioni

$y \in X \quad \exists A_y$ intorno aperto di y : $\#\{k: x_k \in A_y\} < +\infty$

$X = \bigcup_{y \in X} A_y$ Trovo un sotto-ricoprimento finito (Vale (c'))

y_1, \dots, y_m t.c. $X = \bigcup_{j=1}^m A_{y_j}$

$N = \{k: x_k \in X\} = \bigcup_{j=1}^m \{k: x_k \in A_{y_j}\}$ unione finita di insiemi finiti. Assurdo \square

Prop: (X, d) sp. metrico compatto $\Rightarrow \exists D \subseteq X$, D numerabile e denso in X

Dim: (X, d) compatto \Rightarrow tot. limitato, $\varepsilon_n \doteq \frac{1}{n}$, $F_n \subset X$ una ε_n -rete $\begin{cases} \#F_n < +\infty \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \supset X \end{cases}$

$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \begin{cases} \text{è numerabile perché unione numerabili di insiemi finiti} \\ \text{denso} \end{cases}$

Esercizio: (X, d) metrico, $\mathcal{F}(X) \longrightarrow C(X)$

$$A \longmapsto \varphi_A(x) = d(x, A)$$

$\|\varphi_A - \varphi_B\| = \sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \mathcal{D}(A, B)$ non è detto che il sup sia finito

$$(\geq) \sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| \geq \sup_{x \in A} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \sup_{x \in A} |d(x, B)|$$

(\leq) per esercizio

Esercizio: Se C chiuso non vuoto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ allora $\exists \xi_0 \in C: d(p, C) = d(p, \xi_0)$

Esercizio: X metrico compatto $f_n \in C(X, \mathbb{R})$, $\forall x \in X$ $(f_n(x))_n$ decrescente,

$\inf_n f_n(x) = f(x) \in C(X, \mathbb{R}) \Rightarrow$ la convergenza è uniforme, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

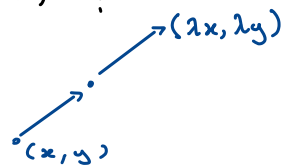
(si chiama **Teorema di convergenza di DINI**)

Es: $f(x, y) = \frac{(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$

Domanda 1: Per quali α f è estendibile per continuità in $(0, 0)$?

Domanda 2: Per quali α l'estensione di f è differenziabile in $(0, 0)$?

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^4 (x^3 y - x y^3)}{\lambda^{2\alpha} (x^2 + y^2)^\alpha} = \lambda^{4-2\alpha} f(x, y)$$



f è omogenea di grado $4 - 2\alpha$ e continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

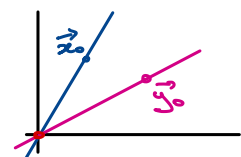
Def: $f: \mathbb{R}_*^N \rightarrow \mathbb{R}$ è pos-omogenea di grado δ se $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^\delta f(\vec{x}) \quad \forall \lambda > 0$

In generale una funzione pos-omogenea di grado δ su $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ è continua $\Leftrightarrow \delta > 0$

(a meno che f non sia costante)

Dim: Se $\delta < 0$ $f(\vec{x}_0) \neq 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda \vec{x}_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^\delta f(\vec{x}_0) \stackrel{\delta < 0}{=} +\infty$

Se $\delta = 0$, $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda \vec{x}) = f(\vec{x})$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda \vec{y}) = f(\vec{y})$



Quando $\delta > 0$ la funzione è continua: se $\delta > 0$ allora

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow 0} |f(\vec{x})| = 0, \quad m = \max_{|\vec{x}|=1} |f(\vec{x})|, \quad \text{se } \vec{x} \neq 0, \text{ allora}$$

$$|f(\vec{x})| = |\vec{x}|^\alpha \left| f\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) \right| \leq m |\vec{x}|^\alpha \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow 0} 0 \quad \square$$

Ritornando al problema iniziale, f è $(4-2\alpha)$ -omogenea quindi è continua \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow 4-2\alpha > 0 \text{ se } \alpha < 2$$

Per quali α f è differenziabile?

$$f \text{ è differenziabile} \Leftrightarrow \boxed{4-2\alpha > 1}$$

sotto questa condizione $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ per $(x,y) \rightarrow 0$

Ricevimento: Venerdì, 16-18 Aula Seminari, luciano.sciaraaffia@phd.unipi.it

DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto,}$$

$$g: V \rightarrow \mathbb{R}^k \quad V \subseteq \mathbb{R}^m \text{ aperto}$$

f diff. in x_0 , g diff. in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ è diff. in x_0 e $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$

Dim. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|))$

$$= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Esempio: $f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ diff., $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ curva differenziabile,

$$g(t) = f(\gamma(t)), \quad g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Teorema (Lagrange):

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. $[x, y] \subseteq U$, $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$



$$\Rightarrow f(y) - f(x) = \nabla f(z)(y - x), \quad z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in (0, 1)$$

Dim: Sia $g(t) = f(x + t(y - x))$ $t \in [0, 1]$ applico Lagrange a $g(t)$ e ottengo:

$$g(1) - g(0) = f(y) - f(x) = g'(\bar{t}) = \nabla f(g(\bar{t})) \cdot (y - x) = \nabla f(x + \bar{t}(y - x)) \cdot (y - x) \quad \bar{t} \in (0, 1)$$

Oss: Non vale per $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad f = (f_1, \dots, f_m)$. Si ha $f(y) - f(x) = (\dots \nabla f_i(z_i) \cdot (y - x) \dots)$

Ma z_i dipende da i . Posso scrivere $|f(y) - f(x)| \leq \max_{z \in [x, y]} |Df(z)| \cdot |y - x|$

Lagrange vale solo componente per componente e non per funzioni da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m ($m > 1$)

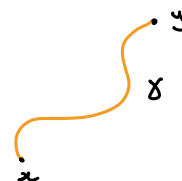
[NORME SU $M_{n \times m}$: norma euclidea: $\|M\|_e = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2 \right)^{1/2} \geq \|M\| = \max_{v: |v|=1} |M \cdot v|]$

Cor: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. U aperto convesso, $\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in U \Rightarrow f$ costante

Dim: $x, y \in U \quad x \neq y$ (aperto+convesso \Rightarrow convesso per archi)

$$\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow U, \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

$$\Rightarrow f \circ \gamma \text{ costante} \Rightarrow f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$$



DERIVATE SUCCESSIVE:

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \text{ derivata parziale } k^{\text{a}}, \text{ ce ne sono } n^k$$

$$(D^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{matrice Hessiana } (n \times n)$$

$$(D^k f)_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \quad D^k f: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R} \quad k\text{-lineare}$$

$$D^k f(x_0)[v_1, \dots, v_k] = \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k}$$

$$D^k f(x_0)[v]^k = D^k f(x_0)[v, v, \dots, v]$$

Oss: $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ non è in generale invariante per permutazione degli indici

$$\text{Esempio: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases} \quad \nabla f(0, 0) = 0, \quad D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(non è zero)

Teo (Schwarz):

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff., $x_0 \in U$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ esistono in $B_r(x_0)$ per $r > 0$ e sono cont. in x_0
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$

Dim: $h, k \in (-\delta, \delta)$,

$$f(x_0 + h e_i + k e_j) - f(x_0 + h e_i) - f(x_0 + k e_j) + f(x_0) = g(1) - g(0) = g'(0)$$

$$\stackrel{\text{LAG.}}{=} h \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} (x_0 + \theta h e_i + k e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_0 + \theta h e_i) \right] \stackrel{\text{LAG.}}{=} h k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x_0 + \theta h e_i + \tilde{\theta} k e_j) \quad \theta, \tilde{\theta} \in (0, 1)$$

$$\psi, \tilde{\psi} \in (0, 1)$$

$$\stackrel{\text{SIMMETRIA}}{=} h k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0 + \psi h e_i + \tilde{\psi} k e_j)$$

$$\text{Dove } g(t) = f(x_0 + t h e_i + k e_j) - f(x_0 + t h e_i)$$

$$\text{Divido per } h k \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x_0 + \theta h e_i + \tilde{\theta} k e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0 + \psi h e_i + \tilde{\psi} k e_j)$$

passo al limite per $h, k \rightarrow 0$ e uso la continuità.

Oss: Un enunciato analogo vale per le derivate di ordine k

Oss/Es: f è differenziabile 2 volte in $x_0 \Rightarrow D^2 f$ è simmetrica

FORMULA DI TAYLOR

Def: $f \in C^k(U) \Leftrightarrow f$ è diff. k volte e $D^k f$ è continuo in U

$$\Leftrightarrow \exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \text{ in } U \text{ e sono tutte continue}$$

Teo: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in U$

1) $f \in C^k(U)$ diff. k -volte in $x_0 \Rightarrow f(x) = T_k(f, x_0)(x) + o(|x - x_0|^k)$ ← RESTO DI PEANO

Dove $T_k(f, x_0)(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} D^{(i)}f(x_0)[x - x_0]^i$ ← POLINOMIO DI GRADO k IN x_1, \dots, x_n

$$D^{(i)}f(x_0)[x - x_0]^i = \sum_{j_1, \dots, j_i} \frac{\partial^{(i)}f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}} (x - x_0)_{j_1} \dots (x - x_0)_{j_i}$$

2) $f \in C^k(U)$ ed è diff. $(k+1)$ volte in $U \Rightarrow f(x) = T_k(f, x_0)(x) + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)}f(z)[x - x_0]^{k+1}}_{O(|x - x_0|^{k+1})}$
 $z \in (x_0, x)$ RESTO DI LAGRANGE

Dim: Fisso $x \in U$ e $g(t) = f(\underbrace{x_0 + t(x - x_0)}_{x_t})$, $t \in [0, 1]$

Applico il Teorema di Taylor a $g(t)$ in $t=0$ e osservo che $g^{(i)}(t) = D^{(i)}f(x_t)[x - x_0]^i$.

In particolare $T_k(f, x_0)(x) = T_k(g, 0)(1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = g(1) = T_k(g, 0)(1) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t) = T_k(f, x_0)(x) + \frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)}f(x_t)[x - x_0]^{k+1} \Rightarrow \textcircled{2}$$

① si ottiene da ② applicato con k al posto di $(k+1)$

MASSIMI E MINIMI LOCALI:

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Def: x_0 è di massimo locale se $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0)$

x_0 è di minimo locale se $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0)$

Teo: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. 2 volte in x_0 $\nabla f(x_0) = 0$

1) x_0 di max locale $\Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \leq 0$

2) x_0 di min locale $\Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \geq 0$

3) $\nabla^2 f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ di max locale

4) $\nabla^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ di min locale

Dim: 1) Supp. per assurdo che $\nabla^2 f(x_0)$ non ≤ 0 , cioè $\exists v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\nabla^2 f(x_0)[v, v] > 0$,

$$g(t) = f(x_0 + tv), \quad g(0) = f(x_0), \quad g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0, \quad g''(0) = \nabla^2 f(x_0)[v, v] > 0$$

$\Rightarrow 0$ è di min locale stretto per $g \Rightarrow f(x_0 + tv) > f(x_0)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \neq 0 \quad \leadsto$

2) Si fa come 1)

3) Sappiamo che $\nabla f(x_0) = 0$, $\nabla^2 f(x_0) < 0$, cioè $\nabla^2 f(x_0)[v, v] \leq -\delta |v|^2$ $\delta > 0$, $\delta = \min_i |\lambda_i|$

per Taylor, $f(x) = f(x_0) + \frac{\nabla^2 f(x_0)}{2} [x - x_0]^2 + o(|x - x_0|^2) \leq$

$$\leq f(x_0) - \frac{\delta}{2} |x - x_0|^2 + o(|x - x_0|^2) \leq f(x_0) - \frac{\delta}{4} |x - x_0|^2 \Rightarrow x_0 \text{ max. locale}$$

↖ se $|x - x_0| < 1$

4) come 3)

Def: x_0 punto critico, cioè $\nabla f(x_0) = 0$, che non è max locale o min locale si dice punto di sella. Ad es: se $\nabla^2 f(x_0)$ ha sia autovalore > 0 , sia $< 0 \Rightarrow x_0$ è di sella

MASSIMI E MINIMI (LOCALI)

Oss: Se $\nabla^2 f(x_0)$ è simmetrico $\Rightarrow \nabla^2 f \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$
 $\nabla^2 f \leq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0 \quad \forall i$ } λ_i autovalori

$$(n=2) \quad \nabla^2 f \geq 0 \Leftrightarrow \text{tr}(\nabla^2 f) \geq 0, \det(\nabla^2 f) \geq 0$$

$$\nabla^2 f \leq 0 \Leftrightarrow \text{tr}(\nabla^2 f) \leq 0, \det(\nabla^2 f) \geq 0$$

Def: $\text{tr}(\nabla^2 f(x_0)) =: \Delta f(x_0)$ si chiama Laplaciano di f

Il Laplaciano è l'operatore diff. più importante

Def: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. due volte si dice armonica se verifica $\Delta f = 0$ (eq. di Laplace)

Es: $f(x,y) = ax + by + c \quad a^2 + b^2 \neq 0$

Cerchiamo max e min di f su $\overline{B_1(0)} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\nabla f(x,y) = (a,b) \neq (0,0) \text{ non ci sono punti critici.}$$

Il max e min esistono (per Weierstrass) e sono su $\partial B_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$

Parametrizziamo $\partial B_1 = \text{Im}(\gamma(t))$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

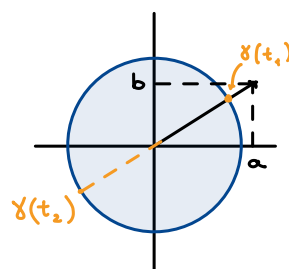
Cerchiamo max/min di $g(t) = f(\gamma(t))$:

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (a,b) \cdot (-\sin t, \cos t) \Leftrightarrow (\cos t, \sin t) \parallel (a,b)$$

$$t_1, t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \gamma(t_2) = -\gamma(t_1)$$

$$f(\gamma(t_1)) = \sqrt{a^2+b^2} + c \quad f(\gamma(t_2)) = -\sqrt{a^2+b^2} + c$$

$$\gamma(t_1) \text{ max di } f, \quad \gamma(t_2) \text{ min di } f$$



Oss: $f(x) = x \cdot v + w$ è un polinomio di I grado e quindi è sempre armonica e non ha punti critici se $v \neq 0$.

$f(x,y) = x^2 - y^2$ è armonica e ha un punto critico in $(0,0)$ ed è un pt. di sella

Prop: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f|_U$ diff. due volte, f armonica

$\Rightarrow f$ ammette max e min globali su ∂U

Dim: Supponiamo che il min di f non sia su ∂U cioè $\exists x_0 \in U$ tale che:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \bar{U} \quad \text{e} \quad f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in \partial U$$

In particolare $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in \partial U$

$$\text{Quindi } \exists \varepsilon' > 0 \text{ t.c. } f(x_0) < \min_{x \in \partial U} (f(x) - \varepsilon' |x - x_0|^2)$$

Considero $g(x) = f(x) - \varepsilon' |x - x_0|^2$, $g(x_0) < \min_{x \in \partial U} g(x) \Rightarrow g$ ha minimo in U

$$\Rightarrow \exists x_1 \in U \text{ t.c. } x_1 \text{ è min. assoluto di } g \Rightarrow \nabla g(x_1) = 0, \quad \nabla^2 g(x_1) = \nabla^2 f(x_1) - 2\varepsilon' \text{Id} \geq 0$$

Prendendo la traccia $0 \leq \Delta f(x_1) - 2\varepsilon' n = -2\varepsilon' n$. Assurdo

FUNZIONI INVERTIBILI

Domanda: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

◦ Quando è invertibile?

◦ Quando è localmente invertibile?

Cioè fissato $x_0 \in U \exists V$ intorno di x_0 e $W = f(V)$ intorno di $f(x_0)$ tale che

$f|_V$ è invertibile tra V e W

Oss: ($n=1$) se $f \in C^1(I)$ e $f'(x_0) \neq 0$ $x_0 \in I \Rightarrow f$ è loc. inv. con inversa C^1

Teo (INVERTIBILITÀ LOCALE):

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 , $x_0 \in U$, $\det(Df(x_0)) \neq 0$, cioè $Df(x_0)$ invertibile,

$\Rightarrow \exists V$ intorno di x_0 , $\exists W = f(V)$ intorno di $y_0 = f(x_0)$, $\exists g: W \rightarrow V$ di $C^1(W)$

t.c. $g(f(x)) = x \quad \forall x \in V$ e $Dg(y) = Df^{-1}(x) \quad \forall x \in V$ dove $y = f(x)$

Dim: $x_0 \in U$ con $Df(x_0)$ invertibile, sia $A = (Df(x_0))^{-1}$ la matrice inversa.

Consideriamo $B_\rho(x_0)$ e $B_r(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ dove ρ abb. piccolo tale che

$$\|Df(x) - Df(x_0)\| \leq \frac{\rho}{2\|A\|} \quad (\text{usiamo } f \in C^1) \quad \text{e } r = \frac{\rho}{2\|A\|}$$

Oss: In questa dimostrazione, la norma di una matrice M è:

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} |M \cdot v_i| \text{ è una norma su } M_{mn}, \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

In particolare se A è invertibile $\cdot \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$

Ricorda: ($n=1$)

f str. monotona
 \Updownarrow
 f invertibile

Verifica: $\|A\| = \max_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}$, $\|AB\| = \max_{v \neq 0} \frac{|ABv|}{|v|} \leq \|A\| \cdot \max_{v \neq 0} \frac{|Bv|}{|v|}$

Vogliamo mostrare che $\forall y \in B_r(y_0) \exists! x \in B_p(x_0)$ t.c. $f(x) = y$.

Fissiamo $y \in B_r(y_0)$ consideriamo la funzione $T(x) = x + A(y - f(x))$,
 $A = (Df(x_0))^{-1}$, $x \in \overline{B_p(x_0)}$.

Per come abbiamo scelto ρ, r , T è una contrazione su $\overline{B_p(x_0)}$.

1) Verifichiamo che T è $\frac{1}{2}$ -Lipschitz

$$\begin{aligned} \|DT(x)\| &= \|\text{Id} - (Df(x_0))^{-1} Df(x)\| = \|Df(x_0)^{-1} (Df(x_0) - Df(x))\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|Df(x_0) - Df(x)\| \leq \frac{\|A\|}{2\|A\|} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

↓
per la scelta di ρ

2) $T(\overline{B_p(x_0)}) \subseteq \overline{B_p(x_0)}$ fissiamo $x \in \overline{B_p(x_0)}$

$$\begin{aligned} |T(x) - x_0| &\leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |A(y - y_0)| \\ &\leq \frac{\rho}{2} + \|A\| \cdot r = \frac{\rho}{2} + \frac{\|A\| \rho}{2\|A\|} = \rho \quad \text{cioè } T(x) \in \overline{B_p(x_0)} \end{aligned}$$

Per il teorema delle contrazioni $\exists! x = g(y) \in \overline{B_p(x_0)}$ t.c. $f(x) = y$

Sia $W = B_r(y_0) \setminus f(\partial B_p(x_0))$ intorno aperto di y_0
↓
compatto

$$V = g(W) = f^{-1}(W) \subseteq B_p(x_0)$$

V aperto (f è continua) e $x_0 \in V \Rightarrow f$ è una biiezione tra V e W , e $g = f^{-1}|_W$

Vediamo ora che g è continua in W cioè $\lim_{y' \rightarrow y} g(y') - g(y) = 0 \quad \forall y \in W$.

Fissiamo $y \in W$ e chiamiamo $x' = g(y')$, $x = g(y) \in V$.

Sia T la mappa definita dal punto y .

Ricorda: $T(x) = x + A(y - f(x))$

$$\begin{aligned} T \text{ è } \frac{1}{2} \text{ lip.} &\Rightarrow \frac{1}{2}|x - x'| \geq |T(x) - T(x')| = |x - x' + A(f(x') - f(x))| \\ &\geq |x - x'| - |A(y' - y)| \geq |x - x'| - \|A\| \cdot |y - y'| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x - x'| = |g(y) - g(y')| \leq 2\|A\| \cdot (y - y') \Rightarrow g \text{ è } 2\|A\| \text{-lip, in part. è continua}$$

Vediamo ora che g è diff. in y e $Dg(y) = Df(x)^{-1}$, devo vedere che

$$\frac{g(y') - g(y) - Dg(y)(y' - y)}{|y - y'|} \xrightarrow{y' \rightarrow y} 0 \text{ cioè } \frac{x' - x - Df(x)^{-1}(f(x') - f(x))}{|x' - x|} \cdot \frac{|x' - x|}{|y' - y|} =$$

$$= \frac{x' - x - Df(x)^{-1}(Df(x)(x' - x) + o(|x' - x|))}{|x' - x|} \cdot \frac{|x' - x|}{|y' - y|} = o(1) \cdot \frac{|g(y') - g(y)|}{|y' - y|} \downarrow \leq \|A\|$$
$$= o(1) \xrightarrow{y' \rightarrow y} 0$$

$$\Rightarrow \exists Dg(y) = Df(x)^{-1}$$

Oss: $x \rightarrow Df(x)$ è cont. e inv. $\Rightarrow x \rightarrow Df(x)^{-1}$ è cont. $\Rightarrow g \in C^1(W)$

FUNZIONI OMOGENEE

$f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, α -omogenea e $C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

1) $\alpha < 1$: f non è differenziabile in 0

2) $\alpha > 1$: f è differenziabile in 0 perché $f(x) = 0 + o(|x|)$

$$|f(x)| = |x|^\alpha \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq C |x|^\alpha = o(|x|) \text{ per } |x| \rightarrow 0$$

$\uparrow \sup_{|x|=1} |f(x)|$

3) E se $\alpha = 1$? f è differenziabile $\Leftrightarrow f$ è lineare e 1-omogenea

Dim (3): (\Leftarrow) ovvio

(\Rightarrow) $f(x) = f(0) + \nabla f(0) \cdot x + R(x)$ con $R(x) = o(|x|)$ voglio vedere che $R(x) = 0$

$$f(x) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{\nabla f(0) \cdot (\cancel{t}x)}{\cancel{t}} + \underbrace{\frac{R(tx)}{t|x|}}_{\rightarrow 0 \text{ se } t \rightarrow \infty} \cdot |x| \quad \forall t \Rightarrow f(x) = \nabla f(0) \cdot x$$

□

Esempio di applicazione: $f(x, y) = \frac{x^2 y - x y^2}{x^2 + y^2} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

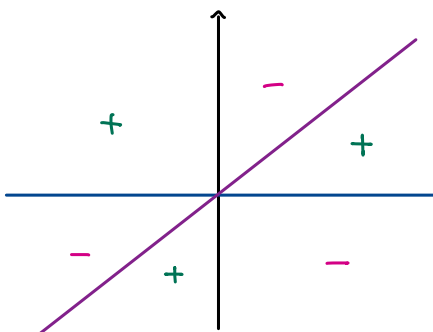
f è continua (anche in $(0, 0)$) ma non differenziabile.

f è 1-omogenea, continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow f$ continua in \mathbb{R}^2

$$f(at, bt) = \frac{a^2 t^3 - b^2 t^3}{(a^2 + b^2) t^2} = t \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{non vuol dire lineare dappertutto}$$

\Rightarrow si può vedere tramite gli zeri

$$\text{sgn}(f) = \text{sgn}(x^2 y - x y^2) = \text{sgn}(xy(x - y))$$



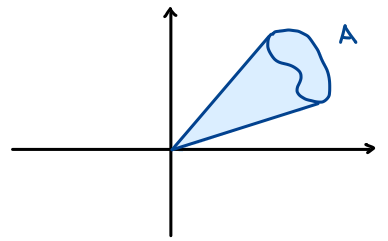
La funzione non può essere lineare perché cambia segno ogni volta che "attraversa" una di queste rette

TEOREMA DI EULERO

A conv aperto, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, f differenziabile su A allora:

$$f \text{ è } \alpha\text{-omogenea} \Leftrightarrow \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x) \quad \forall x \in A$$

Def: A si dice cono se $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A \quad \forall \lambda > 0$



Dim: $x \in A$ fisso, $F(A) = \frac{f(tx)}{t^d}$

f è omogenea in direzione $x \Leftrightarrow F(t) \equiv f(x) \quad \forall t > 0$

$$-F'(t) = \frac{1}{t^{2d}} \left[\nabla f(tx) \cdot x \cdot t^d - f(tx) d t^{d-1} \right] = \frac{1}{t^{d+1}} \left[\nabla f(tx) \cdot xt - d f(tx) \right]$$

Se $F' \equiv 0 \quad \forall t \Rightarrow \nabla f(x) \cdot x - d f(x) = 0 \quad (*)$

Viceversa se vale $(*) \quad \forall x \Rightarrow$ vale anche xt e ottengo che $F'(t) \equiv 0$

da cui f omogenea. □

FUNZIONI RADIALI

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è radiale se $f(x) = \varphi(r(x))$ con $r(x) \doteq |x| \leftarrow$ norma euclidea:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

a) Se $\varphi \in C^1$ allora $\nabla f(x) = \varphi'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$

b) Se $\varphi \in C^2$ calcolare $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$

b') \Rightarrow calcolare $\Delta f(x)$

$$\begin{aligned} \nabla r(x) &= ? & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\sum x_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 x_k = \frac{x_k}{|x|} \\ &\Downarrow & & \\ \nabla r(x) &= \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r(x)} \right) = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} r'(x)}{r^2(x)} = - \frac{\frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} = - \frac{x_i}{|x|^3}, \quad \nabla \left(\frac{1}{r(x)} \right) = - \frac{x}{|x|^3}$$

a) $\nabla f(x)$

$$\nabla (\varphi(r(x))) = \varphi'(r(x)) \frac{x}{|x|} = \varphi'(|x|) \frac{x}{|x|}$$

$$\text{In particolare } \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(|x|) \right) = \varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left(\varphi(|x|) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} \right) = \varphi''(|x|) \frac{x_j}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} + \varphi'(|x|) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{|x|} \right)}_{(*)}$$

$$*) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_i \cdot \frac{1}{|x|} \right) = \delta_{ij} \cdot \frac{1}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\varphi(|x|) \right) = \varphi''(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} \left[\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right]$$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \varphi''(|x|) + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} [n-1]$$

Esercizio: Caratterizzare le funzioni radiali armoniche in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta f \equiv 0 \\ f = \varphi(|x|) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi''(t) + (n-1) \frac{\varphi'(t)}{t} = 0$$

$$u = \varphi' \longrightarrow u'(t) + (n-1) \frac{u(t)}{t} = 0$$

Es: Studio di funzione in \mathbb{R}^3

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$$

$$D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\})$$

$$\bullet \{ \nabla f(x) = 0 \} = ?$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{x^2} + 3yz \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} + 3xz \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} + 3xy \end{array} \right]$$

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3yz = 1/x^2 \\ 3xz = 1/y^2 \\ 3xy = 1/z^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2yz = 1 \\ 3xy^2z = 1 \\ 3xyz^2 = 1 \end{array} \right. \quad (*)$$

$$\begin{array}{l} (*) \Rightarrow \frac{I}{II} \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y \\ \text{analog. } \frac{II}{III} \rightarrow y = z \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x = y = z$$

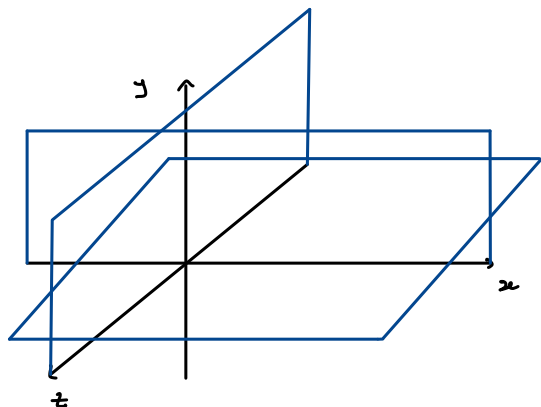
se $P = (t, t, t)$ è stationario allora $3t^4 = 1$, $t = \pm \sqrt[4]{1/3}$

$$P = t(1, 1, 1), \quad P = \pm \sqrt[4]{1/3} (1, 1, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + 3yz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 3z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{2}{x^3}$$

Matrice Hessiana: $H_f = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 3z & 3y \\ 3z & 2/y^3 & 3x \\ 3y & 3x & 2/z^3 \end{pmatrix}$



Valuto $H_f(P_+)$, dove $P_+ = \sqrt[4]{1/3} (1, 1, 1)$. Chiamo $\sqrt[4]{1/3} = \mu$

$$H_f(P_+) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^3} & 3\mu & 3\mu \\ 3\mu & \frac{2}{\mu^3} & 3\mu \\ 3\mu & 3\mu & \frac{2}{\mu^3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{si può usare il metodo} \\ \text{dei minori (Nord-Ovest)} \end{array}$$

$$\Delta_1 = \frac{2}{\mu^3} \oplus$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{\mu^6} - 9\mu^2 = \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{4}{\mu^4} - 9\mu^4 \right) = \frac{9}{\mu^2} \oplus$$

$$\Delta_3 = \text{Calcolare il det.} \Rightarrow \text{se } \oplus \Rightarrow H_f(P_+) > 0 \quad (\underline{\text{Es}}: \text{verificare } \Delta_3 > 0)$$

\Rightarrow Matrice $H_f(P_+)$ è definita positiva $\Rightarrow P$ è minimo locale

Es: Verificare che P_+ è minimo globale su $\mathbb{Q}^+ \doteq \{x > 0, y > 0, z > 0\}$

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^k(\Omega)$ $k \geq 1$, $x_0 \in \Omega$ t.c. $J_f(x_0) = \det[Df(x_0)] \neq 0$

(cioè $Df(x_0)$ è invertibile) $\Rightarrow f$ è un diffeomorfismo C^k in un intorno di x_0 ,

cioè $\exists U$ int. di x_0 e V int. di $f(x_0)$ t.c. $f|_U$ è una biiezione tra U e V con $f^{-1} \in C^k$.

Inoltre $Df^{-1}(f(x)) = Df^{-1}(x)$, $x \in U$

Oss: la condizione $\det[Df(x)] \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$ non garantisce f globalmente invertibile

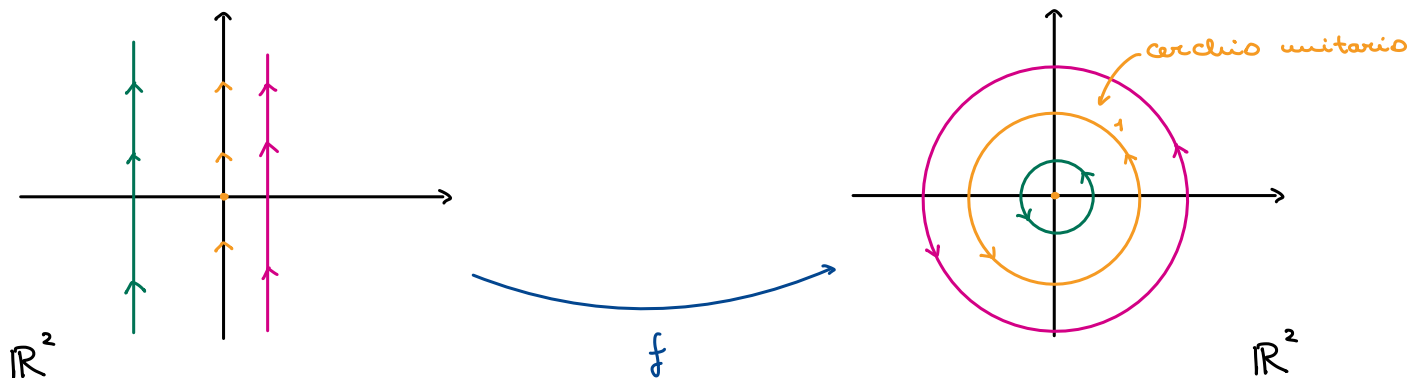
Es (esponenziale complesso):

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)))$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$$

$$f(x, y + 2k\pi) = f(x, y) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (\text{sen e cos non sono iniettive})$$

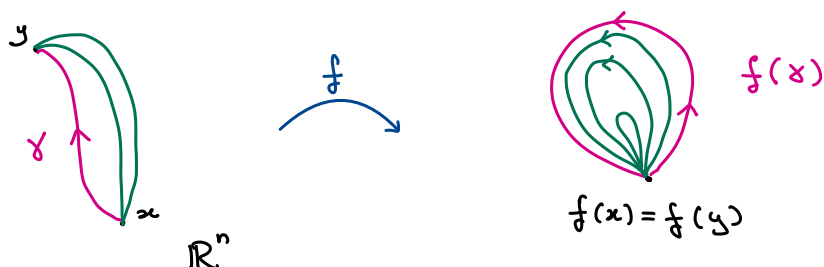
$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x, y) = e^{2x} > 0$$



$f(x) \neq 0 \quad \forall x$, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \Rightarrow$ localmente invertibile ma non globalmente

ARGOMENTO PER INVERTIBILITÀ GLOBALE

Supponiamo $f(x) = f(y)$ $x \neq y$



TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (o Teorema del Dini)

Quando posso esprimere $f(x, y) = 0$ in forma "esplicita" $y = g(x)$?

(Almeno localmente)

Teo: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^k serve che il n° delle y sia lo stesso del n° di equazioni

$(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $\det[D_y f(x_0, y_0)] \neq 0$
↳ matrice $m \times m$

$\Rightarrow \exists U$ int. di x_0 e V int. di y_0 ed $\exists g: U \rightarrow V$ di classe C^k tali che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \Leftrightarrow y = g(x) \text{ per } (x, y) \in U \times V.$$

In particolare $f(x, g(x)) = 0$ in U quindi diff. in x ottengo

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) \cdot Dg(x) = 0 \text{ cioè } Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} \cdot D_x f(x, g(x)) \text{ per } x \in U$$

Dini: Definiamo $\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y))$, $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$,

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} & D_x f(x_0, y_0) \\ 0 & D_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad \det(D\tilde{f}(x_0, y_0)) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ è loc. invertibile, cioè $\exists U$ int. di x_0 , V int. di y_0 , W int. di y_0 t.c. \tilde{f} è una

bigezione tra $U \times V$ e $U \times W$ ed $\exists \tilde{f}^{-1}(x, y) = (x, \tilde{g}(x, y))$ $(x, y) \in U \times W$

$\tilde{g}: U \times W \rightarrow V$ di classe C^k (teo inv. locale)

In particolare: $(x, y) = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y)) = \tilde{f}(x, \tilde{g}(x, y)) = (x, f(\tilde{g}(x, y)))$ cioè

$$f(x, \tilde{g}(x, y)) = y \quad \forall x \in U \text{ e } y \in W$$

Poniamo $g(x) = \tilde{g}(x, f(x_0, y_0))$ abbiamo $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ per $x \in U$,

cioè $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ per $y = g(x)$ e $x \in U$, $g \in V$.

Cor: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $x_0 \in \Omega$ $\text{rk}(Df(x_0)) = m \Rightarrow \exists U$ intorno di x_0 t.c.

$\{f(x) = f(x_0)\} \cap U$ è il grafico di una funzione C^k in un'opportuna base.

Def: I punti di $\{f(x) = f(x_0)\}$ con $\text{rk}(Df(x_0)) = m$ si dicono punti regolari

Es: $f(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la condizione diventa $\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \{f(x) = f(x_0)\}$ è

il grafico di $g: e'_i \rightarrow \mathbb{R} \cdot e_i$, $g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ (cioè $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$)

(Gradiente non nullo \Rightarrow la funzione cresce)

Esercizio: $f(x, y) = x^2 - y^2$

Quando $\{f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ è una curva regolare?

Se $\nabla f(x, y) = (2x, -2y) \neq 0$ cioè $(x, y) \neq (0, 0)$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = e^{xy} - x + y$

$$f(1, 0) = 0$$

1) $\{f = 0\}$ è un grafico $y = g(x)$ vicino a $(1, 0)$?

2) Qual è lo sviluppo di Taylor di g al 2° ordine?

Risposte:

1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^{xy} + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 > 0 \Rightarrow \exists g(x)$ con $g(1) = 0$,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) \text{ e } g'(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y e^{xy} - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -1, \quad g'(1) = 1/2$$

2) Dobbiamo trovare $g''(x)$ in $x=1$

$$g'(x) = - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))},$$

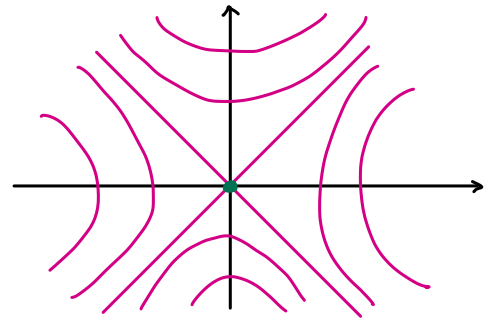
$$g''(x) = - \frac{f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x))g'(x)}{f_y(x, g(x))} + \frac{f_x(x, g(x)) [f_{xy}(x, g(x)) + f_{yy}(x, g(x))g'(x)]}{f_y(x, g(x))^2}$$

$$f_x = y e^{xy} - 1 \quad f_y = x e^{xy} + 1$$

$$f_{xx} = y^2 e^{xy} \quad f_{xy} = e^{xy} + x y e^{xy} \quad f_{yy} = x^2 e^{xy}$$

$$f_{xx}(1, 0) = 0 \quad f_{xy}(1, 0) = 1 \quad f_{yy}(1, 0) = 1$$

$$g''(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{8} \rightsquigarrow g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$



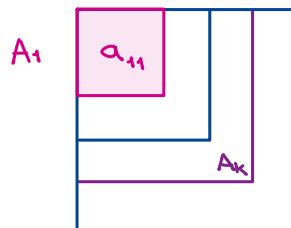
CRITERIO DEI MINORI DI NORD-OVEST

A matrice simmetrica $n \times n$ NON degenera: voglio sapere qual è la segnatura di A

$$A = H_f(P), \nabla f(P); \text{ se } a_{11} > 0, \Delta_k = \det A_k$$

indice di negatività di A = n° di cambi

di segno nella sequenza $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$



Segnatura di A = quanti autovalori positivi e quanti autovalori negativi

Lezione 9: $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$

Ha due punti critici $P_{\pm} = \pm(\mu, \mu, \mu)$, $\mu = \sqrt[4]{1/3}$

P_+ è un minimo locale (perché $H_f(P_+)$ è def. positiva)

P_+ è min globale su $Q = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$

$$Q_R = \left\{ x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{R}}, y \geq \frac{1}{\sqrt[3]{R}}, z \geq \frac{1}{\sqrt[3]{R}}, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

Es: se $R \gg 1$ e $x \in Q \setminus Q_R \Rightarrow f(x) > f(P_+)$

$$f(x) = \varphi(|x|) \quad \text{con } \varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta f(x) = \varphi''(|x|) + \frac{(n-1)}{|x|} \varphi'(|x|), \quad \Delta f \equiv 0$$

$$\varphi''(t) + \frac{(n-1)}{t} \varphi'(t) = 0$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{(n-1)}{t}$$

$$\log|\varphi'| = -(n-1)\log t + K$$

$$\varphi'(t) = B t^{-(n+1)} \quad B \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{n=1} \quad \varphi(t) = Bt + C \quad (t > 0)$$

$$\boxed{n=2} \quad \varphi(t) = B \log t + C \quad \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{n \geq 3} \quad \varphi(t) = B' t^{-n+2} + C \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sono definite nell'origine

↓

le uniche f armoniche def. nell'origine sono le costanti

• \forall sp. vettoriale, $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $[\vec{x}, \vec{y}] = \{t\vec{y} + (1-t)\vec{x} : 0 \leq t \leq 1\}$

Def: $C \subset V$ è convesso $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in C \quad [x, y] \subset C$

Oss: Intersezione di convessi è convessa

$\mathcal{P}(m)$

Prop: C convesso $\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_m \in C, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ t.c. $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ $\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right) \in C$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)

Dim: (\Rightarrow) Suppongo di aver mostrato \mathcal{P}_m

combinazione
convessa degli x_i

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = \lambda_0 \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i}_{\in C} + \lambda_{m+1} x_{m+1} \in C$$

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad \lambda_0 + \lambda_{m+1} = 1, \quad 1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$$

• Considero $\Omega \subset V$, V spazio vettoriale, Ω convesso

Def: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

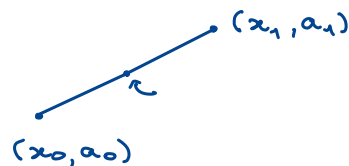
$$\text{Epi}(f) = \{ (x, a) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid a \geq f(x) \}$$

\downarrow
epigrafico = punti che stanno sopra al grafico (compreso il bordo)

Prop: f convessa $\Leftrightarrow \text{epi}(f) \subseteq V \times \mathbb{R}$ è convesso

Dim: (\Rightarrow) $(x_0, a_0), (x_1, a_1) \in \text{epi}(f)$, $f(x_0) \leq a_0, f(x_1) \leq a_1$

$$f(t x_1 + (1-t)x_0) \leq t f(x_1) + (1-t)f(x_0) \leq t a_1 + (1-t)a_0$$



$$f(t x_1 + (1-t)x_0) \leq t \cdot a_1 + (1-t) \cdot a_0 \Rightarrow (t x_1 + (1-t)x_0, t a_1 + (1-t)a_0) \in \text{Epi}(f)$$

(\Leftarrow) per esercizio

Oss: La convessità è una proprietà "unidimensionale"

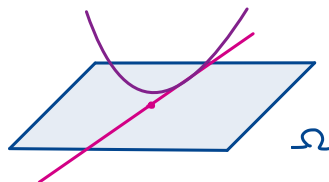
Se Ω convesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_r$ è convessa $\forall r$ retta in $V \Rightarrow f$ convessa

Esercizio: Mostrare che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa

$$\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_m \in \Omega, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0 \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

Prop: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso aperto



intersezione
del grafico con
il piano

a) Se $f \in C^1(\Omega)$ allora f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in \Omega$ $(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) \geq 0$

b) Se $f \in C^2(\Omega)$ allora b₁) f convessa $\Leftrightarrow H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$
 \uparrow semidef. positiva

b₂) f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x \in \Omega \quad f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

Dim: a) $x_0, x_1 \in \Omega$, $x_t \doteq t x_1 + (1-t)x_0$, $t \in (0,1)$, $\varphi(t) = f(x_t)$

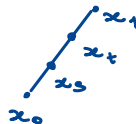
f convessa $\Leftrightarrow \varphi$ convessa (qualunque siano x_0, x_1)

φ convessa $\Leftrightarrow \varphi'$ crescente (Analisi 1)

(\Rightarrow) f convessa $\Rightarrow \varphi$ convessa $\Rightarrow \varphi'$ debolmente crescente $\Rightarrow \varphi'(1) - \varphi'(0) \geq 0$

$$[\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)](x_1 - x_0) \geq 0$$

(\Leftarrow) $t > s$ $(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_t - x_s) \geq 0$



$$(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_1 - x_0)(t-s) \geq 0$$

$$\varphi'(x_t) \geq \varphi'(x_s) \Rightarrow \varphi' \text{ crescente} \Rightarrow \varphi \text{ convessa}$$

b1) f convessa $\Leftrightarrow \varphi$ convessa $\forall x_1, x_0$, φ convessa $\Leftrightarrow \varphi''(t) \geq 0 \quad \forall t$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_t) \cdot (x_1 - x_0)^{(i)} \quad \begin{array}{l} \nwarrow \text{comp. i-esima} \\ \nearrow \nabla f(x_t)(x_1 - x_0) \end{array}$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_t) (x_1 - x_0)^{(i)} (x_1 - x_0)^{(j)} = D^2 f(x_t) [x_1 - x_0]^2 = (x_1 - x_0)^t H_f(x_t) (x_1 - x_0)$$

Se f convessa $\Rightarrow \varphi''(t) \geq 0 \quad \forall t \Rightarrow H_f$ è semi definita positiva

Viceversa se H_f è sempre def. semipositiva $\Rightarrow \varphi'' \geq 0 \quad \forall x_0, x_1 \Rightarrow f$ è convessa

b2) per esercizio (o prox. volta) : si fa con Taylor + resto di Lagrange

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ d. $C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso aperto

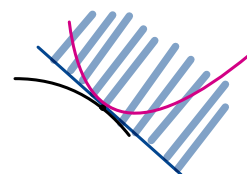
b2) f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x \in \Omega$, $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

Dim: (\Rightarrow) si usa Taylor con resto di Lagrange: $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(\xi) [x - x_0]^2$
 $\geq \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}_{h_{x_0}(x)} + \underbrace{\frac{1}{2} D^2 f(\xi) [x - x_0]^2}_{\text{semidef. pos.}}$
 $\xi \in [x_0, x] \subset \Omega$

(\Leftarrow) $\{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\} = \text{Epi}(f)$

Per vedere che $\text{Epi}(f)$ è convesso, basta vedere che è \cap di convessi.

$$\text{Epi}(f) = \bigcap_{x_0 \in \Omega} \underbrace{\text{Epi}(h_{x_0})}_{\text{convessi}}$$



Teo: Se V sp. vettoriale; $\Omega \subset V$, Ω convesso aperto

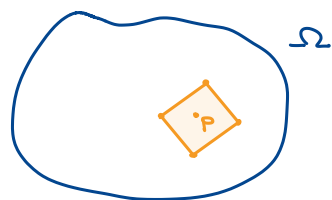
$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convessa + localmente limitata $\Rightarrow f$ è continua (f è Loc. Lip.)

Oss 1: L'ipotesi di loc. limitatezza è necessaria

Es: Trovare una funzione lineare (quindi convessa) che non sia continua

Oss 2: Se $V = \mathbb{R}^n$ allora l'ipotesi di loc. lim. NON serve (è automaticamente verificata)

Dim (Oss 2):



$$\forall p \in \Omega \quad \exists r > 0 : \overline{B_r(p)} \subset \Omega \quad \text{palla per 1.1}$$

$$\forall x \in \overline{B_r(p)}, \quad x \in \text{co}(\underbrace{\{p, p \pm \delta e_j, 1 \leq j \leq n\}}_F)$$

\downarrow
inviluppo convesso

$$e_j = (0, \dots, \overset{\text{pos. } j}{1}, \dots, 0)$$

$$x = \sum_{\xi \in F} \lambda_\xi \cdot \xi \quad \sum_{\xi \in F} \lambda_\xi = 1, \quad \lambda_\xi \geq 0$$

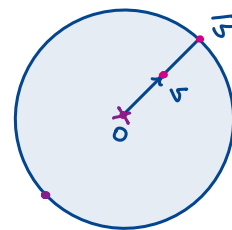
$$\Rightarrow f(x) \leq \sum_{\xi \in F} \lambda_\xi f(\xi) \leq M, \quad M = \max_{\xi \in F} \{f(\xi)\}$$

Dim (Teo): $p \in \Omega$ (Ω aperto) SPG: $f(p) = 0, p = 0$

Per $h_p \exists r > 0, M > 0 : \sup_{|x| \leq r} f(x) \leq M$. Voglio vedere che f è continua

$$v \in B_r(0), \quad \bar{v} = r \frac{v}{|v|}, \quad v = \lambda \bar{v} + (1-\lambda) \cdot 0 \quad \text{con } \lambda = \frac{|v|}{r} \in [0, 1]$$

\downarrow
vettore



$$\text{I)} \quad f(v) \leq \lambda f(\bar{v}) + (1-\lambda) \overbrace{f(0)}^{=0}, \quad f(v) \leq \frac{|v|}{r} M$$

$$0 = \mu v + (1-\mu)(-\bar{v}) \quad \mu = \frac{r}{|v|+r} \Rightarrow \overbrace{f(0)}^{=0} \leq \mu f(v) + (1-\mu) f(-\bar{v})$$

$$\text{II)} \quad f(v) \geq -\frac{1-\mu}{\mu} f(-\bar{v}) \geq -\left(\frac{|v|}{r}\right) f(-\bar{v}) \geq -\frac{|v|}{r} M \Rightarrow |f(v)| \leq \frac{M}{r} |v| \leftarrow (\text{I}) + (\text{II})$$

Es: Dare una stima per la costante di Lip su una palla centrata in 0 (event. più piccola!)

Oss: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ^{convessa} convessa, $B = \text{co}(F)$ F insieme finito, $\sup_{x \in B} f(x) = \max_{\xi \in F} f(\xi)$

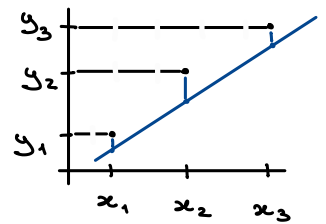
RETTE DI REGRESSIONE

x_1, \dots, x_n distinti tra loro, y_1, \dots, y_n valori registrati

$$y = ax + b$$

$$\mathcal{E}(a, b) = \sum_{j=1}^m (y_j - (ax_j + b))^2 \quad \text{Cerco min}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \mathcal{E}(a, b)$$

↑ funzionale d'errore



Oss: $\mathcal{E}(a, b)$ è strett. convessa e il minimo esiste

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) = -\sum z(y_j - (ax_j + b)) \cdot (x_j) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) = -\sum_{j=1}^m z(y_j - (ax_j + b)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a^2}(a, b) = +\sum_{j=1}^m 2x_j^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial b^2}(a, b) = \sum_{j=1}^m 2 = 2m \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{j=1}^m x_j$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}(a, b) = 2 \begin{pmatrix} \sum x_j^2 & \sum x_j \\ \sum x_j & m \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix} \quad \text{con } u = (1, \dots, 1)$$

$$\det(\mathcal{H}_{\mathcal{E}}) = |x|^2 |u|^2 - 2(x \cdot u) \geq 0$$

↑ Cauchy-Schwartz

Vale il > perché $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, quindi \vec{x} non è multiplo di u .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) &= -\sum z(y_j - (ax_j + b)) \cdot (x_j) \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b) &= -\sum_{j=1}^m z(y_j - (ax_j + b)) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{come trovare } a \text{ e } b? \\ &\partial_a \mathcal{E} = 0 \quad \partial_b \mathcal{E} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_j (y_j x_j - ax_j^2 - bx_j) = 0, \quad \sum_j (y_j - ax_j - b) = 0$$

$$x \cdot y - a|x|^2 - b x \cdot u = 0, \quad y \cdot u - a x \cdot u - bu^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y \cdot u \end{pmatrix}$$

Es: Finito il conto del sist. lineare

Es: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Ω aperto, f strettamente convessa $\left(f(tx_1 + (1-t)x_0) < tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \right) \quad \forall t \in (0, 1)$

Allora $\nabla f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente invertibile.

Esercizio (Funzioni implicite):

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \quad (c \in \mathbb{R})$$

1) Mostrare che L_c è compatto

2) Per quali valori di c L_c (è una curva regolare) si scrive loc. come grafico?

Sol: 1) $L_c = f^{-1}(\{c\})$ controimmagine di un chiuso

$$\lim_{|(x, y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty \stackrel{(*)}{\Rightarrow} L_c \text{ limitata}$$

$$\stackrel{\uparrow}{\text{def:}} \forall M > 0 \exists R \text{ t.c. } |(x, y)| \geq R \Rightarrow f(x, y) \geq M$$

$$(*) \quad c \in \mathbb{R} \text{ fissato, se } \lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty, \exists R: |(x, y)| \geq R, f(x, y) \geq c + 1 \Rightarrow L_c \cap B_R^c(0) = \emptyset$$

Es: Definire $\lim_{|(x, y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = l, \quad l \in \mathbb{R}$

$$x^4 + y^4 \geq (\max\{|x|, |y|\})^4 \geq \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right)^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{16} \quad \text{mentre } |xy| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) \geq \frac{1}{16} r^4 - r^2 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$$

(Es: mostrare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t\vec{x}) = +\infty \not\equiv \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$)

L_c si scrive come grafico (è regolare) se c non è un valore critico

$$\text{Def: } c \text{ valore critico se } \exists (x, y) : \begin{cases} \nabla f(x, y) = 0 \\ f(x, y) = c \end{cases}$$

Es: Trovare i punti critici e i valori critici (spoiler: 0 è un valore critico)

SOTTOVARIETÀ DI \mathbb{R}^n

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^n di dim. $k \in \{1, \dots, n\}$ se $\forall x \in M \exists U$ intorno di x ed $\exists \varphi: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ iniettiva e di classe C^1 , dove $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^k: |x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$ con $\text{rk}(D\varphi) = k$ e $\varphi(B_1) = M \cap U$

$\text{Im}(D\varphi(x)) = T_x M \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio di dim. k si chiama spazio tangente a M in x
 $(T_x M)^\perp$ si dice spazio normale a M in x

Esempio: $M = \Gamma_g \subseteq \mathbb{R}^n$ $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ di classe C^1 , $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto, $\Gamma_g = \{(x, g(x)): x \in \Omega\}$

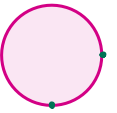
Oss/Es: Tutte le k -sottovarietà sono localmente grafici con una scelta opportuna delle coordinate. Infatti $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ $\varphi_1: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\varphi_2: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$



Dato che $\text{rk}(D\varphi) = k$, scegliendo una base opportuna posso supporre $D\varphi_1$ invertibile
 $\Rightarrow \varphi_1$ (loc.) invertibile

$$\psi: \varphi \circ \varphi_1^{-1} \quad \psi(x) = (x, \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{Im } \psi = \text{Im } \varphi = \Gamma_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}}$$



Oss: $M = \{f = c\}$ (luogo di zeri o curva di livello di f) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

M è una k -varietà in tutti i punti dove $\text{rk}(Df) = n-k$ localmente $M = \Gamma_g$, $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

funzione implicita con $f(x, g(x)) = c$

$$T_x M = T_x \Gamma_g = \{(v, Dg(x)v) : v \in \mathbb{R}^k\}$$

Dalla relazione $D_x f + D_y f \cdot Dg = 0$ si ottiene che $\text{Im}(Df)^T = \langle \nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-k} \rangle = (TM)^\perp$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Cerco punti stazionari (max/min) di una funzione $g \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
ristretta al vincolo regolare $M = \{f = 0\}$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$

Oss: la funzione può crescere solo lungo il normale al vincolo

la condizione per g in $x \in M$ diventa

$$\nabla g(x) \in (TM)^\perp \Leftrightarrow \nabla g(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(x). \quad \lambda_i \text{ sono i } \text{moltiplicatori di lagrange}$$

Teo (Moltiplicatori di Lagrange):

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f_0 \in C^1(\Omega)$, $f = (f_1 \dots f_k) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$ $M = \{x \in \Omega : f(x) = c\}$

$x_0 \in M$ punto di massimo o minimo locale per $f_0|_M \Rightarrow \{\nabla f_i\}_{i \in \{0, \dots, k\}}$ sono linearmente

dependenti, cioè $\exists \lambda_i$ non tutti nulli t.c. $\sum_{i=0}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0$

Oss: Se $\text{rk}(Df(x)) = k \Rightarrow \{\nabla f_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ sono lin. indipendenti \Rightarrow

\Rightarrow posso scrivere $\nabla f_0(x_0) = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0)$

Il sistema $\begin{cases} f(x_0) = c \\ \nabla f(x_0) = \sum \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0) \end{cases}$ si chiama **sistema dei moltiplicatori di Lagrange**

Questa è solo una condizione necessaria.

Dim: Supponiamo x_0 minimo locale di $f_0|_M$, $c=0$, e sia $B = B_r(x_0) = \{x \in \Omega : |x - x_0| < r\}$

tale che $f_0(x_0) \leq f_0(x) \quad \forall x \in \bar{B} \cap M$.

Dato $N > 0$ consideriamo $g_N(x) = f_0(x) + |x - x_0|^2 + N \sum_{i=1}^k f_i(x)^2$

$g_N(x) \geq f_0(x)$ e $g_N(x_0) = f_0(x_0) \Rightarrow x_0$ è minimo di g_N in $M \cap \bar{B}$.

Sia x_N il minimo assoluto di g_N in \bar{B} .

Per compattezza $x_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x^* \in \bar{B}$, a meno di sottosuccessioni.

Inoltre $g_N(x_N)$, che è limitata, converge a $d \in \mathbb{R}$.

$$N \sum_{i=1}^k f_i(x_N)^2 = g_N(x_N) - f_0(x_N) - |x_N - x_0|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} d - f_0(x^*) - |x^* - x_0|^2$$

Dividendo per $N \sum_{i=1}^k f_i(x_N)^2 \rightarrow \sum_{i=1}^k f_i(x^*)^2 = 0 \Rightarrow x^* \in M$

Scriviamo $f_0(x_N) + |x_N - x_0|^2 \leq g_N(x_N) \leq g_N(x_0) = f_0(x_0) \leq f_0(x^*)$
 \downarrow

$$f_0(x^*) + |x^* - x_0|^2 \Rightarrow |x^* - x_0|^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad x_0 = x^* = \lim_N g_N(x_N).$$

Per Fermat $\nabla g_N(x_N) = 0 = \nabla f_0(x_N) + 2(x_N - x_0) + 2N \sum_{i=1}^k f_i(x_N) \nabla f_i(x_N)$

Sia $\mu_0^N = 1$, $\mu_i^N = 2N f_i(x_N)$

$$\sum_{i=0}^k \mu_i^N \nabla f_i(x_N) = -2(x_N - x_0)$$

Normalizziamo e definiamo $\tilde{\mu}_i^N = \frac{\mu_i^N}{\sqrt{\sum_j \mu_j^{N^2}}} \in [-1, 1]$, $\tilde{\mu}_i^N \rightarrow \lambda_i^*$ t.c. $\sum_{i=0}^k \lambda_i^{*2} = 1$
 $\sqrt{\sum_j \mu_j^{N^2}} \rightarrow \geq 1$

$$\sum_i \tilde{\mu}_i^N \nabla f_i(x_N) = -\frac{2 \cdot (x_N - x_0)}{\sqrt{\sum_j \mu_j^{N^2}}} \xrightarrow{N} 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0 \quad (\text{con } \sum_{i=0}^k \lambda_i^2 = 1)$$

Es: $f(x) = \sum_{i=1}^n e^{x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|^2 - 1$ (per casa: $|x|^2 - R^2$) $M = \{g=0\} = \partial B_1$

Trovare max/min di $f|_M$.

Sistema dei M.L.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = e^{x_i}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i$$

$$\begin{cases} \sum_i x_i^2 = 1 \\ e^{x_i} = 2\lambda x_i \quad \forall i \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e } x_i \neq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

Dividendo per x_i ho $2\lambda = \frac{e^{x_i}}{x_i} = \frac{e^{x_j}}{x_j} \quad \forall i, j$, $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$

$-1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i$, $\varphi|_{[-1,1]}$ iniettiva

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

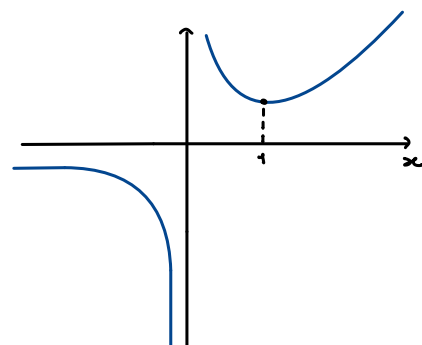
$\Rightarrow x_i = x_j \quad \forall i$ (Qui mi è servito $R=1$)

da $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ ottengo $x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall i$ o $x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall i$

$$f\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\downarrow}\right) = ne^{\frac{1}{\sqrt{n}}} > f\left(\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\downarrow}\right) = ne^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

max assoluto

min assoluto



DOMANDE TIPICHE IN UNO SCRITTO (mi moltiplicatori di Lagrange)

$M = \{g(x) = 0\}$ sottovarietà/vincolo, $g = (g_1, \dots, g_k): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($k < n$)

- ① Quali sono i punti regolari di M ($x \in M$ t.c. $\text{rk}(Dg(x)) = k$)
- ② Trovare $T_x M$ o $(T_x M)^\perp$ ($(T_x M)^\perp = \langle \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_k(x) \rangle \rightarrow$ spazio generato)
- ③ Trovare max/min di $f|_M$ con $f \in C^1(\Omega)$

I punti in cui $f \circ g$ non è C^1 li "teniamo da parte" e, se sono in numero finito, li confrontiamo

con il max o min trovati e così troviamo max o min assoluti

ESEMPI:

- ① $f(x, y, z) = y(x+z)$ $M = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ (ellissoide "schacciato" sulla dim z) ci definisce un compatto di \mathbb{R}^n

Domanda ③: Max/min di f

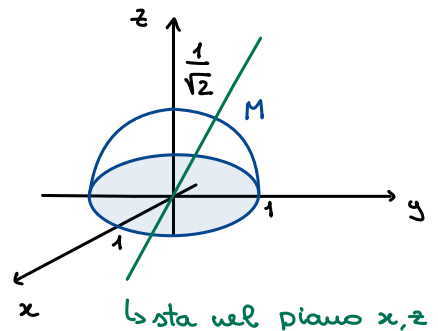
Esiste per Weierstrass

Cerchiamo i punti critici in $\overset{\text{parte interna}}{\dot{M}}$

$$\nabla f = (y, x+z, y) \quad \nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0$$

PUNTI DI SELLA

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{autovalori: } 0, \lambda, -\lambda \text{ (calcolare x es.)}$$



Max e min sono su ∂M ; cerchiamo i punti critici sul vincolo $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z \geq 0 \\ y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ y = 2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow y = x + z = 0 \Rightarrow f = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f = 0 \end{cases}$$

Posso supporre $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, \lambda \neq 0$.

$$\begin{cases} x = 2z \\ \frac{x+z}{y} = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{x}{2} \\ y^2 = x(x+z) = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^2}{2} = 3x^2 = 1 \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \leq z = \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}, z = \frac{\sqrt{3}}{6}, y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

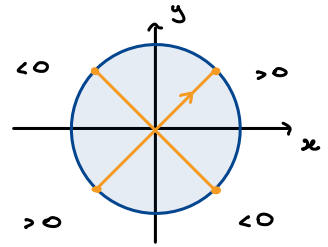
Non abbiamo guardato la calotta ellissoidale

Guardiamo $M \cap \{z=0\} = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y,0) = x \cdot y$

$\max f|_{M \cap \{z=0\}}$ è assunto in $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $f = \frac{1}{2}$

\min in $\pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $f = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \max f = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ e } \min f = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$



② Sia $\Gamma = \{x^2+y^2+z^2=1\} \cap \{x^2+y^2=x\}$

i) Dire se Γ è una curva regolare

ii) Calcolare la minima distanza di Γ da $(0,1,0)$

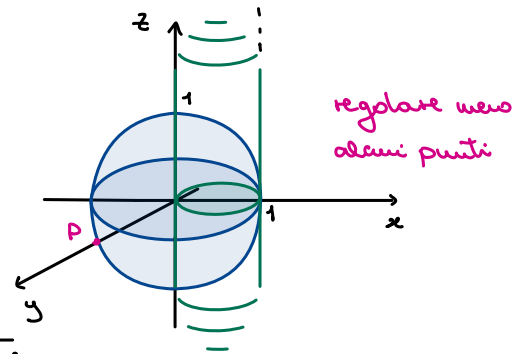
Sol: i) $\Gamma = \{g_1=0, g_2=0\}$

$$g_1 = x^2+y^2+z^2-1 \quad g_2 = x^2+y^2-x$$

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z) \quad \nabla g_2 = (2x-1, 2y, 0)$$

$z \neq 0$ ∇g_1 e ∇g_2 lin. indep.

$$z=0 \Rightarrow x=1, y=0 \quad \nabla g_1 = (2, 0, 0) \parallel \nabla g_2 = (1, 0, 0)$$



ii) \max/\min di $f(x,y,z) = |(x,y,z) - P| = \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$

è equivalente a cercare \max/\min di $f^2|_{\Gamma}$

$$f^2(x,y,z) = h(x,y,z) = x^2+(y-1)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2 - 2y + 1 \stackrel{\text{su } \Gamma}{=} -2y + 2$$

È equivalente a cercare \max/\min di $-y|_{\Gamma}$

$$w(x,y,z) = -y \quad \nabla w = (0, -1, 0)$$

$$\nabla w = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \quad \nabla g_1 = (2x, 2y, 2z) \quad \nabla g_2 = (2x-1, 2y, 0)$$

$$(x,y,z) \neq (1,0,0)$$

$$w(1,0,0) = 0$$

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 (2x-1) = \lambda_2 (2x-1) \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ -1 = 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 2\lambda_2 y \\ 0 = 2\lambda_1 z \rightarrow z=0 \text{ o } \lambda_1=0 \rightarrow \lambda_1=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2+y^2-x=0 \rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad w = \frac{1}{2} \quad \text{MAX}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad w = -\frac{1}{2} \quad \text{MIN}$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad w = \frac{1}{2} \quad \text{MAX}$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad w = -\frac{1}{2} \quad \text{MIN}$$

③ Max/min di $f(x) = \sum_{i < j} (x_i^2 + x_j^2)^{1/2}$ su $\partial B_R = \{ |x|^2 - R = 0 \}$ $g(x) = \sum_i x_i^2 - R$

$f > 0$ su ∂B_R e ammette max/min per W

sistema M.L.

$$\begin{cases} \sum x_i^2 = R^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x_i^2 = R^2 \\ \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = 2\lambda x_i \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Supponiamo $x_i \neq 0 \Rightarrow 2\lambda = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$

se $x_i \neq 0 \quad \forall i \rightarrow \sum_{j \neq i} \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{x_k^2 + x_j^2}} \quad \forall i, k$

Guardiamo il caso $n=3$:

Supponiamo $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \rightarrow x^2 + z = y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = R^2/3$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{6} \cdot R$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$f(0, 0, \pm R) = 2R$$

↳ permutazioni

$$\begin{cases} x \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) = 2\lambda x & x=0 \text{ possiamo supporre } y \neq 0, z \neq 0 \\ \cancel{y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 2\lambda \cancel{y} \\ \cancel{z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 2\lambda \cancel{z} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad y^2 = z^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(0, \pm \frac{R}{\sqrt{2}}, \pm \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = (1 + \sqrt{2})R$$

$$(0, 0, \pm R) \quad 2R < (1 + \sqrt{2})R < \sqrt{6}R$$

Es: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ linea di livello

• L_c è un compatto $\forall c \in \mathbb{R}$ (conseguenza di $\lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$)

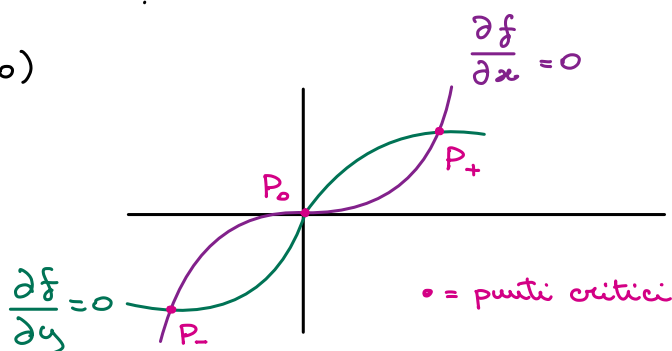
• Oss/Es: Mostrare che f ha minimo assoluto su \mathbb{R}^2

• Quando L_c è una sottovarietà (di dim 1)?

Serve che se $p \in L_c$ allora $\nabla f(p) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x$$



$(0, 0)$ è un punto di sella perché $f(x, y) = -4xy + o(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$f(P_+) = f(P_-) = -2$ sono punti di minimo, $f(x, y) = f(-x, -y)$

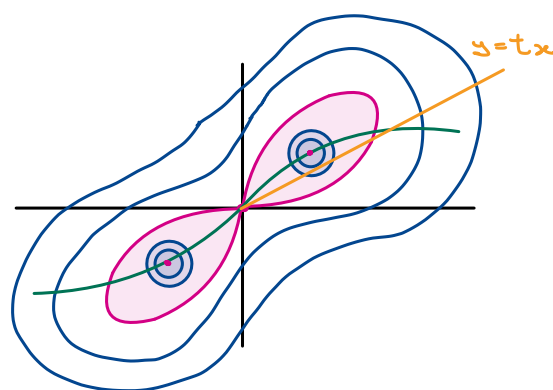
• $c < -2 \Rightarrow L_c = \emptyset$

• $c = -2 \Rightarrow L_c = \{P_+, P_-\}$

• $-2 < c < 0 \Rightarrow L_c$ è una sottovarietà regolare

L_0 non è una sottovarietà regolare

• $c > 0 \Rightarrow L_c$ è una curva regolare



Es: (S)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 & (1) \\ x + y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

Es: Parametrizzare la curva L_0 mediante l'intersezione con $y = tx$

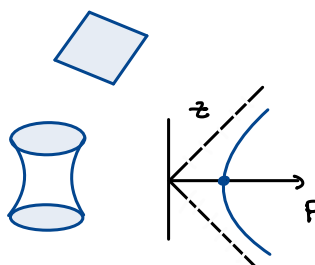
Γ punti che soddisfano S

Trovare max e min di $f(x, y, z) = z$ su Γ

① \vee ② non definiscono un compatto

② Definisce un piano ortogonale $(1, 1, 2)$

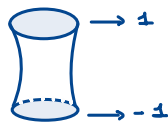
① In coordinate cilindriche $\rho^2 = 1 + z^2$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + z^2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$2|z| = |x+y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \sqrt{1+z^2}$$

$$4z^2 \leq 2(1+z^2) \Rightarrow z^2 \leq 1$$



Oss: L'insieme Γ è una sottovarietà di dimensione 1

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 - 1 \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \Gamma = \{ \phi = 0 \}$$

$$\forall p \in \Gamma \quad \text{rk}(D\phi(p)) = 2$$

$$D\phi(p) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow x=y$$

$$x \ p \in \Gamma \cap \{x=y\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=y \\ x+y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = -x \Rightarrow x^2 + x^2 - (-x)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$P_+ = (1, 1, -1)$$

$$P_- = (-1, -1, 1)$$

$$D\phi(P_+) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 $\Rightarrow D(P_-)$ ha rango 2

Γ è una curva regolare

$$f(x, y, z) = z, \quad \varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1, \quad \varphi_2(x, y, z) = x + y + 2z = 0$$

Se (x, y, z) è punto staz. di f vincolato a Γ allora $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla} \varphi_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} \varphi_2 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ incognito

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla \varphi_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad \nabla \varphi_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 2x\lambda_1 + \lambda_2 & \text{I} \\ 0 = 2y\lambda_1 + \lambda_2 & \text{II} \\ 1 = -2z\lambda_1 + 2\lambda_2 & \text{III} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 & \text{IV} \\ x + y + 2z = 0 & \text{V} \end{cases}$$

$$\text{III} - (\text{II} + \text{I}) \rightarrow (-2z - 2x - 2y)\lambda_1 = 1$$

$$2(x-y)\lambda_1 = 0 \leftarrow (\text{I} - \text{II})$$

$$\text{Se } \lambda_1 = 0: \begin{cases} \text{I} \rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \text{III} \rightarrow \lambda_2 = 1/2 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{I} \\ \text{III} \end{matrix}} \right\} \text{no sol.} \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x \neq y$$

$(x, y, z) \in \Gamma \cap \{x=y\} \Rightarrow (x, y, z) \in \{P_+, P_-\}$ definiti prima

$\Rightarrow P_+$ è punto di massimo, P_- è punto di minimo

Es: $M_{\mathbb{R}}(n \times n)$ matrici reali $n \times n$ (sp. vettoriale di dim n^2)

$SL(n) = \{A \in M : \det(A) = 1\}$ è una sottovarietà di dim $n^2 - 1$

$\Phi(A) \doteq \det(A)$, $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$

Basta verificare che $\forall A \in SL(n)$, $D\Phi(A)$ ha rango 1

Lemma: (i) $\det(I + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2)$

$\Phi(A + \varepsilon H)$

(ii) $\det(A + \varepsilon H) = \det(A)(1 + \varepsilon \operatorname{tr} A^{-1}H) + O(\varepsilon^2)$ se $\det A \neq 0$ ($\Rightarrow A$ invertibile)

(iii) $D\Phi(A)[H] = \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}H)$

Dim: (iii) segue da (ii)

Perché $\Phi(A + \varepsilon H) = \Phi(A) + \varepsilon D\Phi(A)[H] + o(\varepsilon)$

$$= \Phi(A) + \varepsilon \det(A) + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + o(\varepsilon)$$

(ii) segue da (i)

Binet

Perché $\det(A + \varepsilon H) = \det(A(I + \varepsilon A^{-1}H)) \stackrel{\downarrow}{=} \det A \cdot \det(I + \varepsilon A^{-1}H)$

$$\stackrel{(i)}{=} \det A (1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A^{-1}H)) + O(\varepsilon)$$

Basta dimostrare (i):

segno della permutazione

$$\det(I + \varepsilon H), b_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon h_{ij}, \det B = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} b_{1, \sigma(1)} \cdots b_{n, \sigma(n)} = (*)$$

Se $\sigma \in S_n$ e $\sigma \neq \text{id}$ allora l'addendo corrispondente è $O(\varepsilon^2)$

$$(*) = b_{11} \cdots b_{nn} + O(\varepsilon^2) = (1 + \varepsilon h_{11}) \cdots (1 + \varepsilon h_{nn}) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= 1 + \varepsilon(h_{11} + \cdots + h_{nn}) + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2)$$

□

$$D\Phi(A)[H] = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$$

Se $A \in SL(n)$, $\det(A) = 1$

$H \mapsto \text{tr}(A^{-1}H)$ è non deg. e quindi di rango 1

$$T_{\text{Id}} SL(n) = \{H \in \mathcal{M} : D\phi(\text{Id})[H] = 0\} = \{H \in \mathcal{M} : \text{tr}(H) = 0\}$$

$$T_A SL(n) = \{H \in \mathcal{M} : \text{tr}(A^{-1}H) = 0\}$$

Es: Mostrare che $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : {}^t A \cdot A = \text{Id}\}$ è una sottovarietà di \mathcal{M}

Sugg: $\Psi(A) = {}^t A A$, $\Psi: \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \longrightarrow \text{Sym}(n)$

$$\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

spoiler: $T_{\text{Id}} O(n) = \{H : H + {}^t H = 0\}$

Es: $O(n) = \{ {}^tAA = Id \}$ è una sottovarietà di $M_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $\dim M = n^2$

$$\Psi: A \rightarrow {}^tAA$$

$$M_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Sym}(n)$$

$D\Psi(A)$ ha rango massimo $\forall A \in O(n)$.

$$\Psi(A+H) = {}^t(A+H) \cdot (A+H) = {}^tAA + {}^tHA + {}^tAH + o(H) = \Psi(A) + D\Psi(A)[H] + o(H)$$

$$D\Psi(A)[H] = {}^tHA + {}^tAH$$

$$D\Psi(A): M(n \times n) \longrightarrow \text{Sym}(n)$$

Devo verificare che $D\Psi(A)$ è surgettiva.

$$\frac{1}{2}({}^tS {}^tAA + {}^tAAS) = S$$

① $D\Psi(A)$ è surgettivo: $\forall S \in \text{Sym}(n) \exists H, D\Psi(A)[H] = S, {}^tHA + {}^tAH = S$

Basta prendere $H = \frac{1}{2}AS$

$O(n)$ è una sottovarietà di $\dim(M(n \times n)) - \dim(\text{Sym}(n))$, $O(n) = \Psi^{-1}(Id)$

$$\dim \text{Sym}(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$



$$\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Es: $O(2)$, $T_{Id} O(2) = \{ {}^tH + H = 0 \}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ genera $T_{Id} O(2)$

$$Id O(3) \text{ è generato da } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es: Trovare max e min di $\phi(A) \doteq \det(A)$ sull'insieme $M = \{ A \in M: \text{tr}({}^tAA) = n \}$

$$g: M(n \times n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto \text{tr}({}^tAA)$$

Oss: $M = g^{-1}(n)$

Considero $\Phi|_M$. Studio il vincolo M , $A = (A_1, \dots, A_n)$

← vettori colonna

$$\underbrace{{}^tAA}_M = \begin{pmatrix} {}^tA_1 \\ \vdots \\ {}^tA_n \end{pmatrix} (A_1, \dots, A_n), \quad w_{ij} = {}^tA_i A_j = A_i \cdot A_j$$

$$\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n w_{ii} = \sum |A_i|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2, \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad M = \partial B_{\sqrt{n}}(0) \text{ in } M(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

È una varietà regolare compatta.

$$\text{Se } (A_1, \dots, A_n) \in M \Rightarrow \underbrace{(-A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)}_{\tilde{A} \in M}, \quad \phi(A) = -\phi(\tilde{A})$$

Per cercare il max posso restringermi alle matrici t.c. $\det(A) \neq 0$

Se A è punto di max/min vincolato, allora:

$$\textcircled{I} \quad \begin{cases} D\phi(A)[H] = \lambda Dg(A)[H] \quad \forall H \in M \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \quad \begin{cases} g(A) = u \end{cases}$$

$$\textcircled{III} \quad \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H) = \lambda \operatorname{tr}({}^tHA + {}^tAH) \quad \forall H \in M, \quad H=A$$

$$\det(A)n = \lambda \operatorname{tr}({}^tAA + {}^tAA)$$

$$\det(A)n = \lambda 2n \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \det(A)$$

$$\uparrow \textcircled{I} \\ g(A) = \operatorname{tr}({}^tAA) = n$$

$H = AK$, $K \in M(n \times n)$ arbitraria, $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertibile

$$\cancel{\det(A)} \operatorname{tr}(K) = \frac{1}{2} \cancel{\det(A)} \operatorname{tr}({}^tK {}^tAA + {}^tAAK) \quad \forall K \in M(n \times n)$$

$$\operatorname{tr}(K) = \operatorname{tr}({}^tAAK) \quad \forall K \in M(n \times n)$$

$$\operatorname{tr}((I - {}^tAA)K) = 0 \quad \forall K \in M(n \times n)$$

• In particolare vale per $\bar{K} = I - {}^tAA$ Oss: $\bar{K} = {}^t\bar{K}$

$$\operatorname{tr}((I - {}^tAA)^2) = \operatorname{tr}({}^t\bar{K}\bar{K}) = 0 \Rightarrow I - {}^tAA = 0 \Rightarrow A \in O(n)$$

Es per casa: R_1, \dots, R_n positivi fissati, $M = \{A \in M(n \times n) : |A_i|^2 = R_i^2\}$, $A = (A_1, \dots, A_n)$

Determinare massimo e minimo di $\phi(A) = \det(A)$ ristretto a M .

Cauchy-Schwartz via Lagrange

$$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow x \cdot y$$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1, |y|^2 = 1\}$$

1) Mostrare che M è varietà regolare

2) Determinare max e min di $\psi|_M$

$$M = g^{-1}(1, 1) \quad g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} |x|^2 \\ |y|^2 \end{pmatrix}, \quad Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 2{}^tx & 0 \\ 0 & 2{}^ty \end{pmatrix}$$

$Dg(x, y)$ ha rango massimo $\forall (x, y) \in M$

$$\begin{aligned} |x|^2 = 1 &\Rightarrow {}^t x \neq 0 \Rightarrow {}^t x \text{ ha comp} \neq 0 \\ |y|^2 = 1 &\Rightarrow {}^t y \neq 0 \Rightarrow {}^t y \text{ ha comp} \neq 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Questo permette di individuare un minore} \\ 2 \times 2 \text{ con } \det \neq 0 \Rightarrow \text{rang} Dg(x, y) = 2 \end{array} \right\}$$

2) Osservo che M è varietà compatta \Rightarrow max e min esistono

$$(*) \quad D\psi(x, y) = \lambda_1 Dg_1(x, y) + \lambda_2 Dg_2(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x, y) = y_k \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(x, y) = x_k$$

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad g_1(x, y) = |x|^2, \quad g_2(x, y) = |y|^2$$

$$(*) \quad \begin{cases} y_k = \lambda_1 2x_k + \lambda_2 \cdot 0 \\ x_k = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 2y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k y_k = 2\lambda_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k = 2\lambda_2 \sum_{k=1}^n y_k^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \quad \begin{array}{l} \text{a meno che} \\ \text{il prodotto} \\ \text{sia nullo} \end{array}$$

$$c = 2\lambda_1 = 2\lambda_2$$

$$y_k = c x_k \quad \forall k \Rightarrow x_k = c^2 x_k$$

$$x_k = c y_k \quad \forall k \Rightarrow c \in \{0, 1, -1\}$$

$$0 \quad x = y = 0$$

$$\text{oppure } x_k = y_k \quad \forall k$$

$$\text{oppure } x_k = -y_k \quad \forall k$$

Ritorno Cauchy-Schwarz: $\langle x, y \rangle \leq |x| \cdot |y|$ e vale l' $\Leftrightarrow x$ è multiplo di y

Tra tutte le scatole a forma di parallelepipedo di superficie esterna

assegnata trovare quella di volume massimo (3d)

$$\begin{cases} \text{Vol}(x, y, z) & x, y, z \\ \text{Sup esterna} = xy + yz + xz = a^2 \\ x > 0, y > 0, z > 0, Q_+ \leftarrow \text{aperto} \end{cases}$$

Ci interessa il massimo.

$$\Gamma = \{(x, y, z) : xy + yz + xz = a^2\}, \quad \Gamma \cap Q_+ \text{ è una sottovarietà di } \mathbb{R}^3$$

$$g(x, y, z) = xy + yz + xz$$

tutte le comp. sono non nulle

$$\nabla g(x, y, z) \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma \cap Q_+, \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Gamma \cap Q_+$ è chiuso, non è compatto

Se $(x, y, z) \in \Gamma \cap Q_+$ e una delle coordinate è più grande di R allora

$$xyz \leq \frac{a^4}{R}, \text{ infatti se } x > R, \quad xz \leq a^2 \Rightarrow z \leq \frac{a^2}{x}, \quad xy \leq a^2 \Rightarrow y \leq \frac{a^2}{x}$$

$$xyz \leq x \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{a^2}{x} \leq \frac{a^4}{x} \leq \frac{a^4}{R}$$

$$\max_{\Gamma \cap Q_+} Vol = \max_{\Gamma \cap Q_R^+} Vol, \quad Q_R^+ = \{(x, y, z) \in Q^+ : |x| \leq R, |y| \leq R, |z| \leq R\}$$

Se P è massimo allora $\nabla Vol(P) = \lambda \nabla g(P)$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + xz = a^2 \end{array} \right.$$

4 equazioni in 4 incognite. Sommando si ottiene:

$$a^2 = yz + xz + xy = \lambda(2x + 2y + 2z) \quad \lambda \neq 0$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \quad \frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z} \Rightarrow (x+z)y = (y+z)x \Rightarrow zy = zx \Rightarrow x = y$$

Con lo stesso metodo si ottiene $y = z$.

Es₁: Stesso problema con un parallelepipedo senza coperchio

Es₂: Trovare la lattina di vol massimo (e sup. esterna assegnata)

ESERCIZI (tipici da compito)Es 1: Trovare max e min di $f(x, y, z) = x y^2 z^3$ su $D = \{ |x| + |y| + |z| \leq 1 \}$ D è compatto \Rightarrow Massimi e minimi esistono① Cerco punti stazionari liberi per f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x y^2 z^2$$

$$\nabla f(x, y, z) \stackrel{?}{=} 0 : \text{ se } \{y=0\} \cup \{z=0\}$$

Ma tali punti critici non sono né minimi né massimi (neppure locali).

In $\text{int}(D)$ non cadono punti di massimo o minimo relativo.② Max e min di f ristretti a $S = \{ |x| + |y| + |z| = 1 \}$ ottaedro regolareOss₁: Per determinare max e min di f su S bastadeterminare massimi e minimi di f su

$$S \cap Q = \{ (x, y, z) : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

$$(x, y, z) \in S \Rightarrow |f(x, y, z)| = f(|x|, |y|, |z|)$$

Oss₂: Dato che $f=0$ su $\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\} \Rightarrow$ basta cercare max e mindi f vincolata a $x + y + z = 1$ con $x > 0, y > 0, z > 0$

$$g(x, y, z) = x + y + z, \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{cases} y^2 z^3 = \lambda \\ 2xy z^3 = \lambda \\ 3x y^2 z^2 = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{I} + \text{II}} \rightarrow y^2 z^3 = 2xy z^3, \quad y = 2x$$

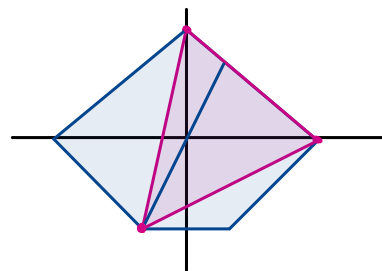
$$\boxed{\text{I} + \text{III}} \rightarrow y^2 z^3 = 3x y^2 z^2, \quad z = 3x$$

Ottengo la terna $(x, 2x, 3x) \Rightarrow x + 2x + 3x = 1, x = 1/6, y = 1/3, z = 1/2$

$$\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ è massimo di } f|_{S \cap Q}$$

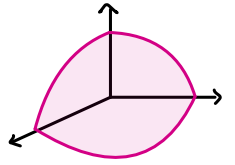
Conclusione: $\max f = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \min f = -f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

□



Es 2: $f(x, y, z) = \log x + 2 \log y + 3 \log z$, $S = \mathbb{Q}_+ \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 12\}$

Determinare inf e sup di $f|_S$



Oss: S non è compatta ma $\lim_{(x,y,z) \rightarrow p \in \partial S} f(x,y,z) = -\infty \Rightarrow \inf f|_S = -\infty$

$\exists \max f|_S = \max f|_{S_\delta}$ con $S_\delta = S \cap \{x \geq \delta, y \geq \delta, z \geq \delta\}$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1/x \\ 2/y \\ 3/z \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{troviamo il sistema:}$$

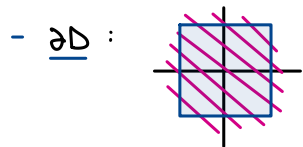
$$\begin{cases} 1/x = 2\lambda x \\ 2/y = 2\lambda y \\ 3/z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x^2 \\ 2 = 2\lambda y^2 \\ 3 = 2\lambda z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{sommando e moltiplicando}} \begin{cases} \lambda = 1/4 \\ x = \sqrt{2} \\ y = 2 \\ z = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \text{Dunque } (\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}) \text{ è il max } f|_S$$

Es 3: Consideriamo il vincolo $D = \{x^4 + y^4 \leq 1\}$ e calcoliamo max e min per $f(x, y) = x + 8y$

D è compatto \Rightarrow ci sono massimi e minimi.

$D = \text{int}(D) \cup \partial(D)$ e $\partial(D)$ è una sottovarietà regolare: $\partial(D) = \{(x, y) \mid x^4 + y^4 = 1\}$

- int(D): $f(x, y)$ è una funzione lineare e quindi non ci sono punti stazionari



Per cercare punti critici stazionari vincolati a ∂D abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x^3 \\ 8 = 2\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{moltiplicando}} \begin{cases} x = 2\lambda x^4 \\ 8y = 2\lambda y^4 \end{cases} \xrightarrow{\text{dividendo}} x + 8y = 2\lambda(x^4 + y^4) \xrightarrow{\text{vincolo}} x + 8y = 2\lambda$$

$$\xrightarrow{\text{dividendo}} \frac{x^3}{y^3} = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{moltiplicando}} 2x = y \xrightarrow{\text{moltiplicando}} \begin{cases} x = \sqrt[4]{1/17} \\ y = 2\sqrt[4]{1/17} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt[4]{1/17} \\ y = -2\sqrt[4]{1/17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max f|_D = 17\sqrt[4]{\frac{1}{17}} \text{ e } \min f|_D = -17\sqrt[4]{\frac{1}{17}}$$

Es 4: Trovare massimi e minimo di $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$ su $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

D è compatto $\Rightarrow \max f|_D$ e $\min f|_D$ esistono.

Come prima: • Studio f in $\text{int}(D)$

• Studio f su ∂D

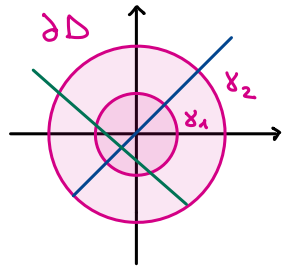
Oss: Il dominio di f è $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e contiene D ; f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Oss: Poiché il denominatore di f non cambia mai segno, per semplificare le

cose, si possono cercare massimi e minimi su $g(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$

- int(D): $\nabla g(P) \neq 0 \quad \forall P \in \text{int}(D)$ ↪ forma quadratica def. positiva

- $\partial(D)$: Uso moltiplicatori di Lagrange



$$\partial D = \delta_1 \cup \delta_2$$

• δ_1 : scrivo il sistema $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+4y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x+y = \lambda 2x \\ x+4y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-2\lambda)x + y = 0 \\ x + (4+2\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 1 \\ 1 & 4+2\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-2\lambda)(4+2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 - 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{4} \Rightarrow \lambda_+ = \frac{6+2\sqrt{2}}{4}, \quad \lambda_- = \frac{6-2\sqrt{2}}{4}$$

• δ_2 : il sistema è:
$$\begin{cases} 2x+y = \lambda 2x \\ x+4y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $y = (2\lambda_+ + 1)x$, $y = (2\lambda_- + 1)x$

TEORIA DELLA MISURA (introduzione)

Obiettivo: Misurare il "volume" di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, o integrare funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
con nozioni stabili per passaggio al limite

Def: X insieme, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $m: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$, (X, \mathcal{E}, m)
 \nearrow funzione misura
 \hookrightarrow insiemi che possiamo misurare

Def: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice σ -algebra se:
 \nearrow va bene anche numerabile
 \hookrightarrow stabile per \cup e \cap

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{E}$ (in part. $X \in \mathcal{E}$)
- $E_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_i E_i \in \mathcal{E}$ (in part. $\bigcap_i E_i \in \mathcal{E}$)

Es: $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$

Oss: L'intersezione, anche infinita, di σ -algebre è una σ -algebra

In particolare, dato $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ possiamo definire $\sigma A(\mathcal{S}) = \{ \cap \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ } \sigma\text{-alg.}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E} \}$

Es: X sp. metrico (o topologico), $\mathcal{A} = \{ \text{aperti in } X \}$, posso considerare $\mathcal{B}(X) = \sigma A(\mathcal{A})$

la σ -alg dei Boreliani, o insiemi di Borel

Oss: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \stackrel{=}{=} \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ per un fatto di cardinalità:

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c \text{ dove } c = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$$

$$|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| \stackrel{\text{non ovvio}}{=} |\mathcal{A}| \stackrel{\text{ovvio}}{=} c \quad \text{gli aperti sono unioni num. di intervalli aperti}$$

Def: \mathcal{E} σ -algebra, $m: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$

- m è σ -subadditiva se $m(\bigcup E_i) \leq \sum m(E_i) \quad \forall E_i \in \mathcal{E}$
- m è σ -additiva se $m(\bigcup E_i) = \sum m(E_i)$ se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Una tale m si dice **MISURA** su X e (X, \mathcal{E}, m) si dice **SPAZIO DI MISURA**

Oss: m misura \Rightarrow

- $m(\emptyset) = 0$
- m monotona: $A \subseteq B \Rightarrow m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$
- $E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow m(\bigcup E_i) = \lim_i m(E_i) = \sup_i m(E_i)$
- $E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow m(\bigcap E_i) = \lim_i m(E_i) = \inf_i m(E_i)$

Def: $N \in \mathcal{E}$ t.c. $m(N) = 0$ si dice **TRASCURABILE**

Oss: N trascurabile, $N' \subseteq N$, $N' \in \mathcal{E} \Rightarrow N'$ trascurabile

Def: (X, \mathcal{E}, m) si dice **COMPLETO**, se $N' \subseteq N$, N trascurabile $\Rightarrow N' \in \mathcal{E}$

METODO DI CARATHÉODORY

Def: $m: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ σ -subadditiva se dice **MISURA ESTERNA**

Teo: X insieme, m misura esterna, $E \subseteq X$ si dice misurabile se:

$$m(A) = m(E \cap A) + m(A \setminus E) \quad \forall A \quad (ACX)$$

Allora $\mathcal{E}_m = \{E \subseteq X : E \text{ misurabile}\}$ è una σ -algebra, $m|_{\mathcal{E}_m}$ è una misura e

$(X, \mathcal{E}_m, m|_{\mathcal{E}_m})$ è uno spazio completo.

Teo: (X, \mathcal{E}, m) spazio di misura $\Rightarrow m^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$m^*(E) = \inf \{m(F) : F \supseteq E, F \in \mathcal{E}\}$ è una misura esterna e $m^*|_{\mathcal{E}} = m$.

Inoltre $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{m^*}$ e $(X, \mathcal{E}_{m^*}, m^*|_{\mathcal{E}_{m^*}})$ è uno spazio di misura completo che estende (X, \mathcal{E}, m)

Oss: (X, \mathcal{E}, m) spazio di misura, $\bar{\mathcal{E}} = \{E \cup N' : E \in \mathcal{E}, N' \subseteq N, N \text{ trascurabile}\}$ è una σ -algebra

che contiene \mathcal{E} . $\bar{m}: \bar{\mathcal{E}} \rightarrow [0, +\infty]$ def. da $\bar{m}(E \cup N') = m(E)$ è una misura che estende m ,

inoltre $(X, \bar{\mathcal{E}}, \bar{m})$ è completo ed è la più piccola estensione completa; non è detto che $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{m^*}$

MISURA DI LEBESGUE

$X = \mathbb{R}^n$, $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$ rettangolo, $m^*(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ $R_i \cap R_j = \emptyset$ per $i \neq j$ plurirettangolo numerabile

Oss: Tutti gli aperti sono plurirettangoli numerabili

$m^*(P) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(R_i)$, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ definisco, $m^*(E) = \inf \{m^*(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo numerabile}\}$

Prop: m^* è σ -subadditiva e si dice misura esterna di Lebesgue

Def: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{m^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e

$\mathcal{L} = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ si dice misura di Lebesgue

Prop: I rettangoli sono misurabili \Rightarrow gli aperti sono misurabili

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ cioè \mathcal{L} è di Borel

Oss: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{L}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ non è completa. Infatti $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = \mathfrak{c} < |\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^{\mathfrak{c}}$

Basta vedere che $\exists C \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, trascurabile e più che numerabile.

(n=1) L'insieme di Cantor C va bene

Prop: (Supponendo l'assenza della scelta) $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Dim: (n=1) Insieme di Vitali:

$x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$ rel. d'eq., $[x] = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ classe di eq. di $x \in \mathbb{R}$, scegliamo $E \subseteq [0, 1)$

tale che $E \cap [x] = \{y(x)\} \forall x \in \mathbb{R}$. Dico che E non è misurabile.

Sia $F = \{U(E+q) : q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}\}$. Osserviamo che $(E+q_1) \cap (E+q_2) = \emptyset$.

$F \subseteq [-1, 2) \Rightarrow m^*(F) \leq 3$, $F \supseteq [0, 1)$ infatti $y \in [0, 1) \Rightarrow y \in [x]$ per $x \in E \Rightarrow y \in E + \underbrace{(y-x)}_{\in \mathbb{Q}}$

Se E fosse misurabile \Rightarrow

$\circ \mathcal{L}(E) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(F) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}([0, 1]) = 0$ ASSURDO
 $\circ \mathcal{L}(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(F) = +\infty$ ASSURDO

} $\Rightarrow E \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$

PROPRIETÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE

Def: (X, ε, μ) spazio di misura, X spazio metrico, μ misura di Borel

$\Rightarrow \mu$ è regolare se $\mu(E) = \inf \{ \mu(A) : A \supseteq E \text{ aperto} \} = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq E \text{ compatto} \} \quad \forall E, \varepsilon$

Prop: la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n è regolare.

Dim: ① $L(E) = \inf \{ L(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo numerabile} \}$

$\forall P = \bigcup_i R_i$ plurirettangolo e $\forall \varepsilon > 0$

$\exists P_\varepsilon = \bigcup_i R_{\varepsilon,i}$, $R_{\varepsilon,i} \supseteq R_i$ rettangoli aperti t.c. $L(R_{\varepsilon,i}) \leq L(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow L(P_\varepsilon) \leq L(P) + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow L(E) = \inf \{ L(P_\varepsilon) : P \supseteq E, \varepsilon > 0 \}$

② Osserviamo che $E = \bigcup_n E \cap B_n(0)$, $L(E) = \lim_n L(E \cap B_n(0))$

Posso supporre E limitato, considero l'insieme misurabile $\bar{E} \setminus E$.

Per ① $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \supseteq \bar{E} \setminus E$ t.c. $L(A_\varepsilon) \leq L(\bar{E} \setminus E) + \varepsilon$.

Definiamo $K_\varepsilon = \bar{E} \setminus A_\varepsilon = \bar{E} \cap A_\varepsilon^c = E \setminus A_\varepsilon \subseteq E$, K_ε compatto

$$L(K_\varepsilon) = L(E) - L(E \cap A_\varepsilon) \stackrel{\text{misurabilità di } E}{=} L(E) - L(A_\varepsilon) + L(A_\varepsilon \setminus E) \geq L(E) - L(A_\varepsilon) + L(\bar{E} \setminus E) \geq L(E) - \varepsilon$$

Def. costruttiva della misura di Lebesgue

$P = \bigcup_{i=1}^N R_i$ plurirettangolo (finito)

$\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$L(P) := \sum_{i=1}^N L(R_i) \quad \forall P$

$L(A) := \sup \{ L(P) : P \subseteq A \text{ plurirettangolo finito} \} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}$

$L(K) := \inf \{ L(P) : P \supseteq K \text{ plurirettangolo} \} \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compatto}$

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo:

$L^*(E) := \inf \{ L(A) : A \supseteq E \text{ aperto} \}$ misura esterna di Lebesgue (quella def. in preced.)

$L_*(E) := \sup \{ L(K) : K \subseteq E \text{ compatto} \}$ misura interna di Lebesgue

Oss: $L^*(E) \geq L_*(E)$ per ogni E

Def: E è misurabile se $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_*(E) := \mathcal{L}(E)$; $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabili}\}$

Teo: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una σ -algebra che contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{L} := \mathcal{L}^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ è una misura, cioè è σ -additiva, e si dice misura di Lebesgue.
↑ Boreliani

Teo: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ coincide con la σ -algebra, definita dal criterio di Carathéodory

Oss: Potremmo definire:

$$m_J^* = \inf \{ \mathcal{L}(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo} \}, \quad m_{J*} = \sup \{ \mathcal{L}(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo} \}$$

$$\text{Si ha } m_J^*(E) \geq \mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E) \geq m_{J*}(E) \quad \forall E$$

E t.c. $m_J^*(E) = m_{J*}(E)$ si dice misurabile secondo Jordan.

Questa classe di insiemi non è una σ -algebra e \mathcal{L}^* non induce una misura.

Inoltre m_J^* non è una misura esterna in \mathbb{R}^n .

Es: $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

E numerabile $\Rightarrow E$ misurabile con $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^*(E) = 0$.

Inoltre $m_{J*}(E) = 0$, però si ha $m_J^*(E) = \mathcal{L}([0, 1]) = 1 \Rightarrow E$ non è Jordan-misurabile

Teorema: m misura di Borel in \mathbb{R}^n t.c. $m(K) < +\infty \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto,

$$m(E + \varepsilon) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists c \geq 0 \text{ t.c. } m(E) = c \mathcal{L}(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Oss: Useremo la notazione $|E|$ per indicare $\mathcal{L}(E)$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$

FUNZIONI MISURABILI E INTEGRAZIONE

Def: $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura,

$f: X \rightarrow Y$ è misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Def: $[Y = \mathbb{R}^n, \nu = \mathcal{L}]$ (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura,

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ è Lebesgue misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \underline{\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ (non $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$)

Def: $[X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n]$

○ $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $E \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile, è Lebesgue misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

○ $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E di Borel, è Boreliana se $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Es: $\exists f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua ed $\exists N \subseteq [0, 1]$ mis. t.c. $f^{-1}(N)$ non è misurabile

Sia $K(x)$ la scala di Cantor e $g(x) = \frac{K(x) + x}{2}$.

$g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continua e str. crescente.

$K(C) = [0,1] \Rightarrow |g(C)| > 0$, $\exists N \subseteq C$ t.c. $g(N) \subseteq g(C)$ non è misurabile.

$f(x) = g^{-1}(x)$ continua e str. crescente e t.c. $f^{-1}(N) = g(N) \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Guardiamo $\mathcal{M}(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili}\}$

Oss: $f \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow f^{-1}(A)$ è misurabile $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \{f > t\} \subseteq X$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$

Proposizione:

① $\mathcal{M}(X)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , cioè $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f+g \in \mathcal{M}$ e $\lambda f \in \mathcal{M} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

② $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{M}$ e $f/g \in \mathcal{M}$ se $g(x) \neq 0 \forall x$ ($\tilde{\forall} x \in X = \forall x \in X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$)

③ $f_n \in \mathcal{M} \forall n \Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{M}$, $\inf_n f_n \in \mathcal{M}$; $\limsup_n f_n \in \mathcal{M}$, $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}$

In particolare se $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \Rightarrow f \in \mathcal{M}$

Dim: ① $\{f+g > t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f > q\} \cap \{g > t-q\}$ misurabile

$$\{\lambda f > t\} = \begin{cases} \{f > t/\lambda\} & \lambda > 0 \\ \{f < t/\lambda\} & \lambda < 0 \end{cases} \text{ misurabile}$$

② Guardiamo f^2 :

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & \text{se } t < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \text{ misurabile} \Rightarrow f^2 \in \mathcal{M}$$

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in \mathcal{M} \text{ per } ①$$

$$f/g = f \cdot \frac{1}{g} \text{ basta vedere } \frac{1}{g} \in \mathcal{M}, \left\{ \frac{1}{g} > t \right\} = \left\{ g < \frac{1}{t} \right\} \text{ mis.}$$

$$③ \left\{ \sup_n f_n > t \right\} = \bigcup_n \{f_n > t\} \text{ mis.}, \inf_n f_n = -\sup_n (-f_n) \text{ mis.}$$

Qss: Q forma quadratica su \mathbb{R}^n (pd. omogeneo di grado 2) max e min di Q ristretti a $S = \{ |x|^2 = 1 \}$ allora i punti staz. vincolati che trovo col metodo di lagrange sono autovettori di $H = H_Q$ matrice hessiana di Q

① Q è C^∞ quindi H è simmetrica

② $Q(x) = \frac{1}{2} (Hx) \cdot x + \text{X} \rightarrow \text{non può che essere } 0$

③ $Q(x+v) = \frac{1}{2} (H(x+v)) \cdot (x+v) = \frac{1}{2} [Hx \cdot x + Hx \cdot v + \overset{*}{Hv \cdot x} + o(|v|^2)]$

$$(*) Hx \cdot v = v \cdot Hx = {}^t Hx \cdot v = \frac{1}{2} Hx \cdot x + \frac{1}{2} [(H + {}^t H)x] \cdot v + o(v^2)$$

molt. di lagrange
↓

$$\begin{cases} Hx = 2\lambda x \\ |x|^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x$ è autovettore di H con autovalore 2λ

— o —

TEORIA DELLA MISURA: esercizi

misura di
lebesgue

Domanda ①: Se Ω è aperto in \mathbb{R}^n limitato è vero che $|\partial\Omega| = 0$?

No: Controesempio in dimensione 1. Ad esempio Ω potrebbe essere un insieme denso

Esempio: $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon/2^n}(q_n)$, $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\varepsilon > 0$

$$\text{Se } x \in [0,1] \setminus \Omega \Rightarrow x \in \partial\Omega \xrightarrow{*} \Omega \supset [0,1] \setminus \Omega \Rightarrow |\partial\Omega| \geq 1 \setminus |\Omega|$$

$$(*) [0,1] = [0,1] \cap \Omega \cup ([0,1] \setminus \Omega) \Rightarrow 1 = |[0,1] \cap \Omega| + |[0,1] \setminus \Omega|$$

$$|[0,1] \cap \Omega| \leq |\Omega| \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon 2^{-n} \leq 2\varepsilon \Rightarrow \boxed{\text{se } \varepsilon < 1/2 \quad |\partial\Omega| > 0}$$

Domanda ②: Ω limitato, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ con f di classe $C^1 \stackrel{?}{\Rightarrow} |\partial\Omega| = 0$?

Con queste ipotesi: **No**

Con l'ipotesi che $\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ allora la risposta è: **Sì**

↳ così $\partial\Omega$ è misurabile anche secondo Peano-Jordan (*)

$$\partial\Omega \subseteq \{x : f(x) = 0\}, \quad x \in \partial\Omega \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{e } x \text{ ha un intorno } V_x \text{ tale che } \partial\Omega \cap V_x$$

è grafico di una funzione (per il teorema delle funzioni implicite)

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} V_x \xrightarrow[\text{di } \partial\Omega]{\text{per cpt}} \partial\Omega \subseteq \bigcup_i V_{x_i}. \text{ Basta verificare che } |\partial\Omega \cap V_{x_i}| = 0 \quad \forall i$$

(*) Basta verificare che se $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ classe C^1 , $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$,
 \uparrow palla
 $\{(x, \varphi(x)) \mid x \in B\}$ ha misura nulla

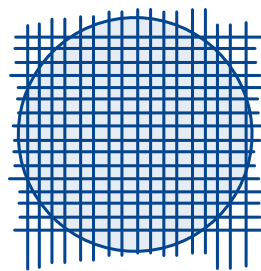
Basta inscatolarlo in un'unione di rettangoli di misura piccola:

$$\varepsilon > 0 \exists \delta : |x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

$$B \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \text{ diam}(Q_i) < \delta, G = \bigcup \{(x, \varphi(x)) : x \in B \cap Q_i\}$$

$x_i \in B \cap Q_i$ fissato

$$G_i \subset (B \cap Q_i) \times (\varphi(x_i) - \varepsilon, \varphi(x_i) + \varepsilon)$$



$$|G_i| \leq |Q_i| (2\varepsilon) \quad \sum_{i=1}^m |Q_i| \cong |B|$$

\hookrightarrow misura N -dimension. \quad \quad misura $(n-1)$ -dim

$$|G| \leq \sum |G_i| \leq c |B| 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Prop: Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $|A| > 0$. Allora $\exists V \subset A$ t.c. $V \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (variazione di Vitali)

Es: $Q_0 = [0, 1]^N \subset \mathbb{R}^N$ cubo unitario $\mathbb{R}^N = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} Q_0 + \xi$

$$A = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} A \cap (Q_0 + \xi) \quad \exists \xi \in \mathbb{Z}^N \text{ t.c. } |A \cap (Q_0 + \xi)| > 0$$

$$0 < |A| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |A \cap (Q_0 + \xi)|$$

SPG posso supporre che $A \subseteq Q_0$, su A definisco la rel. d'equiv. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^N$

$$\varphi: A/\sim \rightarrow A \Rightarrow V \doteq \varphi(A/\sim) \subset A \quad \text{Oss: } \left. \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \\ v_1 \neq v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 - v_2 \notin \mathbb{Q}$$

$$A \subset \bigcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq 1}} (V + \xi) \text{ unione disgiunta}$$

Oss: $\sqrt{N} = \text{diam}([0, 1]^N)$

Se supp. per assurdo V misurabile: $0 < |A| < \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V + \xi| = \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V| \Rightarrow |V| \neq 0$

$$V + \xi_1 \cap V + \xi_2 \neq \emptyset, \quad v_1 + \xi_1 = v_2 + \xi_2 \quad \exists v_1, v_2 \in V$$

$$v_1 - v_2 = \xi_2 - \xi_1 \in \mathbb{Q} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Q}^N \cap |\xi| \leq \sqrt{N}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$$

$$\left| \bigcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} V + \xi \right| = \sum |V| = +\infty \text{ ASSURDO}$$

\hookrightarrow è lim., ha misura finita

Esercizio: Mostrare che se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $|A| > 0$, allora $A-A$ è un intorno di 0

$$A-A = \{x = a - a' \text{ con } a, a' \in A\} \quad (\text{non banale}) \quad (\text{per caso})$$

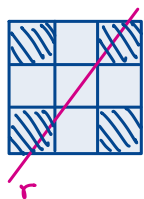
Es: Esiste un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $|A| = 0$ tale che $A-A$ è un intorno di 0

C è l'insieme di Cantor, $C-C \supset [-1, 1]$

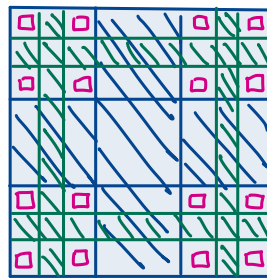
$$\text{In } \mathbb{R}^2: C \times C \subset [0, 1] \times [0, 1]$$

$$a \in [-1, 1], \quad r = \{x - y = a\},$$

$$r \cap C \times C \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in C - C$$



r interseca
uno dei  \rightarrow quadrati di ordine 1



Rappresentazione
di $C \times C$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \neq \emptyset \quad \text{per compattezza}$$

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{e} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in C \times C$$

Caratterizzazione compattezza:

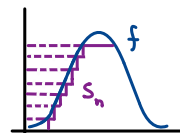
$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } (F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Q}} \text{ famiglia di chiusi in } X \text{ sp. compatto,} \\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{Q}, \quad F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{Q}} F_\alpha \neq \emptyset \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sono tutti quadrati chiusi} \\ \text{e ogni quadrato } \neq \emptyset \end{array}$$

INTEGRALI: (X, \mathcal{E}, μ) spazio di misura

Def: $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ è semplice se $\exists E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$, e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tale che $s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$

Prop: $f \in \mathcal{M}(X)$, $f \geq 0 \Rightarrow \exists$ una successione S_n di funzioni semplici, con $S_{n+1} \geq S_n \geq 0$, tale che $\lim_n S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Dim: $S_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{\{f \geq n\}}$, $E_{n,i} = \left\{ \frac{i-1}{2^n} \leq f < \frac{i}{2^n} \right\}$ con $1 \leq i \leq n2^n$
 $\Rightarrow S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$



Oss: f limitata $\Rightarrow S_n \rightarrow f$ unif., cioè $0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{2^n} + \max\left(0, \sup_x f - n\right) \xrightarrow{n} 0$

Oss: f non positiva $\Rightarrow f = f^+ - f^-$

$\exists S_n$ semplice t.c. $S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$

Def (Integrale): se M semplice, $s \geq 0 \Rightarrow \int_X s d\mu := \sum c_i \mu(E_i)$

$f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ semplice} \right\}$

$f \in \mathcal{M} \Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ se non valgono entrambi $+\infty$

Def: $f \in \mathcal{M}$ è integrabile se $\int f^+ < +\infty$ e $\int f^- < +\infty$

Proprietà: $f, g \in \mathcal{M}$ con l'int. ben definito \Rightarrow

① $\int f + g = \int f + \int g$, $\int c \cdot f = c \int f \quad \forall c \in \mathbb{R}$ cioè l'integrale è lineare

② $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ monotonia

③ $a \leq f \leq b \quad \forall x$ con $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a\mu(X) \leq \int f \leq b\mu(X)$

④ $\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$

⑤ $A \in \mathcal{E} \quad \int_A f := \int_X f|_A$ che è ben definito

⑥ $N \in \mathcal{E} \quad \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f = 0$

Oss: f int. $\Leftrightarrow |f|$ è integrabile

Def: $\mathcal{L}^1(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabili}\}$ sp. vettoriale, $L^1(X) = \mathcal{L}^1(X)/\sim$ dove $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$

$(L^1(X), \|\cdot\|_1)$ è uno sp. normato con $\|f\|_1 = \int |f|$ (vedremo che è uno sp. di Banach)

Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Prop: $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \nu(E) = \int_E f d\mu$ è una misura su (X, \mathcal{E})

Dim: Dobbiamo vedere che ν è σ -additiva, cioè $\nu(\cup E_i) = \sum \nu(E_i)$ dove $E_n \in \mathcal{E}$ disgiunti a 2

$$\text{Se } f = X_A, A \in \mathcal{E} \Rightarrow \nu(E) = \mu(E \cap A) \Rightarrow \nu(\cup E_i) = \mu(\cup_i E_i \cap A) = \mu(\cup_i (E_i \cap A)) = \sum_i \mu(E_i \cap A) = \sum_i \nu(E_i)$$

μ misura

\Rightarrow la tesi è vera se f è semplice. In generale, data $0 \leq s \leq f$ semplice:

$$\int_E s = \sum_i \int_{E_i} s \leq \sum_i \int_{E_i} f = \sum_i \nu(E_i) \quad \text{facendo il "sup" in } s \text{ ottengo } \nu(E) \leq \sum_i \nu(E_i)$$

Viceversa, dati due insiemi $A, B \in \mathcal{E}$ ed $\varepsilon > 0$

$$\text{Siano } s_A \text{ e } s_B \text{ semplici tali che } \int_A s_A \geq \int_A f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_B s_B \geq \int_B f - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\nu(A \cap B) \geq \int_{A \cup B} \underbrace{s_A + s_B}_{\text{semplice}} \geq \nu(A) + \nu(B) - \varepsilon \Rightarrow \nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$$

$$\text{In particolare } \nu(E) \geq \nu(\underbrace{\bigcup_{i=1}^N E_i}_{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia} \\ \text{dell'integrale}}}) \geq \sum_{i=1}^N \nu(E_i) \Rightarrow \nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

$$\text{Cor: } E_n \in \mathcal{E}, E_n \subseteq E_{n+1}, f \in \mathcal{M}, f \geq 0 \Rightarrow \int_{\bigcup_n E_n} f = \lim_n \int_{E_n} f$$

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)

$$f_n \in \mathcal{M}, 0 \leq f_n \leq f_{n+1}, f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x) \Rightarrow \int_X f = \lim_n \int_X f_n = \sup_n \int_X f_n$$

Dim: $f \geq f_n \forall n \Rightarrow \int f \geq \int f_n$. Dobbiamo mostrare che $\int f \leq \lim_n \int f_n$.

Sia $0 \leq s \leq f$ semplice, sia $\varepsilon > 0$ e sia $E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)s\} \subseteq E_{n+1}$, inoltre $X = \bigcup_n E_n$.

$$\text{Infatti } \forall x \in X \quad s(x) \leq f(x) = \lim_n f_n(x)$$

$$0 \quad f(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \Rightarrow x \in E_n \quad \forall n$$

$$0 \quad f(x) > 0 \Rightarrow (1-\varepsilon)s(x) < f(x) \Rightarrow (1-\varepsilon)s(x) < f_n(x) \text{ def. in } n \Rightarrow x \in E_n \text{ def. in } n$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} (1-\varepsilon)s = (1-\varepsilon) \int_{E_n} s \Rightarrow \lim_n \int_X f_n \geq (1-\varepsilon) \lim_n \int_{E_n} s = (1-\varepsilon) \int_{\substack{X = \bigcup E_n \\ \text{sup in } s, \text{ lim in } E}} s \geq \int_X s$$

$$\text{Cor: } f_n \in \mathcal{M}, f_n \geq 0 \Rightarrow \int_X \sum_n f_n = \sum_n \int_X f_n$$

$$\text{Lemma di Fatou: } f_n \in \mathcal{M}, f_n \geq 0, f(x) = \liminf_n f_n(x) \Rightarrow \int_X f(x) \leq \liminf_n \int_X f_n$$

$$\text{Dim: } g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x) \leq g_{n+1}(x), \quad f(x) = \lim_n g_n(x) = \sup_n g_n(x)$$

$$\text{Per il teo. di conv. monotona } \int f = \lim_n \int g_n(x) = \liminf_n \int g_n \leq \liminf_n \int f_n \quad [g_n(x) \leq f_n(x) \quad \forall x \quad \forall n]$$

Qss: $f_n = \chi_{\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} f_n &= n \cdot \chi_{\left(0, \frac{1}{n}\right]} \\ f_n(x) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 + x^2} \end{aligned} \right\} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \text{ ma } f = \lim_n f_n = 0$$

Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue):

$f_n \in \mathcal{M}, g \in \mathcal{M}, g \geq 0, \int_X g < +\infty$, supponiamo:

$$\left. \begin{aligned} (1) & |f_n| \leq g \quad \forall n \\ (2) & \exists f(x) = \lim_n f_n(x) \end{aligned} \right] \Rightarrow \lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$$

$\hookrightarrow \|f_n - f\|_{L^1}$

Qss: $\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0 \Rightarrow \int f = \lim_n \int f_n$

Dimo: $|f_n| \leq g \Rightarrow |f| \leq g$ e $|f_n - f| \leq 2g$

$$\int_X 2g = \int_X \lim_n (2g - |f_n - f|) \stackrel{\text{L. FATOU}}{\leq} \liminf_n \int (2g - |f_n - f|) = \int 2g - \limsup_n \int |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \limsup_n \int |f_n - f| = 0$$

Es1: Trovare max e min assoluti di $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ su $B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$\nabla f(x,y,z) = (y^2, 2xy + z^2, 2zy) = 0 \Rightarrow y=0, z=0, |x| \leq 1 : \text{sono tutti i punti critici all'interno}$$

Vediamo al bordo: $f|_{\partial B_1}$, possiamo scrivere $\partial B_1 = \{ \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 1}_{g(x,y,z)} \}$, quindi dobbiamo risolvere:

$$\nabla f = \lambda \nabla g = 2\lambda(x, y, z)$$

$$\begin{cases} y^2 = 2\lambda x \\ 2xy + z^2 = 2\lambda y \\ 2zy = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$\nearrow \text{se } z=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + z^2 = 2\lambda^2 \\ 2y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda/2 \\ z = \pm \lambda \\ y = \lambda \\ \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 4 \\ 9\lambda^2 = 4 \\ \lambda^2 = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{3} \\ y = \pm \frac{2}{3} \\ z = \pm \frac{2}{3} \\ \lambda = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$

$\searrow \text{se } z=0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 2\lambda y \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{se } y \neq 0} \begin{cases} y = \pm \sqrt{2}\lambda \\ x = \lambda \\ 2\lambda^2 + \lambda^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\searrow \text{se } y=0 \Rightarrow x=0$

Es2: $M = \{x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, x^2 + y^2 = 1\}$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^3 ?

Determinare i punti di M a massima o minima distanza dall'origine.

Trovo il rango della matrice data dal differenziale associato a M .

$$g = (g_1, g_2), g_1(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1, g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$$

$$D = Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-y & -x+2y & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } D = \text{rank} \begin{pmatrix} -y & -x & -2z \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{considero il minore} \begin{pmatrix} -y & -x \\ x & y \end{pmatrix} = -y^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$$

$$\Rightarrow \text{se } x=y \text{ rank} \begin{pmatrix} -x & -x & -2z \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

M ha dimensione 1, M è chiuso e limitato \Rightarrow è compatto \Rightarrow ci sono max e min

$$z^2 = -xy, |z|^2 = |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \text{ e c'è uguaglianza quando } x \text{ e } y \text{ sono uguali}$$

\nwarrow Disuguaglianza di Young

$$f(p) = |p|^2, p \in M \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 + z^2$$

Dobbiamo trovare il massimo e minimo di z sulla varietà

$$\Rightarrow \text{il minimo è quando } z=0 \text{ e il massimo è } z = \frac{1}{2}$$

Es 3: Dati $d_1, \dots, d_n > 0$, con $d_1 + \dots + d_n = 1$, dimostrare che se $x_1, \dots, x_n > 0$ allora

$$x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} \leq d_1 x_1 + \dots + d_n x_n \text{ e che l'uguaglianza vale solo se } x_1 = \dots = x_n$$

Con moltiplicatori di Lagrange:

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad d = (d_1, \dots, d_n), \quad x^d \leq d \cdot x$$

$$x \mapsto tx \quad t > 0, \quad (tx)^d = t^{d_1 + \dots + d_n} x^d = t x^d, \quad d \cdot tx = t(d \cdot x)$$

SPG $d \cdot x = 1$ e questa è la varietà su cui vogliamo fare massimi e minimi.

$$\nabla f(x) = (d_1, \dots, d_n)$$

$$\lambda \nabla g(x) = \lambda (d_1 x_1^{d_1-1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}, d_2 x_1^{d_1} x_2^{d_2-1} \dots x_n^{d_n}, \dots, d_n x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n-1})$$

$$\lambda (d_1, \dots, d_n) (x_1^{d_1-1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}, \dots, x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n-1})$$

$$\begin{cases} d_1 = \lambda d_1 x_1^{d_1-1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n} \\ \vdots \\ d_n = \lambda d_n x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n-1} \\ x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}, \quad g(x) = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$$

$$\nabla f(x) = (d_1 x_1^{d_1-1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}, \dots, d_n x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n-1}) = \left(d_1 \frac{f(x)}{x_1}, \dots, d_n \frac{f(x)}{x_n} \right)$$

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) = \lambda d$$

$$\begin{cases} d_1 \frac{f(x)}{x_1} = \lambda d_1 \\ \vdots \\ d_n \frac{f(x)}{x_n} = \lambda d_n \\ d \cdot x = 1 \end{cases} \rightsquigarrow f(x) = \lambda x_i \quad \forall i \begin{cases} \xrightarrow{x \lambda = 0} f(x) = 0 \\ \xrightarrow{x \lambda \neq 0} x_i = \frac{f(x)}{\lambda} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{f(x)}{\lambda} \right)^{d_1 + \dots + d_n} \\ = \frac{f(x)}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \end{cases}$$

Es 4: Consideriamo $\mathbb{R}^{n \times n} \simeq (\mathbb{R}^n)^n$ identificando ogni matrice con i suoi

vettori colonna. Determinare i punti critici di \det ristretto a $(S^{n-1})^n$ e

dedurre la disuguaglianza di Hadamard: $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq |x_1| \cdot \dots \cdot |x_n|$

Calcolare $\nabla \det(M) \cdot H = \text{tr}(Adj M^T \cdot H)$. Possiamo escludere il caso con $\det = 0$ per cercare

$$\text{max e min. } \nabla \det M = \sum_{\substack{k \in \mathbb{R}^n \\ \in (\mathbb{R}^n)^n}} 2\lambda_k x_k \quad \left(\begin{matrix} \text{bisogna risolvere questo sistema} \\ M_k = (0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) \end{matrix} \right)$$

I punti critici saranno le matrici ortogonali

Es: $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabili, $|A| > 0 \Rightarrow A - A$ è un intorno di 0

Sol: SPG posso supporre A compatto (altrimenti sostituisco A con $A_0 \subset A$, A_0 cpt, $|A_0| > 0$)

Per regolarità (esterna) $\exists G$ aperto $G \supset A$, $|G| < 2|A|$, $d(A, G^c) > 0$ cioè il

min $d(x, G^c) > 0$, e dico che $0 < \varepsilon < d(A, G^c)$, $|v| < \varepsilon \Rightarrow B(0, \varepsilon) \subset A - A$ *

$A \subset G$, $(A+v) \subset G$. Se per assurdo $A \cap (A+v) = \emptyset$, $A \cup (A+v) \subset G$

$|A \cup (A+v)| = |A| + |A+v| = 2|A| > |G| \Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow A \cap A+v \neq \emptyset$

$\exists a \in A, \exists a' \in A : a = a' + v \Rightarrow v = a - a'$

— o —

X metrico compatto, μ misura di Borel, $\mu(X) < +\infty \Rightarrow \mu$ è regolare

cioè $\forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) = \inf \{ \mu(G) : G \text{ aperto}, G \supset A \} = \sup \{ \mu(K) : K \text{ cpt}, K \subset A \}$

— o —

$\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{B} : A \text{ soddisfa } \circledast \}$

(i) \mathcal{S} è una σ -algebra

(ii) \mathcal{S} contiene gli aperti

Oss: (i) + (ii) $\Rightarrow \mathcal{S} \supset \mathcal{B}$

(a) $\emptyset \in \mathcal{S}, X \in \mathcal{S}$

(b) $B \in \mathcal{S} \Rightarrow B^c \in \mathcal{S}$

$\mu(B^c) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \inf \{ \mu(G) : G \supset B, G \text{ aperto} \}$

$\mu(X \setminus B) = \mu(X) + \sup \{ -\mu(G) : G \supset B, G \text{ aperto} \}$

$= \sup \{ \mu(X \setminus G), \mu(X) - \mu(G) : G \supset B, G \text{ aperto} \}$

$F = X - G \Rightarrow \mu(F) : F \subset B^c, F \text{ chiuso (compatto)} \}$

\Rightarrow regolarità interna per B^c

Esercizio: la regolarità esterna deriva da reg. interna per B

(c) $A_i \in \mathcal{S}, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{S}$

SPG posso supporre A_i disgiunti (se non lo fossero, uso $A'_i \doteq A_i \setminus \left(\bigcup_{j < i} A_j \right)$
 $\bigcup A'_i = \bigcup A_i$)

Reg. interna: $\varepsilon > 0$ fissato, $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i) < +\infty$

Scelgo n t.c. $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall i \exists K_i \subset A_i, \mu(K_i) > \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2n}, K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ è tale che $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(K_i) > \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon$$

— o —

$\varepsilon > 0, \forall i \exists G_i \supset A_i$ con $\mu(G_i) < \mu(A_i) + \varepsilon 2^{-i}$, G_i aperto

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \mu(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \varepsilon$$

$\Rightarrow \cup A_i \in \mathcal{S}$

— o —

(ii) \mathcal{S} contiene i chiusi, K chiuso, $\mu(K) = \sup \{ \mu(C) : C \subset K \text{ chiuso} \}$ ovvia

$$\mu(K) = \inf \{ \mu(G) : G \supset K \}, K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, G_n = \{ x \in X : d(x, K) < \frac{1}{n} \}, G_{n+1} \subset G_n$$

↑ aperti

$$\mu(K) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n), \text{ da cui la tesi}$$

□

Cor: In \mathbb{R}^N , μ misura di Borel t.c. $\mu(K) < +\infty \forall K$ compatto $\Rightarrow \mu$ regolare

Dim: Se A limitato, $\mu(A) = \inf \{ \mu(G) : G \text{ aperto}, G \supset A \}$

$$= \sup \{ \mu(K) : K \text{ compatto}, K \subset A \}$$

per il risultato precedente

Se A non è limitato posso scriverlo come unione numerabile di limitati

e concludere con le solite tecniche (dettagli per esercizio)

Teo: Se μ mis di Borel in \mathbb{R}^N t.c. $\mu(K) < +\infty \forall K$ compatto,

$$\mu(A) = \mu(A + v) \quad \forall v \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mu = c \lambda$$

↳ misura di Lebesgue

Dim: SPG posso supporre $\mu([0, 1]^N) = 1$

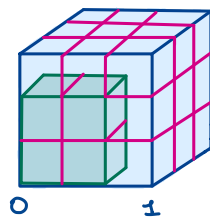
(Se fosse $\mu([0, 1]^N) = p > 0, \frac{1}{p} \cdot \mu$, se $p = 0 \Rightarrow c = 0$)

Suppongo $\mu([0, 1]^N) = 1, \mu([0, \frac{1}{2}]^N)$

$$[0, 1]^N = \bigsqcup_{\xi \in \Xi_k} \xi + [0, \frac{1}{2^k}]^N \quad (*)$$

$$\Xi_k = \{ (\xi_1, \dots, \xi_N) : \xi_i = w_i 2^{-k}, 0 \leq w_i \leq 2^k - 1 \}$$

↳ 2^{Nk}



$$(*) \mu([0, 1]^N) = \sum_{\xi \in \Xi_k} \mu(\xi + [0, 2^{-k}]^N) = 2^{Nk} \mu([0, 2^{-k}]^N)$$

= 1

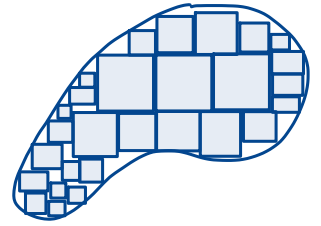
$$\mu([0, 2^{-k} [^N) = 2^{-Nk} = \lambda([0, 2^{-k} [^N) \Rightarrow \text{Allora } \forall A \text{ aperto, } \mu(A) = \lambda(A)$$

Perché ogni A aperto si scrive come unione numerabile di cubetti: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) = \sum \lambda(Q_i) = \lambda(A)$$

E è Boreliano: $\mu(E) = \inf \{ \mu(A) : A \supset E, A \text{ aperto} \}$

$$= \inf \{ \lambda(A) : A \supset E, A \text{ aperto} \} = \lambda(E)$$

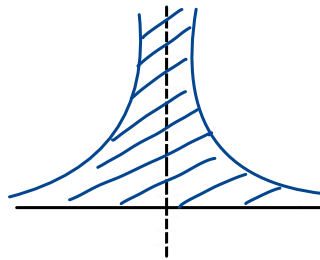


□

Es₁: Mostrare che se V di Vitali, $A \in V$, A misurabile $\Rightarrow |A| = 0$

Oss: Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, può succedere che $\forall A$ aperto $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = B < +\infty$$

$$Q = \{ r_n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n)}_{\varphi_n}, \quad S_k = \sum_{n=1}^k \varphi_n \text{ è mis.}, \quad f(x) = \sup_k S_k \text{ è mis.}, \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

$$\underbrace{\sup_k S_k}_{=f} = \sup_k \int S_k = \sup_k \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - r_n) dx = B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Esercizio: mostrare che $\forall n \in \mathbb{R}, \{ f(x) \leq n \}$ è chiuso

Es: È vero che se $|f_n| \leq 1, \int_0^1 |f_n - f| dx \rightarrow 0$ allora $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quasi ovunque?

(No, ma esiste una succ. con questa proprietà)

Es: Trovare un controesempio

Es: Ricostituire l'integrale $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$ al calcolo di una serie

→ metodi di analisi I

→ Beppo-levi

Teo: μ misura di Borel (regolare) su \mathbb{R}^N t.c. $\mu(K) < +\infty \quad \forall K$ compatto

↑ conseguenza

$\forall f$ misurabile con $\int_{\mathbb{R}^N} |f| < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.c. $\int_{\mathbb{R}^N} |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$

• $C_c(\mathbb{R}^N) = \{f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \exists K \text{ compatto t.c. } f(x) = 0 \quad \forall x \notin K\}$

↑ funzioni continue a supporto compatto

Es: Determinare la chiusura di $C_c(\mathbb{R}^N)$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$

Lemma: Nelle ipotesi del teo. precedente, se $A \in \mathcal{B}$ (borliano) $\subseteq \mathbb{R}^N$.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi$ continua t.c. $\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi - \chi_A| d\mu < \varepsilon$.

Dim: Dato che μ è misurabile, dato $\varepsilon > 0 \exists K \subset A \subset G$ tali che $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$,
 compatto ↑ aperto

$$\varphi(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, K)} \geq 0$$

Oss: Tutte le quantità sono non negative (denominatore > 0)

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \varphi(x) = \chi_A(x) \text{ se } x \notin G \setminus K \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi - \chi_A| d\mu = \int_{G \setminus K} |\varphi - \chi_A| d\mu \leq \mu(G \setminus K) < \varepsilon$$

Oss: Se A è limitato questa φ può essere presa a supporto compatto.

Se $A \subset B_R(0)$ basta prendere $G \cap B_R(0)$

Dim (Teo): SPG posso supporre $f \geq 0$, $\int f d\mu < +\infty$ (verificare per esercizio)

$f \chi_{B_n(0)} \rightarrow f$ quasi ovunque e sono dominate da f

$$\int f \chi_{B_n(0)} d\mu \rightarrow \int f d\mu, \quad \exists n_0: \underbrace{\int |f - f \chi_{B_{n_0}(0)}| d\mu}_{\psi} < \varepsilon/3, \quad \psi \in L^1$$

Per definizione di integrale $\exists s = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j}$ t.c. $0 \leq s \leq \psi$ con A_j misurabili e $A_j \subseteq B_{n_0}(0)$, $c_j > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi - s| d\mu < \varepsilon/3. \text{ Sia } c \doteq \sum_{j=1}^m c_j \text{ e } \forall j \text{ prendo } K_j \subset A_j \subset G_j \text{ tali che } \mu(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{3c} \text{ e}$$

↑ compatto ↑ aperto

$$\varphi_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, K_j)}. \text{ Dunque posso scrivere:}$$

$$\int |s - \sum c_j \varphi_j| d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^m c_j (\chi_{A_j} - \varphi_j) \right| d\mu \leq \sum c_j \int |\chi_{A_j} - \varphi_j| d\mu \leq \left(\sum_{j=1}^m c_j \right) \frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon/3$$

$$\|f - \sum c_j \varphi_j\|_1 \leq \|f - \psi\|_1 + \|\psi - s\|_1 + \|s - \sum c_j \varphi_j\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Oss: $\sum c_j \varphi_j(x) = 0$ se $|x| \geq n_0$

Esercizio: Mostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(nx) dx = 0$

Es: Nelle ipotesi di sopra su μ , mostrare che se $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p d\mu\right)^{1/p} < +\infty$.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.c. $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f - \varphi|^p d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon$

ASSOLUTA CONTINUITÀ DELL'INTEGRALE

(X, μ) sp. di misura, f misurabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. A misurabile, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$

Dim: Per assurdo, suppongo $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n$ misurabile con $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ tale che $\int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon_0$. Sia $F_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$, $F = \bigcap_n F_n$,
 \hookrightarrow Oss. $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1$

$\mu(F_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) = 2^{-n+1} \rightarrow 0$, $\mu(F) = \inf_n \mu(F_n) = 0$ e $\chi_{F_n}(x) \rightarrow \chi_F(x) \forall x \in X$

$\int_{A_n} |f| d\mu = \int_X |f| \cdot \chi_{A_n}(x) d\mu \leq \int_X |f| \chi_{F_n}(x) d\mu \xrightarrow{\text{CON. DOM.}} \int_X |f| \chi_F(x) d\mu = 0 \Rightarrow |f| \chi_{F_n}(x) \leq |f| \in L^1(X)$
 \circledast

Def: $\int_A f d\mu \doteq \int_X f \chi_A$

$\circledast \int_{A_n} |f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \oplus \quad \circledast \int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon_0 \Rightarrow \text{ASSURDO}$

Esercizio (Borel-Cantelli): Se (X, \mathcal{M}, μ) sp. di misura, A_j misurabili,

$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) < +\infty$ allora $\mu\left(\bigcap_n \bigcup_{j \geq n} A_j\right) = 0$

Es: (X, \mathcal{M}, μ) sp. di misura, $\mathcal{L}^p(X, \mu) \doteq \{f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ misurabile}, \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$

$f \sim g \Leftrightarrow \exists A$ t.c. $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x) \forall x \notin A$

$\mathcal{L}^p(X, \mu)/\sim \doteq L^p(X, \mu)$ è uno spazio NORMATO e COMPLETO rispetto a $\|f\|_p \doteq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

$(p = \infty)$ $\mathcal{L}^\infty(X) = \{f \text{ misurabile t.c. } \exists c > 0, \mu(\{x: |f(x)| > c\}) = 0\}$

Sia $L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty/\sim$: anche questo è uno spazio normato e completo (verificare per es.)

$\|f\|_\infty \doteq \inf\{c > 0: \mu(\{x: |f(x)| > c\}) = 0\}$

$(p \in [1, +\infty[)$ $L^p(X)$ è uno sp. normato e completo

NORMATO:

(i) $\|f\|_p \geq 0 \quad \forall f$ e vale 0 $\Leftrightarrow f \sim 0$, $f = 0$ quasi ovunque

$\int |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow \{ |f|^p > 0 \} = \bigcup_n \{ |f|^p \geq \frac{1}{n} \} \rightarrow$ la misura nulla

\downarrow $f \sim 0$ \uparrow ha misura nulla \uparrow hanno tutti misura nulla

(ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ linearità dell'integrale

(iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ sub-additività

Lemma (Dis. di Hölder): $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$ *

Dim: $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \geq 0$ (disug. di Young)

Dimostro * per $f_1 \in L^p$, $g_1 \in L^q$ con $\|f_1\|_p = 1$ e $\|g_1\|_q = 1$

$$\int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \int \left[\frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \right] d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

per * nel caso generale applico questa

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$$

□

Dim: (iii) \rightarrow sub-additività

$$f, g \in L^\infty, \quad \|f+g\|_p^p = \int_X \underbrace{|f+g|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q+p=pq \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(p-1)=p \Rightarrow p-1=p/q$$

$$\leq \int_X |f| |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\text{Hölder} \rightarrow \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f+g|^{p-1} \|_q$$

$$\| |f+g|^{p-1} \|_q = \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}$$

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p/q} \rightarrow p-1 = p/q$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{disuguaglianza di Minkowski}$$

Es: lo spazio $L^p(X, \mu)$ è completo per $\|\cdot\|_p$.

Allora, ogni successione di Cauchy (risp. a $\|\cdot\|_p$), converge (in $\|\cdot\|_p$)

Dim: $(f_n) \in L^p(X)$ di Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ t.c. $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

$n_k \doteq N(2^{-k})$, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Verifico che $\tilde{f}_k \doteq f_{n_k}$ converge in $L^p(X)$
 \uparrow uso corr. dom.

(Da questo segue che tutta la succ. f_n converge allo stesso limite)

$$g_n(x) := |f_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|$$

$$\|g_n\|_p \leq \|\tilde{f}_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p, \quad g_n \nearrow, \quad g(x) \doteq \sup g_n(x)$$

$$\int_X g_n(x)^p d\mu \rightarrow \int_X g(x)^p d\mu \quad \text{Beppo Levi}$$

In particolare $g(x) < +\infty \quad \forall x \in X$

$$X_0 = \{x: g(x) < +\infty\}, \mu(X \setminus X_0) = 0$$

$$\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)] \text{ se } g(x) < +\infty \text{ questa serie \textit{\textcolor{blue}{\text{è assolut. convergente}}}}$$

$$|\tilde{f}_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x) \text{ e } |f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X_0$$

$$\tilde{f}_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in X_0 \Rightarrow |\tilde{f}_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \forall x \in X_0$$

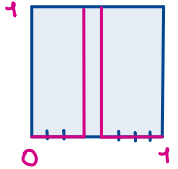
$$|\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g^p(x) \text{ e } \int_x |\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p d\mu \rightarrow 0$$

\textit{\textcolor{blue}{\text{con. dom.}}}

Cor: Se $f_n \rightarrow f$ in $L^p \Rightarrow \exists$ sottosucc. tc $f_{n_k} \rightarrow f$ q.o., $|f_{n_k}| \leq g \in L^p$

Controesempio: $f_k(x) \doteq \chi_{[0,1]}(2^k x - k)$ con $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$ e $f_k \in L^1([0,1])$,

$\|f_k\|_1 \rightarrow 0$ ma $f_k \not\rightarrow 0$ quasi ovunque (verificare)



Punto chiave della dimostrazione della completezza di L^p

Se $(f_n) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ è di Cauchy per $\|\cdot\|_p$ allora $\exists (n_k)_k \exists f \in L^p, g \in L^p$ tali che

$f_{n_k} \rightarrow f$ q.o., $|f_{n_k}| \leq g$ quindi $f_{n_k} \rightarrow f$ in L^p e anche $f_n \rightarrow f$ in L^p *

* Prop: Se $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \exists$ succ. $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque e

$$\exists g \in L^p, g \geq 0, |f_{n_k}| \leq g$$

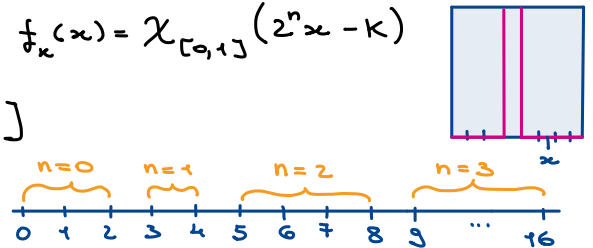
Dim: $f_n \rightarrow f$ in $L^p \Rightarrow f_n$ di Cauchy per $\|\cdot\|_p$

Oss₁: $f \in C_c(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, $\int f > 0$, $f_n(x) = f(x-n)$, $f_n(x) \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$ ma $f_n \not\rightarrow 0$ in L^1

Oss₂: $f_n \rightarrow f$ in $L^p \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o., $2^n+1 \leq k \leq 2^{n+1}$, $f_k(x) = \chi_{[0,1]}(2^n x - k)$

$$f_k(x) = 1 \Leftrightarrow 2^n x - k \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$$

$$\|f_k\|_1 = 2^{-n} \quad \forall 2^n+1 \leq k \leq 2^{n+1}, \quad \|f_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$



$f_k(x) = 1$ per infiniti valori di k (almeno una volta per ogni $[2^n+1, 2^{n+1}]$)

Def: f funzione continua, $\text{supp } f = \overline{\{x: f(x) \neq 0\}}$

$C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$ per $\|\cdot\|_1$, se μ misura di Borel e $\mu(k) < +\infty \forall k$ compatto
 (vale anche per $L^p_\mu(\mathbb{R}^N)$ con $\|\cdot\|_p$)

Prop: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $C_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$

Oss: $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow f \chi_\Omega \in L^p(\Omega)$. Viceversa, data $f \in L^p(\Omega)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}, \quad \tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Dim: Data $f \in L^p(\Omega)$ considero $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ def. come sopra e scelgo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.c.

$\|\varphi - \tilde{f}\|_p < \varepsilon$ e $\text{supp. } \varphi$ potrebbe non essere contenuto in Ω

$\Omega_n \doteq \{x: d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\} \cap B_n(0)$, $\overline{\Omega_n}$ è compatto, $\overline{\Omega_n} \subset \Omega$, $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$

$$g_n(x) = \frac{d(x, \Omega_{n+1}^c)}{d(x, \Omega_{n+1}^c) + d(x, \overline{\Omega_n})}, \quad 0 \leq g_n(x) \leq 1,$$

$\varphi_n = g_n(x) \varphi \rightarrow \varphi \quad \forall x \in \Omega$ e la convergenza è anche in L^p

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset \Omega, \quad |\varphi_n(x)| \leq |\varphi(x)|, \quad \exists \bar{n}: \|\varphi - \varphi_n\|_p < \varepsilon \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_p < 2\varepsilon$$

Prop: $f \in L^p(\Omega)$ $p \in [1, +\infty[$

• se $\varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f\varphi \in L^p(\Omega)$

• se $\int_{\Omega} \varphi f d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f=0$ quasi ovunque $\nearrow \frac{p}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dim: $\varphi_n \in C_c(\Omega)$ t.c. $\varphi_n \rightarrow \text{sgn}(f) |f|^{p-1}$ in $L^q(\Omega)$ con conv. q.o. e dominata

$$0 = \int_{\Omega} \varphi_n f d\mu \xrightarrow[\text{dom.}]{\text{conv.}} \int_{\Omega} \underbrace{f \cdot \text{sgn}(f) |f|^{p-1}}_{|f|^p} d\mu \Rightarrow \int_{\Omega} |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow f=0 \text{ q.o. in } \Omega \quad \square$$

Prop: $\overline{C_c(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{\infty}} = C_0(\mathbb{R}^N)$

\uparrow funzioni $\{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$

Dim: Se $f \notin C_0(\mathbb{R}^N)$, $\exists \varepsilon_0 \exists |x_n| \rightarrow +\infty$ t.c. $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow g \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad \|f-g\| \geq \varepsilon_0$

viceversa se $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $\|f \cdot g_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$

Oss: $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq g_n \leq 1$, allora $g_n(x) = 1$ se $|x| \leq n$ o $g_n(x) = 0$ se $|x| \geq n+1$

SERIE DI FOURIER

Sia $I = (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R}$, allora si ha:

$$L^2_{\mathbb{C}}(I) \cong L^2_{\mathbb{R}}(I) \times L^2_{\mathbb{R}}(I)$$

$$f \longleftrightarrow (\mu, \nu)$$

con $f(t) = u(t) + i v(t)$ e $u, v \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$

Definisco $\langle f, g \rangle \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$ prodotto interno a $L^2(I)$ \leftarrow complesso coniugato

$$\text{Allora avrò: } \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mu(t)|^2 + |\nu(t)|^2 dt$$

Definisco anche $e_k(t) \doteq e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Allo stesso modo ho } \|e_k\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2 dt = 1$$

$$\text{e } \langle e_k, e_h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot e^{-iht} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t} dt = \delta_{hk}$$

$$\text{Sia } \hat{f}_k \doteq \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad \text{COEFFICIENTI DI FOURIER di } f$$

Preso $n \in \mathbb{N}_0$, definisco le somme parziali della serie, ottenute troncandola in

$$\text{modo simmetrico: } S_n f := \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k \leftarrow \text{Proiezione ortogonale di } f \text{ su } V_n := \text{span}\{e_k : |k| \leq n\}$$

Prop: a) $\|S_n f\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2$

b) $\langle f - S_n f, e_n \rangle = 0 \quad |n| \leq n$

c) $\|f - S_n f\|^2 = \min \{ \|f - p\|^2 : p \in V_n \}$

d) $\|f\|^2 = \|S_n f\|^2 + \|f - S_n f\|^2$ (Pitagora)

Dim: a) $\|S_n f\|^2 = \langle S_n f, S_n f \rangle = \langle \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k, \sum_{|h| \leq n} \hat{f}_h e_h \rangle = \sum_{\substack{|h|, |k| \leq n}} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_h} \langle e_k, e_h \rangle = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2$

b) $\langle f - S_n f, e_n \rangle = \langle f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k, e_n \rangle =$
 $= \langle f, e_n \rangle - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \langle e_k, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle - \langle f, e_n \rangle = 0$

c) $p \in V_n, \|f - p\|^2 = \|\underbrace{f - S_n f}_a + \underbrace{S_n f - p}_b\|^2 \Rightarrow \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \|b\|^2$

$b \in V_n, f - S_n f \in V_n^\perp, \text{ con } \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle = 0$

$\|f - p\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f - p\|^2 \geq (\|f - S_n f\|)^2$

d) Per $p=0$ ottengo $\|f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$

Cor: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$ disuguaglianza di Bessel

$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\hat{f}_k| = 0$

Dim: deriva da (a) + (d): $\|f\|^2 \geq \|S_n f\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2$ e passando al sup: $\|f\|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$

Teo: a) $S_n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $L_c^2(I)$

b) $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$ uguaglianza di Parseval

c) $\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$

Cor: $L_c^2(I) \longrightarrow \ell_c^2(\mathbb{Z})$

(b+c) $f \longmapsto (\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ è un'isometria

Dim(Teo): il punto (b) del Teorema segue dal punto (d) della proposizione.

$\|S_n f - f\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ *

Fatto: $\bigcup_{n \geq 0} V_n$ è denso in $C_c(I)$ per $\|\cdot\|_\infty$

Richiami di teoria:

$$I = (-\pi, \pi), \quad L^2_{\mathbb{C}}(I) \cong L^2_{\mathbb{R}}(I) \times L^2_{\mathbb{R}}(I) \quad \text{con } f(t) = u(t) + i v(t) \text{ e } u, v \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$$

$$\langle f, g \rangle \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{e} \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$e_k(t) \doteq e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_n f := \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k \quad \text{con} \quad \hat{f}_k \doteq \langle f, e_k \rangle$$

↪ Proiezione ortogonale di f su $V_n := \text{span}\{e_k : |k| \leq n\} \Rightarrow$ Oss: $\dim_{\mathbb{C}} V_n = 2n+1$

$$\|f\|^2 = \|S_n f\|^2 + \|f - S_n\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2 + \underbrace{\|f - S_n\|^2}_{O(1) \text{ per } n \rightarrow \infty}$$

Teorema: Se $f \in L^2(I)$

a) $\|f - S_n f\| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$

b) $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$ *uguaglianza di Parseval*

c) $f, g \in L^2(I)$ e $\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$

Fatto: $\bigcup_{n \geq 0} V_n$ è denso in $C_c(I)$ per $\|\cdot\|_{\infty}$

Teorema di Stone-Weierstrass (a valori in \mathbb{C}):

Se T sp. compatto, $C(T, \mathbb{C})$ con $\|\cdot\|_{\infty}$. Se $A \subset C(T, \mathbb{C})$ è una sottoalgebra tale che:

(I) A separa i punti ($\forall t_1 \neq t_2 \in T \exists \alpha \in A \text{ t.c. } \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$)

(II) A contiene le costanti

(III) Se $\alpha \in A \Rightarrow \bar{\alpha} \in A$ (*)

allora $\text{char}(A) = C(T, \mathbb{C}) \rightarrow$ algebra

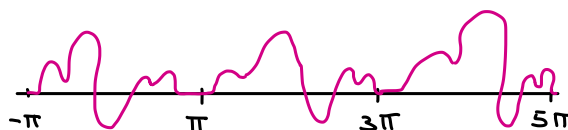
Oss: $T = \mathbb{R}/\sim \quad x \sim y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$C(T, \mathbb{C}) \cong C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \equiv$ funzioni 2π -periodiche

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$, A è una sottoalgebra e contiene le costanti

e_1 separa i punti: $e^{it_1} = e^{it_2} \Leftrightarrow t_1 \sim t_2$

SW $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ è denso in $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ per $\|\cdot\|$



Dim: Sia $f \in L^2(I)$, $\varepsilon > 0$ fissato, $\varphi \in C_c(I)$, $\|f - \varphi\| < \varepsilon/2$

$$p \in V_{\bar{n}} \text{ t.c. } \| \varphi - p \| \stackrel{(*)}{\leq} \| \varphi - p \|_{\infty} < \varepsilon/2 \Rightarrow \| g \|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dt \stackrel{(*)}{\leq} \| g \|_{\infty}^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt$$

$$\|f - p\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - p\| < \varepsilon \leadsto \|f - S_n f\|^2 \leq \|f - p\|^2 < \varepsilon^2$$

Se $n \geq \bar{n} \Rightarrow p \in V_n$, $\varepsilon > 0 \exists \bar{n}$: se $n > \bar{n}$, $\|f - S_n f\| < \varepsilon$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \hat{g}_k \leadsto \langle S_n f, g \rangle = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \langle e_k, g \rangle = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k} \quad \text{oss: } \langle e_k, g \rangle = \overline{\langle g, e_k \rangle} = \overline{\hat{g}_k}$$

$L^2 \rightarrow \mathbb{C}$ è continua (Per Cauchy-Schwartz)

$f \mapsto \langle f, g \rangle$ Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ ottengo la tesi

□

CAUCHY-SCHWARTZ per prodotti Hermitiani

H spazio di Hilbert su \mathbb{C} , $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

↳ sp. con prod. Herm. completo per def. posto $\|x\|^2 \doteq \langle x, x \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{C}, \quad \langle x, y \rangle = e^{i\theta} |\langle x, y \rangle|, \quad z = |z| e^{i\theta}, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$$

$$(*) \|x + t e^{i\theta} y\|^2 = \langle x + t e^{i\theta} y, x + t e^{i\theta} y \rangle = \|x\|^2 + t(e^{i\theta} \langle y, x \rangle + \underbrace{e^{-i\theta} \langle x, y \rangle}_{|\langle x, y \rangle|}) + t^2 \|y\|^2$$

$$0 \leq \underbrace{\|x\|^2}_C + 2t \underbrace{|\langle x, y \rangle|}_{B/2} + \underbrace{t^2 \|y\|^2}_A \leadsto |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

\uparrow $\forall t \in \mathbb{R}$

Oss: $L^1(I) \supset L^2(I) \supset L^\infty(I)$ con $I = (-\pi, \pi)$ e $\|g\| \leq \|g\|_{\infty}$

$$f \in L^2(I) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f| \cdot 1 dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 \right)^{1/2}$$

Convergenza delle serie di Fourier in media quadratica

Sia $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k$ in $L^2(I)$

$$f(t) = \frac{1}{2} \underbrace{(f(t) + f(-t))}_{f_0(t)} + \frac{1}{2} \underbrace{(f(t) - f(-t))}_{f_1(t)}$$

$$f_0(t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-ikt} \right] = \hat{f}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \cos(kt)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-ikt} \right] = \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \sin(kt)$$

Se $f(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t$ allora.

$$\hat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt} = \overline{\hat{f}_k}$$

In tal caso: $f_0(t) = \hat{f}_0 + \sum_{k \geq 1} (\hat{f}_k + \bar{\hat{f}}_k) \cos(kt)$

$$f_1(t) = \sum_{k \geq 1} i(\hat{f}_k - \bar{\hat{f}}_k) \sin(kt)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int f(t) (\cos kt - i \sin kt) dt$$

$$(\hat{f}_k + \bar{\hat{f}}_k) = 2 \operatorname{Re} \hat{f}_k = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt}_{a_k}$$

$$i(\hat{f}_k - \bar{\hat{f}}_k) = 2i^2 \operatorname{Im} \hat{f}_k = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt}_{b_k}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \quad \text{serie convergente in } L^2$$

Es: Verificare che $1, \cos(kt), \sin(kt)$ ($k \geq 1$) sono un sistema ortogonale in $L^2_{\mathbb{R}}(I)$

Es: Mostrare che $g \in L^2_{\mathbb{R}}(0, \pi)$, $g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kt)$ conv. in L^2 per opportuni $c_k \in \mathbb{R}$

Oss: Se f è dispari $a_k = 0 \quad \forall k \geq 0$, se f è pari $b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$

Es: Verificare che se $f \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, $\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} [a_k^2 + b_k^2]$ (Parseval in \mathbb{R})

Prop: Se $(\hat{f}_k)_k \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (cioè se $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < +\infty$) allora la $\sum \hat{f}_k e_k$ è unif. conv. a f

Teo: $f_k: X \rightarrow F$, F Banach, $\sup_x \|f_k\|_F \leq M_k$ con $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ converge uniformemente

Dim: $S_n = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ è una succ. di Cauchy. Sia $\varepsilon > 0$, N t.c. $\sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon$;

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|_F = \left\| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k(x)\|_F \leq \sum_{k=N}^{+\infty} M_k < \varepsilon \quad \text{con } n > m \geq N$$

$\uparrow_{n,m \geq N}$ $\uparrow_{\text{se } N \text{ grande}}$

$S_n(x)$ converge (F è completo)

$$\|S_n(x) - S(x)\|_F \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_F \leq \sum_{n+1}^{+\infty} M_k \rightarrow 0$$

□

Dim (Prop): $|f_k e_k(t)| = |f_k|$ quindi se $\sum |f_k|$ converge $\sum f_k e_k(t)$ conv. unif. a f

Es: Scrivere lo sviluppo in serie delle funzioni $f(t) = t$, $f(t) = |t|$ su $(-\pi, \pi)$

e dire se la serie converge uniformemente

Oss: Se f_n di Cauchy per $\|\cdot\|_{\infty}$, $\forall k \in \mathbb{N} \exists N: n, m \geq N \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall x \in X \setminus E_{n,m,k}$

$\underbrace{m(E)=0}_{\text{di mis nulla}}$
 $X \setminus \bigcup_{n,m,k} E_{n,m,k} \quad \forall x \notin E, f_n(x) \text{ di Cauchy}, f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus E$

Testo di riferimento: Folland, Real Analysis

MISURE PRODOTTO:

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura

Si definisce $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (σ -algebra prodotto) la σ -algebra su $X \times Y$ generata dai "rettangoli" $E \times F$, con $E \in \mathcal{A}$ e $F \in \mathcal{B}$, cioè la più piccola σ -alg. che contiene i rett.

Def: $\mu \times \nu$ è una misura prodotto di μ e ν se è definita su $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e

$$\mu \times \nu(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F) \quad \forall E \in \mathcal{A} \text{ e } F \in \mathcal{B}$$

Prop: \exists una misura prodotto

costruzione: $(\mu \times \nu)^*(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu(E_i) \nu(F_i) : (E_i, F_i)_i \text{ t.c. } E \subseteq \bigcup_i E_i \times F_i \right\}$

$$E \subseteq X \times Y$$

○ $(\mu \times \nu)^*$ è una misura esterna

○ $\exists \mathcal{M}$ σ -alg. dei misurabili t.c. $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura completa

○ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ e $(\mu \times \nu)^*(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$

Oss: $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ è la misura prodotto massimale, è anche l'unica misura prodotto se μ e ν sono σ -finite

Es: $X = ([0, 1], \mathcal{L})$, $Y = ([0, 1], \mathcal{B}(Y), \nu)$, $\nu(F) = \#F$, $F \subseteq Y$

la misura prodotto non è unica: $X \times Y = [0, 1]^2$, $\mathcal{M}([0, 1]) \otimes \mathcal{B}([0, 1])$

Oss: In generale $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$ e $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ non è completa

Esempi: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m})$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ non misurabile

$F \subseteq \mathbb{R}^m$ trascurabile

$$V \times F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m}) \text{ ma } \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

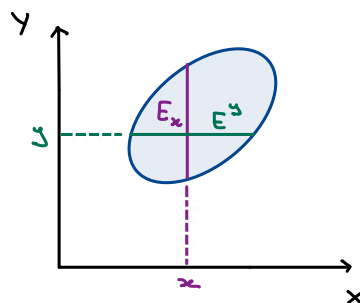
$$\text{in } \mathbb{R}^n \times F$$

SEZIONI E RESTRIZIONI

$$E \subseteq X \times Y$$

$$\forall x \in X \quad E_x := \{y : (x, y) \in E\} \subseteq Y$$

$$\forall y \in Y \quad E^y := \{x : (x, y) \in E\} \subseteq X$$



$$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \quad f_x(y) := f(x, y): Y \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall y \quad f^y(x) := f(x, y): X \rightarrow \mathbb{R}$$

Prop: $\circ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow E_x \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X, \quad E^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y$

$\circ f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu) \Rightarrow f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{B}, \nu) \quad \forall x, \quad f^y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \forall y$

Dim: $\mathcal{E} = \{G \subseteq X \times Y \text{ che verificano } (*)\}$ Osserviamo che $E \times F \in \mathcal{E} \quad \forall E, F$

Si mostra che \mathcal{E} è una σ -algebra (da verificare) $\Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

Per il secondo punto, osserviamo che $f_x^{-1}(I) = f^{-1}(I)_x \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X \text{ e } I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{y-1}(I) = f^{-1}(I)^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y \text{ e } I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Oss: Se $(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$ è un completamento di $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ allora vale la tesi con $\tilde{\mathcal{V}}$ invece di \mathcal{V} ($\tilde{\mathcal{V}}$ = "per quasi ogni")

Oss: Non vale il viceversa (esercizio)

Domanda: Come si esprime $\mu \times \nu(E)$ in funzione di $\mu(E^y)$ e $\nu(E_x)$?

Prop: μ, ν σ -finite $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow$

① $x \rightarrow \nu(E_x)$ è misurabile in (X, \mathcal{A}, μ)

② $y \rightarrow \mu(E^y)$ è misurabile in (Y, \mathcal{B}, ν)

③ $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$

Dim: Gli insiemi $E \subseteq X \times Y$ che verificano ①, ② e ③ sono una σ -alg. che cont. i rettangoli:

\circ I rettangoli verificano

CLASSE MONOTONA $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Per linearità: } U \text{ finite e } \cap \text{ finite di rettangoli verificano} \\ \circ \text{ Le } U \text{ numerabili crescenti verificano (Beppo-Levi)} \\ \circ \text{ Le } \cap \text{ numerabili decrescenti verificano (\sigma\text{-finitzza})} \end{array} \right.$

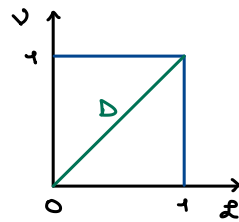
\circ Una classe monotona, che contiene \emptyset e $X \times Y$, è una σ -algebra

Es: $X = Y = [0, 1]$, $\mu = \mathcal{L}$, $\nu(E) = \#E$

$$X \times Y = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$$

$$\int_0^1 \underbrace{\nu(E_x)}_{=1} d\mathcal{L} = 1 > \int_0^1 \mathcal{L}(E^y) d\nu = 0$$

Si ha anche $(\mathcal{L} \times \nu)^*(D) = +\infty$ (verificare)



Teo (Fubini - Tonelli):

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura σ -finiti

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ spazio prodotto (unico)

① (TONELLI) $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$, $f \geq 0 \Rightarrow f_x$ e f^y sono misurabili,

$$x \mapsto \int_Y f_x \text{ e } y \mapsto \int_X f^y \text{ sono misurabili } \forall (x, y) \text{ e } \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu$$

② (FUBINI) $f \in L^1(X \times Y) \Rightarrow$ vale la stessa cosa con \tilde{V} al posto di V

Dim:

① \odot $f = \chi_E \Rightarrow$ è la prop. precedente dato che $f_x = \chi_{E_x}$ e $f^y = \chi_{E^y}$

\odot $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ semplice \Rightarrow linearità di \int

\odot $f \in \mathcal{M} \Rightarrow f = \sup_n S_n$, $S_n \geq 0$ semplice, $S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow \sup_n (S_n)_x = f_x$, $\sup_n (S_n)^y = f^y \Rightarrow$ si applica Beppo-levi

② $f \in L^1 \Rightarrow f = f^+ - f^-$ la decomposizione commuta con le restrizioni \Rightarrow linearità di f e il pt ①

Oss: Per vedere se $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$ sta in $L^1(X, Y)$ basta controllare che $\int_{X \times Y} |f| < +\infty$ cioè

$$\int_X \int_Y |f|_x d\nu d\mu < +\infty \quad \text{o} \quad \int_Y \int_X |f|^y d\mu d\nu < +\infty$$

Oss: Il teorema vale anche per $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$ e $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$

spazio prodotto completo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ con \tilde{V} al posto di V

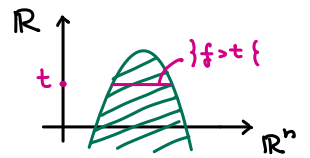
Oss: In $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mathcal{L})$ possiamo iterare n volte il Teo $\Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$, $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1 \dots x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$

Prop: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}) \Leftrightarrow S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y < f(x)\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\text{se } f \geq 0 \text{ si ha: } \int_{\mathbb{R}^n} f = \mathcal{L}^{\mathbb{R}^{n+1}}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$$

Dim: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (S_f \cap \{y=t\}) = \{f>t\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \forall t$



Supponiamo S_f misurabile $\Rightarrow S_f \cap \{y=t\} = \{f>t\}$ misurabile $\forall t$

$\{f>t\} = \bigcup_n \{f>t_n\} \quad t_n > t_{n+1} \rightarrow t \Rightarrow \{f>t\} \text{ misurabile } \forall t \Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Supponiamo $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f = \sup_n S_n$ con $S_n \leq S_{n+1}$, semplici.

$S_f = \bigcup_n S_{S_n}$ misurabile se S_s misurabile $\forall s$ semplice.

$s = \sum_{i=1}^N c_i X_{E_i}$ con $E_i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, E_i disgiunti, $S_s = \bigcup_{i=1}^N E_i \times (-\infty, c_i)$ misurabile

Inoltre, se $s \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum c_i \mathcal{L}(E_i) = \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)) \Rightarrow$ concludo per Beppo-Levi per $f \geq 0$

Qss: Si può definire, per $f \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f := \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$.

Questa è una definizione equivalente dell'intervallo di Lebesgue.

ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE CON SEZIONI MISURABILI (con ipotesi del continuo)

ω_0 primo ordinale infinito (numerabile)
 ω_1 primo ordinale non numerabile

$$\left. \begin{array}{l} \omega_0 \text{ primo ordinale infinito (numerabile)} \\ \omega_1 \text{ primo ordinale non numerabile} \end{array} \right\} \rightarrow \text{IC: } |\omega_1| = \mathfrak{c} = 2^{\omega_0} = 2^{|\omega_0|}$$

$\Rightarrow \exists$ bijezione $f: [0,1] \rightarrow \omega_1$. Considero l'insieme $E = \{(x,y) \in [0,1]^2 : f(x) < f(y)\}$

Oss: $\forall x \in [0,1]$ $f(x)$ è un ordinale numerabile

$E^x = \{y : f(x) < f(y)\} \Rightarrow E^x$ è finito o numerabile \Rightarrow di **BOREL**

$E_x = \{y : (x,y) \in E\} = \{y : f(x) < f(y)\} \Rightarrow E_x$ è finito o numerabile $\Rightarrow E_x$ è di **BOREL**

Se E fosse Leb. misurabile varrebbe F.T.

$$\mathbb{I}(E) = \int_0^1 \mathbb{I}(E_x) dx = 1$$

\Rightarrow ASSURDO

$$= \int_0^1 \mathbb{I}(E^x) dy = 0$$

MISURABILE \Rightarrow SEZIONI MISURABILI

MISURABILE \nRightarrow SEZIONI MISURABILI

OPERATORI DI COMPOSIZIONE

$$u \mapsto T(u) = f(x, u)$$

Def: (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura. $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice di **CARATHÉODORY** se

① $f(x, \cdot)$ è continua $\forall x \in X$ quasi per ogni

② $f(\cdot, t)$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$

Prop: $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di Carathéodory

$$|f(x, t)| \leq h(x) + C|t| \quad C > 0 \text{ e } h \geq 0 \text{ con } \int_x h < +\infty \text{ misurabile}$$

\Rightarrow ① $\forall u \in \mathcal{M}(X)$ $T(u)(x) := f(x, u(x))$ è misurabile e ② $T: L^1 \rightarrow L^1$ con continuità

Oss: $\mu_n \rightarrow \mu$ in $L^1(X) \Rightarrow \exists h \geq 0, g \in L^1(X)$ t.c.

$$\mu_{n_k}(x) \rightarrow \mu(x) \quad \forall x \in X \text{ e } |\mu_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X$$

tutte le nozioni
sono stabili per
limite puntuale

Dim: Vediamo che $f(x, u(x))$ è misurabile

$$u = \sum c_i \chi_{E_i} \text{ semplice} \Rightarrow f(x, u) = \sum f(x, c_i) \chi_{E_i}(x) \text{ misurabile}$$

in generale sia $s_n \rightarrow u$ puntualmente, s_n semplice $\Rightarrow f(x, s_n(x)) \rightarrow f(x, u(x)) \quad \forall x$

$\Rightarrow f(x, u)$ è misurabile. Vediamo che $u \in L^1 \Rightarrow T(u) \in L^1$

$$\|T(u)\|_{L^1} = \int_X |f(x, u)| \leq \int_X h + C \int |u| < +\infty$$

Infine, via $\mu_n \rightarrow \mu$ in $L^1(X)$, $\exists n_k$ t.c. $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$ $\forall x \in X$ e $|\mu_{n_k}| \leq g$ $\forall x$ con $\int g < +\infty$

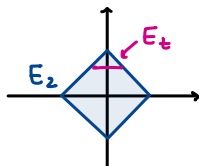
$$\Rightarrow f(x, \mu_{n_k}(x)) \rightarrow f(x, \mu(x)) \quad \forall x \quad |f(x, \mu_{n_k}(x))| \leq h(x) + Cg(x)$$

$$\text{Per il Teo di Leb.} \quad \int_X |f(x, \mu_{n_k}(x)) - f(x, \mu(x))| \xrightarrow{n} 0$$

$$\|T(\mu_{n_k}) - T(\mu)\|_{L^1(X)}$$

$$\Rightarrow T(\mu_n) \rightarrow T(\mu) \text{ in } L^1(X)$$

ESERCIZI: ① $E_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$



Calcolare $|E_n|$ volume

$$\text{Per F.T.} \quad |E_n| = \int_{-1}^1 |E_t| dt, \quad E_t = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in E_n\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leq 1 - |t| \} = (1 - |t|) E_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\Rightarrow |E_t| = |E_{n-1}| (1 - |t|)^{n-1}$$

$$\Rightarrow |E_n| = |E_{n-1}| \int_{-1}^1 (1 - |t|)^{n-1} dt = 2 |E_{n-1}| \int_0^1 (1 - t)^{n-1} dt = 2 |E_{n-1}| \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{2}{n} |E_{n-1}| = \frac{2^2}{n(n-1)} |E_{n-2}| =$$

$$= \frac{2^k}{n - (n-k+1)} |E_{n-k}| =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{n!} |E_1| = \frac{2^n}{n!} \xrightarrow{n} 0$$

② $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Calcolare $\int_E f(x, y) dx dy$ con $f(x, y) = \frac{1}{x(x^2 + y^2)}$

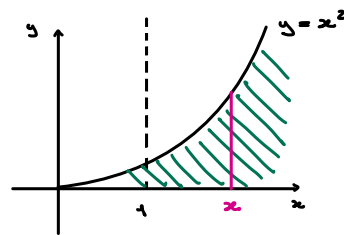
$$\int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \chi_E$$

$$\int_E f = \int_1^\infty \left(\int_{E_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_1^\infty \int_0^{x^2} \frac{1}{x(x^2 + y^2)} dy dx$$

$$\int \frac{1}{(y^2 + a^2)} dy = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right) + C$$

$$\int_E f = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Big|_0^{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \arctan(x) dx = -\frac{1}{x} \arctan(x) \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{4} + \lim_M \left(\log \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \right) + \log \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} + \log \sqrt{2}$$



$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a+(a+b)x^2+cx}{x(1+x^2)} \quad a=1, b=-1, c=0$$

Es: $f(t) = t \sin(-\pi, \pi)$
 $g(t) = |t| \sin(-\pi, \pi)$ } sviluppo in seni e coseni

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad 0 \leq k \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad k \geq 1$$

1) f dispari $\Rightarrow a_k(f) = 0$

f pari $\Rightarrow b_k(g) = 0$

$$f(t) = t \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t}_{\text{derivo}} \underbrace{\sin(kt)}_{\text{integro}} dt = \frac{1}{\pi} \left[t \frac{(-\cos t)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt = \frac{2}{\pi k} (-\cos k\pi) + 0$$

$$= \frac{2}{\pi k} (-1)^{k+1}$$

$f(t) \stackrel{\text{in } L^2}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi k} (-1)^{k+1} \sin(kt)$ Oss: $\left((-1)^k \frac{2}{\pi k} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{N})$
 $\notin \mathcal{L}^1(\mathbb{N})$

2) $g(t) = |t|$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \pi^2 = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos kt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin kt}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -4/\pi k^2 & k \text{ disp.} \end{cases} \quad \text{per } k \geq 1 \quad (a_0 = \pi)$$

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \equiv 1(2)}} \frac{\cos(kt)}{k^2} \quad a_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}) \Rightarrow \text{la serie conv. unif.}$$

Oss: $0 = g(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ disp.}} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k \text{ disp.}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Divagazione: $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$S = \sum_{k \text{ disp.}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \text{ pari}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{6}$$

Oss: $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi) \quad S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k \rightarrow f \text{ in } L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$

\uparrow funzioni 2π -periodiche continue

$$S_n f \rightarrow \tilde{f} \text{ in } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \quad 2\pi \text{ periodica che coincide con } f \text{ su } (-\pi, \pi)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z} \quad k - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2\pi} < k + \frac{1}{2}$$

Esercizio: Mostrare che $\int_a^{a+2\pi} \tilde{f}(t) dt$ non dipende da $a \in \mathbb{R}$

È naturale pensare f come funzione di $L^2(\pi)$: $\pi = \mathbb{R}/\sim$ con $x \sim y \Leftrightarrow x - y = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio: Se $f \in L^2_{\mathbb{C}}(a, a+T)$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(s) \overline{g(s)} ds$

le funzioni $\tilde{e}_k(t) = e^{ik \frac{2\pi}{T} t}$ sono un sistema ortonormale completo (generano $L^2_{\mathbb{C}}(a, a+T)$)

Esempio: $a=0$ $T=1$ $\tilde{e}_k(t) = e^{i2\pi kt}$

Prop: Se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ continua e derivabile, allora $\hat{f}_k \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ e vale la disuguaglianza:

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^{1/2} \|f'\|_2$$

Dim: $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right)$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{ik} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right) = \frac{1}{ik} (\hat{f}')_k$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |(\hat{f}')_k| \leq \sqrt{\left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \right) \left(\sum_{k \neq 0} |(\hat{f}')_k|^2 \right)}$$

\swarrow
 prod. scalare in $\ell^2(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'| dt \right) \text{ per identità di Parseval applicata a } f'$$

Esercizio: lo stesso argomento funziona anche se f ha un numero finito di punti angolosi

Prop: Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora definendo $f_h(x) \doteq f(x-h)$, $f_h \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\| = 0$

Es: Dimostrarlo anche in L^p ($p \neq \infty$)

Dim: Argomento di densità

Sia $\varepsilon > 0$, scelgo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$: $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$, $\text{supp } \varphi \subset \overline{B_R(0)}$

$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{H-C} \varphi \in U.C.$: $\exists \delta > 0$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$

Se $|h| < \delta$ $|\varphi(x) - \varphi_h(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow \|\varphi - \varphi_h\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow \|\varphi - \varphi_h\|_1 < \varepsilon/3$

$$\|f - f_h\| \leq \underbrace{\|f - \varphi\|_1}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\varphi - \varphi_h\|_1}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\varphi_h - f_h\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\|f - f_h\|_1 < \varepsilon \quad \forall |h| < \delta$

LEMMA DI RIEMANN:

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$, $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-h) e^{i\lambda(t-h)} dt$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt + \underbrace{f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)}}_{e^{i\lambda t - i\pi} = -e^{i\lambda t}} dt \right] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - \underbrace{f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)}_{f_{\pi/\lambda}(t)} \right| dt = \frac{1}{2} \|f - f_{\pi/\lambda}\|_1 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

□

LEMMA (NUCLEI DI DIRICHLET):

$$D_n(t) \doteq \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}, \quad D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \text{ con } t \neq 0$$

Dim: Per esercizio. Suggestimenti:

- $e^{int} D_n(t)$ è una somma geometrica
- moltiplicare $e^{-it/2}$ sopra e sotto la formula che si trova

Oss: $D_n(t)$ è pari, per $t \neq 0$: $D_n(0) = n+1$ e si ha $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$

$$S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k = \sum_{|k| \leq n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(t-s) ds$$

Def: Dico che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π periodica è regolare a tratti se su ogni periodo ha un numero finito di discontinuità e fuori è C^1 con derivata limitata (es: $f(t) = t$)

Teorema: Se f è regolare a tratti, $S_n f(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ e $f(x^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$

$$\text{Dim: } S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \underbrace{f(x+s)}_{t=x+s} \underbrace{D_n(s)}_{D \text{ è pari}} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds =$$

↑ integrando è 2π -periodico

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+s) D_n(s) ds}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x^-)} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x^+)} \right]$$

$$f(x_0^+) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0+s) D_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0^+) D_n(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0+s) D_n(s) ds =$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) ds = 1$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0^+) - f(x_0+s)) D_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(x_0^+) - f(x_0+s)}{s}}_{g_x(s)} \cdot \underbrace{\frac{s}{\sin(\frac{s}{2})}}_{D_n(s)} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right) ds$$

$$g_x(s) \text{ è in } L^1, \sup |f'| \geq \left| \frac{f(x^+) - f(x+s)}{s} \right| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_x(s) \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ per Riemann-Lebesgue}$$

è limitata perché un fattore è limitato da 2 e l'altro dal sup di f'

TEOREMA DEL CAMBIO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Domanda: $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\phi \in C^1(\Omega)$, $E \subseteq \Omega$ misurabile per Lebesgue

① $\phi(E)$ è misurabile?

② Posso stimare $|\phi(E)|$

Caso lineare: $\phi(x) = L \cdot x$ $L \in M(n)$

Caso 1: $\det L = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(L)) < n$, $\text{Im}(L) \subsetneq \mathbb{R}^n \Rightarrow |\text{Im}(L)| = 0$

$$L \cdot E = \phi(E) \subseteq \text{Im}(L) \quad \forall E \Rightarrow |\phi(E)| = 0 \quad \forall E$$

Caso 2: $\det L \neq 0$ LK compatto $\forall K$ compatto, LA aperto $\forall A$ aperto

LE è misurabile e $|LE|$ è una misura invariante per traslazioni

$$|LE| = c(L)|E|, \quad c(L) = |L[0,1]^n|$$

Lemma: $c(L) = |\det L|$

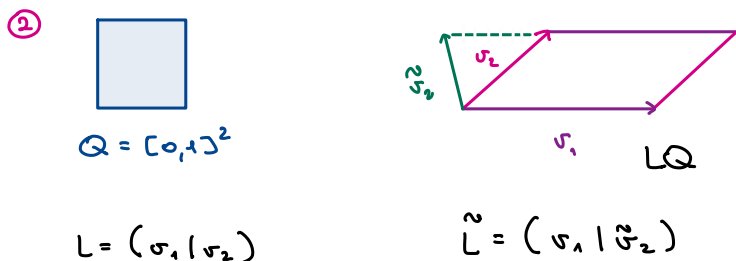
$$① \quad c(L \cdot T) = c(L) \cdot c(T)$$

$$|\det(L \cdot T)| = |\det L| |\det T|$$

• Se $L \in O(n)$ (ortogonale) allora manda le palle in sé stesse: $LB = B$ $c(L) = 1$

• L diagonale, $|L([0,1]^n)| = \prod |\lambda_i| = |\det L|$ $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

• $L \in M(n)$ $L = ADB$ D diagonale, $A, B \in O(n)$, $c(L) = c(A)c(D)c(B) = |\det(D)| = |\det(L)|$



$$|LQ| = |v_1| \cdot \left| v_2 - \underbrace{\left\langle v_2, \frac{v_1}{|v_1|} \right\rangle}_{\tilde{v}_2} \frac{v_1}{|v_1|} \right|$$

$$= |\det \tilde{L}| = |\det L|$$

Teorema (CAMBIO DI VARIABILE):

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi \in C^1$, ϕ iniettivo

① $E \subseteq \Omega$ misurabile $\Rightarrow \phi(E)$ misurabile e $|\phi(E)| = \int_E |\mathcal{J}_\phi(x)| dx$, $\mathcal{J}_\phi = \det(D\phi)$

② $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mis. con $f \geq 0$ o $f \in L^1(\Omega)$ $\int_{\phi(\Omega)} f(y) dy = \int_\Omega (f \circ \phi)(x) |\mathcal{J}_\phi(x)| dx$

($y = \phi(x)$ cambio di variabile, $f = \chi_{\phi(E)}$, $f \circ \phi = \chi_E$)

Lemma: $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 con $\|D\phi\| \leq C$, $E \subseteq \Omega$ mis. $\Rightarrow \phi(E)$ mis. e $|\phi(E)| \leq \int_E |\mathcal{J}_\phi(x)| dx$

Dim: $\phi(B_r(x_0)) \subseteq B_{Cr}(\phi(x_0)) \quad \forall r \in \mathbb{R}^n$

• $|N|=0 \Rightarrow |\phi(N)|=0$

• K compatto $\Rightarrow \phi(K)$ compatto

• $K \in \mathcal{F}_\sigma$ cioè $K = \bigcup_i K_i$ K_i compatti $\Rightarrow \phi(K) \in \mathcal{F}_\sigma$

1) $\phi(B)$ Borel. $\forall B$ Borel (va mostrato)

o

2) E mis. $\Rightarrow E = F \cup N$ $F \in \mathcal{F}_\sigma$ e $|N|=0$ (va mostrato)

$\phi(E) = \phi(F) \cup \phi(N)$ misur.

Claim: $\forall K$ compatto $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0$ t.c. $\phi(Q_r(x_0)) \subseteq F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0)) \quad \forall r \in (r_0, \infty), \forall x_0 \in K$

dove $Q_r(x_0) = \prod_i [(x_0)_i - \frac{r}{2}, (x_0)_i + \frac{r}{2}]$ e $F_{x_0}(x) = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)$

Dim: $i \in \{1, \dots, n\}$

$|\phi_i^{(x)} - (F_{x_0})_i^{(x)}| = |\phi_i(x) - \phi_i(x_0) - D\phi_i(x_0)(x - x_0)| \stackrel{\text{LAGR.}}{\leq} |D\phi_i(\xi_i) - D\phi_i(x_0)| \cdot (x - x_0) \leq r \cdot \omega(r) \quad o(r)$

ω modulo di continuità di $D\phi$ ($\omega(r) = \max_{\|x-y\| \leq r} |f(x) - f(y)|$ modulo di continuità)

Scego r_0 t.c. $\omega(r_0)$. Prendendo le misure:

$$\begin{aligned} |\phi(Q_r(x_0))| &\leq F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0)) = |\mathcal{J}_\phi(x_0)| (1+\varepsilon)^n r^n = (1+\varepsilon)^n \int_{Q(x_0)} |\mathcal{J}_\phi(x)| dx \\ &= (1+\varepsilon)^n \int_{Q_r(x_0)} |\mathcal{J}_\phi(x)| + (|\mathcal{J}_\phi(x_0)| - |\mathcal{J}_\phi(x)|) dx \\ &\leq (1+\varepsilon)^n \int |\mathcal{J}_\phi(x)| + \varepsilon (1+\varepsilon)^n r^n \quad \varepsilon \text{ per } r_0 \text{ piccolo} \end{aligned}$$

$\forall r < r_0, \forall x \in K$

$E = \bigcup_i Q_i \quad |Q_i \cap Q_j| = 0 \quad i \neq j \quad Q_i = Q_{r_i}(x_i) \quad r_i < r_0 \quad x_i \in K$

$|\phi(E)| \leq (1+\varepsilon)^n \int_E |\mathcal{J}_\phi(x)| + \varepsilon (1+\varepsilon)^n |E|$

A aperto $A = \bigcup E_n \quad E_n \subseteq E_{n+1} \quad E_n$ unione num. di cubi

$|\phi(A)| \leq (1+\varepsilon)^n \int_A |\mathcal{J}_\phi(x)| + \varepsilon (1+\varepsilon)^n |A|$

E misurabile, $|E| < \infty$, $A \supseteq E$ aperto $|A| \leq |E| + \varepsilon$,

$|\phi(E)| \leq |\phi(A)| \leq (1+\varepsilon)^n \int_E |\mathcal{J}_\phi(x)| + \overset{\|D\phi\|_\infty}{C_\varepsilon} (1+\varepsilon)^n + (|E| + \varepsilon) (1+\varepsilon)^n$. Mando $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Cor: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mis. $f \geq 0 \Rightarrow \int_{\phi(\Omega)} f \leq \int_\Omega (f \circ \phi) |\mathcal{J}_\phi|$

Dim: $f = \chi_{\phi(E)}$ ok, f semplice per linearità, f generale per appross. con funzioni semplici

Cor: $\bar{z} = \{x: \exists \phi(x) = 0\} \Rightarrow |\phi(z)| \leq \int_{\bar{z}} |\exists \phi(x)| = 0$ (LEMMA DI SARD)

Dim. (Teo): Supp. $\phi^{-1} \in C^1$ (vero se $\exists \phi(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$)

$$|\exists \phi(x) \cdot \exists \phi^{-1}(\phi(x))| = \det(D\phi(x) \cdot D\phi^{-1}(\phi(x))) = 1$$

$$\int_{\phi(\Omega)} f \leq \int_{\Omega} (f \circ \phi) |\exists \phi| \leq \int_{\phi(\Omega)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) |\exists \phi| \cdot |\exists \phi^{-1}| = \int_{\phi(\Omega)} f$$

ϕ^{-1}

Il caso L^1 si fa per linearità

Generalizzazione (no dim.):

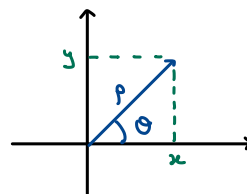
$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \text{ non nec. iniettiva} \Rightarrow \int_{\phi(\Omega)} f(y) \cdot N(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ \phi)(x) |\exists \phi(x)| dx$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile, } f \geq 0 \text{ o } f \in L^1, N(y) = \# \{ \phi^{-1}(y) \}$$

Esempi:

① Coordinate polari

$$\phi: \underbrace{[0, +\infty)}_r \times \underbrace{[0, 2\pi)}_\theta, \phi = (x, y)$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \exists \phi = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \int_0^\infty e^{-r^2} 2r dr = \pi$$

|| F.T.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

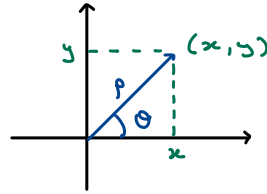
ESEMPI DI CAMBI DI VARIABILE

① COORDINATE POLARI:

$$\Phi(p, \theta) = (x(p, \theta), y(p, \theta))$$

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}$$

$$J_{\Phi} = p^2$$



② COORDINATE CILINDRICHE

$$\Phi(p, \theta, z): [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -p \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & p \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{\Phi} = p$$

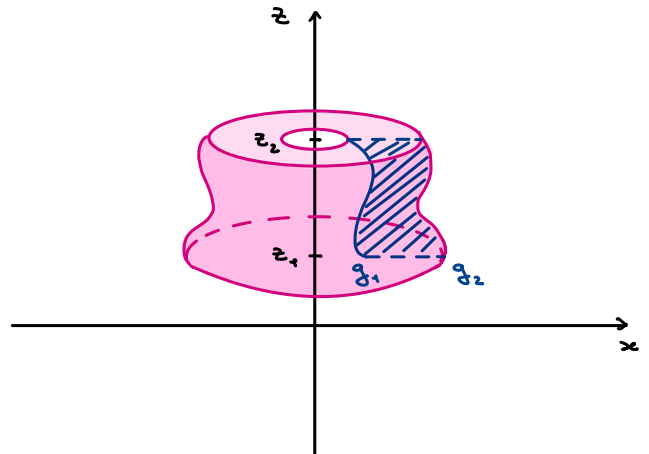
SOLIDI DI ROTAZIONE

$$E = \{ z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g_2(z) \}$$

$$\Phi^{-1}(E) = \{ z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq p \leq g_2(z) \}$$

$$|E| = \int_{\Phi^{-1}(E)} p \, dp \, d\theta \, dz \stackrel{\text{F.T.}}{=} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} p \, dp \, d\theta \, dz =$$

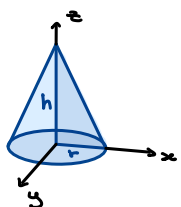
$$= \pi \int_{z_1}^{z_2} [g_2(z)^2 - g_1(z)^2] \, dz$$

BARICENTRO DI $E \subseteq \mathbb{R}^n$ MISURABILE

$$B_E = \frac{1}{|E|} \int_E x \, dx \in \mathbb{R}^n$$

$E \subseteq \mathbb{R}$ solido di rotazione attorno un certo asse $\Rightarrow B_E$ sarà su quell'asse

Es: Calcolare il baricentro di un cono di altezza h e raggio r

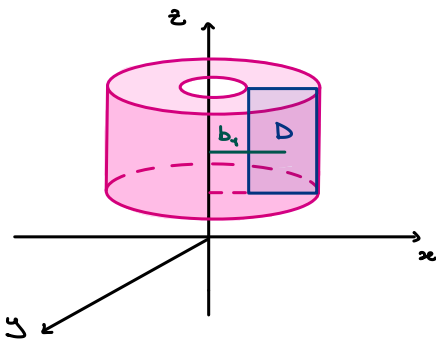


$$E = \{ (x, y, z): 0 \leq z \leq h, \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \left(1 - \frac{z}{h}\right) \} \quad B = (0, 0, B_z) \quad |E| = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{|E|} \int_E z \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{coord. cil.}}{=} \frac{3 \cdot 2\pi}{\pi r^2 h} \int_0^h z \int_0^{r(1-\frac{z}{h})} p \, dp \, dz = \frac{6}{r^2 h} \int_0^h \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz =$$

$$= 3h \int_0^h \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{dz}{h} \stackrel{t=\frac{z}{h}}{=} 3h \int_0^1 t(1-2t+t^2) dt = 3h \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{h}{4}$$

Esempio precedente (TEOREMA DI GULDINO)



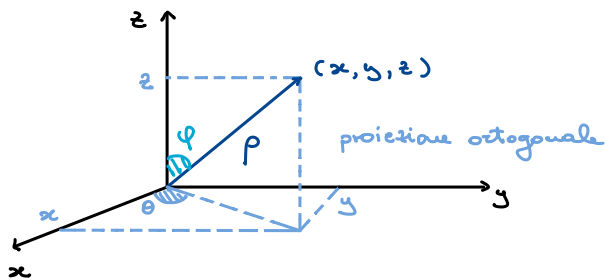
$$D = \{(x, z) : z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq x \leq g_2(z)\}$$

$$E = \{(x, y, z) : z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g_2(z)\}$$

$$|E| = 2\pi \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} x dx dz}_{\int_D x} = 2\pi b_1 |D| \quad \text{TEOREMA DI GULDINO}$$

$$B_D = (b_1, b_2) \text{ con } b_1 = \frac{1}{|D|} \int_D x dx \text{ e } b_2 = \frac{1}{|D|} \int_D z dz$$

COORDINATE POLARI IN \mathbb{R}^3 :



$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$$

$$r \in [0, +\infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$J\Phi = \cos \varphi (-r^2 \sin \varphi \cos \varphi) - r^2 \sin \varphi \sin^2 \varphi = -r^2 \sin \varphi \text{ e } |J\Phi| = r^2 \sin \varphi \geq 0$$

AREA DELLA SFERA:

$$B_R = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R\} \rightsquigarrow |B_R| = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta dr = 2\pi \left(\int_0^R r^2 \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$\overset{R^3/3}{\int_0^R r^2} \quad \overset{2}{\int_0^\pi \sin \varphi}$

CALCOLO DEL VOLUME:

$$E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\} \quad a, b, c > 0$$

$$|E| = ? \rightarrow X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{b} \quad Z = \frac{z}{c} \quad L = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix} \quad \det L = \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$$

$$(X, Y, Z) = L \cdot (x, y, z)$$

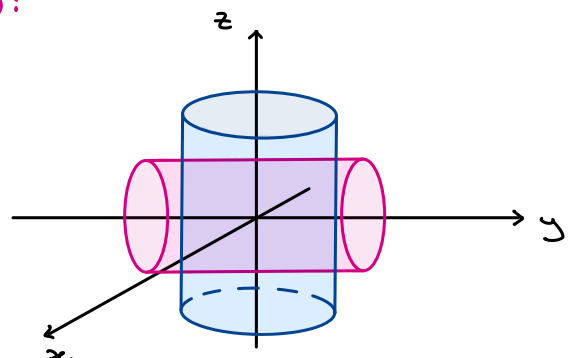
$$LE = B_1, \quad |LE| = (\det L) |E| = \frac{1}{3} \pi \Rightarrow |E| = \frac{4}{3} \pi a \cdot b \cdot c$$

VOLUME DELL'INTERSEZIONE DI DUE CILINDRI (esercizio):

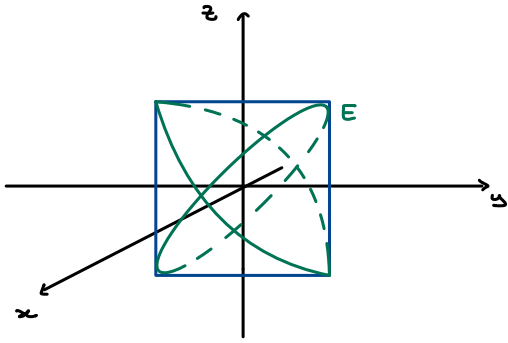
$$C_R^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$C_r^2 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq r^2\}$$

$$E = C_R^1 \cap C_r^2 \quad r \leq R \quad |E| = ?$$



Caso $r = R$:



$$E_x = \{ (y, z) : |y| \leq \sqrt{R^2 - x^2}, \quad |z| \leq \sqrt{R^2 - x^2} \}$$

↳ Quadrato di lato $2\sqrt{R^2 - x^2}$

$$|E| = \int_{-R}^R |E_x| dx = 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 8 \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{16}{3} R^3$$

Caso $r < R$: Per caso

CURVE IN \mathbb{R}^n

Def: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua si dice "curva"

- γ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- $\text{Im}(\gamma)$ si dice supporto della curva
- γ è regolare se $\gamma \in C^1$ e $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$
- γ è regolare a tratti se γ è continua ed $\exists t_1 < \dots < t_n \in [a, b], t_1 = a, t_n = b : \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è regolare

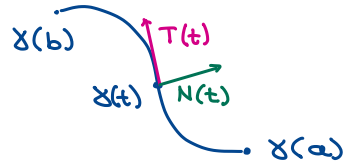
Oss: γ regolare $\Rightarrow \gamma$ è localmente grafico di una funzione C^1 , cioè (a meno di rotaz. e traslat.)

$\forall \bar{t} \exists \varepsilon t.c. \gamma(t) = (\bar{t}, u(t))$ con $t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon), u: (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ di classe C^1

↳ verif. per esercizio

Il vettore $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in S^{n-1}$ si dice vettore tangente a γ in t

$r(t) = \{ \gamma(t) + \lambda \gamma'(t) : \lambda \in \mathbb{R} \}$ è la retta tangente



• Se $n=2$, $N(t) = R \cdot T(t)$ è il vettore normale dove si sceglie $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rot. di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario

• Il vettore $\vec{K}(t) = \frac{T(t)'}{|\gamma'(t)|} = \frac{\gamma''(t) - \langle \gamma'', T(t) \rangle T(t)}{|\gamma'(t)|^2}$ è il vettore curvatura

↳ proiezione lungo $T(t)$

$$0 = \partial_t \langle T(t), T(t) \rangle = 2 \langle T'(t), T(t) \rangle \Rightarrow \langle \vec{K}(t), T(t) \rangle = 0$$

Se $n=2$, $\vec{K}(t) = K(t) \cdot N(t)$

↳ curvatura (scalare) di γ

Se $n > 2$, $\vec{K}(t) \in T(t)^\perp$ ← spazio di dimensione $n-1$

Posso scrivere $\vec{K}(t) = K(t)N(t)$ con $N(t) = \frac{\vec{K}(t)}{|\vec{K}(t)|} \in S^{n-1}$ e $K(t) > 0$

↳ curvatura scalare

Def: γ si dice biregolare se è regolare e se $\vec{K}(t) \neq 0 \quad \forall t$

Oss: $R(t) = \frac{1}{|K(t)|}$ è il raggio del cerchio osculatore cioè

l'unico cerchio che approssima meglio γ vicino a $\gamma(t)$.

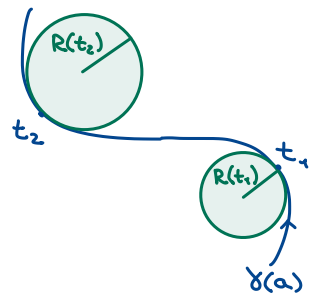
la curvatura scalare di un cerchio è $K = \frac{1}{R}$

RIPARAMETRIZZAZIONE: γ_1, γ_2 curve, $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ se $\exists \psi: I_1 \rightarrow I_2$ continua e bigettiva (monotona) t.c. $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$

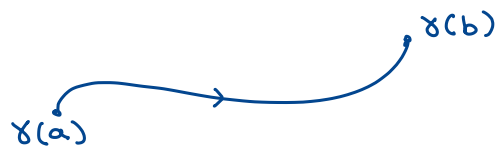
Questo definisce una relazione di equivalenza sulle curve.

Si ha $\text{Im}(\gamma_1) = \text{Im}(\gamma_2)$, ψ si dice riparametrizzazione.



Oss: Se ψ è crescente allora γ_1 e γ_2 hanno

lo stesso verso, altrimenti hanno verso opposto.



Oss: $T(t)$ e $\vec{K}(t)$ non dipendono dalla classe di equivalenza:

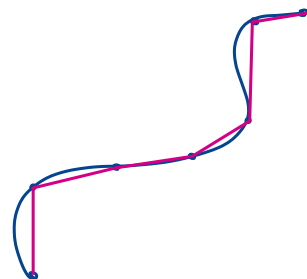
$$T_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma_1'(t)|} = \frac{\gamma_2'(\psi(t))\psi'(t)}{|\gamma_2'(\psi(t))| \cdot |\psi'(t)|} = \pm T_2(\psi(t)) \quad (\vec{K}_1(t) = \vec{K}_2(\psi(t)))$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva, $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_N = b\}$ partizione

$$L(\gamma) = \sup_P \sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \in [0, +\infty] \quad \text{lunghezza di } \gamma$$

Se $L(\gamma) < +\infty$ la curva si dice rettificabile



Oss: $L(\gamma)$ non dipende dalla classe di equivalenza, cioè dalla parametrizzazione di γ

Teorema: γ curva $C^1 \Rightarrow \gamma$ rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Dim: P partizione, $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| dt$

Sommando in i $\sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt \Rightarrow L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ in part. γ è rettificabile

$\gamma'(t)$ unif. cont., $\forall \varepsilon \exists \delta$ t.c. $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$ se $|t - s| < \delta$

Scelgo P t.c. $(t_i - t_{i-1}) < \delta \quad \forall i$

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t) - \gamma'(s)| dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{oss: } |\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$$

Passando ai moduli:

$$|\gamma'(s)|(t_i - t_{i-1}) = \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s)) dt \right| \leq |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$
$$\Rightarrow |\gamma'(s)| \leq \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon$$

Integro in $s \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)| ds \leq |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$

Sommo in $i \Rightarrow \int_a^b |\gamma'(s)| ds \leq \sum_i |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$

Concludo per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Oss: $L(\gamma)$ non è la "lunghezza del supporto" almeno se γ non è iniettiva

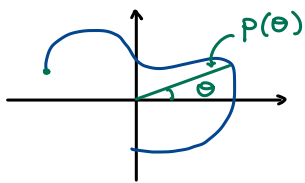
Oss: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad a < c < b, \quad \gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \quad \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]} \quad (\text{oss: } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2)$

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

Es: Se $\gamma(t) = (t, u(t))$ $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

$$\gamma'(t) = (1, u'(t)), |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + u'(t)^2} \quad L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(t)^2} dt$$

Es: $\gamma(\theta) = (p(\theta) \cos \theta, p(\theta) \sin \theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $p: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, +\infty)$



$$\gamma'(\theta) = (-p \sin \theta + p' \cos \theta, p \cos \theta + p' \sin \theta)$$

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{p^2 + p'^2} \Rightarrow L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2 + p'^2} d\theta$$

Es: $\gamma(t) = \begin{cases} (t, t \sin(1/t)) & t \in (0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$ continua, non regolare vicino a $t=0$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma|_{[\varepsilon, 1]}, L(\gamma_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 |\gamma'(t)| dt \Rightarrow L(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\gamma_\varepsilon) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}^2 dt \rightarrow \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}^2 = \sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2} \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{t} \sin\left(\frac{2}{t}\right) + 1}$$

$$O\left(\frac{1}{t^2}\right) \rightarrow \text{vero se } |\cos\left(\frac{1}{t}\right)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cioè } \frac{1}{t} \in \bigcup_{k \geq 1} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$$

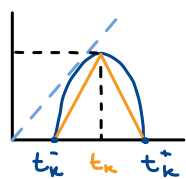
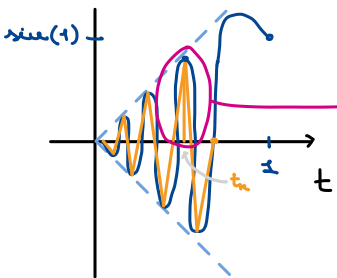
$$\Rightarrow t \in \tilde{I} = \bigcup_{k \geq 1} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4} + k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4} + k\pi}\right], \sqrt{1 + \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}^2 \geq \frac{c}{t} \quad t \in \tilde{I}$$

$$L(\gamma) \geq c \int_{\tilde{I}} \frac{1}{t} = c \sum_k \left[\log\left(\frac{1}{-\frac{\pi}{4} + k\pi}\right) - \log\left(\frac{1}{\frac{\pi}{4} + k\pi}\right) \right] = c \sum_k \log\left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{k\pi - \frac{\pi}{4}}\right) = c \sum_k \log\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{k\pi - \frac{\pi}{4}}\right) =$$

$O\left(\frac{1}{k}\right)$

$$= c \sum_k O\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$$

ALTRO MODO:



$$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \in O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$t_k^- = \frac{1}{(k+1)\pi} \in O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$t_k^+ = \frac{1}{k\pi} \in O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$L(\gamma) \geq \sum_{k \geq 1} \sqrt{(t_k^+ - t_k^-)^2 + t_k^2} + \sqrt{(t_k - t_k^-)^2 + t_k^2} = +\infty$$

$\in O\left(\frac{1}{k}\right)$ $\in O\left(\frac{1}{k}\right)$

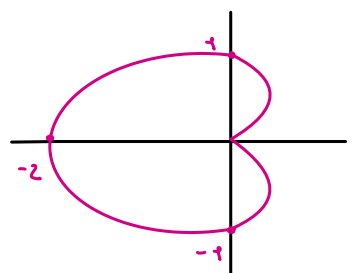
Es (CARDIOIDE): $p(\theta) = 1 - \cos \theta$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(\theta) = (p \cos \theta, p \sin \theta) \quad \cos \theta = \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 + p'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \sin^2 \theta} =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4 \int_0^\pi \sin(y) dy = 8$$

$y = \theta/2$



Es: $Q = [0, 1)^N \subseteq \mathbb{R}^N$, $L_c^2(Q)$, $\langle f, g \rangle = \int_Q f(x) \overline{g(x)} dx$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$

Sia $e_k(x) = e^{2\pi i k \cdot x}$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $k \cdot x = \sum_{i=1}^N k_i x_i$

• e_k è un sistema ortonormale

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_h \rangle &= \int_Q e^{2\pi i k \cdot x} e^{-2\pi i h \cdot x} dx = \int_Q e^{2\pi i (k-h) \cdot x} dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (k_1-h_1)x_1} dx_1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i (k_N-h_N)x_N} dx_N = \delta_{k_1-h_1} \cdots \delta_{k_N-h_N} = \delta_{h,k} \end{aligned}$$

$f \in L_c^2(Q)$, $k \in \mathbb{Z}^N$, $\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle$ e $S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k$ con $|k| = \sum_{i=1}^N k_i$

Ⓡ $S_n f \rightarrow f$ in L^2 , $\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\hat{f}_k|^2$

(per ottenere il risultato bisogna verificare che $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}^N}$ è completo)

Es: $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

È un caso particolare di $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2} A x \cdot x} dx$ con A matrice simmetrica definita positiva

In questo caso specifico la matrice è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Guardiamo il caso generale:

Supponiamo $x = My$, allora $Ax \cdot x = (AMy)(My) = ({}^t M A M)y \cdot y$

Posso prendere come matrice M una matrice M una matrice ortogonale che diagonalizza A :

$$M^{-1} A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2} A x \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2} D y \cdot y} \underbrace{|\det M| dy}_{=1 \text{ perché } M \text{ ortogonale } (*)} = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2} dy = \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2} dy_i = \underbrace{\frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}}}$$

nel caso considerato
all'inizio questo dà $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2} t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{ds}{\lambda} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

$s = \sqrt{\lambda} t$
 $ds = \sqrt{\lambda} dt$

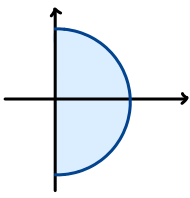
(*) M ortogonale $\stackrel{\text{def}}{\iff} M^t M = M M^t = \text{Id}$

$$\det(M M^t) = \det(M) \det(M^t) = \det(\text{Id})$$

↓
Biset

Dunque si ha $\det(M) = \pm 1 \Rightarrow |\det(M)| = 1$

Es: Calcolare il baricentro di un semidisco $D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0\}$



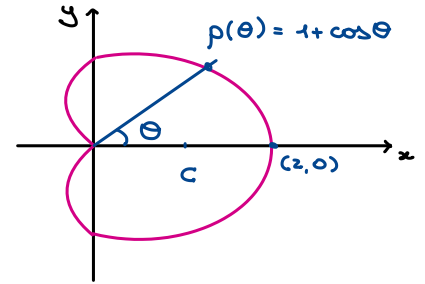
$$\bar{x}_{D^+} = \frac{\int_{D^+} x dx dy}{\int_{D^+} dx dy} \leftarrow \frac{\pi R^2}{2}$$

opzioni $\begin{cases} \text{Fubini-Tonelli} \\ \text{cambio di variabili} \end{cases}$

$$\int_{D^+} x dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^R p \cos \theta p dp d\theta \stackrel{\text{Jacobiano delle coord. polari}}{=} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^R p^2 dp \right) = \frac{2R^3}{3}$$

$$\bar{x}_{D^+} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4}{3\pi} R$$

Es: Determinare l'area della cardioida $p \leq 1 + \cos \theta$



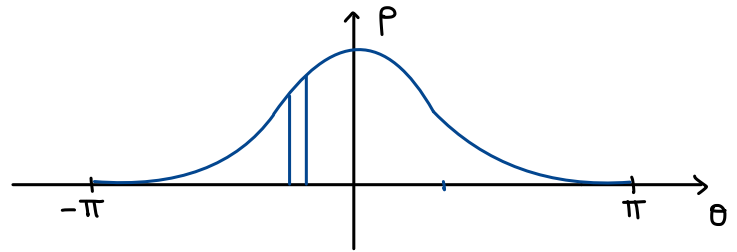
$$C = \phi(D) \quad D = \{p \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi : p \leq 1 + \cos \theta\}$$

$$\text{Area}(C) = \iint_C dx dy = \iint_D J_\phi dp d\theta = \iint_D p dp d\theta =$$

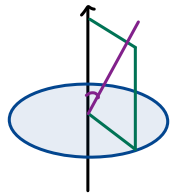
$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos \theta} p dp = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi) + \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi$$

\uparrow da \cos^2



Es: Calcolare il determinante del cambio di coordinate "sferiche" osservando che si tratta di una composizione di due coordinate "cilindriche"



(p, θ) su x, y

$\Rightarrow (p, z)$ pseudo coordinate polari

Es: Calcolare $\iint_D \frac{1}{1+x+y} dx dy = (*)$ con $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

$$(*) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{1+x+y} dy = \int_0^1 [\log(1+x+y)]_0^{1-x} dx = \int_0^1 [\log 2 - \log(1+x)] dx =$$

$$= \log 2 - \left[[x \log(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \right] = \cancel{\log 2} - \cancel{\log 2} + \int_0^1 \frac{x+1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1 - \log 2$$

Es: Calcolare $\iint_D xy dx dy$ con $D = \{x \geq 0; x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$

Es: Calcolare $\iiint_E xz dx dy dz$ con $E = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 : 0 \leq y \leq 2 - x^2 - z^2\}$

$$\text{Fisso } (x, z): \iint_D \left(\int_0^{2-x^2-z^2} xz dy \right) dx dz \quad \text{con } D = \{x \geq 0, z \geq 0 : x^2 + z^2 \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D xz(2-x^2-z^2) dx dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos \theta \sin \theta (2-\rho^2) \rho d\rho d\theta \stackrel{\text{F.T.}}{=} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \right) \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^3 - \rho^5) d\rho = \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{8}{6} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Es: $I = [a, b]$, $u \in C^1(I)$, $u(a) = u(b) = 0$

(i) $\exists c > 0$ t.c. $\int_a^b |u(t)|^2 dt \leq c^2 \int_a^b |u'(t)|^2 dt$

(ii) Mostrare che $c = \frac{(b-a)}{\pi}$ è la miglior scelta

Sol: SPG posso supporre: • $a = 0$ (traslazione)

• $b = \pi$ (riscalamento lineare)

• $c = 1$

Estendendo u a $[-\pi, \pi]$ ottengo in maniera dispari (\tilde{u}): ho che \tilde{u} è C^1 e è estendibile a

una funzione C^1 e è estendibile a una funzione C^1 e 2π -periodica su tutto \mathbb{R}

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt) \quad \text{con} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \sin(kt) dt$$

$$\tilde{u}' = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k \cos(kt) \rightarrow \text{converge in } L^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}|^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}'|^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2 < +\infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}|^2 dt = 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \leq 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}'|^2 dt$$

la disuguaglianza vale sempre ed è ottimale se $b_k = 0 \quad \forall k \neq 1$

□

Sia $\varphi \in L^1([0, +\infty))$:

$$\textcircled{1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) n \omega_n t^{n-1} dt \quad \text{dove } \textcircled{2} \omega_n = |B_1^{(n)}(0)| = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{con } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

\uparrow misura di Lebesgue della palla n -dimensionale \uparrow Γ di Eulero

Dim: Chiamo $\omega_n \doteq |B_1^{(n)}(0)|$. Faccio un cambio di variabile: $|B_r^{(n)}(0)| = r^n \omega_n$

Dimostro (1) per $\varphi = \chi_{[a,b]}$ $0 \leq a \leq b \rightsquigarrow$ per φ continua a supporto compatto \rightsquigarrow per $\varphi \in L^1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|) dx = \int_{a \leq |x| \leq b} dx = |B_b^{(n)}(0) \setminus B_a^{(n)}(0)| = (b^n - a^n) \omega_n = \omega_n \int_a^b n t^{n-1} dt$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|) dx = \omega_n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(t) n t^{n-1} dt$$

Es: $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2}$ Ricorda: caso particolare di $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} A x \cdot x} dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$ con $A = 2\text{Id}$, $\sqrt{\det A} = 2^{n/2}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} n \omega_n t^{n-2} \overbrace{2t}^{ds} dt = \frac{n}{2} \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} (\sqrt{s})^{n-2} ds = \frac{n}{2} \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds$$

$$\pi^{n/2} = \frac{n}{2} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{con} \quad \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

Per esempio: $n=2$ $\omega_2 = \frac{\pi}{\Gamma(1)} = \pi$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$n=1$ $\omega_1 = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2} \Gamma(1/2)} = 2 \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}$

$n=3$ $\omega_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2} \Gamma(3/2)} = \frac{4}{3} \pi$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Γ DI EULERO

$$x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Oss: La quantità $n \omega_n t^{n-1}$ rappresenta la misura $(n-1)$ -dimensionale della $\partial B_t^{(n)}(0)$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE (in \mathbb{R}^N)

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N), g \in L^p(\mathbb{R}^N), (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy$$

Teo: $f * g(x)$ è ben definita per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Dim: ($p=1$) $\Phi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = f(x-y) g(y)$ Oss: Φ è misurabile

$$y \in \mathbb{R}^N, \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x, y)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx |g(y)| = \|f\|_1 |g(y)|$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x, y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_1 |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 \stackrel{\text{F.T.}}{\Rightarrow} \Phi \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

\uparrow $f(x-y)g(y)$

Pertanto per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ è ben definita $x \mapsto \int f(x-y)g(y) dy \in L^1(\mathbb{R}^N, dx)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f * g|(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy dx \stackrel{\text{F.T.}}{\leq} \|f\|_1 \|g\|_1$$

$(p > 1)$ $h(x) = (|f| * |g|^p)(x)$, $h \in L^1$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy \Rightarrow |f(x-y)g(y)| = \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}}_{L^q_y} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|}_{L^p_y}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(f * g)(x) \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} (h(x))^{\frac{1}{p}} \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f * g|^p(x) dx \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_1 \|g\|_p^p$$

$$\Rightarrow \|f * g\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \quad \text{exercise: } f * g = g * f$$

Prop: $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f * g \in C(\mathbb{R}^N)$

Dim. $f \in C_c(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f$ è U.C. $\sim \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$$|f * g(x) - f * g(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x'-y)] g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x'-y)| |g(y)| dy$$

$$\begin{aligned} & \text{se } |x-x'| < \delta \rightarrow \textcircled{S} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| dy \leq \varepsilon \|g\|_1 \\ & |f(x-y) - f(x'-y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Es: Mostrare che la stessa conclusione vale se $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

Prop: Se $f \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\text{Allora } f * g \in C^1(\mathbb{R}^N) \quad (1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \quad (2)$$

Dim. oss 1: $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$ per quanto visto prima

$$\text{oss 2: } \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \in C(\mathbb{R}^N)$$

Per il teorema del differenziale totale basta verificare (2)

$$(*) \quad \left| (f * g)(x + h e_i) - (f * g)(x) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x) h \right| = o(h)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\underbrace{f(x + h e_i - y) - f(x - y)}_{\text{...}} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) h \right] g(y) dy \right| = (*) \\ & = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t h e_i - y) \cdot h dt \end{aligned}$$

o modulo di
continuità di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$(*) \leq |h| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t h e_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| dt |g(y)| dy \leq |h| \omega(|h|) \|g\|_1 = o(h)$$

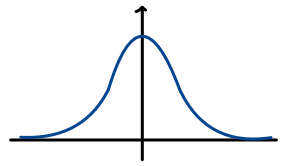
se h è piccolo, è piccola

□

Prop: $p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} p(x) dx = 1$, $\text{supp } p \subseteq B_r(0)$

$$P_n(x) \doteq n^{\frac{N}{2}} p(nx), \quad \text{supp } P_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(0), \quad \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x) dx = 1$$

Se $f \in L^1$ considero $P_n * f \in L^1$, $P_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $P_n * f \rightarrow f$ in L^1



Dim: $P_n * f \in C^\infty$ si dimostra applicando ripetutamente la prop. precedente:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} (P_n * f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} P_n \right) * f$$

Per verificare la convergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |P_n * f - f| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x-y) f(y) dy - f(x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} P_n(x-y) |f(y) - f(x)| dy dx \\ &\stackrel{x-y=w}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} P_n(w) |f(x-w) - f(x)| dw dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} P_n(w) |f(x-w) - f(x)| dw dx \end{aligned}$$

$$= \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} P_n(w) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-w) - f(x)| dx}_{\text{continuità dell'integrale rispetto alle traslazioni}} dw$$

$\hookrightarrow \|f - f_w\|_1 \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0$ continuità dell'integrale rispetto alle traslazioni

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0: \|f - f_w\|_1 < \varepsilon \quad \forall |w| < \frac{1}{n_0}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f * P_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} P_n(w) \varepsilon \cdot dw = \varepsilon \quad \text{se } n \geq n_0$$

Es 1: $C = \{g(x,y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ di cui, $g(x,y) = x^3 + y^3 + xy$. C è compatto?

$$\begin{aligned} \nabla g = 0 \quad & 3x^2 + y = 0 & y = -3x^2 & \quad x=y=0 \\ & 3y^2 + x = 0 & 27x^4 + x = 0 & \\ & & 27x^3 = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} = y & \\ & & g\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) > 0 & \end{aligned}$$

$$x^3 + t^3 x^3 + t x^2 = 0 \quad x(t) = \frac{-t}{1+t^3} \quad t \neq -1, \quad y(t) = \frac{-t^2}{1+t^3}$$

lim $h(t) = h(-1) = \frac{1}{3}$
 $t \rightarrow -1$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 1/\lambda \\ 3y^2 + x = 1/\lambda \\ g = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 3y^2 + x \\ 3(x^2 - y^2) = x - y \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \textcircled{1} \ x = y \\ \searrow \textcircled{2} \ x + y = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} \quad 0 = x^3 + y^3 + xy = (x+y)(x^2+y^2-xy) + xy$$

$$f(x, y) = x + y - \frac{xy}{x^2 + y^2 - xy} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy > -3xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 > 0$$

Es 2: $f(x, y) = \frac{x^3 y (1 - xy)}{\sin(x^3 + |y|^d)} \simeq \frac{x^3 y}{x^4 + |y|^d}$ ④ continuità in $(0, 0)$

$$f(0,0) = 0$$

$$\alpha > 0$$

② differenziabilità in $(0,0)$

passaggio in
coord. polari

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}$$

$$X = x^2$$

$$|x| = |X|^{1/2}$$

$$Y = |y|^{\alpha/2} \operatorname{sgn}(y)$$

$$|y| = |y|^{2/d}$$

$$\leadsto |f(x, y)| = \frac{|x|^{3/2} |y|^{2/2}}{|x|^2 + |y|^2} = \rho^{\frac{3}{2} + \frac{2}{2} - 2} |\cos\theta|^{\frac{3}{2}} |\sin\theta|^{2/2}$$

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \frac{2}{d} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{d < 4}$$

$$2) \ 0 < d < 4 \Rightarrow f \text{ è diff. in } (0,0)?$$

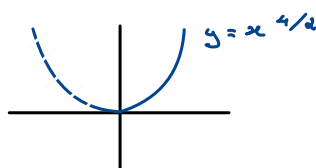
$$f(x,y) = v(x,y) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$f(x,y) = f(-x,-y) \Rightarrow v=0 \text{ se esiste}$$

$$f \text{ diff.} \Leftrightarrow \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\text{Se guardiamo } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(1-xy) + x^3y(-x)}{\sin(x^4+|y|^d)} - \frac{d x^3(1-xy) \cos(x^4+|y|^d) |y|^{d-1}}{\sin(x^4+|y|^d)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \sim \frac{1}{x}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+|y|^d)}$$



Continuità lungo le rette: $x^4 = |y|^d$

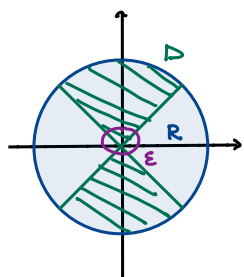
$$f(x, x^{4/d}) = \frac{x^{3+4/d}}{2x^4\sqrt{x^2+x^{8/d}}} \sim \frac{1}{2} x^{3+4/d-5} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{d} - 2 > 0 \quad \frac{1}{d} > \frac{1}{2} \quad \boxed{d < 2} \text{ cond. necessaria}$$

Supponiamo $0 < d < 2$:

$$x \neq 0, y \neq 0 \quad \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+|y|^d)} < \frac{x^3y}{2|x||x^2|y|^{d/2}} = \frac{|y|}{2}^{1-\frac{d}{2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \quad \boxed{\text{se } d < 2}$$

Es 3: $f_d(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} (x^2+y^2)^d$ ① Integrabilità su D

1) $f_d = (x^2+y^2)^d$ per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ② Calcolare $\int_D f_0$ su D



$$D = \{ |x| < |y| \}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[D \setminus B_\epsilon(0)] \cap B_R(0)} f_d$$

$\epsilon \rightarrow 0 \text{ e } R \rightarrow +\infty$

coord. polari $x^2+y^2 = \rho^2, \rho^2 = t, 2\rho d\rho = dt$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} 2\rho \cdot \rho^{2d} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} t^d e^{-t} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \Gamma(d+1) \quad \boxed{d > -1} \end{aligned}$$

Γ di Eulero

$$2) \int_D f_0 = \frac{\pi}{2} \Gamma(1) = \frac{\pi}{2}$$

Oss: $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

INTEGRAZIONE LUNGO CURVE

$\gamma: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ regolare a tratti, A aperto

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \begin{array}{l} \text{tiene conto dello Jacobiano della curva} \\ \text{invariante per riparametrizzazione della curva} \end{array}$$

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f \quad \text{se } \tilde{\gamma}(t) = \gamma(\sigma(t)) \quad \sigma: [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ monotona } C^1 \text{ a tratti}$$

LAVORO DI CAMPO DI VETTORI

$v = (v_1, \dots, v_n)$ campo di vettori

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma} v \cdot T = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

↳ lavoro di v lungo γ

Invariante per riparam. crescenti

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma \quad \sigma \text{ monotona, } C^1 \text{ a tratti}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} v = \int_{\gamma} v \quad \text{se } \sigma \text{ crescente, } \int_{\tilde{\gamma}} v = - \int_{\gamma} v \quad \text{se } \sigma \text{ decrescente}$$

Oss: Integrando lungo 1 ottengo la lunghezza della curva

1. FORME DIFFERENZIALI

Def: $L \in (\mathbb{R}^n)^*$ si dice un covettore se $\exists! v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $L(x) = \langle v, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Oss: $(\mathbb{R}^n)^* = \{ L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare e continua} \}$ il duale di \mathbb{R}^n
 ↳ in \mathbb{R}^n lineare \Rightarrow continua

Oss: le f. lineari in \mathbb{R}^n sono rappresentate da 1. matrice (*) contr.

Oss: $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ come sp. vettoriale. In generale $X^* \cong X$ se X è di Hilbert
 ma non vale per i Banach (es: L_p)

Def: $dx_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ campo di covettori: $dx_i(x) = \langle e_i, x \rangle = x_i$ base di $(\mathbb{R}^n)^*$

Def: $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ si dice 1 forma differenziale su A

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \quad a = (a_1, \dots, a_n), \quad \omega(x)[v] = \langle a, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ω continua e γ regolare a tratti

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b a(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Es: $\omega(x, y) = -y dx + x dy$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)}_{=1} dt = 2\pi \quad a(x, y) = (-y, x)$$

Es: $f \in C^1(A)$

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{differenziale di } f, \text{ 1-forma}$$

Il campo di vettori associato è $\nabla f(x)$

Def: ω 1-forma continua si dice **esatta**, e il campo associato si dice conservativo, se $\exists f \in C^1(A)$ t.c. $\omega = df$

Es: $\omega = x dx + y dy$ è esatta, $\left(f = \frac{x^2 + y^2}{2}\right)$, $\omega = -y dx + x dy$ non è esatta

infatti, se $\exists f$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x} = -y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow$

Derivando a croce $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} = +1$ **contraddice Schwartz**

Integrando a croce $f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int -y dx = -xy + c_1(y)$
 $= \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int x dy = xy + c_2(y)$ assurdo

Def: ω è esatta $\Rightarrow f$ si dice primitiva di ω o potenziale del campo associato

Def: $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ di classe C^1 si dice chiusa se $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$

Oss: ω è esatta e C^1 , $f \in C^2 \Rightarrow \omega$ chiusa

Oss: ω esatta $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ dipende da γ solo attraverso gli estremi $\gamma(a), \gamma(b)$ \leadsto Fisica 2: quando solo ΔV agli estremi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \nabla f(\gamma) \cdot \gamma' dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

In particolare $\int_{\gamma} \omega = 0 \quad \forall \gamma$ curva regolare chiusa

Oss: $\exists \omega$ chiusa ma non esatta

$$\omega: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \quad \omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \int_{\gamma} \omega = 2\pi \neq 0$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \omega$ chiusa

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Teorema: $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ 1-forma continua, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

le seguenti affermazioni sono equivalenti:

① ω esatta

② $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$ e $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b) \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$

③ γ chiusa $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$

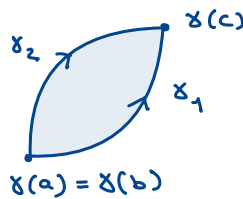
Dim: ① \Rightarrow ② e ① \Rightarrow ③ visti

③ \Rightarrow ②: γ_1, γ_2 $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\gamma(a) = \gamma(b)$

$c \in (a, b)$ $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$

$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2): [a, 2b-a] \rightarrow \mathbb{R}^n$

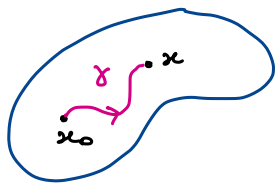


$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(2b-t) & t \in [b, 2b-a] \end{cases} \quad \text{chiusa}$$

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

② \Rightarrow ③ γ chiusa si scrive come $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$, γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi

② \Rightarrow ① Cerchiamo una primitiva di ω



A Scegliamo $x_0 \in A$, sia $\tilde{A} \subseteq A$ la componente connessa di x_0 ,
e definiamo $f(x) = \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega$ dove $\gamma_{x_0, x}$ è una generica curva
con estremi x e x_0

Devo verificare che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x) \quad \forall i$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma_{x_0, x+h e_i}} \omega - \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega = (*)$$

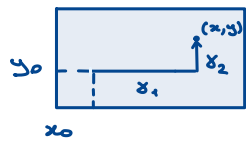
dove $\gamma_h(t) = x + te_i$ $t \in [0, h]$ $\gamma'_h(t) = e_i$

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h a_i(x + te_i) dt = a_i(x) \quad \text{per il Teo della media integrale}$$

Oss: In \tilde{A} cc di x_0 ho costruito f che dipende da x_0 , due primitive di w in \tilde{A} differiscono per una costante

Prop: A rettangolo, anche illimitato (ad es: \mathbb{R}^n), w 1-forma C^1 chiusa \Rightarrow
 $\Rightarrow w$ è esatta

Dim: Per semplicità fissiamo $n=2$ (in generale si fa in modo simile)



e fissiamo $(x_0, y_0) \in A$

$$w(x, y) = a dx + b dy$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad \gamma_1(t) = (t, y_0) \quad t \in [x_0, x]$$

$$\gamma_2(t) = (x, t) \quad t \in [y_0, y]$$

$$f(x, y) = \int_\gamma w = \int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, t) dt$$

Va verificato che $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt = a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, t) dt = \\ &= a(x, y_0) + a(x, y) - a(x, y_0) \end{aligned}$$

Allo stesso modo $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

FORME CHIUSE E ESATTE

1- forme differenziali:

vs

campi di vettori:

- esatta

- conservativo

- primitiva

- potenziale

- chiusa

- irrotazionale

Def: $\omega = \sum a_i dx_i \in C^1$ chiusa se $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$

Si possono caratterizzare gli aperti. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

Def: $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ curve con $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

sono omotope a estremi fissati in A se $\exists H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ continua
 $\hookrightarrow \ni t$ $\hookrightarrow \ni s$

tale che: $\bullet H(t, 0) = \gamma_0(t) \quad \forall t$

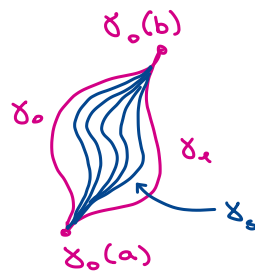
$\bullet H(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t$

$\bullet H(a, s) = \gamma_1(a) \quad \forall s$

$\bullet H(b, s) = \gamma_1(b) \quad \forall s$

$$\gamma_s(t) = H(t, s) \quad t \in [a, b]$$

In topologia, due funzioni continue da uno spazio topologico X ad un altro Y sono dette omotope (dal greco homos = identico e topos = luogo) se una delle due può essere "deformata con continuità" nell'altra, e tale trasformazione è detta omotopia fra le due funzioni.



Oss: Posso supporre che H abbia la stessa regolarità di γ_0 e γ_1

Se γ_0 è omotopa a γ_1 in A scriviamo $\gamma_0 \sim \gamma_1$

Prop: $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow A$ con gli stessi estremi, ω forma chiusa in A

Se $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$

Dim: Mostriamo che $f(s) = \int_{\gamma_s} \omega$, dove $\gamma_s(t) = H(t, s)$ è costante in s .

$f'(s) = \partial_s \int_{\gamma_s} \omega = \partial_s \int_{H(t,s)} \omega dt \Rightarrow$ Facciamo la dim. in $n=2$ e supp. $H \in C^2$
 $\omega = a dx + b dy, H = (H^1, H^2)$

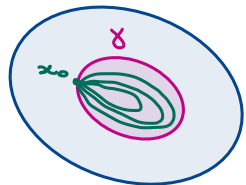
$$\begin{aligned} f'(s) &= \partial_s \int_0^1 (\omega \cdot H) H_t = \partial_s \int_0^1 (a H_t^1, b H_t^2) \cdot (H_t^1, H_t^2) dt = \\ &= \int_0^1 (a_x H_s^1 + a_y H_s^2, b_x H_s^1 + b_y H_s^2) (H_t^1, H_t^2) + (a, b) \cdot (H_{ts}^1, H_{ts}^2) dt = \\ &= \int_0^1 a_x H_s^1 H_t^1 + a_y H_s^2 H_t^1 + b_x H_s^1 H_t^2 + b_y H_s^2 H_t^2 - \partial_t(a, b) \cdot (H_s^1, H_s^2) dt \end{aligned}$$

Oss: I termini di bordo si cancellano: $H_s(0, s) = H_s(1, s) = 0$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\cancel{a_x H_s^1 H_t^1} + a_y H_s^2 H_t^1 + \cancel{b_x H_s^1 H_t^2} + \cancel{b_y H_s^2 H_t^2} \right. \\
&\quad \left. - \cancel{a_x H_t^1 H_s^1} - a_y H_t^2 H_s^1 - \cancel{b_x H_t^1 H_s^2} - \cancel{b_y H_t^2 H_s^2} \right] dt \\
&= \int_0^1 (a_y - b_x) (H_s^2 H_t^1 - H_t^2 H_s^1) dt = 0 \text{ poiché } \omega \text{ chiusa}
\end{aligned}$$

Def: A si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa $\gamma: [0,1] \rightarrow A$

con $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in A$ è omotopa in A a estremi fissi alla curva cost. $i_{x_0}(t) = x_0 \forall t$



$$\exists H: [0,1]^2 \rightarrow A \text{ t.c. } H(0,s) = H(1,s) = x_0 \quad \forall s$$

$$H(t,s) = \gamma(t), \quad H(t,1) = x_0 \quad \forall t$$

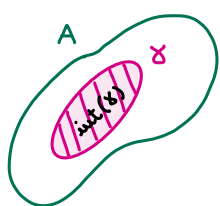
Oss: $\gamma \sim i_{x_0}$ e ω chiusa $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

Oss: $\gamma \sim i_{x_0} \Rightarrow \gamma \sim i_{x_1} \quad \forall x_1 = \gamma(\bar{t})$

Cor: A semplicemente connesso, ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

Oss: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplicemente connessa $\Rightarrow \forall \gamma: [0,1] \rightarrow A$ curva semplice chiusa (iniettiva) $\Rightarrow A \supseteq \text{int}(\gamma)$

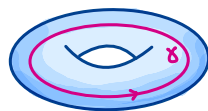
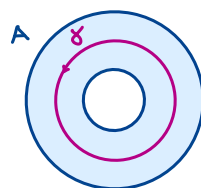
$\text{int}(\gamma)$ è la componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus \text{spt}(\gamma)$ cioè "A non ha buchi"



• A connesso \Rightarrow A sempl. connesso (vera in \mathbb{R}^n)

• $A = B_R \setminus B_r \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ A non semplicemente connesso

• $A = \text{Toro in } \mathbb{R}^3$ non semplicemente connesso



Oss: A non è sempl. connesso $\Rightarrow \exists$ forme chiuse non esatte

COSTRUZIONE DEL GRUPPO FONDAMENTALE DI A

Sia $x_0 \in A$ e $C_{x_0} = \{ \gamma: [0,1] \rightarrow A \text{ curve con } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \}$.

Consideriamo $\pi_1(A, x_0) = C_{x_0} / \sim$. Definiamo in C_{x_0} l'operazione $*$: $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Prop: $*$ definisce una struttura di gruppo (non commutativo) in $\pi_1(A, x_0)$: $[\gamma_1] + [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$

Dim (Traccia): Verificare che:

① $\gamma_1 \sim \sigma_1, \gamma_2 \sim \sigma_2 \Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2 \sim \sigma_1 * \sigma_2$ sia una buona definizione

② $([\gamma] + [\sigma]) + [\eta] = [\gamma] + ([\sigma] + [\eta])$ associativa

③ Data $\gamma \exists \sigma$ t.c. $[\gamma] + [\sigma] = [i_{x_0}]$ (Basta prendere $\sigma(t) = \gamma(1-t)$)

Oss: A connesso, $x_0, x_1 \in A \Rightarrow (\pi_1(A, x_0), +) \cong (\pi_1(A, x_1), +)$ iso di gruppi

Def: A connesso $(\pi_1(A, x_0), +)$ si dice **GRUPPO FONDAMENTALE** di A

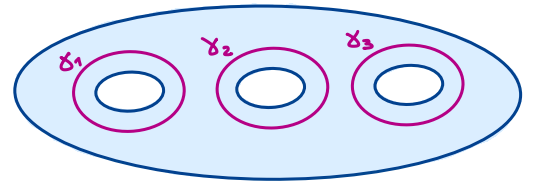
Oss: A connesso è semplicemente connesso $\Leftrightarrow \pi_1(A) = \{0\}$

Prop: A connesso, $[\gamma_1] \dots [\gamma_N]$ generatori di $\pi_1(A)$, ω chiusa e $\int_{\gamma_i} \omega = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow \omega$ esatta

Es: $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A ha N-buchi, $\text{int}(\gamma_i) \ni i^{\text{o}}$ buco

$\Rightarrow [\gamma_i]$ generano $\pi_1(A)$

\rightarrow gruppo libero generato da $[\gamma_1] \dots [\gamma_N]$



FORME DIFFERENZIALI (CHIUSE E ESATTE)

Una forma differenziale è una mappa $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$x \mapsto \sum_i A_i(x) dx_i$$

Si chiede ω almeno C^0 o C^1 come regolarità minima

duale

forma diff. che vale 1 su e_i e 0 sul resto
funzioni

Richiamo definizione:

Forma chiusa: se le derivate miste sono uguali, cioè $\partial_i A_j = \partial_j A_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

deve valere in ogni punto

e $\omega = \sum A_i(x) dx_i$ la vogliamo minimo C^1

Forma esatta: se ammette un potenziale, cioè $\exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\partial_i U = A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $dU = \omega$

in maniera più compatta

diff. di U

Conseguenza del Teorema di Schwartz:

Se U è una forma di classe C^1 allora U esatta $\Rightarrow U$ chiusa

(\Leftarrow) non sempre è vero, localmente è vero, ma potrebbe non esserlo su tutto Ω .

Ogni qual volta ci si restringe a un dominio semplicemente connesso è vero.

Non si possono sempre ricollare le forme che troviamo assieme, dipende dalla topologia dello spazio

Es: Dire se le seguenti forme differenziali sono chiuse, esatte (e nel caso determinare U)

① $\omega(x, y) = -y dx + \sin(xy) dy$

② $\omega(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y dx - x dy)$

③ $\omega(x, y, z) = (y - z) dx + (x + z + 1) dy + (y - x + 1) dz$

Sol: Una cosa che si può fare è prima vedere se è chiusa, poi vedere se è esatta.

A volte conviene cercare direttamente il potenziale

① $\omega(x, y) = \underbrace{-y dx}_{A_1} + \underbrace{\sin(xy) dy}_{A_2}$

$A_1(x, y) = -y, \quad A_2(x, y) = \sin(xy)$

Poniamo la condizione per la chiusura: $\partial_y A_1 = \partial_x A_2$

$-1 = \cos(xy) y \leftarrow \text{non è vera } \forall x, y$

\Rightarrow la forma ① non è chiusa

② $\omega(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(ydx - xdy)$ è chiusa?

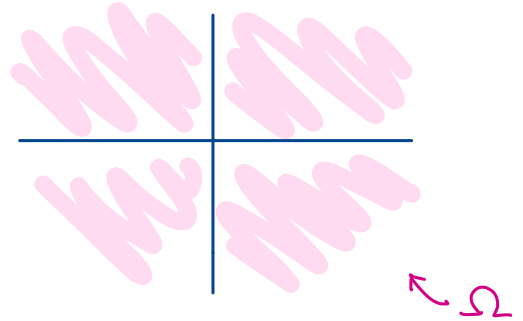
$$A_1(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}, \quad A_2(x, y) = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

Condizione per la chiusura: $\partial_y A_1 = \partial_x A_2$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \Rightarrow \text{la condizione è verificata}$$

$\Rightarrow \omega$ è chiusa \rightarrow ciò risponde anche alla 2ª domanda: chi è $\text{Dom}(\omega)$? L'insieme su cui è def.

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{xy=0\}}_{\text{gli assi } x, y} \rightarrow$ insieme di definizione di ω



Ci sono 4 componenti convesse, ognuno di questi pezzi

è semplicemente connesso perché un rettangolo infinito

$\Rightarrow \omega$ è anche esatta

Ciò non ci dice ancora chi è la primitiva, ma volendo potremmo calcolarla.

Sappiamo che $\exists U$: $\frac{\partial U}{\partial x} = A_1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_2 = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

per trovare U basta integrare

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + C \rightarrow \text{Ora basta controllare che la derivata in } x \text{ mi dia } A_1 \text{ e la derivata in } y \text{ mi dia } A_2 \text{ e lo finito}$$

$$U = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \text{ è un potenziale}$$

③ $\omega(x, y, z) = \underbrace{(y-z)}_{A_1} dx + \underbrace{(x+z+1)}_{A_2} dy + \underbrace{(y-x+1)}_{A_3} dz$

Verifica chiusura: $\partial_j A_i = \partial_i A_j$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \partial_y A_1 &= \partial_x A_2 \Leftrightarrow 1 = 1 \\ \bullet \partial_z A_2 &= \partial_y A_3 \Leftrightarrow 1 = 1 \\ \bullet \partial_z A_1 &= \partial_x A_3 \Leftrightarrow -1 = -1 \end{aligned} \right\} \text{vera} \rightarrow \omega(x, y, z) \text{ chiusa}$$

È anche esatta poiché è definita su tutto \mathbb{R}^3 che è sempre connesso

Applichiamo lo stesso metodo di prima:

$$\int A_1(x, y, z) dx = x(y-z) + \underbrace{\psi(y, z)}_{\text{come completo ora?}} \rightarrow \text{questa "costante" è importante, altrimenti i conti non tornano}$$

È sicuro, per costruzione, che $\frac{\partial U}{\partial x} = A_1$

Ora dobbiamo imporre: $\frac{\partial U}{\partial y} = A_2$ e $\frac{\partial U}{\partial z} = A_3$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \partial_y \psi(y, z) = x + z + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y \psi = z + 1 \\ \partial_z \psi = y + 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \psi \text{ è un potenziale per} \\ \omega' = (z+1)dy + (y+1)dz \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -x + \partial_z \psi(y, z) = y - x + 1$$

La funzione $\psi(y, z) = zy + y + z$ è un potenziale \Rightarrow Otteniamo $U = x(y-z) + zy + y + z$

Un caso generale:

Non è vero che una forma ha sempre una primitiva: in alcuni casi ciò è vero poiché il problema si riduce a un caso unidimensionale.

Ecco un caso dove ciò è vero:

$\omega = \sum A_i(x) dx_i$ con $A_i(x) = \frac{a(|x|)}{|x|} x_i$
↳ ci riduciamo a 1 variabile $\rightarrow \forall i$ sono uguali

$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ non dipende davvero da } n \text{ variabili,} \\ \text{ma solo dal modulo di } x / \text{distanza dall'origine} \end{array} \right.$

Allora ω è esatta su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\omega = dU$ con $U(x) = \phi(|x|)$ con $\phi'(t) = t a(t)$

Detta in maniera "fisica" stiamo dimostrando che le forze centrali sono conservative

forma chiusa \longleftrightarrow campo irrotazionale

\int forma $\longleftrightarrow \int$ campo di vettori

forma esatta \longleftrightarrow campo conservativo

Dim: Stiamo supponendo a almeno continua $\Rightarrow t a(t)$ ammette una primitiva

Chiamo Φ la primitiva di $t \mapsto t a(t)$

Verifichiamo direttamente che questa espressione verifica la condizione porta:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = \phi'(|x|) \frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \phi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} = |x| \frac{a(|x|)}{|x|} x_i = A_i(x)$$

Un campo vettoriale così è sicuramente conservativo anche se il dominio non fosse sempl. connesso

Esempio: $\omega(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$

stessa f che dip. solo dalla dist. dall'origine \Rightarrow siamo nel caso di prima

$\omega(x, y)$ è esatta: $a(t) = \frac{1}{t^2} \rightarrow t a(t) = \frac{1}{t}$, $\phi(t) = \log(|t|)$
↳ a meno di 1 costante

$\Rightarrow U(x, y) = \log(x^2 + y^2) \rightarrow$ vista altre volte, è armonica, cioè $\Delta U = 0$ identicamente
↳ Laplaciano

Prop: Ω aperto, Ω sempl. connesso, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u \equiv 0$ su Ω (se u è armonica)

$\Rightarrow \exists v: \nabla u \cdot \nabla v = 0$ in ogni punto (cioè le curve di livello di u e v in ogni punto dove il grad. \uparrow gradiente non si annulla devono intersecarsi ortogonalmente)

Dim: $Du = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$, $\exists v$ $Dv = \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rightarrow$ modo più banale per trovare un vettore ortogonale

ciò si traduce nel seguente modo: se $w(x,y) = -\partial_y u dx + \partial_x u dy$ deve essere almeno chiusa

Imponiamo chiusa: $-\partial_y^2 u \stackrel{?}{=} \partial_x^2 u$ vero perché equivale a dire $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$

Siccome il dominio è semplicemente connesso \Rightarrow la forma è anche esatta

! Abbiamo usato pesantemente Ω sempl. connesso, senza avremmo trovato solo primitive locali

Quindi dato che Ω è semplicemente connesso $\exists v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $dv = w$ e quindi $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ su Ω

Terminologia: Tali u, v si chiamano armoniche coniugate.

E se Ω non è semplicemente connesso?

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

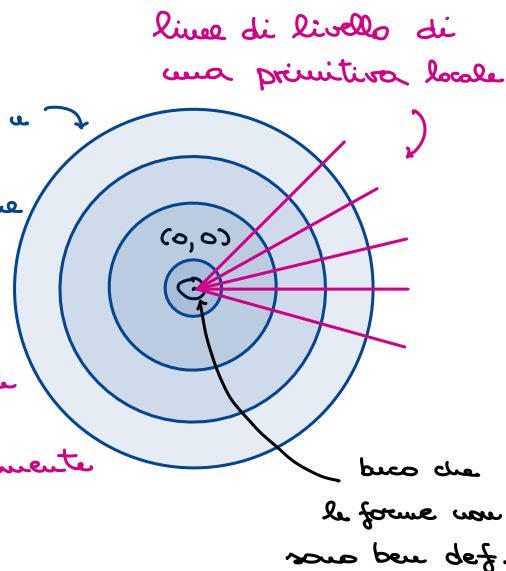
$$\partial_x u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \partial_y u = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$w_0 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{forma chiusa che ha primitiva} \\ \text{locale costante lungo le rette} \end{array} \right.$

linee di livello di u
centri concentrati
attorno all'origine

la funzione che ci dà
l'argomento di un punto
nel piano complesso ha un
andamento a spirale ma
non possiamo def. globalmente



Esercizio: Scrivere una primitiva di w_0 definita su $\{x > 0\}$

Esercizio: $\int_{\gamma} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} \xrightarrow{w}$ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos^5(t)) \cos(2t) \\ (2 + \frac{1}{2} \sin^3(t)) \sin(2t) \end{pmatrix}$

Calcolare l'integrale su γ . Ci sono due modi:

(1) Usare la definizione se $w = A dx + B dy$ e $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b (A(\gamma(t)) \dot{x}(t) + B(\gamma(t)) \dot{y}(t)) dt$$

(2) Semplificare il calcolo riconoscendo che questa forma ha proprietà buone

$$w = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy}_{w_1 \text{ chiusa + esatta}} + \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy}_{w_2 \text{ chiusa ma non esatta}}$$

$\Rightarrow \omega$ è chiusa perché somma di forme chiuse

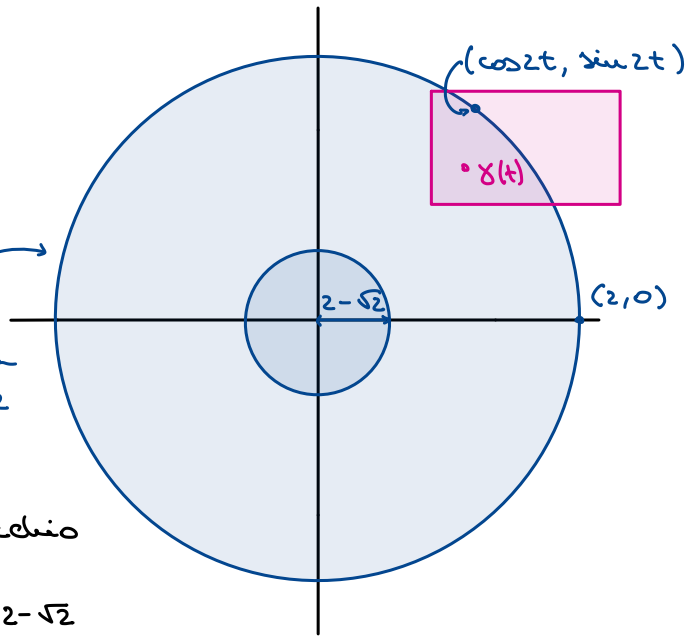
$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 \stackrel{*}{=} \int_{\gamma} \omega_2 \quad (*) \int_{\gamma} \omega_1 = 0 \text{ perché è una forma esatta e l'integrale è la diff. di potenziale agli estremi ma la forma è chiusa}$$

la curva sta nel dominio di ω ?

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos^5(t)) \cos(2t) \\ (2 + \frac{1}{2} \sin^3(t)) \sin(2t) \end{pmatrix}$$

questi ci fanno scostare di qualcosa < 1

se avessimo solo $2\cos 2t, 2\sin 2t$ è che gira su una circonf. di raggio 2



$$\begin{cases} |x(t) - 2\cos(2t)| \leq 1 \\ |y(t) - 2\sin(2t)| \leq 1 \end{cases} (*)$$

$(*) \Rightarrow \gamma(t)$ non è mai distante più di $\sqrt{2}$ dal cerchio

$\Rightarrow \gamma(t)$ starà sempre fuori dal cerchio di raggio $2 - \sqrt{2}$

Quindi possiamo togliere il termine relativo al \sin e al \cos usando un'omotopia ammissibile (cioè che rimane chiusa e dentro il dominio di ω).

$$\gamma_{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} (2 + \lambda \cos^5(t)) \cos(2t) \\ (2 + \frac{\lambda}{2} \sin^3(t)) \sin(2t) \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_{\lambda}} \omega_2 \text{ non dipende da } \lambda$$

$$\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega_2 \stackrel{(*)}{=} \int_{\gamma_0} \omega_2 = 4\pi \text{ su una curva che gira 2 volte attorno l'origine}$$

$(*)$ Attenzione: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, ω chiusa $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ è vero se l'omotopia è a estremi fissati ↖ hp necessaria

Esempio: $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \rightarrow$ semicirconferenza



$$H(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \end{pmatrix}, t \in [0, \pi], \lambda \in [0, 1], \gamma_1(t) = H(1, t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \gamma_0(t) = H(0, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_0} \omega = 0, \int_{\gamma_1} \omega = \pi \Rightarrow \text{la condizione agli estremi è necessaria}$$

Nel caso visto nell'esercizio gli estremi non sono fissati ma le curve sono tutte omotope. Perché funziona allora?

Oss: lo stesso risultato vale se alla condizione "omotopia a estremi fissati"

si sostituisce "omotopia tra curve chiuse"

Esempio: $H(\lambda, t) : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\forall \lambda \quad \left. \begin{array}{l} H(\lambda, a) = P_A \\ H(\lambda, b) = P_B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{gli estremi} \\ \text{sono fissati} \end{array} \quad H(\lambda, a) = H(\lambda, b) \rightarrow \text{omotopia tra curve chiuse } \forall \lambda \in [0, 1]$

Esercizio: Sia $\gamma_i = H(i, \cdot)$, $\delta(\lambda) \doteq H(\lambda, 0) = H(1, \lambda)$

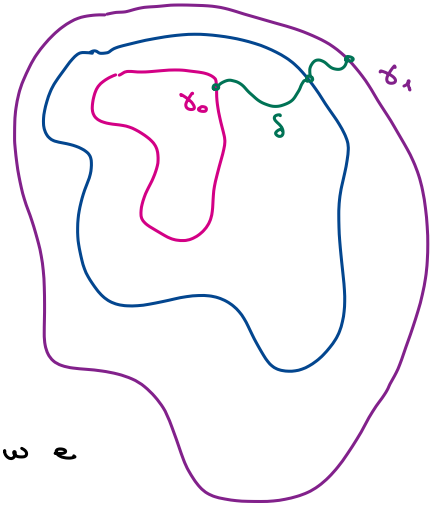
La curva $\gamma_0 \sim \delta^{-1} \gamma_1 \underset{\text{concatenata}}{*} \delta$ con un'omotopia a estremi fissati

Serve un'omotopia C^2 e riparametrizzare.

Verificare i dettagli per esercizio.

Esercizio: Sia $w = \frac{y dx - x dy}{(y-x)^2 + x^2}$ determinare il dominio di w e

dire se w è chiusa, esatta e in tal caso calcolare il potenziale



Prop: Sia ω una forma chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (di classe almeno C^1)

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$, $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ tale che $\omega = dU + c\omega_0$ dove

$$\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad \left(\text{il gruppo di coomologia } H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R} \xrightarrow{\text{forme di ordine 1}} \text{gtd} \right)$$

Voglio cercare di capire quanto deve essere c . Partiamo dal fondo: assumo che la tesi sia vera \rightarrow Come voglio c ?

Dim: Fisso $c \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega$ unico modo sensato, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$\omega_1 = \omega - c\omega_0$ è chiusa perché differenza di forme chiuse

ω_1 è esatta in quanto chiusa e in quanto $\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega - c \int_{\gamma} \omega_0 = 2\pi c - c 2\pi = 0$

Scelgo U tale che $dU = \omega_1 \Rightarrow$ Tesi

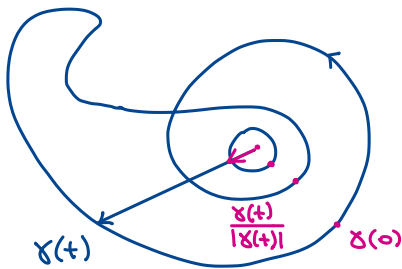
□

INDICE DI AVVOLGIMENTO DI UNA CURVA :

Curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0$

Oss₁: Se γ è una curva chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow \text{ind}(\gamma) \in \mathbb{Z}$

Dim: Considero un'omotopia con dato periodico al bordo tra $\gamma(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$

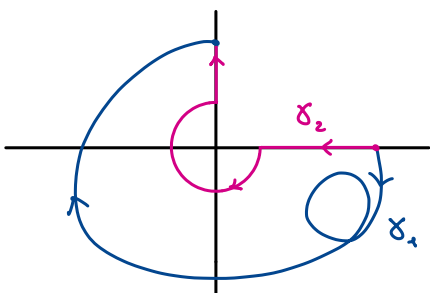


$$H(\lambda, t) = \lambda \gamma(t) + (1-\lambda) \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \quad \lambda \in [0, 1]$$

conta quante volte giro attorno all'origine
in senso antiorario

Oss₂: Se γ è una curva qualsiasi e $\gamma_1 \sim \gamma_0$ è a estremi fissati allora $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$

Es:



Quanto vale $\int_{\gamma} \omega_0$? Vale $-\frac{3}{2}\pi$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e l'integrale di ω_0 sui pezzi rettilinei di γ_2 è nullo

Esempio: $t \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \quad \omega_0(\sigma(t))\sigma'(t) = \frac{bt(a) - at(b)}{(a^2t^2 + b^2t^2)} = 0$

Esercizio: $w(x, y) = \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x + \frac{x^4 + x^2 y^2}{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} dy$

$x^2(x^2 + y^2)$

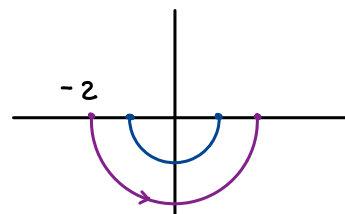
• Dire se w è chiusa o esatta

• Calcolare $\int_\gamma w$ dove $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix} \quad -2 \leq t \leq 2$

$w = w_0 - x^2 dy$ non è chiusa perché $x^2 dy = w_0 - w$, quindi w non è esatta

$\int_\gamma w = \int_\gamma w_0 - \int_\gamma x^2 dy, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix} \quad t \in [-2, 2]$

$\int_\gamma w_0 = \pi \quad \int_\gamma x^2 dy = \int_{-2}^2 t^2 \cdot 2t dt = 2 \int_{-2}^2 t^3 = 2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-2}^2 = 0$



Esercizio: Fare lo stesso calcolo per $\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi/2]$

(verificando prima che $|\sigma(t)| \neq 0 \quad \forall t$)

Es: $w_d(x, y) = \left(\underbrace{\frac{dxy}{x^4 + y^2}}_A, \underbrace{\frac{x^2}{x^4 + y^2}}_B \right) \quad d \in \mathbb{R} \text{ parametro, } w_d \text{ chiusa e esatta}$

Domini di definizione: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, w_d chiusa $\Leftrightarrow \partial_y A = \partial_x B$

$$\left. \begin{aligned} \partial_x B &= \frac{2x(x^4 + y^2) - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{-2x^5 + 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2} \\ \partial_y A &= dx \frac{x^4 + y^2 - y \cdot (2y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{dx^5 - 2dxy^2}{(x^4 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} w_d \text{ chiusa} \Leftrightarrow d = -2$$

Es per casa: cercare curva omotopa a $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$ in modo che il calcolo $\int_\gamma w_2$ venga semplice

Proviamo a integrare:

$$U(x, y) = \int B dy = \int \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy = \int \frac{1/x^2}{1 + (1/x^2)^2} dy = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) + c(x)$$

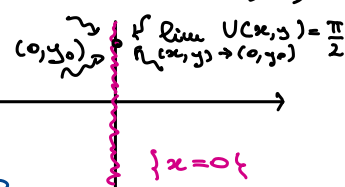
$\begin{cases} \frac{dy}{x^2} = t \\ \frac{dy}{x^2} = dt \end{cases}$

Si verifica facilmente che $\frac{\partial U}{\partial x} = A \Leftrightarrow c(x) = \text{cost.}$, $U(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right)$

$dU = w$ i domini non coincidono! $U: \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\tilde{U}(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & x \neq 0 \\ \pi/2 & x=0, y>0 \\ -\pi/2 & x=0, y<0 \end{cases}$

continua e $C^1 \rightarrow d\tilde{U} = w_2 \Rightarrow \tilde{U} \in C^0$
(coincide col suo limite in ogni punto)



TEOREMA DI GAUSS-GREEN (ne parleremo solo in \mathbb{R}^2 per oggi)

Def: $D \subset \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto, con bordo regolare

○ D normale rispetto a x se $\exists f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$D = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x); x \in [a, b]\} \text{ con } f \leq g$$

D normale rispetto a y , si scambia x con y



← normale rispetto a x



← normale rispetto a y

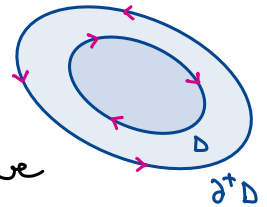
○ D normale regolare se $f, g \in C^1$

○ D regolare se è unione finita di domini normali regol. con int. disgiunto

Oss: D regolare $\Rightarrow \partial D \in C^1$ a tratti

∂D è unione finita di curve chiuse C^1 a tratti

$\partial^+ D$ è l'orientazione "positiva" di questo sistema di curve



Teo (Gauss - Green):

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $f \in C^1(A)$ con $A \supseteq D$ aperto \Rightarrow

$$\textcircled{1} \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ D} f dy$$

↓
dipendano dal verso di percorrenza!

$$\textcircled{2} \int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial^+ D} f dx$$

↑
 ∂^+ mi indica che il verso è antiorario

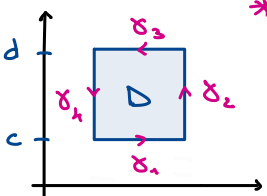
Dim: Dimostriamo $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ si fa allo stesso modo.

$D = \bigcup_{i=1}^N D_i$, D_i normale regolare

$\textcircled{1a}$ Supponiamo D normale rispetto a y

$\exists h, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $D = \{(x, y) : h(y) \leq x \leq g(y)\}$

$$* = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d (f(g(y), y) - f(h(y), y)) dy$$



$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f \langle T_i, e_2 \rangle = \int_{\gamma_2} f \langle T_2, e_2 \rangle + \int_{\gamma_4} f \langle T_4, e_2 \rangle$$

Chi è \int_{γ_2} ? Posso parametrizzare $\gamma_2(y) = (g(y), y) \quad y \in [c, d]$

$$T_2 = \frac{(g'(y), 1)}{\sqrt{1 + g'(y)^2}} \Rightarrow \int_{\gamma_2} f \langle T_2, e_2 \rangle = \int_c^d f(g(y), y) \cdot \langle \overset{1}{\gamma_2'}, e_2 \rangle = \int_c^d f(g(y), y) dy$$

$$\int_{\gamma^+ D} f dy = \int_c^d [f(g(y), y) - f(h(y), y)] dy = (*)$$

(1b) Supponiamo D normale rispetto a x

$$D = \{(x, y) : h(x) \leq y \leq g(x), x \in [a, b]\}$$

Introduciamo il "potenziale" $F(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{xy}} f dy = \int_a^x f(t, h(t)) h'(t) dt + \int_{h(x)}^y f(x, t) dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \cancel{f(x, h(x)) h'(x)} + \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \cancel{f(x, h(x)) \cdot h'(x)} \\ &= \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \end{aligned}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left(\int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx + f dy$$

1-forma esatta

$$\int_{\partial^+ D} dF = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} f dy = - \int_{\partial^+ D} \left(\int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx$$

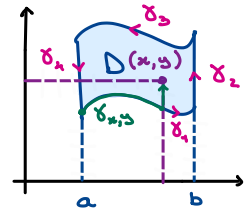
$$= - \int_{\gamma_1} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx + \int_{\gamma_3} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx =$$

$$\text{con } \gamma_1(s) = (s, h(s)) \quad s \in [a, b] \quad \gamma_1'(s) = (1, h'(s))$$

$$\gamma_3(s) = (s, g(s)) \quad s \in [a, b] \quad \gamma_3'(s) = (1, g'(s))$$

$$\langle \gamma_1'(s), e_1 \rangle = \langle \gamma_3'(s), e_1 \rangle = 1$$

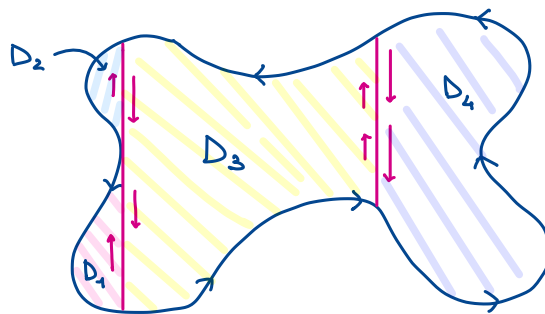
$$= \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx + \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$



1c D regolare $D = \bigcup_{i=1}^N D_i$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_i \int_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x} \text{ additività di } f$$

$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_i \int_{D_i} f dy$$



L'integrale di $f dy$ su $\partial^+ D_i \cap \partial^+ D_j$ è nullo ($i \neq j$)

Conseguenza del teorema

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $F = (F_1, F_2)$

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A \supseteq D$ aperto, campo di vettori C^1

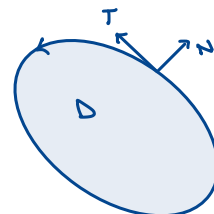
$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ divergenza di F

Teo (Divergenza): $\partial^+ D = (x(t), y(t))$, $t \in I$
 immagine di unione finita di singole curve γ (con una sola γ)

$$\int_D \text{div } F = \int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \int_D \frac{\partial F_2}{\partial y} \stackrel{\text{G.G.}}{=} \int_{\partial^+ D} F_1 dy - F_2 dx = \int_I F_1 \cdot y' - F_2 \cdot x' dt =$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad T(t) = \frac{(x', y')}{|\gamma'|}, \quad N(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|\gamma'|}$$

$$= \sum \int_{\gamma} F \cdot N = \int_{\partial^+ D} F \cdot N \quad \hookrightarrow \text{FLUSSO DI } F \text{ ATTRAVERSO } \partial D$$



Teo (Stokes): È uguale al teo della divergenza in dimensione 2! Si distinguono in dimensione ≥ 3 , ecco perché in Fisica vengono distinti

$$\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy$$

$\text{rot}(F)$
ROTORE DI F

\hookrightarrow Integrale della forma associata a F lungo $\partial^+ D$.
Lavoro o circuitazione di F lungo $\partial^+ D$

Oss: Se F è irrotazionale, cioè $F_1 dx + F_2 dy$ è chiusa \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy = 0 \quad \forall D \subseteq A \text{ regolare quindi se } A \text{ è semplicemente connesso}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa in } A \Rightarrow \text{la forma è esatta}$$

Cor (Formula dell'area):

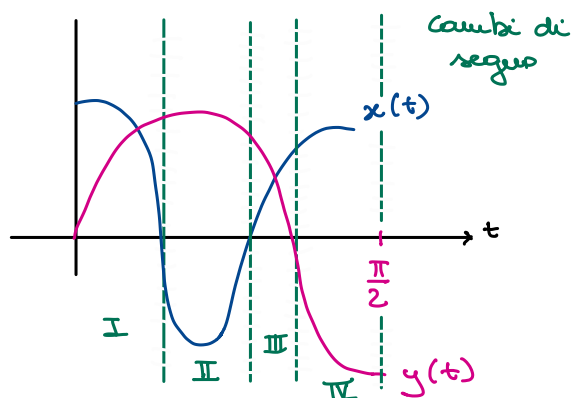
$$\text{Se scegli } f(x, y) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad |D| = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\partial^+ D} x dy = - \int_{\partial^+ D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x dy - y dx$$

Esercizio: $\omega = \omega_0 - x^2 dy$ dove $\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ è una forma chiusa ma non esatta

$$\int_{\gamma} \omega \text{ con } \gamma(t) = (\cos 4t, \sin 3t) \text{ con } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_0 - \int_{\gamma} x^2 dy \rightarrow \text{fare il conto}$$

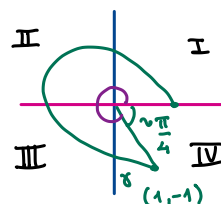
Quante volte la curva gira intorno all'origine, e in che direzione?

Idea: contare i quadranti \rightarrow faccio due grafici sovrapposti



$$\gamma(0) = (1, 0)$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, -1)$$



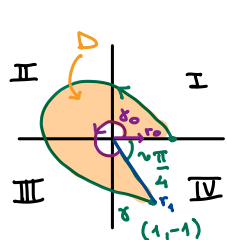
sto integ.
lungo una
circonf.
int. 0

Quando si annulla la $x \rightarrow$ asse verticale

Quando si annulla la $y \rightarrow$ asse orizzontale

$$\int_{\gamma} \omega_0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Metodo alternativo con Gauss-Green (Traccia):



$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\partial D} \omega_0$$

Considero il dominio evidenziato D .

$$\int_{\partial D} \omega_0 = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

= 0 perché la forma è chiusa

$$+\partial D = \gamma + r_1 + (-\gamma_0) + r_0$$

$$0 = \int_{\partial D} \omega_0 = \int_{\gamma} \omega_0 + \int_{r_1} \omega_0 - \int_{\gamma_0} \omega_0 + \int_{r_0} \omega_0 \Rightarrow \int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\gamma_0} \omega_0$$

Ripasso: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ di classe C^1 , $i(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0$; se γ chiusa $\Rightarrow i(\gamma) \in \mathbb{Z}$

Dim: $\phi: (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(p, \theta) \rightarrow \begin{pmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{pmatrix} \text{ coord. polari}$$

$$\text{Se } \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R} \text{ allora } \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_{\phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0 \leadsto \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_a^b \theta'(t) dt \text{ con } \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sia } \phi \circ \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} p(t) \cos \theta(t) \\ p(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}. \text{ Si ha } \int_{\phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0 = \int_a^b \frac{N}{p^2(t)} dt$$

$$N = x dy - y dx$$

$$dx \sim p' \cos \theta - p \sin \theta \cdot \theta'$$

$$dy \sim p' \sin \theta + p \cos \theta \cdot \theta'$$

$$N = p \cos \theta (p' \sin \theta + p \cos \theta \cdot \theta') - p \sin \theta (p' \cos \theta - p \sin \theta \cdot \theta') = p^2 \cos^2 \theta \cdot \theta' + p^2 \sin^2 \theta \cdot \theta' = p^2 \theta'$$

$$(*) = \int_a^b \frac{p^2 \theta'}{p^2} = \int_a^b \theta' dt$$

Oss/Es: Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ di classe C^1 con $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora, fissato $p \in \Phi^{-1}(\gamma(a))$,

$\exists! \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ di classe C^1 tale che $\Phi(\tilde{\gamma}) = \gamma$, $\Phi(\tilde{\gamma}(a)) = p$ e in particolare

$$\text{si ha } \Phi(\tilde{\gamma}(b)) = \gamma(b) = \gamma(a)$$

$$\Phi^{-1}(\gamma(a)) = \{ p + k(0, 2\pi) : k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{tutti i pt. in cui } \theta \text{ diff. di } 2\pi$$

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\Phi(\tilde{\gamma})} \omega_0 = \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \text{dim. che l'indice di una curva chiusa \u00e8 in } \mathbb{Z}$$

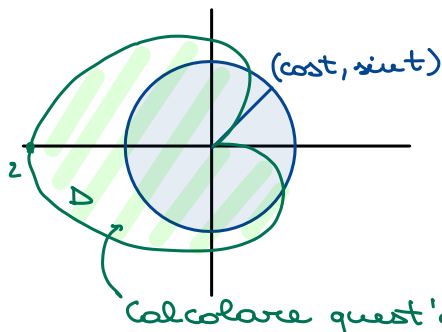
Applicazione di Gauss-Green:

$$\text{Ripasso: } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

Caso particolare: formula dell'area

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

Esempio: Determinare l'area racchiusa dalla curva $\gamma: \begin{cases} x(t) = (1 - \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 - \cos t) \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



la curva \u00e8 iniettiva, $1 - \cos t \geq 0$
 \hookrightarrow se $t \neq 0 \bmod 2\pi$

Esercizio: Verificare che $|\gamma'(t)| \neq 0$

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= (1 - \cos t) \cos t [\sin^2 t + (1 - \cos t) \cos t] - (1 - \cos t) \sin t [-\sin t + 2 \cos t \sin t] \\ &= (1 - \cos t) [\cos t \sin^2 t + \cos^2 t - \cos t + \sin^2 t - 2 \cos t \sin^2 t] \\ &= (1 - \cos t) [1 - (\cos^2 t + \sin^2 t) \cos t] = (1 - \cos t)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Area } D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - 2 \cos t + \cos^2 t] dt = \pi + \frac{1}{2} (2\pi) \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \pi$$

Teo: D dominio regolare di \mathbb{R}^2 con bordo di lunghezza finita ($\ell = 2\pi$) omeomorfo al disco unitario allora ha area minore o uguale a π .

Dim: Voglio vedere $\text{Area}(D) \leq \pi$ e vale $\Leftrightarrow D$ \u00e8 un disco di raggio 1

Sia γ la parametrizzazione di ∂D per lunghezza d'arco.

[Se $\gamma \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^n)$, $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ definisco $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$ $s'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$

$s: [a,b] \rightarrow [0, l(\gamma)]$, posto $g: [0, l(\gamma)] \rightarrow [a,b]$ $g = s^{-1}$

$\tilde{\gamma} \doteq \gamma \circ g: [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $|\tilde{\gamma}'| \equiv 1$ (verificare)

↑ Parametrizzazione di γ per lunghezza d'arco $l(\tilde{\gamma}_{[0,s]}) = s \quad \forall s \in [0, l(\gamma)]$

$\gamma: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$ Param. di $+\partial D$ per lung. d'arco

$$l(\partial D) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} [x'(t)^2 + y'(t)^2] dt$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') dt \quad z(t) = x(t) + i y(t) \quad z \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

↑ 2π -periodica

$$l(\partial D) = \int_0^{2\pi} \dot{z} \bar{z} dt = \int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2 dt, \quad \text{Area}(D) = \text{Im} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\bar{z} z') \right)$$

$$z = \sum c_k e^{ikt} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) e^{-ikt} dt \quad \dot{z}(t) = \sum i k c_k e^{ikt} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2$$

$$l(\partial D) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} |k c_k|^2 \Rightarrow \text{Area}(\partial D) = \frac{\text{Im}}{2} \left(2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \bar{c}_k c_k \right) = \frac{2\pi}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2$$

Qss: $l(\partial D) = 2\pi \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^2 |c_k|^2 = 1$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^2 |c_k|^2 \leadsto \text{Area}(D) \leq \pi$$

Qss/Es: l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow c_k = 0 \quad \forall k \neq 1, c_1 = 1$

INTEGRAZIONE DI K-SUPERFICI (APPROCCIO PARAMETRICO)

Def: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sup. di dimensione k (o k -rep) di classe C^1 , se $\forall x_0 \in \Sigma$

$\exists \varphi: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ palla unitaria, di classe C^1 t.c. $x_0 \in \varphi(B_1) \subseteq \Sigma$ e

$$\text{rk}(D\varphi(x)) = k \quad \forall x \in B_1.$$



Diciamo che Σ è "embedded" se possiamo sempre scegliere φ t.c. $\varphi(B_1) \supseteq \Sigma \cap B_r(x_0)$, $r > 0$

Come si calcola l'area k -dim di Σ ?

Supponiamo $\Sigma = \varphi(B)$, $\varphi \in C^1$, $\text{rk}(D\varphi) = k$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto

Caso ①: φ lineare, cioè $\varphi(x) = Lx$, L matrice $k \times n$, $\text{rk}(L) = k$

①a) L ortogonale, cioè $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$, $L^t L = \text{Id}_k$, $H^k(\Sigma) := |U|_{\mathbb{R}^k}$
 ↳ misura k -dim. di Σ

①b) L generale, posso scrivere $L = L' \cdot S$, $S \in M_{k \times k}$, L' ortogonale

$$H^k(\Sigma) = H^k(L' \cdot S \cdot (U)) = |S(U)|_k = |\det S| \cdot |U|_k$$

↳ Formula dell'area in \mathbb{R}^k

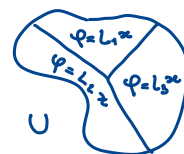
Oss: $L^t L = S^t \underbrace{L'^t L'}_{\text{Id}_{\mathbb{R}^k}} S = S^t S \in M_{k \times k}$

$$\det(L^t L) = \det(S^t S) = \det(S)^2 \rightarrow H^k(\Sigma) = \sqrt{\det(L^t L)} |U|_{\mathbb{R}^k}$$

Oss (Formula di Cauchy-Binet): $\det(L^t L) = \sum_{M \text{ minore di rango } k \text{ di } L} \det(M)^2$

Caso ②: φ lineare a tratti, $\Sigma = \varphi(U)$, $H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)} dx$

Caso ③: $\varphi \in C^1$, $\Sigma = \varphi(U)$, $\text{rk}(D\varphi(x)) = k \quad \forall x \in U$



$\exists \varphi_n$ lineare a tratti t.c. $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ e $D\varphi_n(x) \rightarrow D\varphi(x)$ unif. in $x \in U$ per $n \rightarrow +\infty$
 ↳ andrebbe dimostrato

Definiamo $H^k(\Sigma) := \lim H^k(\varphi_n(U)) = \lim \int_U \sqrt{\det(D\varphi_n^t D\varphi_n)} = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}$

Oss: Talvolta si usa la notazione $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi}$

Oss: $k=n$ ritroviamo la formula $|\varphi(U)| = \int_U J_\varphi$

$k=1$ $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^b$ $D\varphi = \varphi'$, $J_\varphi = |\varphi'|$, $H^1(\varphi(a,b)) = L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|$

$$\boxed{k=2, n=3} \quad \varphi = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} \\ \varphi_{3x} & \varphi_{3y} \end{pmatrix} \quad D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} |\varphi_x|^2 & \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \\ \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle & |\varphi_y|^2 \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \sqrt{|\varphi_x|^2 |\varphi_y|^2 - \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle^2} = |\varphi_x \wedge \varphi_y| \quad \text{prod. vettore} \quad \text{coe } a \wedge b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{caso ②: } \Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i) \quad \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset \quad i \neq j,$$

$$H^k(\Sigma) := \sum_{i=1}^N \int_{U_i} J_{\varphi_i} dx$$

Esempio (Grafici):

$$\Sigma = \Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}, \quad f \in C^1$$

$$\varphi(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix}, \quad J_\varphi = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}, \quad H^{n+1}(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

Oss: $H^k(\Sigma)$ è invariante per riparametrizzazione

$$\Sigma \circ \varphi(U) = \psi(V), \quad V = \phi(U), \quad \phi \text{ diffeomorfismo } C^1 \text{ tra } U \text{ e } V$$

$$\psi = \varphi \circ \phi^{-1}, \quad D\psi = D\varphi \cdot [D\phi]^{-1}, \quad D\varphi = D\psi \cdot D\phi$$

$$H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \int_U \sqrt{\det (D\phi)^t D\psi^t D\psi D\phi} = \int_U J_\psi J_\phi dx \stackrel{\text{FORMULA DELL'AREA}}{=} \int_V J_\psi$$

$$\text{Def: } \Sigma \text{ k-superficie, } f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } \Sigma \subseteq A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \quad \int_\Sigma f := \int_U (f \cdot \varphi) J_\varphi dx$$

$$\text{In generale } \Sigma = \bigcup_i \varphi_i(U_i), \quad \int_\Sigma f := \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (f \cdot \varphi_i) J_{\varphi_i} dx$$

Oss: $\int_\Sigma f$ è invariante per riparametrizzazioni

FLUSSO DI UN CAMPO DI VETTORI

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ -sup embedded orientabile, $\forall x \in \Sigma$, $\exists 2$ scelte del vettore normale in $T_\Sigma(x)^\perp$, $N(x)$ e $-N(x)$

Σ si dice orientabile se \exists scelta continua di $N(x)$.

(Σ, N) si dice una sup. orientata

Def: (Σ, N) sup. orientata di dim. $n-1$ in \mathbb{R}^n , $v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo di vettori continuo,

$\Sigma \subseteq A$ aperto, $\int_\Sigma \langle v, N \rangle$ si dice flusso di v attraverso Σ

Oss: Dipende dalla scelta dell'orientazione N

Esempio: $\Sigma = \partial U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con bordo C^1

Σ è orientabile. $N^e(x)$ normale esterna ($N^e(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ se $U = \{f < 0\}$)

$N^i(x)$ normale interna

Oss: Quando si considera il flusso di v attraverso $\Sigma = \partial U$, di norma si considera $N^e(x)$

Teorema della divergenza:

$\Sigma = \partial U$ ipersuperficie C^1 (o C^1 a tratti), $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato,

$v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo di vettori di cl. C^1 , $\bar{U} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto \Rightarrow

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} v \cdot N^e = \int_U \operatorname{div} v(x) dx \quad \text{dove } \operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \text{ è la } \underline{\text{divergenza}} \text{ di } v$$

Oss: Non tutte le $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ embedded sono orientabili.

\hookrightarrow esempio:



Oss: Se prendo $v = \nabla f$ con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2

$$A \supseteq \bar{U}, \Sigma = \partial U \Rightarrow \int_{\partial U} \nabla f \cdot N^e = \int_U \operatorname{div}(\nabla f) = \int_U \Delta f \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ laplaciano di } f.$$

Teo (DIVERGENZA):

$\Sigma = \partial U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, Σ di classe C^1 , $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 ,

$$\bar{U} \subseteq A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \Rightarrow \int_{\partial U} F \cdot N^e = \int_U \operatorname{div} F \text{ dove } \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Dim: NB: Il flusso è additivo, così come l'integrale

\Rightarrow se funziona su un cubo, funziona anche sull'unione di cubi

passo ①: $(x', y) \in \mathbb{R}^n$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(x_0', y_0) \in \Sigma$

Supponiamo che $\exists C = B_r(x_0') \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ e

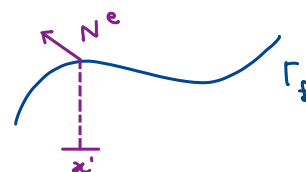
$f: B_r(x_0') \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ di classe C^1 t.c. $\Sigma \cap C = \Gamma_f$



referimento:
 $\begin{matrix} y \\ \uparrow \\ x' \end{matrix}$

Supp. che $\sigma(x) = u(x)e_n$, con $u(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{spt} u \subseteq C$; $\operatorname{div} \sigma = \frac{\partial u}{\partial y}(x', y)$

$$\int_U \operatorname{div} \sigma = \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial y}(x', y) = \int_{B_r(x_0')} \int_{y_0 - \varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx' = \int_{B_r(x_0')} u(x', f(x'))$$



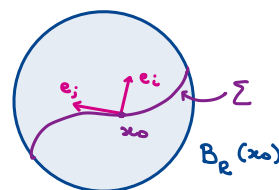
$$= \int_{\Gamma_f} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}} = \int_{\Sigma \cap C} u e_n \cdot N_\Sigma^e = \int_\Sigma \sigma \cdot N^e \quad N^e = \left(-\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

passo ②: $x_0 \in \Sigma$ supponiamo che $\exists R$ t.c. $\operatorname{spt} \sigma \subseteq B_R(x_0)$ e $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\exists f_i: e_i^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\Sigma \cap B_R(x_0) = \Gamma_{f_i}$ in direzione e_i

Oss: Si può sempre supporre, prendendo R piccolo,

che $N(x)$ non è parallelo a $e_i \forall i$



$$\int_U \operatorname{div} \sigma = \int_U \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_U \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_\Sigma \sigma_i e_i \cdot N = \int_\Sigma \sigma \cdot N$$

per ① applicato con $\sigma = \sigma_i \cdot e_i$

Es: l'operatore di div. è indipendente dalla base

passo ③: Supponiamo $\operatorname{spt}(\sigma) \subseteq B_R(x_0)$ ma che $N(x_0) = e_i$ per qualche i

Scegliamo $L \in M_{n,n}$ ortogonale t.c. $LN(x_0)$ non è \parallel a $e_j \forall j$ e osserviamo che

$$\int_U \operatorname{div} \sigma = \int_{B_R(x_0) \cap U} \operatorname{div} \sigma dx \stackrel{\text{va verificato}}{=} \int_{L(B_R(x_0) \cap U)} \operatorname{div} L\sigma(L^{-1}y) dy = \int_{L(\Sigma)} L\sigma \cdot (L^{-1}y) LN(L^{-1}y)$$

②

$$= \int_{L(\Sigma)} \sigma(L_y^{-1}) \cdot N(L_y^{-1}) \stackrel{(*)}{=} \int_{\Sigma} \sigma(x) N(x) \quad \text{con } x = L^{-1}y$$

va verificato

passo ④: Dato che Σ è compatto, possiamo trovare $x_1, \dots, x_N \in \Sigma$ e $R > 0$

ta $\Sigma \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_R(x_i)$, $\Sigma \cap B_R(x_i)$ è grafico

$\forall i \in [0, 1, \dots, N] \exists \eta_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ di classe C^1 *partizione dell'unità*

ta $\sum_{i=0}^N \eta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{U}$, $\text{spt}(\eta_i) \subseteq B_R(x_i) \quad \forall i$

Possiamo scrivere $\sigma = \sum_{i=0}^N \sigma \eta_i \quad \forall x \in \bar{U}$,

$$\text{div } \sigma = \sum_{i=0}^N (\text{div } \sigma) \eta_i + \sigma \cdot \nabla \eta_i = \text{div } \sigma + \sigma \cdot \nabla \left(\sum_{i=0}^N \eta_i \right) = \text{div } \sigma$$

$$\int_U \text{div } \sigma = \sum_{i=0}^N \int_U \text{div}(\sigma \eta_i) \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^N \int_U \text{div}(\sigma \eta_i) \stackrel{③}{=} \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma} (\sigma \cdot N) \eta_i = \int_{\Sigma} \sigma \cdot N$$

$$\textcircled{*} \int_U \text{div}(\sigma \eta_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{div } w = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx = 0 \quad , \quad w(x) = \begin{cases} \sigma \cdot \eta_0 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Fubini-Tonelli

INTEGRALI SU SUPERFICI IN \mathbb{R}^3

$\Sigma = \varphi(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare, $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , iniettiva,

$\bar{D} \subseteq A$, $\text{rk}(D\varphi) = 2 \iff \varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma \neq 0 \quad \forall (\mu, \sigma) \in \bar{D}$

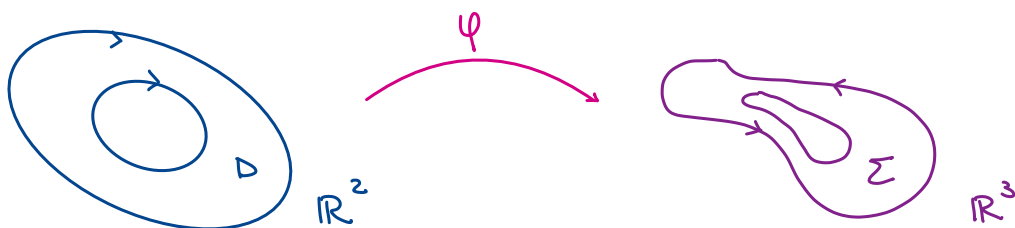
$$\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma \in \langle \varphi_\mu, \varphi_\sigma \rangle^\perp = T\Sigma^\perp \quad \text{quindi } N := \frac{\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma}{|\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma|}$$

Definisce un'orientazione di Σ .

caso ① $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\int_{\Sigma} f = \int_D f(\varphi) J\varphi = \int_D f(\varphi) |\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma| d\mu d\sigma$

caso ② $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo di vettori continuo

$$\int_{\Sigma} F \cdot N = \int_D F(\varphi) \cdot \frac{(\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma)}{|\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma|} \cdot |\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma| = \int_D F(\varphi) (\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma) d\mu d\sigma \quad \text{con } N = \frac{\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma}{|\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma|}$$



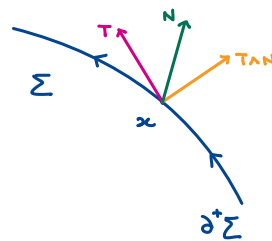
Se consideriamo l'orientazione positiva di ∂D , φ induce un'orientazione positiva di $\partial \Sigma$ che indichiamo con $\partial^+ \Sigma$

Si può verificare che $\forall x \in \partial \Sigma$

*****) Il vettore $T \wedge N \in T_{\Sigma}(x)$ punta sempre "fuori" da Σ

Analogamente, data (Σ, N) superficie orientata in \mathbb{R}^3

è def. l'orientazione positiva $\partial^+ \Sigma$ della condizione *****)



Teorema di Stokes:

(Σ, N) superficie in \mathbb{R}^3 , compatta, orientata, di classe C^1 e dato $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$

di classe C^1 con $\Sigma \subseteq A$ aperto $\Rightarrow \int_{\Sigma} (\text{rot } F) \cdot N = \int_{\partial^+ \Sigma} F$

si dice rotore di F
($\text{rot } F, \nabla \wedge F$)

Dove $\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$

INTEGRAZIONE SU K-SUPERFICI

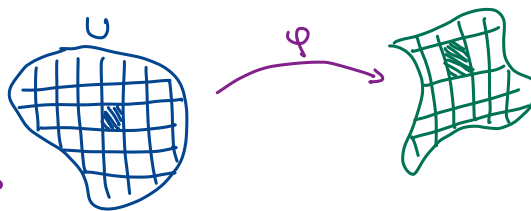
$U \subseteq \mathbb{R}^k$ $k \leq n$, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare, φ iniettiva, $\text{rk}(D\varphi(x)) = k$, $\Sigma = \varphi(U)$

$$H^k(\Sigma) = \int_U \underbrace{\sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}}_{J_\varphi(x)} dx$$

$J_\varphi(x) \rightarrow$ fattore locale

$$\int_\Sigma f = \int_U (f \circ \varphi)(x) J_\varphi(x) dx$$

\hookrightarrow mi dice quanto un rettangolo viene espanso o contratto



Oss: Si suppone di avere già una riparametrizzazione, negli esercizi non sempre è così

Casi particolari e esempi

• Caso di superficie da un grafico

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $u: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\Sigma = \{(x, u(x)) : x \in U\}$, $\varphi: x \rightarrow (x, u(x))$

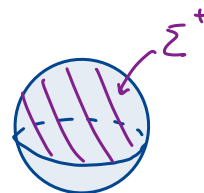
$$\int_\Sigma f = \int_U f(x, u(x)) \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

• Calcolo della superficie della sfera di raggio r

$\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \rightarrow$ divido le due calotte

$$u(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$H^2(\Sigma^+) = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy = (*) \rightarrow \text{passo in coord. polari}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}; |\nabla u|^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2 - x^2 - y^2}$$

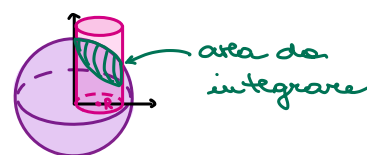
$$(*) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho = 2\pi r^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} y dy =$$

$$= 2\pi r^2 \left[-\sqrt{1 - y^2} \right]_0^1 = 2\pi r^2 \text{ (Area di una semisfera)} \Rightarrow \text{Area } \Sigma = 4\pi r^2$$

Esercizi. 1) Trovare l'area della regione $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq Rx\} \quad R > 0$

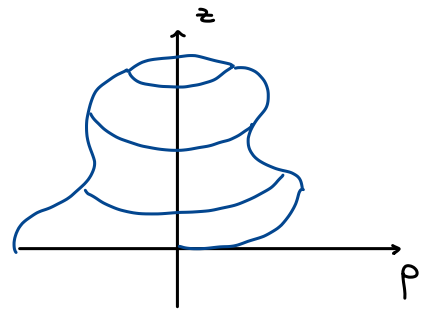
$$(*) \rightarrow x - Rx + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

2) Trovare l'area della regione $\{z = x \cdot y : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Superfici di Rotazione

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos \theta \\ \rho(t) \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} t \in [a, b] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$



$$D\varphi = (\varphi_t, \varphi_\theta), \quad \varphi_t = \begin{pmatrix} \rho' \cos \theta \\ \rho' \sin \theta \\ z' \end{pmatrix}, \quad \varphi_\theta = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_t \cdot \varphi_t & \varphi_t \cdot \varphi_\theta \\ \varphi_\theta \cdot \varphi_t & \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho')^2 + (z')^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \quad J_\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}$$

$$J_\varphi(t, \theta) = \rho \sqrt{(\rho')^2 + (z')^2}, \quad \Sigma = \varphi([a, b] \times [0, 2\pi])$$

$$H^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b \rho \sqrt{(\rho')^2 + (z')^2} dt$$

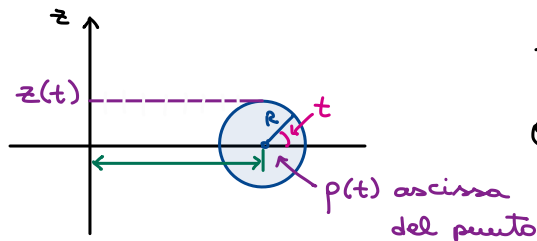
Applicazioni:

• Area di un toro:

$$\rho(t) = a + R \cos t$$

$$z(t) = R \sin t$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad t \in [0, 2\pi]$$

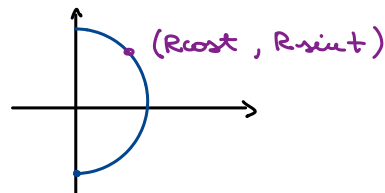


$$H^2(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + R \cos t) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R \int_0^{2\pi} (a + R \cos t) dt = 4\pi^2 R a$$

Esercizio: Fare lo stesso calcolo per ricavare la superficie della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Dove R è la distanza dall'origine



Teorema della divergenza: applicazioni

$$1) F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

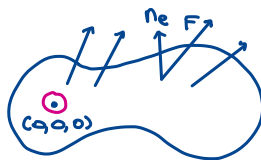
$$\partial_x r = \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} \partial_x (r^{-3}) &= -3r^{-4} \partial_x r \\ &= -\frac{3x}{r^5} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} F = \partial_x \left(\frac{x}{r^3} \right) + \partial_y \left(\frac{y}{r^3} \right) + \partial_z \left(\frac{z}{r^3} \right)$$

$$\partial_x \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \quad \partial_y \left(\frac{y}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \partial_z \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

$$\operatorname{div} F = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto limitato con bordo liscio

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n_e \stackrel{?}{=} \iint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0$$

↑
è vero?

Sì, se $(0,0,0) \notin \overline{\Omega}$ applicando il teorema della divergenza

Se $(0,0,0) \in \Omega$ applico il teorema della divergenza a $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$ (*)

(*) prendo ε piccolo in modo che $\overline{B_\varepsilon(0)} \cap \partial\Omega = \emptyset$

$$\iint_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \operatorname{div} F = 0$$

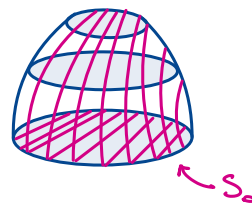
$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}_e - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \quad n_e = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \quad F = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

$$F \cdot n_e = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{è costante su } \partial B_\varepsilon(0))$$

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \begin{cases} 0 & (0,0,0) \notin \overline{\Omega} \\ 4\pi & (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

2) $S = \{x^2+y^2+z^4=1, z \geq 0\}$, $F(x,y,z) = (x, y, x+y-2z)$

Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e$ ⚠ usa \bar{S} una sup. chiusa



In realtà ha divergenza nulla: $\operatorname{div} F = 1+1-2=0$

$$V = \{x^2+y^2+z^4 \leq 1; z \geq 0\}$$

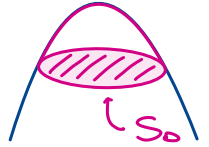
$$\partial V = S \cup S_0 \rightsquigarrow 0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \rightarrow \text{Calcolo questo}$$

$$\int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x+y) \, dx \, dy = 0$$

Quindi $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e = 0$

3) Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$, $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$, $S = \{z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$

Si può procedere in due modi diversi:



1) Calcolo usando la def.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \text{ dove } V \text{ è il volume bordato } S \cup S_0$$

2) $(x, y) \mapsto (x, y, 2 - x^2 - y^2)$ param. cartesiana

$$U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad \vec{n}_e = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|}$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_U F(x, y, 2 - x^2 - y^2) \cdot \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|} dx dy = *$$

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \quad \varphi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1(2x) + \vec{e}_2(2y) + \vec{e}_3$$

non danno contributo

$$* = \int_{x^2 + y^2 \leq 2} (x^2(2x) + y^2(2y) + 2 - x^2 - y^2) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} 2 - x^2 - y^2 dx dy \quad \text{finire conti per esercizio}$$

Teorema (Stokes): (Σ, N) sup. orientata, compatta, con bordo, di classe C^1 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ N campo normale continuo \hookrightarrow param. da una funz. C^1 con bordo C^1 $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A \supseteq \Sigma$ aperto $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \int_{\partial^+ \Sigma} F$$

$$\text{ROTORE DI } F: \text{rot } F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Dim: ① Supponiamo $\Sigma = \varphi(\bar{D})$, $\varphi: \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva D dominio regolare in \mathbb{R}^2 .Supponiamo $\varphi \in C^2$ (il caso $\varphi \in C^1$ si fa per approssimazione).

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$F(x, y, z) = \left(\underset{=F_1}{X(x, y, z)}, \underset{=F_2}{Y(x, y, z)}, \underset{=F_3}{Z(x, y, z)} \right)$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \int_D (\text{rot } F)(\varphi) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) du dv$$

$$= \int_D (z_y - y_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (x_z z_x)(x_v z_u - x_u z_v) + (y_x - x_y)(x_u y_v - x_v y_u)$$

$$\partial \Sigma = \varphi(\partial D), \quad \gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [0, 1]$$

 γ parametrizza $\partial^+ D$ $\varphi(\gamma(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$ parametrizza $\partial^+ \Sigma$

$$\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v' + z_u u' + z_v v')$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F = \int_0^1 F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt = \int_0^1 (X x_u + Y y_u + Z z_u) u' + (X x_v + Y y_v + Z z_v) v' dt$$

$$= \int_{\partial^+ D} (X x_u + Y y_u + Z z_u) du + (X x_v + Y y_v + Z z_v) dv =$$

$$\stackrel{\text{GAUSS GREEN}}{=} \int_D (X x_v + Y y_v + Z z_v)_u - (X x_u + Y y_u + Z z_u)_v du dv =$$

PRODOTTO VETTORE

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$

$$J\varphi = |\varphi_u \wedge \varphi_v|$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

$$= (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

$$\text{rot } F = (z_y - y_z, x_z - z_x, y_x - x_y)$$

$$= \int_D (X_x x_\mu x_\sigma + X_y y_\mu x_\sigma + X_z z_\mu x_\sigma + Y_x x_\mu y_\sigma + Y_y y_\mu y_\sigma + Y_z z_\mu y_\sigma + \\ + Z_x x_\mu z_\sigma + Z_y y_\mu z_\sigma + Z_z z_\mu z_\sigma - X_x x_\sigma x_\mu - X_y y_\sigma x_\mu - X_z z_\sigma x_\mu - \\ - Y_x x_\sigma y_\mu - Y_y y_\sigma y_\mu - Y_z z_\sigma y_\mu - Z_x x_\sigma z_\mu - Z_y y_\sigma z_\mu - Z_z z_\sigma z_\mu) du dv \\ = \int_\Sigma \text{rot } F \cdot N \quad \text{verifica diretta}$$

② In generale $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{D})$, $\varphi_i(D) \cap \varphi_j(D) = \emptyset$ $i \neq j$

$$N = \frac{(\varphi_i)_\mu \wedge (\varphi_i)_\sigma}{|(\varphi_i)_\mu \wedge (\varphi_i)_\sigma|} \quad \text{in } \varphi_i(\bar{D}) \subseteq \Sigma$$

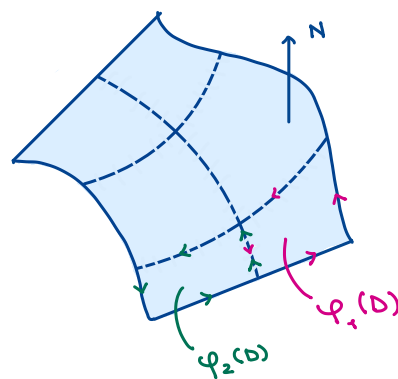
$$\int_\Sigma \text{rot } F \cdot N = \sum_i \int_D \text{rot } F(\varphi_i) \cdot ((\varphi_i)_\mu \wedge (\varphi_i)_\sigma) du dv$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F^* = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ \Sigma_i} F, \quad \Sigma_i = \varphi_i(\bar{D})$$

* segue dal fatto che

$$\int_{\partial^+ \Sigma_i \cap \partial^+ \Sigma_j} F = - \int_{\partial^+ \Sigma_j \cap \partial^+ \Sigma_i} F$$

cioè $\partial^+ \Sigma_i$ e $\partial^+ \Sigma_j$ sono orientazioni opposte della "curva" $\partial \Sigma_i \cap \Sigma_j$



K-FORME DIFFERENZIALI IN \mathbb{R}^n

Forme multilineari alternanti di grado k (k covettori) → siamo nel duale

↳ va da una k -upla di vettori in \mathbb{R}^n

Un k -covettore ω è una funzione

$$\omega: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$(h_1, \dots, h_k) \mapsto \omega(h_1, \dots, h_k)$$

1) ω è lineare in ogni h_i , cioè $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mu, \nu \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(h_1, \dots, h_{i-1}, \alpha\mu + \beta\nu, h_{i+1}, \dots, h_k) = \alpha\omega(h_1, \dots, h_{i-1}, \mu, h_{i+1}, \dots, h_k) + \beta\omega(h_1, \dots, h_{i-1}, \nu, h_{i+1}, \dots, h_k)$$

2) $\omega(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(h_1, \dots, h_k)$

Es: $\omega(h) = v \cdot h$ 1-covettore, $v \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(h_1, \dots, h_n) = \det(h_1, \dots, h_n)$$

Oss: $h_i = h_j$ per $i \neq j$ $w(h_1 \dots h_k) = 0$

Oss: I k -vettori costituiscono uno spazio vettoriale su \mathbb{R} che si indica con $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ (il prodotto vettoriale è alternante)

Dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \{1, \dots, n\}$, pongo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Definisco $dx_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k}$ e $dx_\lambda(h_1 \dots h_k) = \det((h_j)_{\lambda_i})_{ij}$ matrice $k \times k$

L'insieme dei dx_λ con $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ definiscono una base di $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \Lambda_k = \binom{n}{k}$$

Es: dx_1, \dots, dx_n sono una base di $\Lambda_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$

◦ $dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$ sono una base di $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$

◦ $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ genera $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$ ($\dim \Lambda_n(\mathbb{R}^n) = 1$)

Oss: $dx_\lambda = 0$ se $\lambda_i = \lambda_j$ per qualche $i \neq j$

$dx_{\lambda'} = \text{sgn}(\sigma) dx_\lambda$ se $\lambda'_i = \lambda_{\sigma(i)}$ $\forall i$ in particolare $dx_\lambda = 0 \forall \lambda$ se $k > n$

Def: È definito un prodotto esterno $\wedge : \Lambda_k \times \Lambda_e \rightarrow \Lambda_{k+e}$, $\wedge(w, \alpha) = w \wedge \alpha$

Definito sulla base:

$$\wedge(dx_\lambda, dx_\mu) = dx_\lambda \wedge dx_\mu = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_e}$$

Si estende a $w = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} a_\lambda dx_\lambda$ e $\alpha = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,e}} b_\mu dx_\mu$

$$\Lambda_{n,k} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_1 < \dots < \lambda_k\}$$

Prop: Il prodotto esterno \wedge soddisfa

$$\circ (a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$$

DISTRIBUTIVA

$$\circ c \cdot a \wedge b = c(a \wedge b)$$

$$\circ a \wedge b = (-1)^{k_e} (b \wedge a) \text{ se } a \in \Lambda_k \text{ e } b \in \Lambda_e$$

ALTERNANTE

$$\circ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

ASSOCIATIVA

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\omega : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ si dice una k -forma differenziale

$$\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) dx_\lambda \quad (\text{con } \omega_\lambda : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1)$$

Differenziando una k -forma otteniamo una $k+1$ -forma

Def: Date w, d k -covettori, si può definire $w \cdot d = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} w_\lambda d_\lambda \in \mathbb{R}$

è un prodotto scalare su Λ_k

Oss: Le k -forme in A sono uno spazio vettoriale

Def: Data w k -forma, cioè $w = \sum_{\lambda} w_{\lambda} dx_{\lambda}$, $w_{\lambda} \in \mathbb{C}^+$, def. la $(k+1)$ -forma

$$dw = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} dw_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} \quad dw_{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i \quad \underline{d} \text{ si dice } \underline{\text{differenziale esterno}}$$

$\xrightarrow{\text{1-FORMA}} \text{K-FORMA}$

Prop (proprietà di d): w_1, w_2 k -forme, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\odot d(c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 dw_1 + c_2 dw_2$$

$$\odot d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db \quad \text{con } a \text{ } k\text{-forma, } b \text{ } l\text{-forma}$$

$$\odot d^2 a = d(da) = 0 \quad \forall a \text{ } k\text{-forma } \mathbb{C}^2$$

Richiami di teoria: $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \mathbf{e}_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \mathbf{e}_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

Nabla - calcolo:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \text{rot}(\nabla \varphi) = 0 & \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 & \varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{b) } \text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0 & \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 & \vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi \\ \vec{F} \end{array}} \right\} \text{ di classe } C^2$$

Notazione (in fisica): $\nabla \varphi$ gradiente, $\nabla \cdot F$ divergenza, $\nabla \times F$ rotore

$$\text{a) } \nabla \varphi = (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi)$$

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = \mathbf{e}_1(\partial_2 \partial_3 \varphi - \partial_3 \partial_2 \varphi) + \dots = 0 \text{ per il Teo di Schwartz}$$

$$\text{b) } \text{rot} \vec{F} = \mathbf{e}_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \mathbf{e}_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \mathbf{e}_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = \partial_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \partial_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \partial_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = 0$$

Oss: $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, Ω aperto di \mathbb{R}^3

$$\text{rot} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow F = \nabla \varphi \text{ per } \varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})?$$

Sì, ma solo se Ω è semplicemente connessoEsercizio: Trovare un controesempio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ il campo è tangenziale rispetto a un cerchio sull'asse z

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \text{ dominio tale che } \text{rot} \vec{F} = 0 \text{ ma } F \neq \nabla \varphi$$

Forma chiusa ma non esatta

Esercizio: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (Ω aperto)

$$G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G \text{ di classe } C^1$$

$$\text{div } G = 0 \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} \exists \vec{F} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{ rot } \vec{F} = \vec{G} \leadsto \text{In generale è falso}$$

un tale \vec{F} viene chiamato **POTENZIALE VETTORE**

$$\text{Controesempio: } G(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \text{div } \vec{G} = 0 \text{ su } \Omega$$

CLAIM: G non è il rotore di alcun $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Per assurdo: $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\text{rot } \vec{F} = \vec{G}$

Sia $a \in (0, 1)$ e $S_a = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq a\}$

$$\iint_{S_a} G \cdot n_e = \iint_{S_a} \text{rot } F \cdot n_e \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial^+ S_a} \vec{F}$$

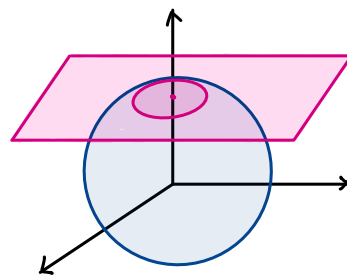
$\downarrow a \rightarrow 1$

$\downarrow a \rightarrow 1$

$$\iint_S G \cdot n_e = 4\pi$$

0

\Rightarrow ASSURDO!



Prop: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$, $G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ t.c. $\text{div } G = 0$.

Allora $\exists F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ t.c. $\text{rot } \vec{F} = G$

Es1: Sia $G = (1, 1, 1)$. Determinare F in $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ t.c. $\text{rot } F = G$.

Es2: Sia $G = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$, $\Omega = \{z > 0\}$, determinare $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ t.c. $\text{rot } F = G$

Dim (Prop):

$$G = \text{rot } F \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 & (1) \\ G_2 = \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 & (2) \\ G_3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 & (3) \end{cases}$$

Ω semplicemente connesso

Oss: Se $\text{rot } F = \text{rot } \tilde{F} \Rightarrow \text{rot}(F - \tilde{F}) = 0 \Rightarrow F - \tilde{F}$ è un gradiente: $F - \tilde{F} = \nabla U$

ANSATZ (ipotesi a priori): $F_1 = 0$ su Ω (non è necessario pensarlo)

Prendo $x_0 \in I_1$ fissato arbitrariamente, e scrivo:

$$F_3(x, y, z) - \underbrace{F_3(x_0, y, z)}_{f(y, z)} = \int_{x_0}^x \partial_1 F_3(t, y, z) dt \stackrel{(2)}{=} - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt$$

$$F_3(x, y, z) = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt + f(y, z)$$

$$F_2(x, y, z) - \underbrace{F_2(x_0, y, z)}_{h(y, z)} = \int_{x_0}^x \partial_1 F_2(t, y, z) dt \stackrel{(3)}{=} \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt$$

$$F_2(x, y, z) = \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt + h(y, z)$$

ANSATZ: $f(x, y) = 0$

Cerco $h \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ in modo che anche la relazione (1) sia verificata

$$G_1(x, y, z) = - \int_{x_0}^x \partial_2 G_2(t, y, z) dt - \int_{x_0}^x \partial_3 G_3(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z)$$

$\text{div } G = 0 \rightarrow$

$$= \int_{x_0}^x \partial_1 G_1(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z)$$

$$= G_1(x, y, z) - G_1(x_0, y, z) - \partial_z h(y, z)$$

$$\partial_z h(y, z) = -G_1(x_0, y, z). \text{ Sia } z_0 \in I_3 \text{ arbitrario e } h(y, z) \doteq - \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, s) ds$$

Conclusione: il campo $F_1 = 0$

$$F_2 = \int_{x_0}^x G_3(t, x, y) dt - h(y, z)$$

$$F_3 = - \int_{x_0}^x G_2(t, x, y) dt$$

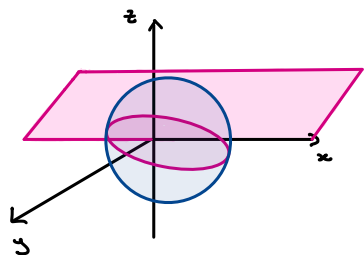
con $x_0 \in I_3, z_0 \in I_3$, soddisfa $\text{rot } \vec{F} = \vec{G}$

Esercizio: Sia $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Γ curva definita da $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = y\}$ si dimostra che Γ è una curva con il teorema delle f. implicite

Calcolare $\oint_\gamma F$ direttamente
usando il Teo di Stokes

γ può essere scritta come $\phi = (0, 0)$ con $\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ z - y \end{pmatrix}$
 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{rk}(D\phi(p)) = 1 \quad \forall p \in \phi^{-1}(0)$ ↑ verif. per esercizio



$$\oint_\gamma \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$

con $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione della curva

$$e_1 = (1, 0, 0) \in \Gamma, v = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in \Gamma$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x(t) \\ \leftarrow y(t) \\ \leftarrow z(t) \end{matrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^{2\pi} [(y+z)x'(t) + (z+x)y'(t) + (x-y)z'(t)] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{2} \sin t (-\sin t) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \cos t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \left(\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{2} \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t \right] dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t dt = 0$$

Calcolo via Stokes:

$$\oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Considero come $\Sigma = \{ z=y, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$ (*altra scelta: $\tilde{\Sigma} = \{ x^2+y^2+z^2=1, y-z \leq 0 \}$* *meno astuta*)

$$\oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} = \iint_{\Sigma} [-2, 0, 0] \cdot \vec{n}$$

$$\text{rot } \vec{F} = e_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \text{ dove } F = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$$

$\Sigma = \{ y-z=0 \}$ + altra cond. { quindi per trovare la normale devo fare

il gradiente di $y-z$ e ottengo: $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Ottengo } [-2, 0, 0] \cdot \vec{n} \equiv 0.$$

Richiami di teoria:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio ammissibile \rightarrow soddisfa le hp del teo di divergenza

$f \in C(\Omega)$ allora $\underbrace{\int_{\partial D} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n} e}_{\text{flusso sul bordo del gradiente}} = \underbrace{\int_D \text{div}(\vec{\nabla} f)}_{\substack{\text{ha come comp.} \\ \text{le derivate} \\ \text{nelle varie comp.}}} = \int_D \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{x_i} f) = \int_D \Delta f dx$

Oss: In particolare, se $\Delta f \equiv 0 \Rightarrow$ il flusso attraverso il bordo del dominio è $\equiv 0$

va bene anche un aperto qualsiasi

Prop: $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Sono equivalenti:

Oss.

$n=3$: $3\omega_3 r^2 = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^2 = 4\pi r^2$
superficie della sfera di raggio r

a) $\Delta f(p) = 0 \quad \forall p \iff f$ è armonica

b) $\forall p \in \mathbb{R}^n, \forall r \in (0, 1]$ $\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} f = f(p)$ dove $\omega_n = \text{Vol}_n(B_1)$

\iff la media di un'armonica su una palla di raggio r è = alla f al centro della palla

c) $\forall p \in \mathbb{R}^n \quad \forall r \in (0, 1), \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} f = f(p)$
volumi palla

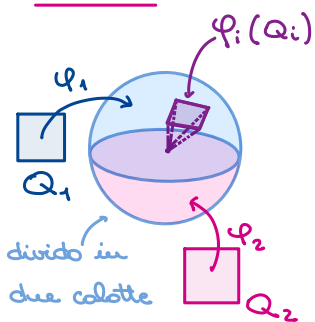
Dim: (a \Rightarrow b) SPG $p=0$: a meno di una traslazione, se $p \neq 0 \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x-p)$ il centro è = 0

$\mu(r) = \frac{1}{n\omega_r r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f = \frac{1}{n\omega_r} \int_{\partial B_r(0)} f_r$

$f_r(\vec{x}) = f(r\vec{x})$ con $r \in [0, 1]$

\hookrightarrow "parametrisiamo" la palla di raggio r con quella di raggio 1

dim. (1)



$\int_{\partial B_1} f = \int_{\varphi_1(Q_1)} f + \int_{\varphi_2(Q_2)} f \quad \varphi_i: Q_i \rightarrow \partial B_1(0)$

$\int_{\varphi(Q)} f = \int_Q f(\varphi(u)) \cdot J_\varphi(u) du = (*)$ con $u \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\psi(x) = r\varphi(x)$ riporto su una sfera più piccola

$(*) = \int_Q f(\psi(u)) \frac{J_\psi(u)}{r^{n-1}} du = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} f = (*)$

$J_\varphi(u) = \sqrt{\det(D\varphi^t \cdot D\varphi)}$ con $D\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \dots & \partial_{n-1} \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \dots & \partial_{n-1} \varphi_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n & \dots & \partial_{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}$
matrice (n-1) x (n-1)

$[D\varphi^t \cdot D\varphi]_{ij} = (\partial_i \vec{\varphi}) \cdot (\partial_j \vec{\varphi})$ con $\psi(u) = r\varphi(u)$

$[D\psi^t \cdot D\psi] = r^2 [D\varphi^t \cdot D\varphi]_{ij} \Rightarrow \det(D\psi^t \cdot D\psi) = r^{2(n-1)} \det(D\varphi^t \cdot D\varphi) \Rightarrow J_\psi = r^{n-1} J_\varphi$

L'integrale su una superficie come la sfera la definiamo tramite delle carte. Poi l'integrale sulla sfera sarà la somma di queste carte

(*)^{def.} $= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\varphi(Q)} f \rightarrow$ lo abbiamo fatto per un pezzo di sfera parametrizzato da una carta, usando tutte le carte otteniamo tutta la formula

$$\mu(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_r(0)} f \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(0)} f r$$

$$\mu_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\varphi(Q)} f r = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q f_r(\varphi(u)) J_\varphi(u) du$$

$$\mu'_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q \nabla f(\underbrace{r\varphi(u)}_\psi) \cdot \varphi(u) J_\varphi(u) du \quad f_r(\vec{x}) = f(r\vec{x}) \quad , \quad \varphi(u) = \frac{\psi(u)}{|\psi(u)|}$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_Q \nabla f(\psi(u)) n_e(\psi(u)) J_\psi(u) du$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\varphi(Q)} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_e$$

$$\mu'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_e \quad \leftarrow \text{rimettendo tutto assieme}$$

$$\text{Se } \nabla f = 0 \Rightarrow \mu'(r) = (*) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \overbrace{\operatorname{div} \vec{\nabla} f}^{\Delta f} dx = 0$$

$$\Rightarrow \mu(r) \equiv \text{cost} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \mu(r) = f(0)$$

(b \Rightarrow a) SPG $p=0$

$$\mu(r) = \text{cost} \Rightarrow \mu'(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \Delta f dx \stackrel{(*)}{=} \Delta f(0) = 0$$

(*) Oss: Se g funz. continua e $\int_{B_r(0)} g(x) dx = \omega_n r^n g(0) + o(r^n)$ per $r \rightarrow 0$

Lemma: $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $J(r) \doteq \int_{B_r(0)} u(x) dx$

$$\text{Allora } J(r) = \omega_n r^n \mu(0) + C(n) \Delta \mu(0) r^{n+2} + o(r^{n+2})$$

$$\text{Dim: } u(x) = u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^T H_u(0) x + o(|x|^2)$$

Se r è "piccolo", integrando tutti i pezzi:

$$J(r) = u(0) \omega_n r^n + \underbrace{\int_{B_r(0)} \nabla u(0) \cdot x dx}_{=0 \text{ perché } f \text{ dispari su dom. simmetrico}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \int_{B_r(0)} x_i x_j dx + o(r^{n+2})$$

$$\int_{B_r(0)} x_i x_j dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ per questioni di simmetria} \\ \int_{B_r(0)} x_i^2 dx & i = j \end{cases}$$

$$\int_{B_r(0)} x_i^2 dx = \frac{1}{n} \int_{B_r(0)} |x|^2 dx \rightarrow \text{la possiamo vedere come funzione radiale}$$

per simmetria non dipende da chi sia i

elemento di superficie della palla di raggio t

$$\text{Se } \varphi \text{ è funzione reale } L^1 \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \underbrace{n \omega_n t^{n-1}} dt$$

Applichiamo questa formula con $\varphi(t) = t^2 \chi_{[0,r]}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx &= \int_0^{+\infty} \varphi(t) n \omega_n t^{n-1} dt = \int_0^r t^{n+1} n \omega_n dt \\ \parallel \\ \int_{B_r(0)} x^2 dx &= \frac{r^{n+2}}{n+2} n \omega_n = \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}(r) = n \omega_n r^n + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(0) \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2} + o(r^{n+2}) = n \omega_n r^n + \frac{\omega_n}{2n+4} r^{n+2} \Delta u + o(r^{n+2})$$

$$(c \Rightarrow a) \quad \text{Se } \int_{B_r(p)} f(x) dx = f(p) \quad \text{con } \bar{f}(x) = f(x) - f(p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} \bar{f}(x) dx \equiv 0 \rightarrow \text{per il risultato precedente traslato}$$

↖ Questo $\Leftrightarrow \Delta f(0) = 0$

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \cdot \left[\frac{\omega_n}{2n+4} r^{n+2} \Delta f(0) + o(r^{n+2}) \right] = \frac{1}{2n+4} r^2 \Delta f(0) + o(r^2) \quad \text{per } r \rightarrow 0$$

$$(b \Rightarrow c) \quad \int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left(\int_{|x-p|=r} f \right) dr = \int_0^R (f(p) n \omega_n r^{n-1}) dr = f(p) \omega_n R^n$$

integrazione \rightarrow lo tratteremo nella
se gusci sferici lezione seguente

Es per casa: Sia $\gamma(t) = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove $\omega(x, y) = (\sin y - y) dx + x(\cos y + 1) dy$

Sugg: Scrivere ω come la somma di una forma esatta e una forma "simplex"

INTEGRAZIONE PER "GUSCI SFERICI"

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left(\int_{S(r)} f \right) dr \quad (*) \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n \text{ fisso e } S(r) = \{ |x-p| = r \}$$

Utilizzando la formula si ottiene immediatamente (b) \Rightarrow (c) nel teorema di ieri

Riepilogo: (b) $\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \left(\int_{\partial B_R(p)} f \right) = f(p)$ e (c) $\frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(p)} f(x) dx = f(p)$

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^R \left(\int_{\partial B_r(p)} f \right) dr \stackrel{(b)}{=} \int_0^R f(p) n\omega_n r^{n-1} dr = f(p) \omega_n [r^n]_0^R = f(p) \omega_n R^n \quad (c) \text{ è dimostr. } \square$$

(*) $\int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left(\int_{S(r)} f \right) dr$ dimostriamo questo

Lemma: $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ dominio, $\vec{\varphi} \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$, $\vec{\varphi}$ isometrica, $|\vec{\varphi}| = 1$, $J_{\varphi} > 0$

φ parametrizza una porzione di sfera unitaria

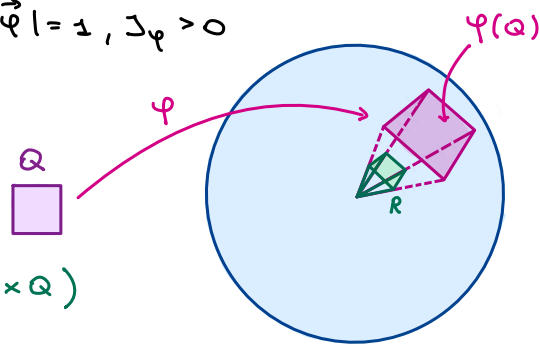
$$\phi: [0, R] \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(r, u) \longmapsto r\varphi(u)$$

ϕ parametrizza una

parte di cono generato

$$\text{da } \varphi(Q) \rightarrow C = \phi([0, R] \times Q)$$



(*)' $\int_C f(x) dx = \int_0^R \left(\int_{C(r)} f \right) dr \quad C(r) = C \cap \{ |x| = r \}$

Oss: (*)' \Rightarrow (*) $B_R(0) = \cup C_j$, $\cup C_j(r) = S_r$

$$\sum_j \int_{C_j} f(x) dx \stackrel{*}{=} \sum_i \int_0^R \left(\int_{C_j(r)} f \right) dr = \int_0^R \left(\sum_j \int_{C_j(r)} f \right) dr = \int_0^R \left(\int_{S_r} f \right) dr$$

$$\int_C f(x) dx = \int_{[0, R] \times Q} f(r\varphi(u)) \cdot |\det D\varphi(r, u)| dr du = \textcircled{a} \quad \text{con } C = \phi([0, R] \times Q)$$

$$\phi(r, u) = \begin{pmatrix} r\varphi_1(u) \\ \vdots \\ r\varphi_n(u) \end{pmatrix} \quad D\phi(r, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u) & r\partial_{u_1}\varphi_1(u) & \cdots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_1(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(u) & r\partial_{u_1}\varphi_n(u) & \cdots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_n(u) \end{pmatrix}$$

$$|\det D\phi| \stackrel{\textcircled{a}}{=} \sqrt{\det(D\phi^T \cdot D\phi)} = (*)$$

Biject

$$D\phi^T \cdot D\phi = \begin{pmatrix} |\vec{\varphi}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & [r^2 \partial_{u_i} \vec{\varphi} \cdot \partial_{u_j} \vec{\varphi}]_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$(\partial_{u_i} \vec{\varphi}) \cdot \vec{\varphi} = 0 \quad (\cdot)$$

$$\sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)} = r^{(n-1)} J_\varphi(u) \quad \text{con } J_\varphi(u) = \sqrt{D\varphi^T \cdot D\varphi}$$

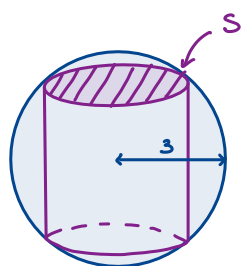
$$\textcircled{a} = \int_0^R \left(\int_Q \underbrace{f(r\varphi(r))}_\Psi \underbrace{J_\varphi(u)}_{J_\Psi} r^{n-1} d\mu \right) dr = \int_0^R \left(\int_{C(r)} f \right) dr \quad C(r) = C \cap \{|x| = r\}$$

$$\begin{aligned} (\cdot) \quad \varphi: Q \rightarrow \{|x| \leq 1\} \quad \partial_{u_i} \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} \\ \hookrightarrow |\vec{\varphi}|^2 = 1, \partial_{u_i} (|\varphi|^2) = 0 \Rightarrow 2\vec{\varphi} \cdot \partial_{u_i} \vec{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Esercizi pratici:

Es₁:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{1+y^2} + 3z^2 \\ 2z - \log(1+y^2) \\ z \end{pmatrix} \quad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0\}$$



$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} = ?$$

Calcoliamo la divergenza: $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{2y}{1+y^2} + \frac{-2y}{1+y^2} + 0 = 0$

$\partial V = S \cup S_0$ dove S_0 è un disco. E $V = ?$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \oplus \quad -(x^2 + y^2) \geq 4$$

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq \sqrt{5}\} = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{5}\}$$

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq \sqrt{5}\}, \quad S_0 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z = \sqrt{5}\} = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = \sqrt{5}\}$$

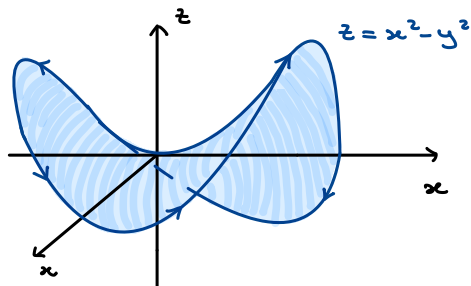
$$0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}^+ - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^+ \Rightarrow \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^+ = \int_{S_0} \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} z \, dx \, dy = 8\pi$$

Es₂:

$$F = \begin{pmatrix} (x + e^{x^2})z \\ -yz \\ x(y + e^{x^2}) \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint_\gamma F = \int_0^{2\pi} [\cos t + e^{\cos^2 t} \cos 2t] \cos 2t (-\sin t) + (-\sin t \cos 2t) \cos t + \cos t (\sin t + e^{\cos^2 t} \cos 2t) (-2 \sin 2t) dt$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix} \quad \text{e } \gamma = \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2\}$$



γ parametrizza ∂S dove $S = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 - y^2\}$

Attenzione: $S = \{x^2 + y^2 = 1, z \leq x^2 - y^2\}$ non va bene: illimitato



$$\oint_\gamma \vec{F} = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}$$

attenzione al segno

$$F = \begin{pmatrix} (x+e^{xz})z \\ -yz \\ x(y+e^{xz}) \end{pmatrix} \quad \text{rot } F = e_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$= \begin{pmatrix} x - (-y) \\ x + \cancel{e^{xz}} + \cancel{zx}e^{xz} - [y + \cancel{e^{yz}} + \cancel{xy}e^{yz}] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finire per esercizio.

Sugg: usare param. cartesiane $(x, y, u(x, y))$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$,

$$\int_S \text{rot } F \cdot n = \int_D \text{rot } F(x, y, u(x, y)) \cdot \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{|\varphi_x \times \varphi_y|} \cdot |\varphi_x \times \varphi_y| dx dy =$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix} \right] dx dy = \boxed{\quad} \quad \text{con } \varphi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}, \varphi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix}$$

↑ prodotto vettoriale

Soluzione:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } -u_x = -2x \text{ e } -u_y = +2y$$

← è la normale giusta

$$\boxed{\quad} = \int_D (x+y)(-2x) + (x-y)2y dx dy = -2 \int_D (x^2 + y^2) dx dy = -2(2\pi) \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho = -4\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = -\pi$$

FORME DIFFERENZIALI

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\Omega^k(A) = \{ \omega : A \rightarrow \wedge_k(\mathbb{R}^n) \text{ } k\text{-forma diff.} \}$

\hookrightarrow sp. vettoriale su \mathbb{R}

\wedge prodotto esterno $\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \rightarrow \Omega^{k+l}$

d differenziale esterno $d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$, $\omega = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} dx_{\lambda}$, $d\omega = \sum_{\lambda} d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda}$

Prop: ① $d(a+b) = da + db$

② $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$ $a \in \Omega^k$

③ $\omega \in C^2 \Rightarrow d^2\omega = 0$

Dim: ① linearità della derivata

② $a = \sum_{\lambda} a_{\lambda} dx_{\lambda}$ $b = \sum_{\mu} b_{\mu} dx_{\mu}$

$$a \wedge b = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda} b_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$$

$$d(a \wedge b) = \sum (d \cdot a_{\lambda} \cdot b_{\lambda} + a_{\lambda} db_{\mu}) dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$$

$$= \sum da_{\lambda} dx_{\lambda} \wedge b_{\mu} dx_{\mu} + a_{\lambda} db_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$$

\hookrightarrow 1-FORMA

$$= da \wedge b + \sum (-1)^k a_{\lambda} dx_{\lambda} \wedge db_{\mu} \wedge dx_{\mu}$$

$$= da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$$

③ $d(dx_{\lambda}) = 0 \quad \forall \lambda$

ω_{λ} funzione C^2 , $d\omega_{\lambda} = \sum_i \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i$

$$d^2\omega_{\lambda} = d\left(\sum_i \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i =$$

$$= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

$$d^2\omega = d \sum_{\lambda} d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} = \sum_{\lambda} d^2\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} = 0$$

Def: $\omega \in \Omega^k$ è esatta se $\omega = d\omega'$ $\omega' \in \Omega^{k-1}$

$\omega \in \Omega^k$ è chiusa se $d\omega = 0$

Oss: $\omega \in C^1$ esatta $\Rightarrow \omega$ chiusa

Oss: le forme chiuse (risp. esatte) sono sottosp. di Ω^k

Si definisce $H^k(A) = \{w \in \mathbb{R}^k \text{ chiuse}\} / \sim$ con $w_1 \sim w_2$ se $w_1 - w_2$ è esatta

È chiamato k -esimo gruppo di coomologia di A (a coef. reali) \rightarrow Topologia algebrica

Es: $H^1(A) = \{0\}$ se A è sempl. connesso

PULLBACK DI UNA FORMA DIFFERENZIALE

Esempio: $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1$, $v(x)$ campo di vettori su A con $v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$

f induce un campo $w: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $w(f(x)) = df(v(x))$

Data f come sopra, $w \in \Omega^k(\mathbb{R}^m) \Rightarrow w^\# \in \Omega^k(A)$ pullback di w attraverso f

è definito da $w^\#(v_1, \dots, v_k) = w(df v_1, \dots, df v_k)$.

In coordinate, se $w = \sum_{\lambda} w_{\lambda} dx_{\lambda}$, si ha $w^\# = \sum_{\lambda} (w_{\lambda} \circ f) dx_{\lambda}^\#$, dove

$$dx_{\lambda}^\# = df_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge df_{\lambda_k} = \sum_{\mu \in \Lambda_{k,n}} \det \left| \frac{\partial (f_{\lambda_1} \dots f_{\lambda_k})}{\partial (y_{\mu_1} \dots y_{\mu_k})} \right| dy_{\mu} \quad \text{con } y \in A \subseteq \mathbb{R}^n, x = f(y) \in \mathbb{R}^m$$

Oss: $w \in \Omega^0$ cioè $w: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$w^\# = w \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \in \Omega^n(\mathbb{R}^m), w = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, n=m \Rightarrow w^\# = (a \circ f) \int_f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$$

Prop: $(w_1 + w_2)^\# = w_1^\# + w_2^\#, (w_1 \wedge w_2)^\# = w_1^\# \wedge w_2^\#, (dw)^\# = dw^\#$

K-SUPERFICI ORIENTABILI IN \mathbb{R}^n

$V \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio con $\dim V = k$

(h_1, \dots, h_k) base di V $\left\{ \begin{array}{l} (h_1 \dots h_k) \sim (h'_1 \dots h'_k) \text{ se } \det G > 0 \text{ dove } G \in GL(k) \\ (h'_1, \dots, h'_k) \text{ base di } V \end{array} \right.$ tale che $G h_i = h'_i \quad \forall i$

$\{(h_1, \dots, h_k)\} / \sim = \{V^+, V^-\}$ due orientazioni di V

Per convenzione $[(e_1, \dots, e_k)]$ si dice orientazione positiva di \mathbb{R}^k

Def: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k -varietà C^1 si dice orientabile se $\exists f: M \rightarrow \{TM^+, TM^-\}$ continua
una tale f si dice un'orientazione di M

Oss: Non significa che $\exists f: M \rightarrow \{(h_1(x), \dots, h_k(x))\}$ continua base di $T_x M$

"essere orientabili" è molto più debole di questa \uparrow condizione

Oss: $M = \varphi(U)$, $\varphi \in C^1$ $r_k(D\varphi) = k \Rightarrow M$ è orient. e $[(D\varphi(e_1) \dots)]$ è un'orientaz. di M

Prop: M orient. $\Leftrightarrow \exists \{\varphi_i\}_{i=1,\dots,N}$, $\varphi_i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 iniettiva t.c. $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U)$
 \hookrightarrow CARTE

e $\det(D\phi_{ij}) > 0 \quad \forall i,j$ dove $\phi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ con $\text{rk}(D\varphi_i) = k$

Es: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ sup., M orientabile $\Leftrightarrow \exists$ scelta continua di $N: M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^+ \setminus \{0\}$

INTEGRAZIONE DI K-FORME SU K-SUPERFICI ORIENTABILI

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\omega \in \Omega^k(U)$, $\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, definiamo $\int_U \omega := \int_U a$

$U \subseteq \mathbb{R}^k$, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 iniettiva, $\text{rk}(D\varphi) = k$ con $M = \varphi(U)$ k -sup. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$\int_M \omega = \int_U \omega^*$ con ω^* pullback di ω attraverso φ

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ k -sup. orientata, $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{U})$, $\varphi_i(U) \cap \varphi_j(U) = \emptyset \quad i \neq j$

$[(d\varphi_i(e_1) \dots d\varphi_i(e_k))] \text{ è l'orientazione di } M \quad \forall i \text{ e } \forall x \in U$

$\Rightarrow \int_M \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U)} \omega = \sum_i \int_U \omega_i^*$, ω_i^* è il pullback con φ_i

Oss: Se M^+ e M^- sono le due orientazioni di M : $\int_{M^+} \omega = - \int_{M^-} \omega$

Prop: $\int_M d\omega_1 + \beta \omega_2 = d \int_M \omega_1 + \beta \int_M \omega_2 \quad d, \beta \in \mathbb{R}$

$\int_{M_1 \cup M_2} \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega$ se $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

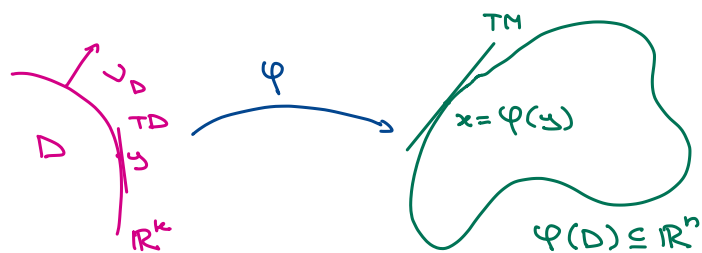
VARIETÀ CON BORDO

M k -var. C^1 con bordo se $\forall x \in M$, $\exists U$ intorno di x e $D \subseteq \mathbb{R}^k$ dominio regolare

(con bordo) e $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1$, iniettiva, $\text{rk}(D\varphi) = k$ t.c. $M \cap \bar{U} = \varphi(D)$

$\partial M = \bigcup_{\varphi} \varphi(\partial D)$ bordo di M , $(k-1)$ -superficie C^1

\rightarrow imprecisione: il bordo di M non è l'immagine dei bordi di D , è l'immagine dei pti



in cui per poter parametrizzare devo

prendere un punto sul bordo di $D \rightarrow$ non posso
 \hookrightarrow stanno sempre sul bordo come pt. int.

Oss: Se prendo l'immagine di un dom. regolare e poi ci attacco un'altra carta, il bordo si cancella

M orientata posso scegliere φ t.c. $[(d\varphi(e_i) \dots)]$ è l'orientazione di M

$\forall y \in \partial D$ scelgo (v_1, \dots, v_{k-1}) base di TD t.c. $[(v_1, \dots, v_{k-1}, v_D(y))] = [(e_1 \dots e_k)]$

Questa è l'orientazione positiva ∂D^+ di ∂D

$\Rightarrow [(\dots d\varphi(y) \vee_i \dots)]$ def. un'orientazione di ∂M , cioè se M è orientabile \Rightarrow

$\Rightarrow \partial M$ è orientabile e un'orientaz. di M ne induce una di ∂M

Teorema (Stokes):

M k -sup. C^1 in \mathbb{R}^n orientata $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ forma diff. in $C^1 \Rightarrow \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

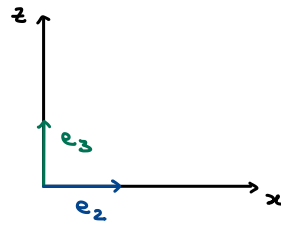
Dim (Traccia): Se $M = \varphi(D)$, $\int_{\varphi(D)} d\omega = \int_D d\omega^\# = \int_{\partial D} \omega^\# = \int_{\partial M} \omega$
Teo div. in \mathbb{R}^k

Esercizi di ricapitolazione

1) $\gamma(t) = e_1 \cos t + e_3 \sin 2t$ con $|t| \leq \frac{\pi}{2}$

$D = \text{span}\langle e_1, e_3 \rangle$ regione limitata da γ

V solido ottenuto ruotando D attorno all'asse z



$\text{Vol}(V) = ?$

• Studio di $\gamma(t)$ (\Leftrightarrow verificare che il problema abbia senso)

$\gamma(-\frac{\pi}{2}) = 0 = \gamma(\frac{\pi}{2})$ γ è chiusa (ok)

γ è iniettiva: $\cos t_1 = \cos t_2 \Rightarrow |t_1| = |t_2|$
 $\begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \rightarrow \sin 2t_1 = -\sin 2t_2$

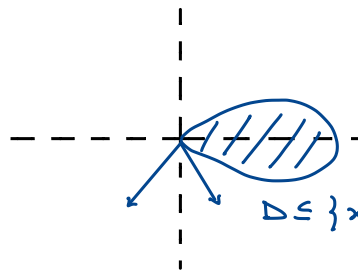
Quindi se anche $\sin 2t_1 = \sin 2t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$ (ok)

$\Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 2 \sin t \cos t \end{pmatrix}$

Derivata di γ : $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$

$\gamma'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\gamma'(-\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$



parte tangente a una retta e arriva tangente a un'altra retta

$\text{Vol}(V) = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_D p dp d\theta dz = 2\pi \int_D p dp dz$
 (coord. cilind. F.T. $\theta \in [0, 2\pi]$)

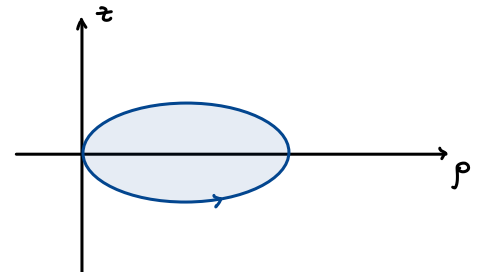
$F(p, z) = \begin{pmatrix} p^{3/2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \iint_D \text{div } F dp dz = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt = (*)$

uso il tes della divergenza per trovare il campo

In generale si ha che $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}|}$

la norma è ortogonale al vettore $\dot{\gamma}$

\Rightarrow devo ruotare n di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario



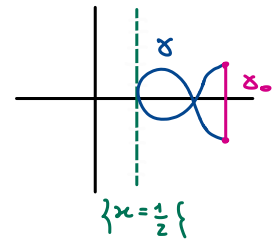
$(*) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{2} \cdot (2 \cos 2t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \cos 2t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t (\cos^2 t - \sin^2 t) dt$
 (F1(gamma(t)) n1(gamma(t)) * 1/|gamma'|)

Es. per casa: 1) Finire il conto

2) Cercare un altro campo con la stessa divergenza che semplifica il calcolo

$$2) \omega(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) dx}_A - \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) dy}_B$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2+1}{2} \\ 2t^3-t \end{pmatrix} \quad t \in [-1, 1]$$



$$\int_{\gamma} \omega = ? \quad \text{Dom } \omega = \{x \neq 0\}$$

$$\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ω è chiusa: $\partial_y A = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\parallel$$

$$\partial_x B = - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$\omega = Adx + Bdy$ è chiusa $\Rightarrow \omega$ è esatta su $\{x > 0\}$ (siamo su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ simple. connesso \Rightarrow ok)

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} \log(1+t^2) \dot{x}(t) - \arctan t \right] dt = - \int_{-1}^1 \arctan t dt = 0 \quad \gamma \sim \gamma_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in (-1, 1)$$

3) $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ z + \sin x + y \\ \cos x \end{pmatrix}$ $T \leftrightarrow r(\theta, \varphi) = \begin{cases} (2+\cos\varphi) \cos\theta \\ (2+\cos\varphi) \sin\theta \\ \sin\varphi \end{cases} \quad \theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ *coord cilindriche*

$$\int_T \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_V \text{div rot } F dx dy dz = 0 \quad \text{se osservo che } T = \partial V$$



Es per casa: Fare l'esercizio con Stokes

4) $\Sigma = \{(x, y, z) : y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, y \geq 0\}$ *superficie*, $F = \begin{pmatrix} y \sin(x + \cos z^4) - 3z \\ y^8 e^{x+z} \\ 3x + 5x^2 z \end{pmatrix}$ *campo*

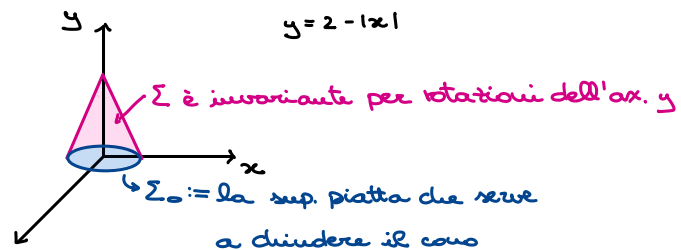
Trovare $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$

V superficie bordata da Σ e Σ_0 .

$$\int_V \text{div rot } F = \int_{\Sigma_0} \text{rot } F \cdot \underline{\vec{n}} + \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$$

$\vec{n} = (0, 1, 0)$

Calcolo questo: mi interessa la 2^a componente di $\text{rot } F$



$$\text{rot } F = e_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 = y \cdot (\text{"altri termini"}) - 3 - 3 - 10xz$$

$$\int_{\Sigma_0} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{x^2+z^2 \leq 2} (-6 - 10xz) dx dz = -6 \cdot 4\pi = -24\pi$$

Il campo diventa $F(x, 0, z)$
 \hookrightarrow Area del disco di raggio 2

5) Sia $\omega = \frac{x dy - y dx}{(x+y)^2 + y^2}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

- ω è chiusa?
- ω è esatta?
- Verifichiamo che ω è chiusa

Dom $\omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Calcoliamo $\int_{\gamma} \omega$: cerco una primitiva di ω (in questo modo sto anche dim. che è esatta)

$$dU = \omega \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{(x+y)^2 + y^2}$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = - \int \frac{y}{(x+y)^2 + y^2} dx = - \int \frac{y}{z^2 + y^2} dz = \arctan\left(\frac{z}{y}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{y}\right) \rightarrow \text{def. su } \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$$

$$U = -\arctan\left(\frac{x+y}{y}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{y^2}} \cdot \frac{\cancel{y} - \cancel{y} - \cancel{y}}{y^2} + c'(y) = \frac{x}{y^2 + (x+y)^2} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = \text{cost}$$

$$U^+ \text{ estensione per continuità di } U \text{ a } \{y \geq 0\}, U^+(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y = 0, x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma^+} \omega + \int_{\gamma^-} \omega = \int_{\gamma^+} \omega = U^+(-1, 0) - U^+(1, 0) = \pi$$

$$U^-(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & y < 0 \\ \pi/2 & y = 0, x > 0 \\ -\pi/2 & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

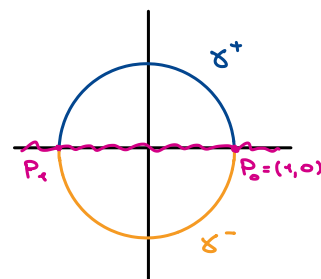
$$\int_{\gamma^-} \omega = U^-(-1, 0) - U^-(1, 0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{\gamma} \omega = +\pi + \pi = 2\pi \Rightarrow \omega \text{ non è esatta}$$

6) $\omega(x, y) = \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^2}$; calcolare $\int_{\gamma} \omega$ con $\gamma(t) = (t, \sin t)$ $t \in [\pi, 2\pi]$

$\omega = dU$ con ω radiale, cioè $U(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, $dU = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x dx + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y dy$

con $\varphi'(t) = \frac{t^{-2}}{2}$ e $\varphi(t) = -\frac{1}{2t} \Rightarrow U(x, y) = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)}$



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0 \quad \text{eq. diff. di ordine } k, \text{ forma implicita}$$

$$F: I \times (\mathbb{R}^n)^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

↳ il dominio può essere anche contenuto

$$I \subseteq \mathbb{R}, y: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funzione incognita}$$

$$\text{In certi casi si può scrivere: } y^{(k)}(x) = \tilde{F}(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \text{ forma esplicita}$$

Col cambio di variabile $Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^n$ posso scrivere l'equazione

$$\text{come } Y' = f(x, Y) \text{ per un'opportuna } f \text{ continua} \quad \left(\begin{array}{l} \text{potrebbe non converire dal punto di} \\ \text{vista del calcolo ma da quello teorico} \end{array} \right)$$

↳ 1° ord.

Domanda: Sotto quali ipotesi esistono soluzioni? Sono uniche?

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \rightarrow \text{dato iniziale} \end{cases} \quad f: I \times A \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^n, (x_0, y_0) \in I \times A$$

Per semplicità supponiamo $I_a = (x_0 - a, x_0 + a)$, $A = B_r(y_0)$, $a > 0$, $r > 0$

Teorema (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale):

Supponiamo f continua, limitata e uniformemente lipschitziana in y , cioè $\exists L > 0$ tale che:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \text{lipschitziana in } y$$

$\Rightarrow \exists \delta \in (0, a]$ e $\exists! y \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del pb. di Cauchy

Oss (Formulazione integrale): Integrando $y' = f(x, y)$ otteniamo: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (*)$

$y(x)$ è sol. del pb. di Cauchy \Leftrightarrow risolve $(*)$

Per risolvere $(*)$ basta supporre y continua, la sol. è automaticamente C^1 .

Dim: Cerchiamo una sol. continua di $(*)$, utilizzando il teorema delle contrazioni.

Considero $(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ spazio di Banach, $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Sia $X_{\delta, r} = \{y \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) : y(x) \in \overline{B_r(y_0)} \quad \forall x \in I_\delta\}$ sottospazio chiuso di $C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \Rightarrow X_{\delta, r}$ è metrico e completo

Per $y \in X_{\delta, r}$ def. $F(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

$F: X_{\delta, r} \longrightarrow C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \rightsquigarrow y \text{ è sol. di } (*) \Leftrightarrow y = F(y)$

Devo vedere che F è una contrazione su $X_{\delta,r}$, cioè:

① $F(y) \in X_{\delta,r} \quad \forall y \in X_{\delta,r}$

② $\exists C \in (0,1) \text{ t.c. } \|F(y_1) - F(y_2)\|_{\infty} < C \|y_1 - y_2\|_{\infty} \quad \forall y_1, y_2 \in X_{\delta,r}$

Se sono verificate ① e ② $\Rightarrow \exists!$ sol. di y per il teo della contrattività

① Devo vedere $|F(y)(x) - y_0| \leq r \quad \forall x \in I_{\delta}$

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq M \cdot \delta \leq r \quad \text{se } \delta \leq \frac{r}{M} \quad \text{con } M = \max_{I_{\delta} \times B_r(y_0)} |f(t, y)|$$

② $|F(y_1)(x) - F(y_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt$

$$\leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq L \cdot \delta \|y_1 - y_2\|_{\infty} < \|y_1 - y_2\|_{\infty} \quad \text{se } \delta < \frac{1}{L}$$

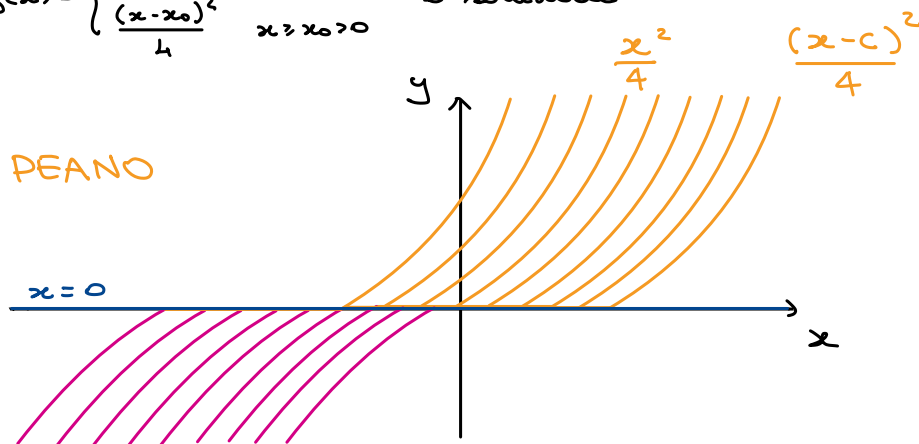
Quindi se $\delta \leq \min\left(0, \frac{1}{M}, \frac{1}{L}\right) \exists!$ sol. y del problema di Cauchy

Oss: Senza la lipschitzianità di f non c'è unicità

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad y(x) = 0 \text{ è soluzione}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{(x-x_0)^2}{4} & x \geq x_0 > 0 \end{cases} \quad \text{è soluzione}$$

BAFFO DI PEANO



SOLUZIONE MASSIMALE: $y: I_{\delta} \rightarrow B_r(y_0)$ sol. del pb di Cauchy

Supponiamo $\delta < a$, y M -lip. $|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq M = \|f\|_{\infty}$. Allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm \delta} y(x) = y^{\pm}$

Se $y^+ \in B_r(y_0)$, cioè $|y^+ - y_0| < r \Rightarrow$ posso riapplicare il teorema ed estendere la soluzione in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta + \delta')$ con $\delta' > 0$ e lo stesso con $y^- \in B_r(y_0)$.

In questo modo definisco una soluzione massimale del pb di Cauchy:

$y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow B_r(y_0)$ tale che:

① $\delta_2 < a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} y(x) \in \partial B_r(y_0)$

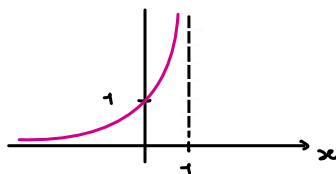
② $\delta_1 < a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} y(x) \in \partial B_r(y_0)$

In particolare, se $a = r = +\infty$, cioè $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \Rightarrow \delta_{1,2} < +\infty \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x_0 + \delta_{1,2}} |y(x)| = +\infty$

È anche detto **Teorema dell'arietato o fuga dai compatti**

Es:
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-\infty, 1)$$

 $\delta_1 = +\infty, \delta_2 = 1$



Oss: $\delta_{1,2} \leq a$, y è M-lip., se $\delta_2 < a \Rightarrow r = |y(x+\delta_2) - y_0| \leq M \delta_2$ cioè $\delta_2 \geq \min(a, \frac{r}{M})$ e
 \Rightarrow l'intervallo di esistenza dipende da a e da M ma non da L $\delta_1 \geq \min(a, \frac{r}{M})$

Teorema (Peano):

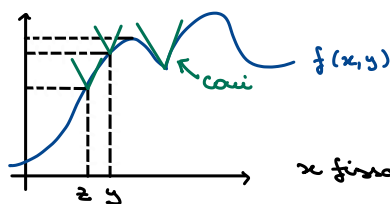
Se f è solo continua $\Rightarrow \exists \delta \geq \min(a, \frac{r}{M})$ ed \exists una sol. $y: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ del pb di Cauchy

Dim: Approssimo f con f_k K-lip. con $K \in \mathbb{N}$

es: $f_k(x, y) = \inf_{z \in B_r(y_0)} \{ f(x, z) + K|z - y| \}$ *inf. convolution*

$(x, y) \rightarrow f(x, z) + K|z - y|$ è K-lip. in $y \forall z \Rightarrow f_k(x, y)$ è K-lip

$f_k \leq f_{k+1} \leq f$ e $\lim_k f_k(x, y) = \sup_k f_k(x, y) = f$, inoltre $f_k \rightarrow f$ uniforme, cioè $\|f - f_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$



Applico il teorema precedente con f_k e ottengo una sol.

massimale $y_k: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ del pb.
$$\begin{cases} y' = f_k(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo che y_k è M-lip. quindi le y_k sono equicont. ed equilimitate

\Rightarrow Per il Teo di Ascoli-Arzelà \exists sottosucc. k_n t.c. $y_{k_n} \xrightarrow{n} y \in C(I_\delta, \overline{B_r(y_0)})$ unif.

$$\Rightarrow y(x) = \lim_n y_{k_n}(x) = \lim_n y_0 + \int_{x_0}^x f_{k_n}(t, y_{k_n}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_n f_{k_n}(t, y_{k_n}(t)) dt =$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$
 cioè y è sol. del pb. di Cauchy

Teorema (esistenza globale):

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$ con $a, b \in C(\mathbb{R})$, $a \geq 0, b \geq 0$

\Rightarrow ogni sol. massimale del pb. di Cauchy è globale, cioè è def. su tutto \mathbb{R}

Dim: Sia $y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sol massimale e supponiamo per assurdo $\delta_2 < +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} |y(x)| = +\infty$. Sia $z(x) = |y(x)|$; possiamo supporre $z > 0$:

$$\Rightarrow z'(x) = y'(x) \cdot \frac{y(x)}{|y(x)|} \leq |f(x, y(x))| \leq a(x)z(x) + b(x)$$

$$z(x) \leq \tilde{z}(x) \text{ dove } \tilde{z}(x) \text{ risolve } \begin{cases} \tilde{z}' = a\tilde{z} + b \\ \tilde{z}(x_0) = z(x_0) = |y_0| \end{cases}$$

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

$$(e^{-A})' = e^{-A}(\tilde{z}' - a\tilde{z}) = e^{-A}b$$

$$e^{-A(x)}\tilde{z}(x) - \tilde{z}(x_0) = \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt$$

$$z(x) \leq \tilde{z}(x) = e^{A(x)}|y_0| + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)}b(t) dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} z(x) \leq e^{A(x_0 + \delta_2)}|y_0| + \int_{x_0}^{x_0 + \delta_2} e^{A(x)-A(t)}b(t) dt \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{ASSURDO}} \quad \curvearrowright$$

DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

problema di Cauchy

Ci dice che sotto le hp di Cauchy-Lip.
se ci "spostiamo di poco" si "sposta di poco"
anche la soluzione

Prop: Sia f continua e L -lip. in y , $y(x) = \phi(x_0, y_0)(x)$ soluzione del pb di Cauchy

$\Rightarrow \phi$ è lipschitziana in y_0 e si ha $|\phi(x_0, y_0)(x) - \phi(x_0, y_1)(x)| \leq |y_0 - y_1| e^{L|x-x_0|}$

Dim: Poniamo $y_i(x) = \phi(x_0, y_i)(x)$, $i \in \{0, 1\}$

$w(x) = |y_0(x) - y_1(x)|$ lipschitziana in x

$$w'(x) = \frac{y_0'(x) - y_1'(x)}{|y_0(x) - y_1(x)|} \cdot [y_0'(x) - y_1'(x)]$$

$\leftarrow x \ y_0(x) \neq y_1(x)$

$$w'(x) \leq |y_0'(x) - y_1'(x)| = |f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))| \leq L |y_0(x) - y_1(x)| = L \cdot w$$

la sol. di $z' = Lz$ è $z(x) = z_0 e^{L(x-x_0)}$.

Per confronto: $w(x) \leq |y_0 - y_1| e^{L(x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0$

la stima per $x < x_0$ si fa scambiando x con $-x$

□

SISTEMI LINEARI

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x) \quad \text{con } x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$A: I \rightarrow M_{n,n} \text{ continua}$$

$$b: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continua}$$

Oss: le soluzioni esistono globalmente ($\forall x \in I$) e sono uniche

Se $A(x) \equiv A$ il sistema si dice a coefficienti costanti

Se $b(x) = 0$ il sistema si dice omogeneo

a meno di traslarlo sottraendone una
stacciamo lo spazio di dimens. n

Prop: le soluzioni formano uno spazio affine di dimensione n

In particolare, le soluzioni del sistema omogeneo $y' = A(x) \cdot y$ sono uno spazio

vettoriale di dimensione n e una soluzione di $y' = A(x)y + b$ si scrive come

$$y(x) = y_p(x) + y_o(x) \quad \text{dove } y_o(x) \text{ è una soluzione di } y' = A(x)y \text{ e } y_p(x) \text{ è una}$$

soluzione particolare del sistema

Dim: ① Consideriamo il pb. di Cauchy
$$\begin{cases} y' = A(x) \cdot y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia $\phi(x_0, y_0)(x)$ soluzione, e $y_0 \rightarrow \phi(x_0, y_0)(x)$ lineare bigettiva (per l'unicità)

\Rightarrow lo spazio delle soluzioni ha dimensione n

② Siano ora y_1, y_2 sol. di $y' = A(x)y + b(x)$ e $w = y_1 - y_2$

$\Rightarrow w'(x) = A(x)y_1(x) + b - A(x)y_2 + b = A(x)w$, w è soluzione $w' = Aw$

la soluzione generale di $y' = Ay + b$ si può scrivere $y(x) = y_p(x) + \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$ $c_i \in \mathbb{R}$

Dove y_p è una sol. particolare e $\{y_i\}$ sono una base di sol. di $y' = A(x)y$

Oss: le equazioni lineari di ordine k $y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{(i)}(x) + b$ si possono scrivere

come sistema del primo ordine ponendo $Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \rightarrow$

$\Rightarrow Y' = AY + B$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix}$ e $B(x) = (0, \dots, 0, b(x))$

CASO LINEARE OMOGENEO A COEFFICIENTI COSTANTI

$y' = Ay$, $A \in M_{n,n}$ fissata, $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

Esponenziale di matrici:

Data $A \in M_{n,n}$ definiamo $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in M_{n,n}$ (sulle matrici, come su \mathbb{R}^n , le norme sono tutte equivalenti)

Sulle matrici consideriamo la norma: $\|A\| = \max_{|x|=1} |A \cdot x|$

Oss: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ è assolutamente convergente

$$\|e^A\| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} < +\infty$$

Se consideriamo le funzioni $f_N(A) = \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} : M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$ sono uniformemente convergenti a e^A , per $N \rightarrow +\infty$, sui compatti di $M_{n,n}$

Proprietà di e^A :

① Se $AB = BA$ (altrimenti non è vero) $\Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

dim: $e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^k B^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k! (n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$
(serie due commutativi)
(prodotto di Cauchy)
non è la dim. delle matrici

② $e^A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Id} + \frac{A}{n} \right)^n$ si dimostra come per e^x

③ $\det(e^A) = e^{\text{tr} A} > 0$ analogamente a e^x che è sempre positiva e invertibile su \mathbb{R}^+ \rightarrow

In particolare e^A è sempre invertibile e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

$(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}, \cdot)$
tramite e^x

dim: Siano $\lambda_i \in \mathbb{C}$ gli autovalori di A . Usando ② si ha:

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \lim_N \det \left(\text{Id} + \frac{A}{N} \right)^N = \lim_N \left[\det \left(\text{Id} + \frac{A}{N} \right) \right]^N = \lim_N \left[\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{\lambda_i}{N} \right) \right]^N \\ &= \lim_N \left[1 + \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right]^N = e^{\sum_{i=1}^N \lambda_i} = e^{\text{tr} A} \end{aligned}$$

④ M invertibile $\rightarrow e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M$ più teorico che applicativo

dim: $e^{M^{-1}AM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^{-1}AM)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{-1}A^k M}{k!} = M^{-1}e^A M$

Come si calcola e^A ?

① Caso $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \leadsto e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

② Caso $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ \rightarrow sopradiagonale $= B + C$, $B = \lambda \text{Id}$, $e^B = e^\lambda \text{Id}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^A = e^B \cdot e^C = e^\lambda \cdot e^C$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto e^C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{k!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \end{pmatrix}$$

Teorema: la funzione $x \rightarrow e^{Ax}$ è differenziabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e si ha $\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax}$

Corollario: l'unica soluzione di $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è $y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0$ ($Ax = (a_{ij})x$)

Dim: $\frac{d}{dx} e^{Ax} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - \text{Id}}{h} = e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} - \text{Id}}{h} =$

$$= e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{(k-1)!} = e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+2} h^j}{(j+2)!} \right) = A \cdot e^{Ax} \left(\text{Id} + \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+2} h^j}{(j+2)!} \right) = A e^{Ax}$$

\hookrightarrow serie assolutamente convergente

SISTEMI LINEARI, CASO $n=2$:

$$y' = Ay, \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

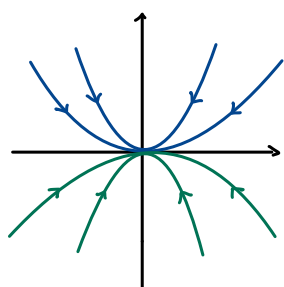
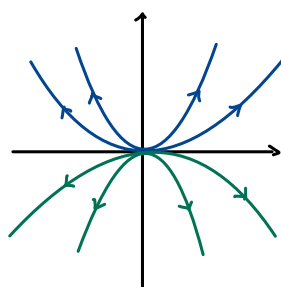
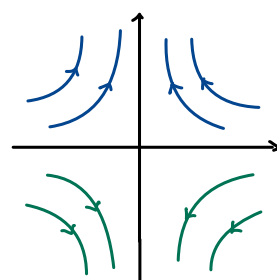
Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, autovalori di $A \rightarrow$ ho 3 casi: autovalori in \mathbb{R}
 ① diagonalizzabile
 ② non diagonalizzabile
 ③ autovalori in \mathbb{C}

① CASO DIAGONALIZZABILE:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e } M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leadsto e^A = M \cdot e^{M^{-1}AM} \cdot M^{-1} \text{ (visto ieri)}$$

$$e^{M^{-1}AM} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la sol di } y' = (M^{-1}AM)y \text{ è } y(x) = (c_1 e^{\lambda_1 x}, c_2 e^{\lambda_2 x}), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

↑
def. dal cambio di coord. M

NODO STABILE: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ NODO INSTABILE: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ SELLA: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ② CASO NON DIAGONALIZZABILE:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

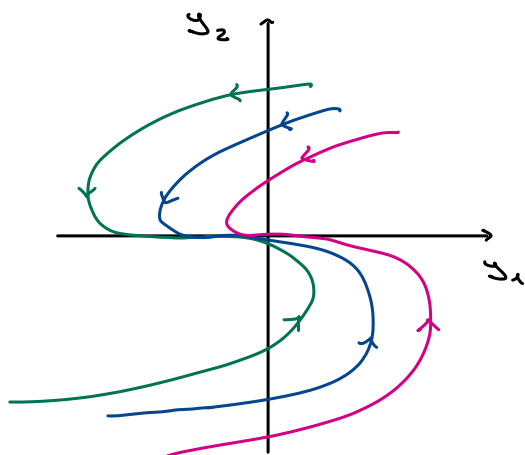
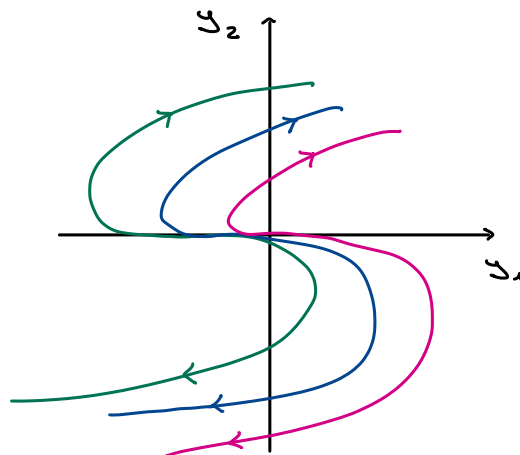
$$y' = (M^{-1}AM)y \rightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \rightarrow y_2 = c_2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2 \rightarrow y_1 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$\hookrightarrow y_1' = \lambda(c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}) + c_2 e^{\lambda x} = \lambda y_1 + y_2$$

$$y(x) = e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x, c_2)$$

↳ mi dà una perturbazione simile al nodo

NODO IMPROPRIO STABILE: $\lambda < 0$ NODO IMPROPRIO INSTABILE: $\lambda > 0$

③ CASO COMPLESSO

$$\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}, \quad \lambda = \alpha + i\beta \Rightarrow M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{M^{-1}AM} = e^{\alpha} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

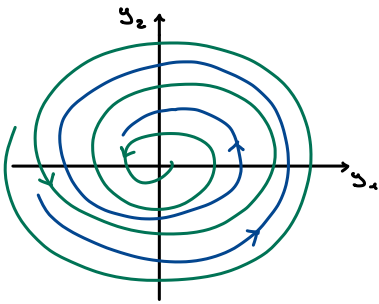
verificare

↳ rotazione di angolo β

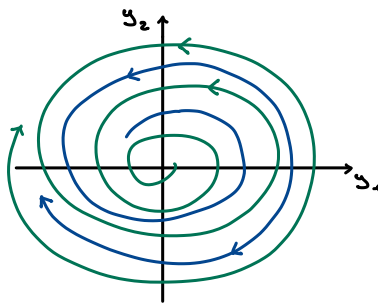
se gli autovalori sono in $\mathbb{C} \Rightarrow$ sono coniugati
 ↳ no Jordan \rightarrow è diagonalizzabile
 ↳ rotazione + dilatazione: $\underbrace{\alpha \cdot \text{Id}}_{\text{dilataz.}}$ + $\underbrace{i\beta}_{\text{rotazione}}$

Oss: È diretta conseguenza del caso ① perché $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$

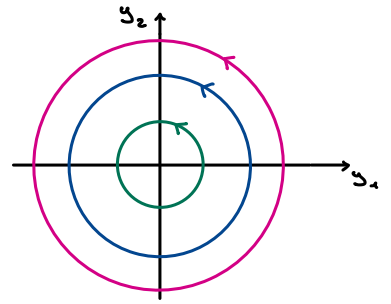
$$y' = (M^{-1}AM)y \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x), -c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x))$$



FUOCO STABILE: $\alpha < 0$



FUOCO INSTABILE: $\alpha > 0$



CENTRO: $\alpha = 0$

SISTEMI NON OMOGENEI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\begin{cases} y' = Ay + b(x) & b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ costante} \\ y(x_0) = y_0 & A \in \mathbb{M}_{n,n} \end{cases}$$

In analogia con le equazioni del primo ordine:

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0 + \underbrace{e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^x e^{-As} \cdot b(s) ds}_{y_p(x), \text{ sol. particolare con } y_p(x_0) = 0}$$

Verifichiamo che y_p è soluzione: $y_p' = A e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As} \cdot b(s) ds + \cancel{e^{Ax}} \cdot \cancel{e^{-Ax}} b(x) = A y_p + b$

SISTEMI NON LINEARI AUTONOMI

$$y' = f(y), \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto e } f \in C^1(A)$$

Il sistema si dice autonomo quando f dipende solo da y

y_0 t.c. $f(y_0) = 0$ si dice punto stazionario del sistema ($y(x) = y_0$ è una soluzione)

Oss: Generalmente, il sistema $y' = f(y)$, vicino a y_0 , si comporta come il sistema

linearizzato $z' = Df(y_0)z$ (dove poniamo $z(x) = y(x) - y_0$)

Teorema di linearizzazione (HARTMAN-GROBMAN): *non facciamo la dimostrazione*

$f \in C^1(A)$, $y_0 \in A$, $f(y_0) = 0$, $\text{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$ autovalore di $Df(y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists U$ intorno di y_0 e $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ omeomorfismo tc $\Phi(y_0) = 0$ e, detta $y(x, y_1)$ la

soluzione di $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_1 \end{cases}$, $z(x_0, z_0) := \Phi(y(x, \Phi^{-1}(z_0)))$ risolve il sistema

linearizzato $\begin{cases} z' = Df(y_0)z \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$

Oss: y_0 tc $\text{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$ si dice punto stazionario iperbolico

Oss: In generale Φ è Hölder ma non C^1 , cioè non è diffeomorfismo

Esempio di applicazione: (sistema autonomo in $n=2$)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases} \Rightarrow \text{PUNTI STAZIONARI (punto } y_1' = 0 \text{ e } y_2' = 0) \begin{cases} y_1(1 - (y_1^2 + y_2^2)) = y_2 & \text{I} \\ y_2(1 - (y_1^2 + y_2^2)) = -y_1 & \text{II} \end{cases}$$

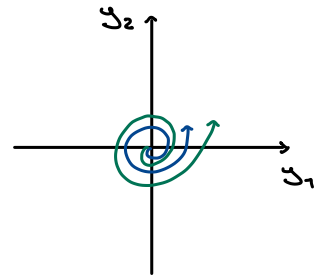
moltiplico I per y_2

$$y_1 y_2 (1 - (y_1^2 + y_2^2)) = y_2^2 = -y_1^2 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0 \rightsquigarrow Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

moltiplico II per y_1

$$\begin{array}{l} \text{SISTEMA} \\ \text{LINEARIZZATO} \end{array} \begin{cases} z_1' = z_1 - z_2 \\ z_2' = z_1 + z_2 \end{cases} \quad \text{AUTOVALORI } (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1+i \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1-i$$



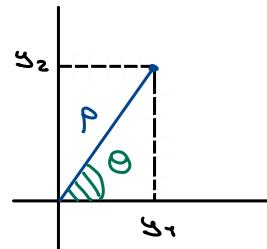
Possiamo applicare il Teorema di linearizzazione

Domanda: Come si comporta il sistema lontano da $(0,0)$?

Passiamo a coordinate polari:

$$(y_1, y_2) \rightarrow (r, \theta)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} r' = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{r} \\ \theta' = \frac{1}{1 + y_2^2/y_1^2} \cdot \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases}$$

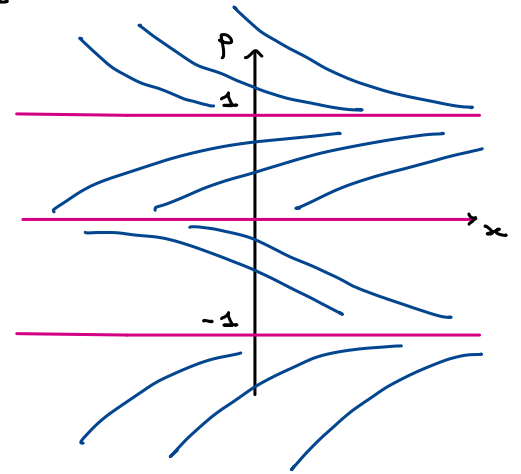
$$\begin{cases} p' = \frac{y_1^2 - y_1 y_2 - y_1^2 p^2 + y_1 y_2 + y_2^2 - y_2^2 p^2}{p} = \frac{p^2 - p^4}{p} = p - p^3 \\ \theta' = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 - y_1 y_2 p^2 - y_1 y_2 + y_2^2 + y_1 y_2 p^2}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1 \end{cases}$$

$$\theta(x) = \theta_0 + x$$

$$p' = p - p^3$$

$p(x) = 1$ è soluzione stabile

$(p, \theta) = (1, x)$ è un'orbita periodica del sistema



Teorema di Poincaré - Bendixson:

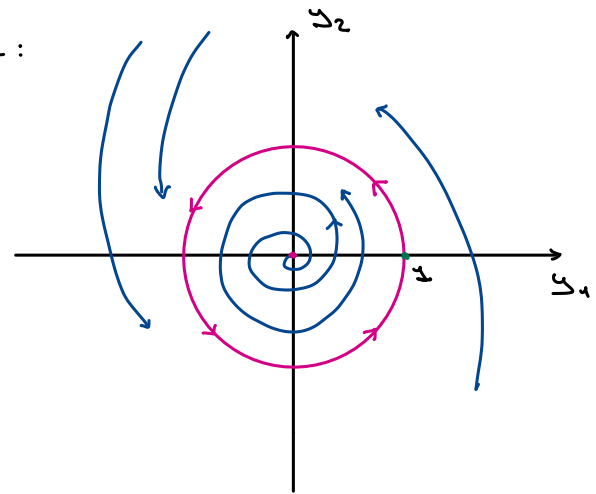
$n=2$, $y' = f(y)$, $f \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, supponiamo che:

① $\exists K \subseteq A$ compatto invariante, cioè $y(x_0) \in K$

$$\Rightarrow y(x) \in K \quad \forall x > x_0$$

② $f(y) \neq 0 \quad \forall y \in K$

$$\Rightarrow \exists \text{ sol periodica in } K$$

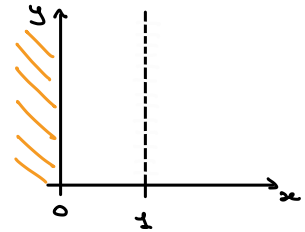


Esercizio 1: studio qualitativo di un'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \overbrace{\arctan y}^{F(x,y)} - \frac{1}{x} \\ y(1) = b \end{cases}$$

con y si intende $y(x)$, e si prende $b \in \mathbb{R}$

l'eq. è def. solo per $x > 0$

Domande:

a) C'è esistenza e unicità della soluzione?

b) Descrivere l'intorno massimale di def.

c) $\exists! b^*$ t.c. $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$?

d) Dire se ci sono asintoti obliqui

a) lip. (locale) in y : $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2|$

$$|\arctan y_1 - \arctan y_2| \leq C |y_1 - y_2| \quad (d_k)$$

\Rightarrow sono verificate le hp di Cauchy-Lip. $\Rightarrow \exists!$ sol.

b) $F(x, y) \leq A(x) + B(x)|y|$ con A, B continue in x

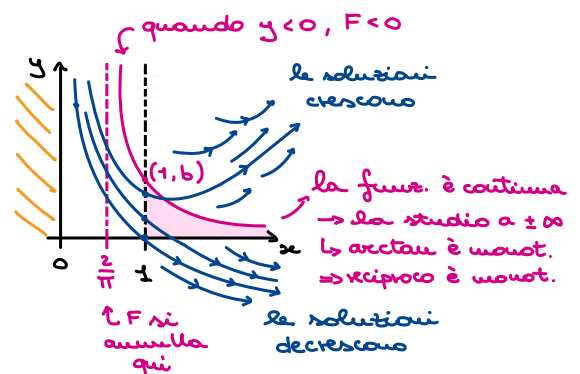
\Rightarrow allora c'è esistenza globale su $\{x > 0\}$

Dobbiamo capire com'è fatta la soluzione:

• $F(x, y) > 0$? $\arctan y > \frac{1}{x}$ se $y > 0$

• $F(x, y) = 0$? Studiamo $\arctan y = \frac{1}{x}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow x = (\arctan y)^{-1} = \frac{1}{\arctan y}$$



Al variare di b possiamo dedurre alcune cose:

• caso $b \leq 0$: la soluzione sarà sempre negativa

Esercizio per casa: Cosa succede per $x \rightarrow 0$?

• Cosa succede per $x \rightarrow +\infty$? 2 casi: valore finito o infinito?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = l \Leftrightarrow l = -\infty \quad \text{Per assurdo: se } l \in \mathbb{R} \text{ allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \arctan l < 0$$

Non è compatibile con $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = l \in \mathbb{R}$ (*)

Spiegazione (*): $y(n+1) - y(n) = y'(\xi) \cdot 1 \quad \xi \in (n, n+1)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow \infty & \downarrow & \\ 0 = l - l & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} y(\xi) = \arctan l & \Rightarrow \text{ASSURDO} \end{array}$$

c) $\exists b: y_b(x)$ attraversa la curva $F(x, y) = 0 \rightarrow$ è un intervallo: $(b^*, +\infty)$

$\bar{y}(x) = \lim_{b \rightarrow b^*} y_b(x)$ il limite esiste $\forall x$ fissato

Sui compatti di $(0, +\infty)$ la convergenza è uniforme: vale perché c'è convergenza monotona su un intervallo compatto (dal teo di dipendenza continua dai dati iniziali)

Da questo segue che: $y_b(x) = b + \int_1^x g'(t) dt = b + \int_1^x F(t, y_b(t)) dt$

Se $b \rightarrow b^*$ ottengo che $\bar{y}(x) = b^* + \int_1^x F(t, \bar{y}(t)) dt \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \bar{y} = y_{b^*}$ unica soluzione con dato iniziale b^*

Allora diciamo che:

- $\bar{y} > 0$
 - $\bar{y}(x) < (\arctan y)^{-1}$, o meglio, $\arctan \bar{y}(x) < \frac{1}{x}$
 \hookrightarrow curva rossa
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}(x) = 0$

$$(y_{b_1}(x) - y_{b_2}(x))' = \arctan y_1(x) - \arctan y_2(x) = \frac{1}{1 + \xi^2} (y_{b_1}(x) - y_{b_2}(x)) \quad \xi \in [y_2(x), y_1(x)]$$

$b_1 > b_2$

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} y_{b^*}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y_b(x) = 0$ con $b < b^*$

$$(y_{b^*}(x) - y_b(x))' \geq \frac{1}{2} (y_{b^*} - y_b) \quad \forall x \geq x_0$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{w(x)} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{stima dal basso di (*)}}$

$$w' \geq \frac{1}{2} w \quad \forall x \geq x_0 \Rightarrow w(x) \geq w(x_0) e^{\frac{x-x_0}{2}}$$

d) Asintoti: Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$, esiste asintoto?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan y(x) - \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$y(x) \text{ ha un asintoto} \Leftrightarrow \underbrace{y(x) + \frac{\pi}{2} x}_{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c \in \mathbb{R}$$

$$h'(x) = y'(x) + \frac{\pi}{2} = \arctan y + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \quad \text{⊖} \quad -\arctan \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad y(x) \rightarrow -\infty$$

Quando $y(x) < 0$ si ha: $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$

Se $y(x)$ asintotico a $-\frac{\pi}{2}x + c$: $y(x) \sim -\frac{\pi}{2}x$ per $x \rightarrow \infty$, $\arctan \frac{1}{y(x)} \sim -\frac{2}{\pi}x$

$$\Rightarrow h'(x) \sim \frac{1}{x} \left(-1 + \frac{2}{\pi} \right) \quad \text{negativa}, \quad h(x) = h(x_0) + \int_{x_0}^x h(t) dt$$

h non può essere limitata perché $\int_{x_0}^{+\infty} h'(x) dx$ non è convergente

Per vedere che non c'è asintoto a $+\infty$ si ripete lo stesso ragionamento

Esercizio 2: Sistema 2x2

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & x(t) \\ y' = g(x, y) & y(t) \end{cases} \quad f, g \text{ sono funzioni } C^0$$

Dico che questa equazione si dice esatta se $\omega = g dx - f dy$ è una forma esatta

Prop: Se l'eq. è esatta, allora $\exists U \in C^1$ tale che $g(x, y) = U_x(x, y)$, $f(x, y) = -U_y(x, y)$
 \uparrow potenziale

$$U(x(t), y(t)) \equiv \text{cost}$$

$$\frac{d}{dt} (U(x(t), y(t))) = U_x(x, y) \cdot x' + U_y(x, y) \cdot y' = g(x, y)x' - f(x, y)y' = g(x, y)f(x, y) - f(x, y)g(x, y) = 0$$

Esempio:
$$\begin{cases} x' = \overbrace{Ax + By}^f \\ y' = \underbrace{Cx + Dy}_g \end{cases} \quad \text{Per quali } A, B, C, D \text{ il sistema è esatto?}$$

$$g dx - f dy = dU \text{ è esatta} \Leftrightarrow \text{chiusa}$$

$$f(x, y) = Ax + By, \quad g(x, y) = Cx + Dy$$

$$\partial_y g = \partial_x (-f)$$

$$D = -A \Leftrightarrow A + D = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx - Ay \end{cases}$$

$$dU = (Cx - Ay) dx - (Ax + By) dy$$

$$U(x, y) = \frac{C}{2} x^2 - Axy - \frac{B}{2} y^2$$

Esercizi per casa 1) (*) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$

① Verificare che tutte le sol. sono limitate

② Se $\begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{matrix}$ determinare il punto più vicino e quello più lontano dall'origine

Sol: Prossima volta

2) Ridurre la soluzione di (*) alla sol. di un'eq. scalare del II ordine

3) È sempre possibile ricondurre la soluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti di dimensione n alla sol. di una eq. scalare di ordine n ?

SISTEMI LINEARI NON AUTONOMI

$$y' = A(x)y + b(x) \text{ con } A, b \text{ continue su } I \subseteq \mathbb{R}$$

caso omogeneo: $b(x) = 0$

$$y' = A(x)y, \text{ le soluzioni sono uno spazio vettoriale di dimensione } n$$

Si vede osservando che esiste una biiezione

Fatto: y_1, \dots, y_n sono indipendenti in $C(I, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ sono indep. $\forall x_0 \in I$

↳ È una conseguenza del teorema di esistenza

Def: Date n sol. y_1, \dots, y_n la matrice $W(x) = (y_1 | \dots | y_n)$ si dice matrice Wronskiana

$w(x) = \det W(x)$ si dice determinante Wronskiano

W, w verificano: 1) $W'(x) = A(x)W(x)$

$$2) w'(x) = [\operatorname{tr} A(x)] w(x)$$

1) Segue da $y'_k = A(x)y_k \quad \forall k$

2) È un'equazione del 1° ordine scalare che ha soluzione $w(x) = w(x_0)e^{F(x)}$ dove si ha:

$$F(x) = \int_{x_0}^x \operatorname{tr}(A(s)) ds. \text{ In particolare } \Rightarrow w(x_0) = 0 \text{ per qualche } x_0 \in I \Rightarrow w(x) = 0$$

$w \equiv 0 \Leftrightarrow y_1, \dots, y_n$ sono dipendenti

Verifichiamo che $w' = (\operatorname{tr}(A))w$:

$$w'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det W(x+h) - \det W(x)}{h}$$

def. di $W'(x)$

$W' = AW$

$$W(x+h) \stackrel{\downarrow}{=} W(x) + hW'(x) + o(h) \stackrel{\downarrow}{=} (I + hA)W + o(h)$$

$$\det[W(x+h)] = \det[(I + hA)W] + o(h) = \det(I + hA) \det(W) + o(h) = \prod_{i=1}^n (1 + h\lambda_i) w + o(h)$$

↳ Binet

pol. caratteristico
↳ autovalori di A

$$* = [1 + h \operatorname{tr}(A)] w + o(h)$$

$$(*) \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum \text{autovalori}(A)$$

$$\text{Si ha: } \prod_{i=1}^n (1 + h\lambda_i) = 1 + (\sum h\lambda_i) + (\sum h^2 \lambda_i \lambda_j) + (\sum h^3 \lambda_i \lambda_j \lambda_k) + \dots + o(h) = 1 + \sum h\lambda_i = 1 + h \operatorname{tr}(A)$$

Inseriamo nel limite:

$$w'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + h \operatorname{tr}(A)]w - w + o(h)}{h} = \operatorname{tr}(A) \cdot w$$

Oss: Il teorema di esistenza non è strettamente necessario, però mi dice qualcosa

in più nel caso non omogeneo

caso non omogeneo: $b(x) \neq 0$

$$y' = A(x)y + b(x)$$

Se y_1, \dots, y_n sono soluzioni di $y' = Ay$ e y_p è una soluzione particolare, allora:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i + y_p \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ (generano uno spazio affine).}$$

Come nel caso autonomo, data una matrice Wronskiana W , con $\det W \neq 0$,

$$\Rightarrow y_p(x) = W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + b(x) \text{ è la sol. particolare che verifica } y_p(x_0) = 0$$

$$\text{Infatti: } y_p'(x) = W'(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + W(x) W(s)^{-1} b(s) = AW(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + b(x) = Ay_p(x) + b(x)$$

⚠ non mi dice come trovare le n soluzioni

Esempi di sistemi non lineari:

1) Modelli di dinamica di popolazioni

caso 1 popolazione:

$x(t)$ = # individui al tempo t

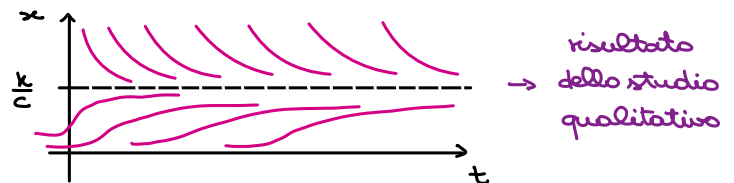
$$x'(t) = \underset{\substack{\text{crescita} \\ \downarrow}}{k} x(t) - \underset{\substack{\text{competizione} \\ \downarrow}}{c} x^2(t) \quad k, c > 0$$

(*) crescita esponenziale della popolazione in presenza di cibo e spazio limitato

(**) Tuttavia, quando la popolazione cresce troppo rallenta la crescita (si crea, appunto, competizione)

$x \equiv 0$ è soluzione, \leftarrow sol. staz.

$x \equiv \frac{k}{c}$ è soluzione (stabile)
 \hookrightarrow ce lo dice il modello



risultato dello studio qualitativo

caso 2 popolazioni: $x(t), y(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = (k_1 - a_{11}x - a_{12}y)x \\ y'(t) = (k_2 - a_{21}x - a_{22}y)y \end{cases}$$

coef. tutti > 0 , ci interessa $x \geq 0, y \geq 0$

k_i = tasso di crescita, a_i = tasso di competizione

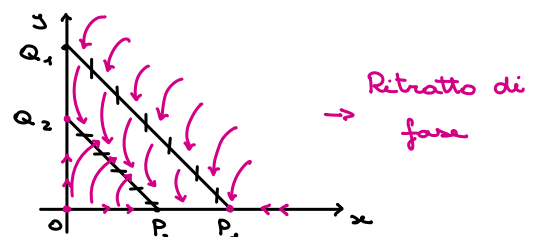
PUNTI STAZIONARI: $\begin{cases} x'=0 \\ y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{k_1}{a_{12}} & (R_1) \\ y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{k_2}{a_{22}} & (R_2) \end{cases} \rightarrow \text{lo supporto } x \neq 0, y \neq 0$

Abbiamo vari casi: studiamo le orbite nel I quadrante (le popolazioni sono positive)

caso 1: R_1 e R_2 non si intersecano nel I quadrante

" $R_1 > R_2$ " $Q_1 = (0, \frac{k_1}{a_{12}}), Q_2 = (0, \frac{k_2}{a_{22}})$

$P_1 = (\frac{k_1}{a_{11}}, 0), P_2 = (\frac{k_2}{a_{21}}, 0)$



Ritratto di fase

Q_2, P_1, O sono punti stazionari. Vediamo, la loro stabilità

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} k_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}y & k_2 - a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}$$

• $J(O) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ nodo instabile

• $J(Q_2) = \begin{pmatrix} \overbrace{k_1 - \frac{a_{12}k_2}{a_{22}}}^{>0} & 0 \\ \underbrace{-\frac{a_{21}k_2}{a_{22}}}_{<0} & -k_2 \end{pmatrix}$ sella

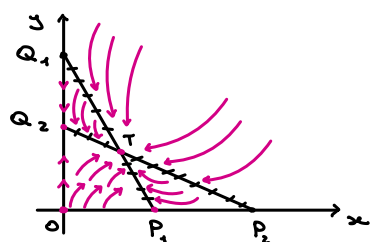
• $J(P_1) = \begin{pmatrix} -k_1 & -\frac{a_{12}k_1}{a_{11}} \\ 0 & \underbrace{k_2 - \frac{a_{21}k_1}{a_{11}}}_{<0} \end{pmatrix}$ nodo (improprio) stabile
 $\hookrightarrow \frac{k_2}{a_{21}} < \frac{k_1}{a_{11}} \text{ e } \frac{k_2}{a_{22}} < \frac{k_1}{a_{12}}$

" $R_2 > R_1$ " si fa analogamente

Se $x(t_0) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ cioè la popolazione 2 si estingue

caso 2: le rette si intersecano in T con le seguenti condizioni:

$$\frac{k_2}{a_{22}} < \frac{k_1}{a_{12}}, \quad \frac{k_2}{a_{21}} > \frac{k_1}{a_{11}}$$



Punti stazionari: O, P_1, Q_2, T

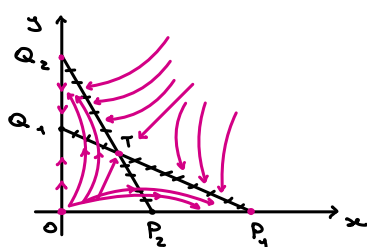
$J(O) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ traiettorie uscenti **nodo instabile**

Dal disegno mi aspetto Q_2 e P_1 punti di sella, T nodo instabile (verificare)

Se $x(t_0) > 0$ e $y(t_0) > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T$, cioè le popolazioni convivono

caso 3: le rette si intersecano in T con le seguenti condizioni:

$$\frac{k_2}{a_{22}} > \frac{k_1}{a_{12}}, \quad \frac{k_2}{a_{21}} < \frac{k_1}{a_{11}}$$



Punti stazionari: O, P_1, Q_2, T

Ci aspettiamo P_1 e Q_2 nodi stabili e T sella (verificare)

$k_2 - \frac{a_{21}k_1}{a_{11}} < 0$ e $k_1 - \frac{a_{12}k_2}{a_{22}} < 0 \Rightarrow P_1$ e Q_2 sono nodi stabili

Genericamente $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ o $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, cioè sopravvive una sola popolazione

Modello preda - predatore (Volterra - Lotka):

$x(t)$ prede che hanno cibo e spazio abbondante

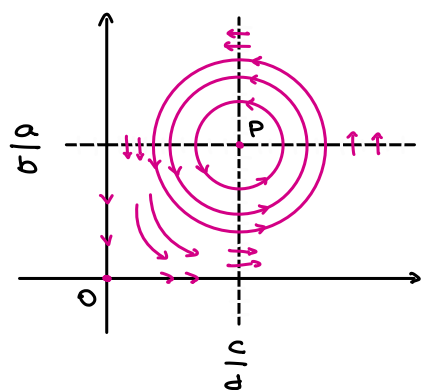
$y(t)$ predatori che in assenza di prede calano di numero

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy - \varepsilon x^2 & \text{con } a, b > 0, \varepsilon \geq 0 \\ y'(t) = -cy + dxy - \delta y^2 & \text{con } c, d > 0, \delta \geq 0 \end{cases}$$

Poniamo $\varepsilon = 0 = \delta$ per semplicità; la differenza con il problema di prima è il segno di y'

Cerco i punti stazionari:

$$\begin{cases} x' = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{a}{b} \\ y' = 0 \Leftrightarrow y = 0, x = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right), 0 \text{ punti stazionari}$$



$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

$$J(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{sella}$$

Ci aspettiamo P centro o fuoco:

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = -ac, \lambda = \pm i\sqrt{ac} \text{ è un centro} \rightarrow \text{non vale, però, il Teo di linearizzazione (gli autovalori sono immaginari puri)}$$

\Rightarrow Cerco l'integrale primo:

$V(x, y)$ è un integrale primo del sistema se $V(x(t), y(t))$ è costante in t , cioè

$$0 = \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \nabla V(x, y) \cdot (x', y') = V_x \cdot x' + V_y \cdot y' = V_x(a - by)x + V_y(-c + dx)y$$

$$\text{Divido per } xy \Rightarrow 0 = V_x \left(\frac{a}{y} - b \right) + V_y \left(-\frac{c}{x} + d \right)$$

$$\text{Posso provare a prendere } V_x = -\frac{c}{x} + d, V_y = b - \frac{a}{y}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & V = -c \log(x) + dx + f(y) \\ \textcircled{2} \quad & V = -a \log(y) + b(y) + g(x) \end{aligned}$$

$V(x, y) = dx + by - c \log(x) - a \log(y)$ è un integrale primo

V è convessa, $\lim_{x \rightarrow 0, +\infty} V(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0, +\infty} V(x, y) = +\infty$, V ha minimo in $P \Rightarrow P$ centro

Esercizio 1: soluzione di un allievo

a) Calcolare $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$ con $F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, x y z)$, $\Sigma = \{z = x^2 + y^2\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 4\}$

cilindro in \mathbb{R}^3

1) Capiamo chi è Σ : $z = x^2 + y^2$ è una parabola ruotata attorno all'asse z e la taglio in $z = 4$ piano

2) Noto che Σ è la superficie esterna (senza il piano superiore) \rightarrow non è chiusa

3) Chiamo $\Sigma' = \{z = 4, x^2 + y^2 \leq 4\} =$ disco superiore

4) Applico il Teorema della divergenza a $\Sigma + \Sigma'$:

$$\left(\int_{\Sigma} + \int_{\Sigma'} \right) (\text{rot } F \cdot \vec{n}) = \int_V \text{div Rot } F = 0$$

$V \leftarrow$ volume \rightarrow perché il rot ha divergenza nulla sempre

$$\int_{\Sigma'} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\Sigma'} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) = \int_{\Sigma'} 0 = 0$$

\uparrow ridiretto verso z
 \rightarrow del rot F resta solo la componente lungo z

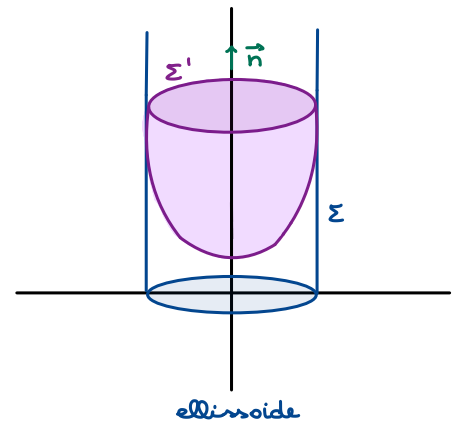
alternativamente (sol. del tutor)

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot \vec{t} \quad \partial \Sigma \text{ lo parametrizzo con } \gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow \partial \Sigma$$

\downarrow tangente

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$



b) Calcolare $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$ con $F(x, y, z) = (e^{xy}, e^{xz}, x^2 z)$, $\Sigma = \{4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\} \cap \{y < 0\}$

$$\Sigma' = \{x^2 + y^2 \leq 1, y = 0\}$$

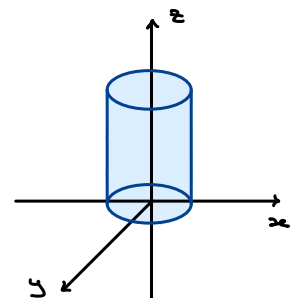
$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\partial \Sigma} F \cdot \vec{t} \quad \text{parametrizziamo } \partial \Sigma \text{ con } \gamma(t) \quad (\text{coordinate polari})$$

$$\text{Calcoliamo } \gamma'(t) \rightarrow \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

Esercizio 2:

Calcolare $\int_{\Sigma} F \cdot \vec{t}$ con $F(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$ e $\Sigma = \{x + z = 5\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 9\}$

Oss: Un cilindro pieno tagliato da un piano è un'ellisse



$$\text{Usa Stokes: } \int_{\Sigma} F \cdot \vec{t} = \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\Sigma} (1, 0, -1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dA = \int_{\Sigma} \frac{1-x}{\sqrt{2}} dA = \frac{1}{\sqrt{2}} |\Sigma| = \frac{1}{\sqrt{2}} 3\sqrt{2} \cdot 3\pi = 3\pi$$

\uparrow area
 \downarrow elem. d'area

Alternativamente: uso le coordinate polari: $\Sigma = (p \cos \theta, p \sin \theta, 5 - p \cos \theta)$ con $p \leq 3$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Esercizio 3:

Calcolare $\int_{\Sigma} F \cdot n$ con $F = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ e $\Sigma = \{4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36\} = \text{ellissoide}$

$$\int_{\Sigma} F \cdot n = \phi(F, \Sigma) = \int_{\partial \Sigma} \text{div} F = 0 \text{ perché si ha } \text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0, \text{ infatti:}$$

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \left[\underbrace{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}_{=0} \right] = 3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

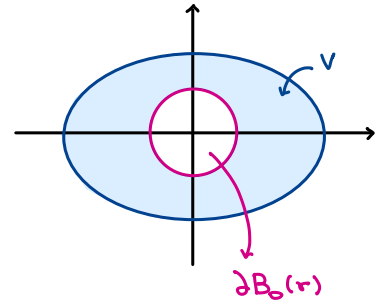
⚠ F ha una singolarità nell'origine $F = \frac{F^3}{|r|^3} \rightarrow$ prendo una sferetta di raggio piccolo attorno l'origine

$$\int_{\Sigma} F \cdot n = \int_{\partial B_0(r)} F \cdot n + \int_{\text{V}} \text{div} F$$

\parallel
 $4\pi r^2 \cdot \frac{r}{r^3}$
 \parallel
 4π

\parallel
 0

Ⓟ \rightarrow volume racchiuso fra le 2 superfici



$\Rightarrow F \perp$ alla superficie

Esercizi per casa: 1) Calcolare $\int_{\partial \Sigma} F \cdot t$, $F = (y^2, 2xz, e^{xy})$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 \leq 16\} \cap \{z = 5\}$

2) Calcolare $\int_{\Sigma} F \cdot n$, $F = (\cos z + xy^2, xe^{-z}, \sin y + xz^2)$

$$\Sigma = \partial(\{z \leq 4\} \cap \{x^2 + y^2 \leq z\})$$

SISTEMI 2x2

$$(*) \begin{cases} x' = ax + by & x(t) \text{ con } x(0) = x_0 \\ y' = cx + dy & y(t) \text{ con } y(0) = y_0 \end{cases} \quad M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Prop: le due componenti $(x(t), y(t))$ della sol. di $(*)$ soddisfano l'eq. differenziale del II ordine $u'' - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr } M} u' + \underbrace{(ad-bc)}_{\text{det } M} u = 0$

Dim: Basta derivare la 1^a equazione:

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + by' = ax' + bcx + bdy & by &= x' - ax \\ &= ax' + bcx + d x' - da x \end{aligned}$$

$$x'' = -(a+d)x' + (ad-bc)x = 0 \quad (\text{si risolve come visto in Analisi I})$$

Idem per $y' \Rightarrow$ Tesi

Esempio di applicazione:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Verificare che tutte le sol. sono limitate} \\ \textcircled{2} \text{ Se } \begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{matrix} \text{ determinare il punto pi\u00f9 vicino e quello pi\u00f9 lontano dall'origine} \end{array}$$

$x(t), y(t)$ sono soluzioni dell'equazione: $u'' - \text{tr } M u' + \text{det } M u = 0$

$$\text{con } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr } M = 0, \text{det } M = 4 \Rightarrow u'' + 4u = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t \\ y(t) = \gamma \cos 2t + \delta \sin 2t \end{cases}$$

Che cosa sono $\alpha, \beta, \gamma, \delta$? Si trovano tramite le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &\Rightarrow \alpha \cos 0 + \cancel{\beta \sin 0} = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ x'(t) = -2\alpha \sin 2t + 2\beta \cos 2t &\Rightarrow x'(0) = 1 \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \\ y(0) = 0 &\Rightarrow \gamma \cos 0 + \cancel{\delta \sin 0} = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ y'(t) = 2\gamma \cos 2t &\Rightarrow y'(0) = 5 \Rightarrow 2\delta \cos 0 = 5 \Rightarrow \delta = \frac{5}{2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \\ y(t) = \frac{5}{2} \sin 2t \end{array} \right.$$

Es: Fare lo stesso calcolo trovando autovalori e autovettori della matrice

Es: Usare le espressioni trovate per determinare max e min di $R(t) = x(t)^2 + y(t)^2$

Oss: Dato che la matrice è della forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$, cioè a traccia nulla, il sistema (*) è esatto e quindi la funzione $U(x, y) = \frac{C}{2}x^2 - Axy - \frac{B}{2}y^2$

è costante sulle orbite, in questo caso: $U(x, y) = \frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$.

L'orbita in questione è $\underbrace{\left\{ \frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{2} \right\}}_{\text{vincolo}} \hookrightarrow U(0,0)$: è l'eq. di un'ellisse e il punto

di max/min distanza si trova con i moltiplicatori di Lagrange: $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(5x - y) \\ 2y = \lambda(-x + y) \end{cases} \begin{cases} \text{risolvere è equiv.} \\ \text{a trovare autovettori} \\ \text{e autovalori della mat.} \end{cases} \begin{matrix} \text{Oss: } \frac{2}{\lambda} \text{ è autovalore di } \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \text{mi danno la direzione} \end{matrix}$$

$\frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{2} \rightarrow \text{det. la lunghezza}$ Finire il calcolo per esercizio

SISTEMI AUTONOMI:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $u' = F(u)$ (*) sistema autonomo

Sia $u: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$ è sol. massimale di (*)

$\{u(t): t \in (\alpha, \beta)\}$ si dice traiettoria di (*)

(una traiettoria ha in maniera naturale anche un'orientazione)

Oss 1: Se u è sol. di (*) e $c \in \mathbb{R}$, anche $v(t) = u(t-c)$ è sol. di (*) $\left(\begin{smallmatrix} \text{basta} \\ \text{derivare} \end{smallmatrix} \right)$

Oss 2: Se u e \tilde{u} sono sol di (*) e $u(t_0) = \tilde{u}(t_1)$ allora $\tilde{u}(t) = u(t + t_0 - t_1)$

Dim: Basta vedere che \tilde{u} e $v(t) = u(t + t_0 - t_1)$ sono due sol. dello stesso pb di Cauchy

infatti sono entrambe sol. di (*) e $v(t_1) = u(t_1 + t_0 - t_1) = u(t_0) = \tilde{u}(t_1) \Rightarrow v \equiv \tilde{u}$

Cor: Se u è una sol non costante di (*) tc $u(t_0) = u(t_1) \Rightarrow u$ è periodica con per. $T \neq 0$

Dim: Per l'oss. sopra: $u(t) = u(t + t_0 - t_1) \quad \forall t$ ($\Rightarrow u$ è def. su tutto \mathbb{R})

Possiamo considerare $t_0 - t_1 \in \mathcal{P} = \{p: u(t) = u(t+p)\} \neq \emptyset$

\mathcal{P} è chiuso (se ho $p_n \in \mathcal{P}$, $p_n \rightarrow p_0 \Rightarrow p_0 \in \mathcal{P}$)
 \mathcal{P} è un gruppo additivo $\left. \vphantom{\begin{matrix} \mathcal{P} \text{ è chiuso} \\ \mathcal{P} \text{ è un gruppo additivo} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \mathcal{P} \text{ ha un el. min o } \mathcal{P} = \mathbb{R}$

Quindi $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap [0, +\infty)$ si ha che: (a) $\inf \mathcal{P}^+ = 0 \Rightarrow \mathcal{P} = \mathbb{R}$ non può succedere (*)

oppure (b) $\inf \mathcal{P}^+ = \min \mathcal{P}^+ = p_0 > 0 \Rightarrow p_0$ è il periodo di u e $t_0 - t_1 = kp_0$ con $k \in \mathbb{Z}$

(*) Se $\inf P^+ = 0$ allora P è denso perché se prendo $p \in P$ t.c. $0 < p < \frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow \exists k$ t.c. $k p \in (a, b)$ prendo p qui  lo abbiamo visto ad Analisi 1 (lez 11-21/10/21)

Qui mi serve gruppo additivo: tutti gli elem. di P della forma $k p$ continuano a stare in P

Cor: a) Ogni orbita corrisponde a una famiglia di traslate di una stessa soluzione

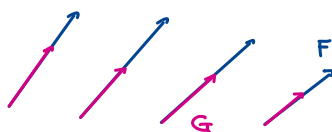
b) Due orbite si intersecano se coincidono (cioè se sono la stessa orbita)

Ω è foliato da orbite (cioè è un'unione disgiunta di orbite)

Cosa succede con le parametrizzazioni?

$$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$\lambda \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad \lambda > 0$$



$$G(x) = \lambda(x) F(x)$$

$$u' = F(u) \quad \boxed{\text{SF}}, \quad v' = G(v) \quad \boxed{\text{SG}}$$

Prop: I due sistemi hanno le medesime traiettorie

Dime: Mostro che se v è sol. di (SG) allora $u(t) \doteq v(\psi(t))$ con $\psi = \varphi^{-1}$ e

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \lambda(v(s)) ds; \text{ si ha che } u \text{ soddisfa (SF) con } u(0) = v(t_0)$$

$$\hookrightarrow \varphi'(s) = \lambda(v(s)) \text{ per le TFCI}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} [v(\psi(t))] = \underbrace{v'(\psi(t))}_{\text{SG}} \underbrace{\psi'(t)}_{\text{SF}} = \underbrace{\lambda(v(\psi(t))) F(v(\psi(t)))}_{\text{SG}} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \\ &= \lambda(\cancel{v(\psi(t))}) F(v(\psi(t))) \cdot \frac{1}{\lambda(\cancel{v(\psi(t))})} \Rightarrow u'(t) = F(u(t)) \end{aligned}$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE LUNGO UNA TRAIETTORIA

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), E \in C^1(\Omega, \mathbb{R}), u' = F(u)$$

Definisco la derivata di E lungo la traiettoria del campo F :

$$\frac{d}{dt} (E(u(t))) = \nabla E(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla E(u(t)) \cdot F(u(t))$$

Definisco la derivata di E lungo le linee di flusso di F :

$$\dot{E}(x) \doteq \vec{\nabla} E(x) \cdot \vec{F}(x)$$

Def: E è un integrale del moto (per F) se $\dot{E} \equiv 0$

Esempio: $\ddot{x} = -\nabla U \rightsquigarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -\nabla U(x) \end{cases}$

$$E(x, y) = \frac{|y|^2}{2} + U(x) \quad \text{con } U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\nabla U(x) \end{pmatrix}, \quad F: \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

$$\nabla(x, y) E \cdot F = \nabla U(x) \cdot y + y \cdot (-\nabla U(x)) = 0$$

Esempio 2 (Sistemi Hamiltoniani): più in generale

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \quad H \in C^1$$

$$\begin{cases} p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se un sistema ha questa forma, allora } H \\ \text{risulta essere un integrale primo} \end{array}$$

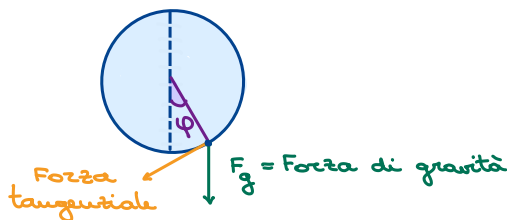
$$\dot{H}(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \leftarrow \text{generalizzazione dell'es. 1 e dei sistemi esatti}$$

Esempio di applicazione (esercizio):

$$\ddot{\varphi} = -K \sin \varphi \quad \text{pendolo rigido}$$

$$\varphi = q \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = p$$

$$(s) \quad \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -K \sin q \end{cases}$$



$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + K(1 - \cos q)$$

a) Verificare che H è un integrale primo per S

b) Descrivere le curve di livello di H che corrispondono alle traiettorie di (s)

MISURE DI HAUSDORFF

Def: $k \in [0, +\infty)$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(E)$ si dice misura di Hausdorff k -dim. di E ,
 dove $\mathcal{H}_\delta^k(E) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^k : \text{diam}(E_i) \leq \delta \text{ e } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$ ↳ misura esterna

Oss: $\omega_k \frac{\text{diam}(E_i)^k}{2^k}$ è l'area k -dim. del disco $B_r \subseteq \mathbb{R}^k$ con $r = \frac{\text{diam}(E_i)}{2}$

$\omega_k = |B_1| = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$ dove Γ è la Γ di Eulero ⚠ Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ vale anche per Γ

Oss: $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\delta_1}^k(E) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^k(E) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(E)$

Oss: Se imponiamo E_i palla $\forall i$ otteniamo $S^k(E) \geq \mathcal{H}^k(E)$ misura di Hausdorff sferica

Teo: 1) \mathcal{H}^k è una misura esterna in \mathbb{R}^n e $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, cioè $\mathcal{H}^k|_{\mathcal{M}}$ è una misura di Borel

2) $\mathcal{H}^0(E) = \#E$

3) $\mathcal{H}^n|_{\mathcal{M}}$ è la misura di Lebesgue

4) $k > k'$ e $\mathcal{H}^k(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(E) = +\infty$ ($\Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(E) < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) = 0$)

In particolare $\mathcal{H}^k(E) = 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall k > n$

5) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C -lip $\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(E)) \leq C^k \mathcal{H}^k(E)$

Dim: 1A) Ⓐ monotonia per l'inclusione Ⓑ subaddittività } per essere una misura esterna devono valere entrambe le condizioni Ⓐ, Ⓑ

Ⓐ $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \mathcal{H}_\delta^k(F) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) \leq \mathcal{H}^k(F)$

↳ perché un ricoprimento E_i di F è anche ricoprimento di E

Ⓑ $F_j \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(\bigcup_j F_j) \leq \sum_j \mathcal{H}_\delta^k(F_j)$

↳ è l'inf

$\{E_{ij}\}$ ricoprimento di $F_j \Rightarrow \{E_{ij}\}$ ricoprimento di $\bigcup_j F_j$

1B) $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (\mathcal{M} contiene i Boreliani)

a) addittività su insiemi distanti:

$\text{dist}(E, F) > 0$, $\delta < \frac{1}{2} \text{dist}(E, F) \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^k(E) + \mathcal{H}_\delta^k(F) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E \cup F) = \mathcal{H}^k(E) + \mathcal{H}^k(F)$

b) usando questo si può dimostrare che vale Caratheodory per i chiusi (i chiusi sono mis.)

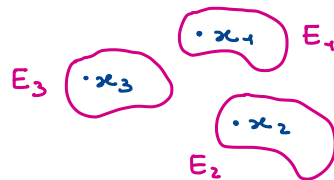
$\mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}^k(E \cap B) + \mathcal{H}^k(E \setminus B) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ chiuso} \Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \{\text{chiusi di } \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

2) È sufficiente verificare, per la monotonia di H^0 , che $H^0\left(\bigcup_{i=1}^N x_i\right) = N$ se $\delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$

Sia $\{E_i\}_{i \in J}$ un ricoprimento:

$$H_\delta^0\left(\bigcup_i x_i\right) = \inf \left\{ \sum_{i \in J} \text{diam}(E_i)^0 : \{E_i\}_{i \in J} \text{ ricoprimento di } \bigcup_i x_i \right\}$$

$$= \inf \#J = N \quad \text{se } \delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x_i - x_j| \quad (\text{se } \delta \text{ è piccolo})$$



3) $H^n|_{\mathcal{H}}$ è una misura di Borel invariante per traslazione $\Rightarrow H^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = c \cdot \mathcal{L} \rightarrow$ misura di Lebesgue \Rightarrow uso le sue prop.

Basta verificare che $H^n(B_1) = |B_1| = \omega_n$ vedi: Lezione 34 - 15/12/2023

4) $k > k'$ $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\delta > 0$, $\{E_i\}_i$ ricoprimento di E con $\text{diam}(E_i) < \delta \quad \forall i$

$$\Rightarrow \text{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \text{diam}(E_i)^{k'} \Rightarrow H_\delta^k(E) < \underbrace{\frac{\omega_n}{2^k} \cdot \frac{2^{k'}}{\omega_{n'}}}_{C_{k,k'} > 0} \cdot \delta^{k-k'} H_\delta^{k'}(E)$$

$$\Rightarrow H_\delta^{k'}(E) > \frac{H_\delta^k(E)}{C_{k,k'} \cdot \delta^{k-k'}} \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^{k'}(E) > \frac{H^k(E)}{C_{k,k'}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{k-k'}} = +\infty$$

5) f C -lip, $\{E_i\}_i$ ricoprimento di $E \Rightarrow f(E_i)$ ricoprimento di $f(E)$ e $\text{diam}(f(E_i)) \leq C \text{diam}(E_i) \quad \forall i$

$$\Rightarrow H_\delta^k(f(E)) \leq \frac{\omega_n}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(f(E_i))^k : E_i \text{ ricoprimento di } E \right\} \leq$$

$$\leq C^k \frac{\omega_n}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(E_i)^k : E_i \text{ ricoprimento di } E \right\} \xrightarrow[\text{al limite}]{\text{passando}} H_\delta^k(f(E)) \leq C^k H_\delta^k(E)$$

Oss: H^k non è di Radon se $k < n$, cioè non è finita sui compatti, in particolare non è σ -finita.

Poiché non è σ -finita, abbiamo problemi per i teoremi di passaggio al limite.

Tuttavia, passando a sottoinsiemi in cui è σ -finita, cioè restringendola, posso farli valere

Possiamo comunque parlare di integrazione (ma non tutte le proprietà valgono)

INTEGRAZIONE:

Prendiamo $E \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ σ -finita per H^k , cioè $H^k|_E$ è σ -finita e f è $H^k|_E$ misurabile

(ad esempio f continua e f Boreliana va bene) definiamo, $\int_E f dH^k := \int_{\mathbb{R}^n} f dH^k|_E$

Es: $H^k(E) = \int_E 1 dH^k$ è una generalizzazione degli integrali di superficie fatti con la parametriz.

\hookrightarrow serve per i teoremi

Teorema: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ superficie compatta C^1 k -dimensionale ($0 < k < n$, $k \in \mathbb{N}$) di passaggi al limite (non per i calcoli)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \Sigma$ è σ -finita per H^k e $\int_\Sigma f = \int_\Sigma f dH^k$

\hookrightarrow def. con la param. di Σ

In particolare $\int_\Sigma 1 = H^k(\Sigma)$

Ricorda: Abbiamo definito una superficie compatta C^1 in 3 modi:

- 1) Se può essere localmente scritta come grafico di una funzione $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
- 2) Se è localmente immagine di una funzione di parametrizzazione con $\text{rk } J_\varphi = k$
- 3) Se la possiamo scrivere localmente come luogo di zeri di una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ con la condizione che lo Jacobiano abbia rango massimo (Teorema delle funzioni implicite)

DIMENSIONE DI HAUSDORFF:

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\dim_H(E) = \inf \{k > 0 : \mathcal{H}^k(E) = 0\} \in [0, n]$ dimensione di Hausdorff di E

Oss: Per il Teo precedente, se Σ è k -imp. C^1 ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \dim_H(\Sigma) = k$

Oss: \exists insiemi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\dim_H(E) \notin \mathbb{N}$

Es: $C \subseteq [0, 1]$ insieme di Cantor, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ curva di Koch (sono esempi di insiemi frattali)

Vediamo il caso di $C \subseteq [0, 1]$. C verifica $C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(C) = \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) + \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) = \frac{2}{3^k} \mathcal{H}^k(C)$$

$$\text{Se } \mathcal{H}^k(C) \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{2}{3^k} = 1 \Rightarrow k = \frac{\log 2}{\log 3} \in (0, 1)$$

$$\text{Devo verificare } \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) \in (0, +\infty) \Rightarrow \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$$

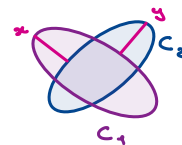
INSIEMI FRATTALI

$K(\mathbb{R}^n) = \{K \subseteq \mathbb{R}^n : K \text{ compatto}, K \neq \emptyset\}$ su cui definiamo una metrica d_H ("somiaglia" a l_∞)

$d_H : K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$ distanza di Hausdorff

$$d_H(C_1, C_2) = \max\left(\max_{x \in C_1} d(x, C_2), \max_{y \in C_2} d(y, C_1)\right) \text{ dove } d(x, C) = \min_{y \in C} |x - y|$$

esempio:



Teo: $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ è uno spazio metrico completo

Dim: 1) d_H è una distanza

a) $d_H(C_1, C_2) = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2$: se $\max_x d(x, C_2) = 0 \Rightarrow C_1 \subseteq C_2$, idem per $\supseteq \Rightarrow C_1 = C_2$

b) $d_H(C_1, C_2) = d_H(C_2, C_1)$: ovvio, d_H è simmetrica

c) disuguaglianza triangolare : $C_1, C_2, C_3 \in K(\mathbb{R}^n)$

$$\forall x \in C_1 \exists y \in C_2 : |x - y| \leq d_H(C_1, C_2)$$

$$\text{e } \exists z \in C_3 : |y - z| \leq d_H(C_2, C_3)$$

$$\Rightarrow |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3) \Rightarrow \text{possiamo fare il max}$$

$$\Rightarrow \max_{x \in C_1} d(x, C_3) \leq \max(d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3))$$

2) Completezza : sia C_k successione di Cauchy in $K(\mathbb{R}^n)$

$$\text{A meno di sottoseq. possiamo supporre } d_H(C_k, C_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow d_H(C_k, C_n) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k} \quad \forall n > k$$

Definiamo $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_k \in C_k \text{ con } x_k \rightarrow x\}$ limite di Kuratowski dei C_k (limite puntuale)

\hookrightarrow nei compatti
è lim. uniforme

Dobbiamo verificare $C \in K(\mathbb{R}^n)$ e $d_H(C_k, C) \rightarrow 0$

⊙ $C \neq \emptyset$, infatti $d_H(C_k, C_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \exists x_k \in C_k : |x_k - x_{k+1}| \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow x_k$ di Cauchy

$$\Rightarrow x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \in C$$

⊙ $\forall x \in C \exists x_k \in C_k \text{ t.c. } |x - x_k| \leq \frac{1}{2^k}$ (sto mostrando che $d_H(C_k, C) \rightarrow 0$)

$$\text{Infatti } x = \lim_n x_n, x_n \in C_n, \text{ selgo } n > k : |x - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$d_H(C_k, C_{n-1}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \exists x_{n-1} \in C_{n-1} : |x_{n-1} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\exists x_j \in C_j \quad k \leq j \leq n-1 \quad |x_j - x_{j+1}| \leq \frac{1}{2^j} \Rightarrow |x_k - x| \leq |x_k - x_n| + \sum_{j=k}^{n-1} |x_j - x_{j+1}| \leq \frac{2}{2^k} + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow d(x, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \max_{x \in C} d(x, C_k) \leq \frac{1}{2^k}$$

○ Viceversa, dato $y_k \in C_k \exists x_k \in C : |y_k - x_k| \leq \frac{1}{2^k}$

Infatti, come sopra $\exists y_j \in C_j : |y_j - y_{j+1}| \leq \frac{1}{2^j} \Rightarrow y_j \rightarrow x_k \in \mathbb{R}^n$ e $|x_k - y_k| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |y_j - y_{j+1}| \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \max_{y \in C_k} d(y, C) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow d(C, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

○ Voglio vedere che C è compatto:

- C è limitato: fisso k e considero $n > k \Rightarrow d_H(C_n, C_k) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \forall x_n \in C_n \quad d(x_n, C_k) \leq \frac{1}{2^k} ; \text{ Se } x \in C \Rightarrow x = \lim_n x_n \text{ con } x_n \in C_n$$

$$\Rightarrow d(x, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow C \subseteq \{x+y : x \in C_k, y \in \overline{B_{\frac{1}{2^k}}}\} = C_k + \overline{B_{\frac{1}{2^k}}} \text{ limitato (è compatto)}$$

- C è chiuso: $x_k \in C, x \in \mathbb{R}^n, x = \lim_k x_k$ poiché $d_H(C, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow d(x_k, C_k) \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \exists y_k \in C^k : |x_k - y_k| \leq \frac{1}{2^k}$$

$$|y_k - x| \leq |x_k - x| + |x_k - y_k| \leq |x_k - x| + \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, x = \lim_k y_k, y_k \in C_k \Rightarrow x \in C$$

Oss: M sp. metrico completo $\Rightarrow (K(M), d_H)$ è metrico completo

Oss: Se T è un'isometria (cioè matrice con $\det M = \pm 1$ composta una traslazione) di \mathbb{R}^n

$\tilde{T} : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n), \tilde{T}(C) = \bigcup_{x \in C} T(x)$ è un'isometria, infatti:

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \quad \forall x \in C_1, y \in C_2 \Rightarrow d_H(\tilde{T}(C_1), \tilde{T}(C_2)) = d_H(C_1, C_2)$$

Teorema: $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $1 \leq i \leq N$, è una contrazione, cioè:

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \lambda_i |x - y|, \lambda_i \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow \exists! C \in K(\mathbb{R}^n) : C = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C), \text{ dove } \varphi_i(C) = \bigcup_{x \in C} \varphi_i(x)$$

Dim: Osserviamo che $T(C) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C)$ è una contrazione in $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$

Infatti, poniamo $\lambda = \max_i \lambda_i \in (0, 1)$ e consideriamo $C_1, C_2 \in K(\mathbb{R}^n)$.

Per $x \in T(C_1) = \bigcup_i \varphi_i(C_1) \Rightarrow x \in \varphi_j(C_1)$ per un certo j , cioè $x = \varphi_j(\bar{x}), \bar{x} \in C_1$,

$\exists \bar{y} \in C_2$ con $|\bar{x} - \bar{y}| \leq d_H(C_1, C_2)$ pongo $y = \varphi_j(\bar{y}) \in T(C_2)$

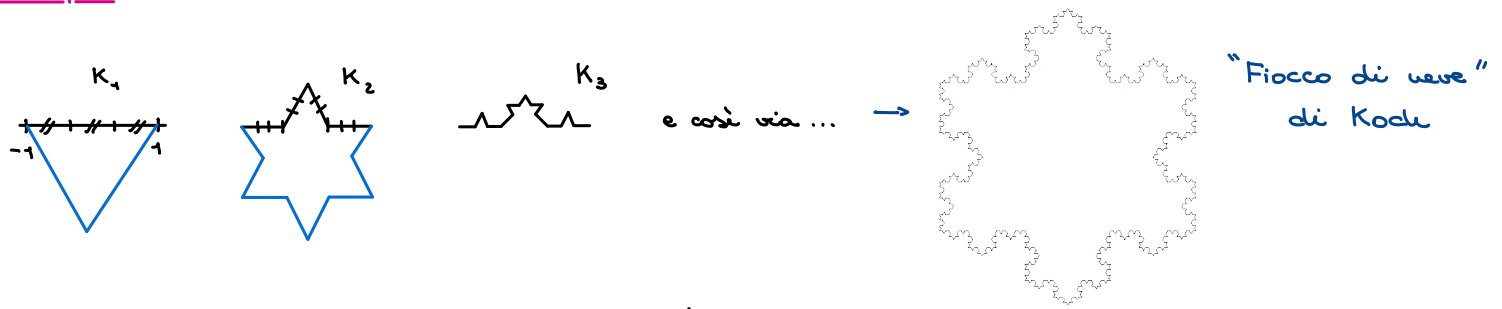
$$|x - y| = |\varphi_j(\bar{x}) - \varphi_j(\bar{y})| \leq \lambda |\bar{x} - \bar{y}| \leq \lambda d_H(C_1, C_2) \Rightarrow d(x, T(C_2)) \leq |x - y| \leq \lambda d_H(C_1, C_2)$$

$$\text{per simmetria } \forall y \in T(C_2) \quad d(y, T(C_1)) \leq \lambda d_H(C_1, C_2) \Rightarrow d_H(T(C_1), T(C_2)) \leq \lambda d_H(C_1, C_2)$$

Per il Teorema delle contrazioni: $\exists! C \in K(\mathbb{R}^n)$ t.c. $C = T(C)$

□

Esempio (curva di Koch):



$$K = \lim_n K_n \text{ curva di Koch, } L(K_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L(K_1) \xrightarrow{n} +\infty$$

$$K_n \in K(\mathbb{R}^n), \quad K_{n+1} = T(K_n) \quad \text{omotetia di } \frac{1}{3} \text{ e lo compongo con 4 isometrie}$$

$$T(C) = \bigcup_{i=1}^4 \varphi_i(C), \quad \varphi_i(x) = T_i\left(\frac{x}{3}\right) \quad T_i \text{ isometria, } \varphi_i \text{ sono contrazioni con } \lambda_i = \frac{1}{3}$$

Per il teorema $\exists! K : K = T(K)$ e $\forall K_1 \in K(\mathbb{R}^n), \quad T^{(n)}(K_1) \xrightarrow{n} K$ in d_H

◦ Quanto è $\dim_H(K)$?

$$\text{Calcoliamo } H^j(K) = H^j(T(K)) = H^j\left(\bigcup_{i=1}^4 \varphi_i(K)\right) = \sum_{i=1}^4 H^j(\varphi_i(K)) = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^j H^j(K)$$

$$\text{Se } H^j(K) \in (0, +\infty) \text{ per } j = \dim_H(K) \Rightarrow 1 = \frac{4}{3^j}, \quad j = \dim_H(K) = \frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2)$$

Nota (sulle contrazioni):

Una tipica contrazione è ad es: $x \mapsto \frac{x}{2}$ ma l'unico pt. fisso è l'origine, dunque non ottengo info interess.

Se ad esempio prendiamo $x \mapsto \frac{x}{2} + \text{"traslazione"} + \text{"rotazione"}$ mi compatti resterà una contrazione, e come unico punto fisso otterrò un'insieme non banale, dunque genero frattali.

È importante è che ci sia una contrazione (come ad es. $x \mapsto \frac{x}{n}$) composta ad un'isometria.

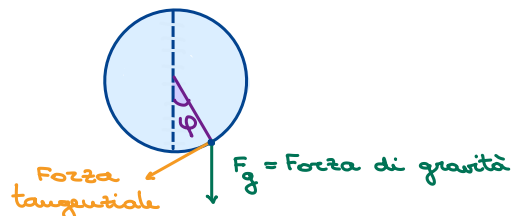
STABILITÀEsempio di sistema Hamiltoniano:

$$\varphi'' = -K \sin \varphi \quad \text{pendolo rigido}$$

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \quad K > 0$$

$$\varphi = q \quad \text{e} \quad \varphi' = p$$

$$(S) \quad \begin{cases} q' = p \\ p' = -K \sin q \end{cases}$$



$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + K(1 - \cos q)$$

a) Verificare che H è un integrale primo per S

b) Descrivere le curve di livello di H che corrispondono alle traiettorie di (S)

a) Il sistema rispetta $\begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow H \text{ è costante sulle traiettorie}$

b) $H(p(t), q(t)) \equiv H_0 \rightarrow$ studio l'intervallo $[-\pi, \pi]$

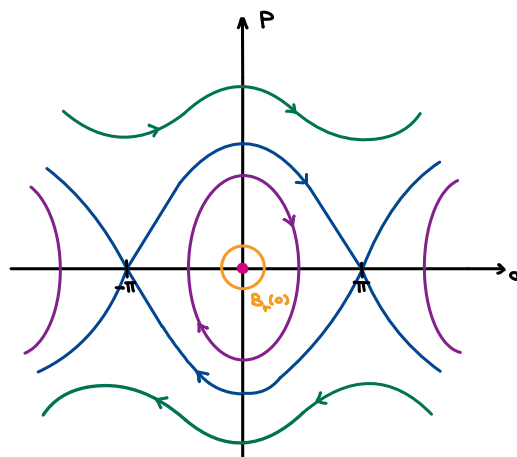
$$\frac{1}{2} p^2 = H_0 - K(1 - \cos q) \Rightarrow p = \pm \sqrt{2(H_0 - K + K \cos q)}$$

Se $H_0 > 2K \Rightarrow H_0 - K > K$

Se $H_0 = 2K \Rightarrow p = \pm \sqrt{2K(1 + \cos q)}$

Se $0 < H_0 < 2K \Rightarrow H_0 - K < K$

Se $H_0 = 0 \Rightarrow p = \pm \sqrt{2K(\cos q - 1)}$



Oss: Si può dimostrare che la curva in blu è una traiettoria che connette due punti d'equilibrio

! q rappresenta un angolo, quindi se mi sposto di 2π torno al punto iniziale

Oss: Sono curve che si avvolgono

Quando le curve si chiudono ottengo una traiettoria molto simile a quella del pendolo

Cosa succede se perturbiamo il sistema? \rightarrow aggiungiamo un attrito

$$\varphi'' = -K \sin \varphi - \varepsilon \varphi \rightarrow \text{Se } \varepsilon > 0 \text{ il sistema non è più Hamiltoniano}$$

Si ha, però, che $H'(p, q) = -\varepsilon p^2 < 0 \rightarrow$ le curve vanno a finire tutte nell'origine

Oss: H è una funzione di Lyapunov per il sistema perturbato con $\varepsilon > 0$ (dopo vedremo la def.)

In generale:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Il sistema è autonomo
(non dipende dal tempo)

$$(S) \begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad \text{la soluzione di (S) la chiamiamo } \varphi_\xi(t)$$

ξ tiene traccia della cond. iniziale
 t è la variabile temporale

Def: ξ_0 è punto di equilibrio se $F(\xi_0) = 0$

nell'es. di prima (con $\varepsilon = 0$), $\xi_0 = 0$ è pt. d'eq. stabile perché
comunque io finì un raggio non esco da R , ma non è as. stab.
con $\varepsilon > 0$ si

ξ_0 è punto di equilibrio stabile se $\forall R > 0 \exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0) \forall t > 0 \quad |\varphi_\xi(t) - \xi_0| < R$

ξ_0 è punto di equilibrio instabile se non è stabile

$\hookrightarrow \forall R$ se parto vicino ξ_0 per tutti i tempi
non mi allontanano troppo da ξ_0

ξ_0 è pt di equilibrio asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \xi_0$ è stabile e $\exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0), \varphi_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_0$

Oss: Se ξ_0 è pt d'equilibrio stabile, $\varphi_\xi(t)$ è definita su $[0, +\infty) \rightarrow$ deve rimanere su un compatto

Es: Verificare che il sistema con attrito ($\varepsilon > 0$), ξ_0 è asintoticamente stabile \rightarrow non è immediata
conseguenza ma si possono usare le idee

Def: Dico che φ_ξ soluzione di (S) è stabile $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall R > 0 \exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0)$ la funzione

$\varphi_\xi(t)$ è definita $\forall t$ e $|\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| < R \quad \forall t > 0$

Def: φ_{ξ_0} è asintoticamente stabile $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi_{\xi_0}$ è stabile e $\exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0)$ si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| = 0$

\hookrightarrow Cioè, una sol. è as. stab. se tutte le sol. che partono con un dato piccolo sono asint. a questo

! Il periodo delle curve nel caso senza attrito cambia se ci spostiamo da una curva all'altra

Quando siamo vicini alla sol. staz. i periodi sono quasi cost. e sono quelli del pendolo linearizzato,
però quando ci avviciniamo alle sol. in blu che connettono due eq. instabili abbiamo periodi sempre
più grandi: si potrebbe dimostrare che il periodo cresce mano a mano che aumentiamo l'energia.

Vol dire che i punti girano su traiettorie vicine ma tendono a disallinearsi, cioè hanno velocità
angolari diverse. Questo compromette la stabilità

per come l'orbita è parametrizzata

Oss: le traiettorie periodiche non costanti del pendolo senza attrito non sono stabili

Def: Sia ξ_0 equilibrio asintoticamente stabile, $\Omega_{\xi_0} \doteq \{ \xi \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_\xi(t) = \xi_0 \}$

\uparrow BACINO DI ATTRAZIONE DI ξ_0

Oss: Ω_{ξ_0} è intorno (non vuoto) di ξ_0 (as. stabile $\Rightarrow \exists r > 0 : \Omega_{\xi_0} \supset B_r(\xi_0)$)

Oss: Ω_{ξ_0} è aperto

Dim (Oss₁): $\xi_1 \in \Omega_{\xi_0}$, $\varphi_{\xi_1}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_0 \Rightarrow \exists t_0 : \varphi_{\xi_1}(t_0) \in B_r(\xi_0)$ e chiamiamo $\phi(x) := \varphi_x(t_0)$
 $\hookrightarrow \varphi$ con dato x val. in t_0

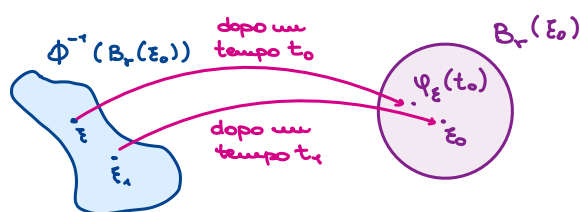
ϕ è continua (dip. continua dal dato iniziale)

$\xi_1 \in \phi^{-1}(B_r(\xi_0))$ per definizione
 \hookrightarrow aperto perché controimmagine di un aperto

Sia $\xi \in \phi^{-1}(B_r(\xi_0)) \subseteq \Omega_{\xi_0}$; osservo che $\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{\varphi_{\xi}(t_0)}(t - t_0)$
 \downarrow
 entrambe sono soluzioni di $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(t_0) = \varphi_{\xi}(t_0) \end{cases}$

Sono soluzioni di Cauchy \Rightarrow coincidono: $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\xi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\varphi_{\xi}(t_0)}(t - t_0) = \xi_0$
 $\uparrow \varphi_{\xi}(t_0) \in B_r(\xi_0)$

Graficamente:



ξ_0 è il punto di equilibrio, ξ e ξ_1 i punti iniziali

Qualsiasi punto io prenda vado a finire nella palla di centro ξ_0 , cioè "vicino" il punto d'equilibrio

Nello stesso "setting" di sopra, Ω aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\xi_0 \in \Omega$, $F(\xi_0) = 0$, (S) $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases}$

Def: $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è funzione di **LYAPUNOV** per (S) se e solo se:

- (i) $V(\xi_0) = 0$; $V(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$
 - (ii) $\dot{V}(x) (\doteq \nabla V(x) \cdot F(x)) \leq 0$
- $\left. \begin{array}{l} \text{serve a provare la stabilità di un punto d'equilibrio;} \\ \rightarrow \text{le hp sono globali, ma se mi interessa solo quello che} \\ \text{succede attorno a un pt d'eq. posso restringere la funzione} \end{array} \right\}$

Prop: Se ξ_0 equilibrio ammette una funzione di Lyapunov allora è stabile

Inoltre se ξ_0 soddisfa (ii') $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \xi_0$, allora ξ_0 è asintoticamente stabile

Oss: Nell'es. 1 (con o senza attrito) la funzione H è di Lyapunov (sempre).

Attenzione però: in questo caso non si annulla su un punto, ma su una retta, $p=0$

In questi casi si possono usare le idee della dim. della prop. ma non direttamente il risultato
 \hookrightarrow in questi casi non vale

Dim (Prop): SPG $F_0 = 0$, $R > 0$, $B_R(0) \subset \Omega$ e prendo $m = \min_{|x|=R} V(x) = V(x_0) > 0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$
 \hookrightarrow a meno di trasl. \hookrightarrow sottolivello di V

Fisso ε : $0 < \varepsilon < m$, $\exists r > 0$: $B_r(0) \subset \{x : V(x) < \varepsilon\}$. Fisso $\xi \in B_r(0) \rightarrow$ voglio vedere che non esco dalla palla

Definisco $\psi(t) := V(\varphi_{\xi}(t)) \Rightarrow \psi'(t) = \nabla V(\varphi_{\xi}(t)) \cdot \varphi'_{\xi}(t) = \nabla V \cdot F = \dot{V}(\varphi_{\xi}(t)) \leq 0$

$\Rightarrow \psi$ è debolmente decrescente, $\psi(t) < \varepsilon \quad \forall t \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \in \{x : V(x) < \varepsilon\}$

Dunque $\varphi_{\xi}(t)$ non attraversa mai $\{|x|=R\} \rightarrow$ qui la funzione vale più di $m > \varepsilon$

Abbiamo dimostrato la stabilità; vediamo ora la stabilità asintotica: ($\dot{V} < 0$)

Scelgo $\xi \in B_r(0) \subseteq \Omega$. Definisco $\Psi(t)$ come sopra: $\Psi(t) = V(\varphi_\xi(t)) \Rightarrow \Psi' < 0$ e $\Psi \geq 0$

$c_0 = \inf_{t \geq 0} \Psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t)$. Allora vedremo che:

A) c_0 non può essere > 0

B) Se $c_0 = 0 \Rightarrow \varphi_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Dim (A): Se per assurdo $c_0 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset \{V < c_0\}$

\uparrow aperto contenente l'origine

$\varphi(t) > c_0 \Rightarrow \varphi_\xi(t) \notin B_\delta(0)$. Chiamo $\sigma := \max_{\delta \leq |x| \leq r} \dot{V}(x) < 0$

\uparrow per (ii)'

$\Psi'(t) = \dot{V}(\varphi_\xi(t)) < \sigma \Rightarrow \Psi(t) \leq \Psi(0) + \sigma t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty \Rightarrow$ contraddice $\Psi(t) \geq c_0 \forall t \geq 0$ \nexists (A) \square

(B) $\forall \delta > 0 \exists c_\delta > 0 : \text{se } \delta \leq |x| \leq r \Rightarrow V(x) \geq c_\delta$

Il fatto che $\Psi(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists t_0 : \varphi_\xi(t) \in B_\delta(0) \forall t \geq t_0$ (B) \square

Prop: $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad F(\xi_0) = 0 \rightarrow \xi_0 \text{ pt. d'equilibrio}$

Se $\exists W \in C^1(\Omega)$ tale che: $(W1) \quad W(\xi_0) = 0 \text{ e } \xi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_0, W(\xi_k) > 0$
 $(W2) \quad \dot{W}(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$ \Rightarrow Allora ξ_0 è instabile

Dim: SPG $\xi_0 = 0$. Sia $R > 0$ fissato, mostro che $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi_{\xi_k}(t)$ esce da $B_R(0)$ per qualche $t > 0$

$\dot{W} > 0 \Rightarrow W(\varphi_{\xi_k}(t))$ è crescente in t

$W(0) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : W(x) < W(\xi_k) \quad \forall x \in B_\delta(0) \Rightarrow \varphi_{\xi_k}(t) \notin B_\delta(0)$ perché la $f.$ è sempre crescente

Adesso, chiamo $\sigma := \min_{\delta \leq |x| \leq R} \dot{W}(x) > 0$ e si ha $W(\varphi_{\xi_k}(t)) \geq W(\xi_k) + \sigma t$ deve crescere almeno linearmente.
 \hookrightarrow fin tanto che $\varphi_{\xi_k}(t) \in B_R(0)$

\Rightarrow non ci sta per sempre perché W ammette max su $\overline{B_R(0)}$ \square

Es: Sia $u' = Au$ (*) con $A \in M(n \times n)$, A invertibile

a) Quando 0 è equilibrio stabile?

b) Quando 0 è asintoticamente stabile?

Teo: $u' = F(u)$, $F \in C^1$, $F(\xi_0) = 0$, $DF(\xi_0) = A$, λ_i autov. di A

(1) Se $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow 0$ è equilibrio as. stabile

(2) Se $\exists i_0 : \text{Re}(\lambda_{i_0}) > 0 \Rightarrow 0$ è instabile

l'es. precedente porta a

questa conclusione

lo dimostreremo domani

Riassunto di quanto visto ieri:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

$$\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad \text{chiamo } \varphi_{\xi}(t) \text{ la sol. del sistema, } F(\xi_0) = 0 \text{ pt. d'equilibrio}$$

STABILITÀ Se $\exists V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$:

i) $V(\xi_0) = 0$; $V(x) > 0$ se $x \neq \xi_0$

ii) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x$ con $\dot{V}(x) \doteq \nabla V(x) \cdot F(x)$

Allora ξ_0 è stabile. Se inoltre vale (ii)' $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \xi_0$ allora ξ_0 è as. stabile

INSTABILITÀ Se $\exists W \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$:

i) $W(\xi_0) = 0$, $\exists \xi_k \rightarrow \xi_0$, $W(\xi_k) > 0$

ii) $\dot{W} > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$

Allora ξ_0 non è stabile

TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE \rightarrow forma più debole di Hartman-Grobman (non dim.)

$u' = F(u)$, $F(\xi_0) = 0$, $DF(\xi_0) \doteq A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori di A , allora:

1) Se $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow \xi_0$ è asintoticamente stabile

2) Se $\exists \lambda_k: \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \Rightarrow \xi_0$ non è stabile

Esempio (Toruismo al pendolo): Asintotica stabilità di $\underline{0}$ per il pendolo con attrito

$$(S_{\varepsilon}) \begin{cases} p' = -\sin q - \varepsilon p \quad \text{con } \varepsilon > 0 \\ q' = p \end{cases}$$

$V(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + (1 - \cos q)$ funzione di Lyapunov per S_{ε} se $\varepsilon > 0$

Possiamo linearizzare: $\dot{V}(p, q) = -\varepsilon p^2$

$$F(p, q) = \begin{pmatrix} -\sin q - \varepsilon p \\ p \end{pmatrix} \rightarrow DF(p, q) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -\cos q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} -\varepsilon - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon + \lambda)\lambda + 1 = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1$$

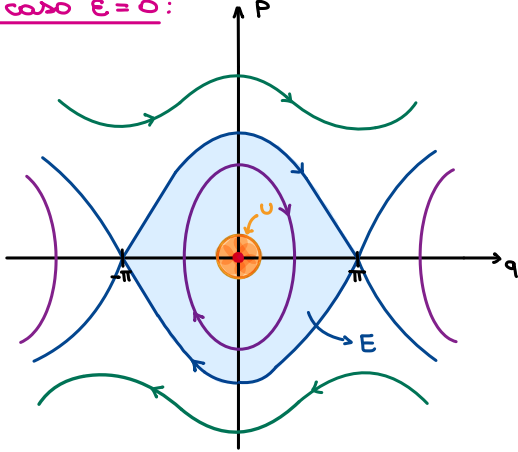
Caso $\varepsilon = 0$: $\lambda = \pm i \rightarrow$ per questo non è as. stabile

Caso $\varepsilon = 2$: $\lambda_{\pm} = -1$, $\lambda_{\pm} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$ con $\varepsilon > 0 \rightarrow$ parte reale negativa

Caso $0 < \varepsilon < 2$: $\lambda_{\pm} = \frac{-\varepsilon \pm i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2} \rightarrow$ parte reale negativa: $\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = -\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0$ è as. stabile

Caso $\varepsilon > 2$: ho un blocco reale di Jordan

Nel caso $\varepsilon = 0$:



di tipo globale

Domanda: Chi è il bacino d'attrazione di 0?

Non può succedere per Poincaré-Bendixon

Teo (P-B): K compatto invariante, cioè se

def $\xi \in K, \varphi_{\xi}(t) \in K \forall t \geq 0$, e $K \cap \{F=0\} = \{0\}$
 \hookrightarrow non cont. punti staz.

$\Rightarrow K$ contiene un'orbita periodica

Se parto dall'intorno U ci sarà un attrito e finiro nell'origine

Oss: All'interno della regione blue E non può esistere nessuna orbita periodica a parte il punto stazionario perché un'orbita periodica dovrebbe essere contenuta dove le p sono nulle

Per quanto detto quindi, $\{p=0\}$ non può contenere orbite del sistema (a parte le cost.) e un'orbita periodica non può entrare nella regione $\{p \neq 0\}$.

Dobbiamo cercare un K compatto invariante e tramite P-B un assurdo:

Prendo $\xi \in \{V(x) < V(0, \pi)\} = E$. Per renderlo compatto ne faccio la chiusura: $\overline{\{\varphi_{\xi}(t) : t \geq 0\}} = K$

la chiusura rimane invariante per la dipendenza continua dal parametro, quindi

K è compatto (chiuso e limitato) ed è invariante (per quanto detto sopra).

Considero $\xi_n = \varphi_{\xi}(t_n) \rightarrow \bar{\xi}$ con $t_n \rightarrow \infty$. Devo verificare che rimane in K .

Fisso $t > 0$ e guardo $\varphi_{\bar{\xi}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\varphi_{\xi}(t_n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\varphi_{\xi}(t + t_n)}_{\in K} \in K$

$\Rightarrow \varphi_{\bar{\xi}}(t) \in K$. Questo mostra l'invarianza

Alternativamente, ci sono due opzioni:

✓ $0 \in K \Rightarrow \varphi_{\xi}(t)$ entra in $U \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \rightarrow 0$

⊗ $0 \notin K \Rightarrow \exists$ orbita periodica in K (\Rightarrow assurdo!)

lo spazio è spezzato in tanti attrattori diversi, può accadere che i pt vadano in eq. instabili

Domanda: Posso estendere questo a tutto lo spazio? No: vale solo in U \hookrightarrow

Dim. (Teo. lin.): lo dimostrano in alcuni casi più semplici

SPG: fisso $\xi_0 = 0 \Rightarrow u' = F(u)$ dove $F(x) = A \cdot x + R(x)$ con $R(x) = O(x^2)$

[1] Suppongo che A abbia n autovalori reali \rightarrow diagonalizzo A :

$$BAB^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \doteq J \quad \text{con } \lambda_i < 0 \text{ e chiamo } x(t) \doteq Bu(t)$$

\hookrightarrow invertibile

$$u \text{ è soluzione} \Leftrightarrow x' = Bu' = BAu + BR(u) = BAB^{-1}Bu + BR(B^{-1}u) = Jx + \tilde{R}(x)$$

con $\tilde{R}(x) = BR(B^{-1}u) = O(|x|^2)$

O è stabile perché $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ è una funzione di Lyapunov per il sistema:

$$V(0) = 0; \quad V(x) > 0 \text{ se } |x| \neq 0; \quad \dot{V} < 0 \text{ in un intorno di } 0$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot x = (Jx + \tilde{R}(x)) \cdot x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \tilde{R}(x) \cdot x \leq -\mu |x|^2 + o(|x|^2)$$

con $\mu = \min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$

$$\leq |x|^2 (-\mu + o(1)) \leq -\frac{\mu}{2} |x|^2$$

\Rightarrow si ha la stab. asintotica

Traccia di come si tratta il caso di un blocco A di Jordan reale

idea: $A \rightarrow$ cambio di base \rightarrow blocco di Jordan \rightarrow ogni blocco di Jordan mi dà sol. che tendono a 0

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \text{ allora si avrà } (A - \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Posso anche avere ε al posto di 1, in questo modo:

Presa la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$, definisco $e'_j = \varepsilon^j e_j$, e quindi:

$$(A - \lambda)e'_j = \varepsilon^j (A - \lambda)e_j = \varepsilon^j e_{j-1} = \varepsilon e'_{j-1} \text{ per } j \geq 2$$

$$\text{Nella base } e'_1, \dots, e'_n \text{ il blocco di Jordan ha la forma } \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ & \lambda & \varepsilon \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Prendendo $\varepsilon < |\lambda|$ si dimostra che $\frac{1}{2}|x|^2$ è funzione di Lyapunov (verificare per es.)

[2] (instabilità) considero λ_i reali e non nulli \rightarrow per semplicità

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \lambda_k \quad 0 \quad \lambda_{k+1} \end{array} \quad \curvearrowright$$

SPG: $\xi_0 = 0$ e suppongo $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n$

Sia $x' = Ax + R(x)$ e definisco $\mu = \min\{|\lambda_k|, |\lambda_{k+1}|\}$

$\Rightarrow W(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \leq k} x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} x_i^2$ soddisfa le hp del criterio di instabilità:

i) $W(0) = 0$, $\xi_j \rightarrow 0 \Rightarrow W(\xi_j) > 0$ ok

ii) $\dot{W}(x) > 0$ in un intorno bucato di 0

$$\begin{array}{c} \lambda_i > 0 \\ \lambda_i > \mu \end{array}$$

$$\nabla W(x) \cdot (Ax + R(x)) = -\sum_{i \leq k} (-\lambda_i) x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} \lambda_i x_i^2 + o(|x|^2) \stackrel{\uparrow}{\geq} \mu |x|^2 + o(|x|^2) \geq \frac{\mu}{2} |x|^2 \text{ per un intorno di } 0$$

Esercizi per casa (dimensione di Hausdorff):

1) $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $H^1(E) = 0 \Rightarrow E$ tot. sconnesso (punti distinti stanno in comp. convesse distinte)

1bis) Vale il viceversa? (Sugg. per 1 + 1bis: pensare prima al caso $n=1$)

2) Mostrare che se ϕ è una funzione α -Hölder (cioè $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x-y|^\alpha \forall x, y$)

allora a) $H^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} H^s(E)$

b) $\dim_H(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)$

3) Dimostrare che la scala del diavolo è α_0 -Hölder con $\alpha_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$

4) Se Y è soluzione matriciale del sistema $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = I_d \end{cases}$ con $A: \mathbb{R} \rightarrow M(n \times n)$ continua e

$Y = (y_1, \dots, y_n)$ con $\begin{cases} y_i' = A(t)y_i \\ y_i(0) = e_i \end{cases}$

$Y^T Y = I_d$
↑

Mostrare che se $A(t) + A^t(t) = 0 \forall t$ (matrice antisimmetrica) allora Y è ortogonale

Esercizio: Sia $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Dire se 0 è stabile / instabile

b) Scrivere la soluzione generale

Oss: Per (a) basta conoscere gli autovalori, per (b) servono gli autovettori

Sol: a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= -2-2-\lambda - [(2+\lambda)+2] - \lambda[(2+\lambda)^2 - 4] = -4-\lambda-4-\lambda-\lambda^3-4\lambda^2 =$$
$$= -8-2\lambda-4\lambda^2-\lambda^3 = P(\lambda) \text{ polinomio caratteristico}$$

$P(\lambda) = (4+\lambda)(-2-\lambda^2) \Rightarrow$ gli autovalori sono $\{-4, \pm i\sqrt{2}\}$
↳ centro

Si ha $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$ e $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) = 0 \Rightarrow 0$ è stabile ma non asint. stabile

b) Per trovare la sol. generale, calcolo e^{tA} scrivendo $A = BNB^{-1}$ dove

N ha forma normale (reale) e B è il cambio di base (finire per casa)

la matrice BNB^{-1} sarà tipo $\begin{pmatrix} \boxed{4} & & \\ & \boxed{i\sqrt{2}} & \\ & & \boxed{-i\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
↳ rotazione

Esercizio di ieri:

Sia $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Dire se 0 è stabile / instabile

b) Scrivere la soluzione generale

Sol: a) visto

b) Dobbiamo trovare gli autovettori:

$\lambda = 4$: $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ verifica $Aw = 4w$

$\lambda = i\sqrt{2}$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $v = \xi + i\eta$ con $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Digressione: Se A è matrice reale, $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore, se $Av = \lambda v$ (con $v \neq 0$) vale anche

per il coniugato: $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

Sia $\lambda = a + ib$, $v = \xi + i\eta \Rightarrow \begin{cases} A\xi = A\operatorname{Re}(v) = \operatorname{Re}(Av) = \operatorname{Re}(\lambda v) \\ A\eta = A(\operatorname{Im}v) = \operatorname{Im}(Av) = \operatorname{Im}(\lambda v) \end{cases}$

Dunque $\lambda v = (a\xi - b\eta) + i(b\xi + a\eta) \rightarrow \begin{cases} A\xi = a\xi - b\eta \\ A\eta = b\xi + a\eta \end{cases}$

Considero $B = (w, \xi, \eta)$ $B: \begin{cases} e_1 \rightarrow w \\ e_2 \rightarrow \xi \\ e_3 \rightarrow \eta \end{cases}$

$N = B^{-1}AB = B^{-1}(Aw, A\xi, A\eta) = B^{-1}(\lambda w, a\xi - b\eta, b\xi + a\eta) = (\lambda e_1, ae_2 - be_3, be_2 + ae_3)$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A = BNB^{-1}$ e come abbiamo visto a lezione vale $e^{tA} = B e^{tN} B^{-1}$

$\lambda = 4, a = 0, b = \sqrt{2}$, quindi nel nostro caso e^{tN} è a blocchi: $e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2}t & \sin\sqrt{2}t \\ 0 & -\sin\sqrt{2}t & \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$

Per finire basta trovare B^{-1} e calcolare $e^{tA} = B e^{tN} B^{-1}$ (per esercizio)

Possiamo estendere questo ragionamento più in generale.

In generale:

Possiamo vedere che questo metodo funziona per $A \in M(n \times n)$ reale:

$A = BNB^{-1}$ con $N = \text{block}(J_1, \dots, J_e)$ con i blocchi del tipo seguente

Tabella per determinare l'esponenziale di matrice blocco per blocco:

J	e^{tJ}
I) (λ)	$e^{\lambda t}$
II) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{smallmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{perché } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{t^k N^k}{k!}$ $N^d = 0$
III) $I_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$	$e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} = R_b(t)$
IV) $\begin{pmatrix} I_{a,b} & I_{1,0} & 0 \\ 0 & I_{1,0} & I_{a,b} \\ 0 & 0 & I_{a,b} \end{pmatrix}$	$e^{at} \begin{pmatrix} R_b(t) & tR_b(t) & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} R_b(t) \\ 0 & tR_b(t) & R_b(t) \\ 0 & 0 & R_b(t) \end{pmatrix}$

Se $A \in M_{n \times n}$ e $u' = Au$, quando 0 è stabile? Quando asintoticamente stabile?

stabile	as. stabile
I) $\lambda \leq 0$	$\times \rightarrow$ solo stabile
II) $\lambda < 0$	$\checkmark \rightarrow$ anche as. stab.
III) $\text{Re}(A) \leq 0$	\times
IV) $\text{Re}(A) < 0$	\checkmark

Siano $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ gli autovalori di A

Se $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e non ci sono blocchi di Jordan con $d > 1$

quando $\text{Re}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$ l'origine è un eq. stabile

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow$ l'origine è eq. asintoticamente stabile

Perturbazioni della forma di Jordan:

Possiamo perturbare i blocchi J sostituendo l'1 con ε (come accennato ieri):

J
I) (λ)
II) $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
III) $I_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
IV) $\begin{pmatrix} I_{a,b} & \varepsilon I_{1,0} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{1,0} & I_{a,b} \\ 0 & 0 & I_{a,b} \end{pmatrix}$

Sia A matrice con autovalori $\lambda_i : \text{Re}(\lambda_i) \leq -\mu < 0 \quad \forall i$

N_ε forma normale di A con $\varepsilon < \mu$

Se ho $u' = N_\varepsilon u + R(u)$ (*) con $R(u) = o(|u|)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{2} |x|^2$ è f. di Lyapunov per 0 rispetto all'eq. (*)

in un opportuno intorno di 0, e si avrà che:

$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot (N_\varepsilon(x) + R(x)) \stackrel{\text{potenziale diag.}}{\leq} -\mu |x|^2 + \varepsilon |x|^2 + o(|x|^2)$

Es: Se Y è soluzione matriciale di $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = Id \end{cases}$ con $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M_{n \times n})$

antisimmetrica

tale che ${}^T A(t) + A(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow {}^T Y(t) Y(t) = Id$ (cioè Y è ortogonale)

Sol:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}^T Y(t) \cdot Y(t)) &= {}^T (Y'(t)) Y(t) + {}^T Y(t) Y'(t) \\ &= {}^T Y(t) {}^T A(t) Y(t) + {}^T Y(t) A(t) Y(t) \\ &= {}^T Y(t) ({}^T A(t) + A(t)) Y(t) = 0 \end{aligned}$$

Nel caso di \mathbb{R}^3 le matrici antisimmetriche sono generate da:

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sono i gen. delle rotazioni attorno ai 3 assi, oltre ad essere i gen. delle mat. antisimmetriche

Es: $\begin{cases} x' + 2y = \cos t \\ y' - 2x = \sin t \end{cases} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} u' = Au + b(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Se $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} u_0$

Per il metodo di variazione delle costanti, si ha:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds + e^{tA} u_0 \quad u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ e^{tA} &= \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \quad e^{-sA} b(s) = \begin{pmatrix} \cos 2s & -\sin 2s \\ -\sin 2s & \cos 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2s \cdot \cos s + \sin 2s \cdot \sin s \\ -\sin 2s \cdot \cos s + \cos 2s \cdot \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-sA} b(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{sol gen. del sist. dato}$$

Es: 1) $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $H^1(E) = 0 \Rightarrow E$ tot. sconnesso (punti distinti stanno in comp. convesse distinte)

1bis) Vale il viceversa?

caso $n=1:1$) Se una componente convessa contiene $P_0 < P_1$ con $P_0 \neq P_1 \Rightarrow E \supset [P_0, P_1] \Rightarrow H^1(E) = 1$

1bis) Non vale il viceversa: basta prendere il complen. dell'ingrossamento di \mathbb{Q} di $[0, 1]$

caso $n > 1$: Si possono fare due cose: o proiettare, o guardare la funzione distanza

1) Siano $p_0 \neq p_1 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$

Chiamo $\phi(x) = d(x, p_0)$ e noto $\phi(p_0) = 0$, $\phi(p_1) > 0$

ϕ è 1-lip. $\Rightarrow \mathcal{H}^1(\phi(E)) \leq \mathcal{H}^1(E) = 0$

$\phi(E)$ tot scosso $\Rightarrow \xi \in (0, \phi(p_1)) \setminus \phi(E)$

$$E = \{x \in E : d(x, p_0) < \xi\} \cup \{x \in E : d(x, p_0) > \xi\}$$

ψ
 p_0

$$\uparrow$$

$$E \cap \{x : d(x, p_0) = \xi\} = \emptyset$$

ψ
 p_1

p_0, p_1 arbitrari appartenono a comp. convesse diverse \Rightarrow tot. scosse \rightarrow pt \neq stanno in comp. convesse \neq

1 bis) No, non vale

Es: ϕ tale che $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$

a) $\mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E)$

b) $\dim_{\mathcal{H}}(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(E) \rightarrow \frac{1}{\alpha} S_0$
 $\hookrightarrow S_1$

Dim: Se E_i è un ricoprimento di E con insiemi di diam minore di δ , cioè:

$$E \subseteq \bigcup E_i, \text{diam}(E_i) < \delta \Rightarrow \phi(E) \subseteq \bigcup \phi(E_i) \text{ e } \text{diam}(\phi(E_i)) \leq C \text{diam}(E_i)^\alpha$$

$$\Rightarrow \sum_i \text{diam}(\phi(E_i))^{s/\alpha} \leq C^{s/\alpha} \sum_i \text{diam}(E_i)^s$$

Oss: $\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \{ \sum |E_i|^s : \bigcup E_i \supseteq E, \text{diam}(E_i) < \delta \}$ e $\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$

Se prendo $\varepsilon > 0$ arbitrario e scelgo $E_i : |E_i| < \delta, \bigcup E_i \supseteq E, \sum |E_i|^s < \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon$

$$\mathcal{H}_{C\delta^\alpha}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq \sum |\phi(E_i)|^{s/\alpha} < C^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon$$

$\alpha \delta \downarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E) + \varepsilon$

$$|\phi(E_i)| < \delta^{s/\alpha}, \bigcup \phi(E_i) \supseteq \phi(E)$$

b) Sia $S_0 := \dim_{\mathcal{H}}(E)$ e $S_1 = \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E))$

Se $\underline{S} > S_0 \Rightarrow \mathcal{H}^{\underline{S}}(E) = 0 \xrightarrow{a)} \mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) = 0 \Rightarrow s/\alpha \geq \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E)) \Rightarrow S_0 \geq \alpha S_1$

Quindi $S \geq \alpha \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E))$ e quindi $S_0 \geq \alpha \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E))$