APPUNTI DEL CORSO DI

ANALISI MATEMATICA II

A cura di Chiara Di Sano
c.disano1@studenti.unipi.it

Con il contributo di Alessandra Cattafi e Arianna Misuraca

PRIMO SEMESTRE

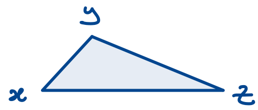
Rielaborazione delle lezioni dei prof.
M. Novaga
C. Carminati
A.A. 2022-2023

RIPASSO DI ANALISI 1

SPAZI METRICI:

(X, d) è uno spazio metrico se X è un insieme e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ è una distanza, cioè:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y$ simmetria
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad \forall x, y, z$



disuguaglianza triangolare

Oss: $Y \subseteq X \Rightarrow (Y, d|_Y)$ è uno sp. metrico

Es: $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ $\quad d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ distanza euclidea

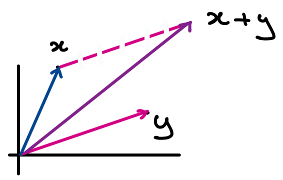
Una classe importante di spazi metrici sono gli spazi normati:

$(E, \|\cdot\|)$, E sp. vettoriale (su $\mathbb{R}$), $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty)$ è una norma su E

$(E, d_{\|\cdot\|})$ è uno spazio metrico, $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x, y$

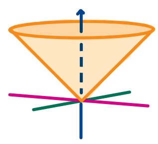
$\|\cdot\|$ è una norma su E se

- $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall x$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "disuguaglianza triangolare"



Es: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ $\quad \underbrace{p \geq 1}_{\text{se è } <1 \text{ non è più una norma}}$, $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$ $\quad p=2$: norma euclidea

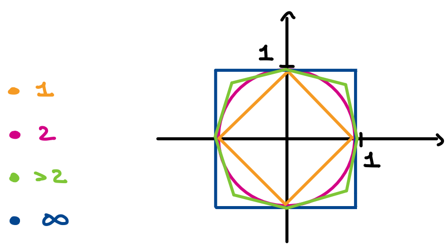
$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$



$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oss: Il grafico di una norma è un cono.

La subadditività della norma è equivalente a chiedere la convessità della funzione conica



Es: $E = C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, \text{ continua} \}$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} & p \geq 1 \\ \max_{x \in [a,b]} |f(x)| & p = +\infty \end{cases}$$

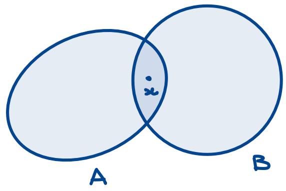
TOPOLOGIA (X, d) sp. metrico, $\mathcal{B}_r(x) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$ $(r > 0)$

$A \subseteq X$ è aperto se $\forall x \in A \ \exists r$ tc $\mathcal{B}_r(x) \subseteq A$

$C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C$ è aperto

Una topologia su X è $\mathcal{A} = \{ A \subseteq X : A \text{ aperto} \}$

PROPRIETÀ



- $\emptyset$, X sono aperti e chiusi
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ — intersezione finita di aperti
- $\{A_i\}_{i \in I}$, A_i aperti $\Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$ — unione infinita di aperti

$\Big\}\in \mathcal{A}$

- C, B chiusi $\Rightarrow C \cup B$ chiuso — unione finita di chiusi
- C_i chiuso $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_i C_i$ chiuso — intersezione infinita di chiusi

$\Big\}$ sono chiusi

Oss: A_i aperti $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ è aperta ma in generale $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ non è aperta

Es: $\bigcap_n B_{1+\frac{1}{n}}(0) = \overline{B_1(0)} = \{ x \text{ tc } d(x,0) \leq 1 \}$

Def: $x \in X$, $U \subseteq X$ è un intorno di x se esiste A aperto tc $x \in A \subseteq U$, equivalentemente se $\exists r > 0$ tc $B_r(x) \subseteq U$

SUCCESSIONI CONVERGENTI

$\{x_n\}_n$ succ. in X, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ o $\lim_n x_n = x$ se

- $\lim_n d(x, x_n) = 0$

o equiv.

- $\forall U$ intorno di x $\exists n_0$ tc $x_n \in U$ $\forall n > n_0$

o equiv.

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ tc $x_n \in B_\varepsilon(x)$ $\forall n > n_\varepsilon$

Prop: C chiuso $\Leftrightarrow \forall x_n \in C$ con $x_n \to x \in X$ si ha $x \in C$

Dim: $(\Rightarrow)$ Per assurdo $x \in A = X \setminus C$ aperto $\Rightarrow \exists r > 0$ tc $B_r(x) \subseteq A$ ma $x_n \in B_r(x)$ defin. in $n \Rightarrow x_n \notin C$ definitivamente in n. Assurdo

$(\Leftarrow)$ Per assurdo supponiamo che $A = X \setminus C$ non è aperto $\Rightarrow \exists x \in A$ tale che $\forall r > 0$ $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$, scelgo $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C$ è una succ. tc $x_n \to x$ per $n \to +\infty \Rightarrow x \in C$ ↯

INSIEMI COMPATTI

Def: $C \subseteq X$ è compatto (per successioni) se $\forall\, x_n \in C$ succ. $\exists\, x_{n_k}$ sottosucc. ed $\exists\, x \in C$ tc $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x$

Def: $C \subseteq X$ è limitato se $C \subseteq B_r(x)$ per qualche r e x

Prop: C compatto $\Rightarrow$ C chiuso e limitato

Dim: ① Chiuso: $x_n \in C$, $x_n \to x \in X$. $\exists\, n_k$ tc $x_{n_k} \to y \in C$, ma $y = x \Rightarrow x \in C$

per compattezza

② Limitato: Se C non fosse limitato $\Rightarrow \forall n\ \exists\, x_n \in C \setminus B_n(x)$. $\exists\, n_k$ tc $x_{n_k} \to y \in C$

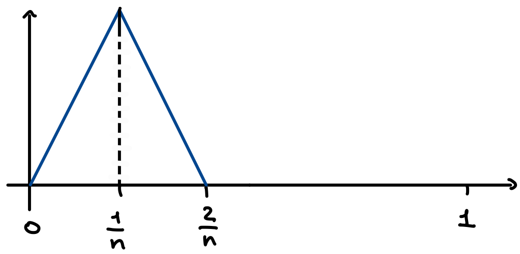
$$\boxed{+\infty} \xleftarrow[k]{} d(x_{n_k}, x) \leq d(x,y) + d(x_{n_k}, y) \xrightarrow[k]{} \boxed{d(x,y) \in \mathbb{R}} \quad \text{Assurdo}$$

Oss: Non vale il viceversa: esistono chiusi e limitati che non sono compatti $(X \neq \mathbb{R}^n)$

$C = \overline{B_1(0)}$ in uno sp. normato di dim. ∞. $X = C([0,1])$, $\|f\| = \max_x |f(x)|$

$\overline{B_1} = \{ f : [0,1] \longrightarrow [-1,1] \text{ continue} \}$

$$\partial B_1 \ni f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$



$f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall x \in [0,1]$ ma $\|f_n - 0\| = 1 \ \forall n \quad f_n \not\to 0$ in (X, d)

$\overline{B_1}$ e ∂B_1 sono chiusi e limitati ma non compatti

Prop: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato è compatto

Dim: Segue dal Teo di Bolzano - Weirstrass in $\mathbb{R}^n$:

x_n è limitata $\Rightarrow \exists\, x_{n_k}$ conv. in $\mathbb{R}^n$. Se x_n sta in C chiuso $\Rightarrow \lim_k x_{n_k} \in C$

COMPLETEZZA

Def: x_n succ. in X è di Cauchy se $\forall \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon$ tc $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$

Def: (X, d) si dice **completo** se $\forall\, x_n$ succ. di Cauchy $\exists\, x \in X$ tc $x_n \xrightarrow[n]{} x$

Es: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è completo (perché $\mathbb{R}$ è completo $\Rightarrow$ tutte le componenti delle succ. di Cauchy convergono)

$(\mathbb{Q}^n, \|\cdot\|)$ non è completo

Def: $(X, \|\cdot\|)$ sp. normato completo si dice **spazio di Banach**

Es: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ con $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma, è sempre completo

Tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti a $|\cdot|$, cioè $\exists\, m < M : m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \ \forall x$,
↳ DA DIM.

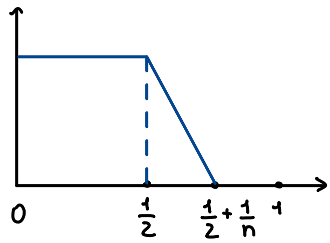
Quindi x_n di Cauchy per $\|x\| \Leftrightarrow$ lo è per $|\cdot|$.

Es: $X = C([a,b])$

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach (per esercizio)

$(X, \|\cdot\|_p)$ non è completo

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{n}{2} - nx & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$



f_n è di Cauchy ma $f_n \to \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > 0 \end{cases} \notin X$

Prop: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $p \geq 1$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ sono norme su $\mathbb{R}^n$

Dim: $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0 \ \forall i \Leftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_i |\lambda x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p$

Va visto che $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. (dis. di Minkowski)

$p = \infty$: $\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$p \in [1, +\infty)$ usiamo il :

Lemma (disuguaglianza di Hölder):

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Disuguaglianza di Young: $a, b \geq 0$, $a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Dim (Hölder): Mostriamo che $\sum |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ (*)

Dividendo per $\|x\|_p \cdot \|y\|_q$: $\sum_i \underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|_p}}_{a} \cdot \underbrace{\frac{|y_i|}{\|y\|_q}}_{b} \underset{\text{YOUNG}}{\leq} \frac{1}{p} \frac{\sum |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$ (*)

$= 1$ " $\sum |x_i|^p$ $= 1$ " $\sum |y_i|^q$ $\square$

Torniamo alla prop:

Consideriamo $\|x+y\|_p^p = \sum_i |x_i + y_i|^p = \sum_i |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}}$$

disuguaglianza triangolare $\rightarrow \leq \sum_i (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$

$\underset{\text{HÖLDER}}{\leq} (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_i |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \rightarrow \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$

$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p-1} \Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

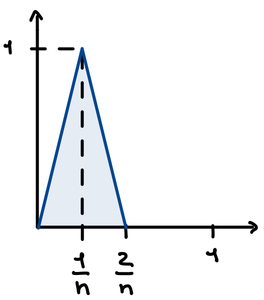
f continue su $[a,b]$

Prop: $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach, cioè f_n di Cauchy $\Rightarrow \exists f \in C([a,b])$

↳ normato + completo

tale che $\|f_n - f\| \to 0$ [si dice che f_n converge uniformemente a f]

Oss: La convergenza uniforme è più restrittiva della convergenza puntuale



$f_n(x) \to 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\|f_n\|_\infty = 1$

Dim: f_n di Cauchy in $C([a,b])$, cioè $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$, $\forall n, m > n_\varepsilon$

$\forall x \in [a,b]$, $f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_n f_n(x) = f(x)$ converge ($\mathbb{R}$ compl.)

$\lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b], \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$

Dobbiamo verificare che $f \in C([a,b])$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $n > n_\varepsilon$.

Dato che f_n è unif. continua, $\exists\, \delta$ tc $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ se $|x-y| < \delta$.

$|f(x)-f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \le 3\varepsilon$ se $|x-y| < \delta$

$\Rightarrow f$ è unif. continua

FUNZIONI CONTINUE

Def: (X, d), $(Y, \tilde{d})$ sp metrici, $f: X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0)$ equiv. se $\forall V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists\, U$ int. di x_0 tc $f(x_0) \in U$

TEOREMI:

(X, d) sp. metrico compatto, $f: X \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

1) f è unif. continua (HEINE-CANTOR)

2) f ammette max e min (WEIERSTRASS)

Prop: (X,d) sp. metrico $\Rightarrow d(x,y)$ è continua in x e in y.

Infatti se $x_n \to x$: $0 \xleftarrow{n} -d(x_n, x) \le d(x,y) - d(x_n, y) \le d(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$

Prop: $\|\cdot\|$ norma su $\mathbb{R}^n \Rightarrow \|\cdot\|$ è equival. a $|\cdot|$ (NORMA EUCLIDEA),

cioè $\exists\, m, M > 0$ tc $m|x| \le \|x\| \le M|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Dim: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ $\quad m = \min_{x \in S^{n-1}} \|x\| \quad M = \max_{x \in S^{n-1}} \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \Rightarrow m \le \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \le M \Rightarrow m|x| \le \|x\| \le M|x|$

Oss: In particolare tutti gli spazi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ hanno la stessa topologia e sono tutti completi, cioè spazi di Banach

Def: $f: X \to Y$ è L-Lipschtziana $(L \ge 0)$ se $d_Y(f(x), f(y)) \le L\, d_X(x,y)$ $\forall x, y \in X$

Oss: f Lip $\Rightarrow f$ è unif. continua

CONTRAZIONI: $f: X \to X$ L-Lip. con $L < 1$ si chiama contrazione

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI (BANACH-CACCIOPPOLI)

(X,d) sp. metrico completo, $f: X \to X$ contrazione $\Rightarrow \exists!\, \bar{x} \in X$ tc $f(\bar{x}) = \bar{x}$ pt. fisso di f

Inoltre $\forall x_0 \in X$ la succ. $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a $\bar{x}$

Come sono fatti i compatti in $C([a,b])$?

Teo (ASCOLI – ARZELÀ):

$(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, sia $f_n \in C(K)$ successione (di f. continue) tc

① $\exists M>0 : \|f_n\|_\infty \le M \quad \forall n$ → equiv. ⇔ tutti i suoi elementi hanno medesimo MdC

② f_n equicontinue, cioè $\forall \varepsilon \ \exists \delta$ tale che $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon \ \forall |x-y|<\delta$, $\forall n$

Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} convergente uniformemente

Dim: Prendiamo una succ $x_i \in K$ densa in K, cioè $\forall \varepsilon$ e $\forall x \in K$, $\exists x_i \in B_\varepsilon(x) \cap K$

$f_n(x_i)$ è una succ. limitata in $\mathbb{R}$. Per BW $\exists$ sottosuc. $f_{n_k^{(1)}}$ tc $f_{n_k^{(1)}}(x_1) \xrightarrow[k]{} y_1 \in \mathbb{R}$

$\exists$ sottosucc. $f_{n_k^{(2)}}$ tc $f_{n_k^{(2)}}(x_1) \to y_1$, $f_{n_k^{(2)}}(x_2) \to y_2$

Per procedimento diagonale la sottosucc. $f_{n_k^{(k)}}(x_i) \longrightarrow y_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$

Chiamo $f_k = f_{n_k^{(k)}}$. Mostriamo che f_k è di Cauchy. Fissiamo $\varepsilon>0$ e sia $\delta>0$ dato da ② e

sia $x_1 \dots x_n$ un sottoinsieme dell'insieme denso tc $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\delta(x_i)$, questo si può fare perché

K è compatto e $K \subseteq \bigcup_{i}^{\infty} B_\delta(x_i)$.

Vogliamo mostrare che $\exists K_\varepsilon$ tc $|f_k(x)-f_j(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in K$, $\forall k,j > K_\varepsilon$

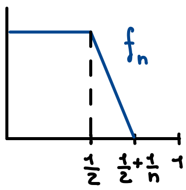
Scelgo K_ε tc $|f_k(x_i)-f_j(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1,\dots,N\} \quad \forall k,j > K_\varepsilon$

Per $x \in K \ \exists x_{\bar{i}}$ tc $|x-x_{\bar{i}}|<\delta$, quindi:

$$|f_k(x)-f_j(x)| \le |f_k(x)-f_k(x_{\bar{i}})| + |f_k(x_{\bar{i}})-f_j(x_{\bar{i}})| + |f_j(x_{\bar{i}})-f_j(x)| \overset{②}{\le} 3\varepsilon \qquad \forall k,j > K_\varepsilon$$

$\Rightarrow f_k$ converge in $C(K)$.

Oss: f_k equilineare non basta



Oss: f_k equilineare e equilipshitziana basta cioè $|f_k(x)-f_k(y)| \le L|x-y|$

Si possono caratterizzare i compatti di $C(K)$:

Teorema: $E \subseteq C(K)$ chiuso

E compatto ⇔ tutte le funzioni $f \in E$ sono equilineari ed equicontinue

Ricevimento studenti: mercoledì ore 16

Norme p in $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq p \leq \infty \Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ se } p < +\infty$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Oss: $x \in \mathbb{R}^n$ finito, $p \longmapsto \|x\|_p$ è deb. decrescente, in particolare $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

Dim: Mostro che se $\|x\|_p = 1$ e $p' > p$ allora $\|x\|_{p'} \leq 1$

$$\|x\|_{p'} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p'}\right)^{1/p'} = \left(\sum_{i=1}^n \left(|x_i|^p\right)^{p'/p}\right)^{1/p'} \underset{*}{\leq} \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p'} \leq 1$$

Quando è un <? Vale l'= $\Leftrightarrow$ ho un'unica componente non nulla ($\Rightarrow$ su $\mathbb{R}$)

(*) $\|x\|_p \leq 1 \Rightarrow \sum |x_i|^p \leq 1 \Rightarrow p'/p > 1$

Prop: $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

norma euclidea

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

Dim: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum x_i \cdot \operatorname{sgn} x_i = x \cdot \xi \qquad \xi = \operatorname{sgn}(x_i)$$

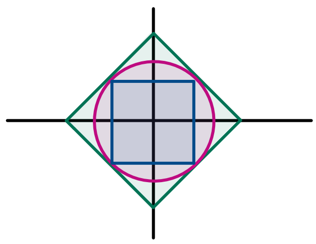
$$x \cdot \xi \leq \|x\|_2 \cdot \|\xi\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

Cauchy-Schwartz $\Leftrightarrow$ Hölder con $p = q = 2$

Queste disuguaglianze hanno effetto su come sono messe le palle

$$B_p(x_0, r) \doteq \{ x : \|x - x_0\|_p < r \}$$

Graficamente:



$$B_1(x_0, r) \subset B_p(x_0, r) \subset B_\infty(x_0, r)$$

$$B_\infty(x_0, r/\sqrt{n}) \subset B_2(x_0, r) \subset B_1(x_0, \sqrt{n}\, r)$$

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_i)_{i=1}^\infty : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < +\infty \right\} \text{ spazio di successioni}$$

$$\|x\|_p \doteq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad (\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p) \text{ è spazio NORMATO e di BANACH}$$

Oss: Cambiando p cambia anche lo spazio

es: $X = (x_i)_{i=1}^\infty \quad x_i = \frac{1}{i} \quad x \in \ell^p(\mathbb{N}) \Leftrightarrow p > 1$

Es: Dati $p < p'$ trovare un elemento che sta in $\ell^{p'}$ ma non in ℓ^p.

• $\|\cdot\|_p$ è una norma. Verifico solo la dis. triangolare: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

Considero $\pi_n : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

$\|\pi_n(x+y)\|_p \leq \|\pi_n x\|_p + \|\pi_n y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, passando al sup su $n \Rightarrow$ tesi

• $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ succ. in ℓ^p

Se $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy per $\|\cdot\|_p$ allora converge per $\|\cdot\|_p$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n,m > N$, $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ per ogni componente j $(x_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, $x_j^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}_j$

Devo verificare $\left(\sum |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \; n,m > N \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|\right)^{1/p} < \varepsilon$; continua a valere anche per K fissato

anziché ∞ $\underset{\text{passando al limite}}{\Rightarrow} \left(\sum_{i=1}^{K} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|\right)^{1/p} \leq \varepsilon \underset{\text{passando al sup su K}}{\Rightarrow} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|\right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Oss: $p \longmapsto \|x\|_p$ è deb. decrescente, $x \in \ell^p(\mathbb{N}) \Rightarrow x \in \ell^{p'}(\mathbb{N}) \quad \forall p' \geq p$

$\ell^p(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell^{p'}(\mathbb{N})$ è un'applicazione continua

dotato di $\|\cdot\|_p$; $\|\cdot\|_{p'}$

Es: 1) Mostrare che $\ell^1(\mathbb{N})$ come sottospazio è denso in ogni $\ell^p(\mathbb{N})$ con $\|\cdot\|_p$

2) $\ell^1(\mathbb{N})$ non è denso in $\ell^\infty(\mathbb{N})$

3) Chi è la chiusura di $\ell^1(\mathbb{N})$ in $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

Distanza da un insieme

$(X, d) \qquad f : X \to \mathbb{R}$

f è L-Lip $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |f(x) - f(y)| \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X \quad$ *

Oss 1: f è L-lip $\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$ **

$(\Rightarrow)$ ovvio dalla def.

$(\Leftarrow)$ se (**) vale $\forall x,y$ allora $f(y) \leq f(x) + L\, d(y,x)$ (***)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(y) \leq L\, d(x,y) \text{ per } (**) \\ f(y) - f(x) \leq L\, d(x,y) \text{ per } (***) \end{array}\right\} \Rightarrow (*)$$

Lemma: $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathcal{A}$, f_α L-lip. $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ con la stessa L!

Definisco $f(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x)$. Se $\exists x_0 \in X \cdot f(x_0) > -\infty \Rightarrow f : X \to \mathbb{R}$ è L-lip.

- $(-\infty <)\ f(x_0) \leq f_\alpha(x_0) \leq f_\alpha(y) + L d(x_0, y)$

$$f(x_0) - L d(x_0, y) \leq f_\alpha(y) \xrightarrow{\inf_\alpha} f(x_0) - L d(x_0, y) \leq f(y) \quad \forall \alpha, \forall x, y$$

f assume solo valori finiti.

$$f(x) \leq f_\alpha(x) \leq f_\alpha(y) + L d(x, y)$$

Passando all'inf su α: $f(x) \leq f(y) + L d(x, y) \quad \forall x, y \in X \overset{\text{oss}}{\Rightarrow} f$ è L-Lip. $\square$

- (X, d) sp. metrico $A \subseteq X$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ $\boxed{x \mapsto d(x, A) \text{ è } 1\text{-Lip}}$
  $\hookrightarrow \neq \emptyset$

Dim: $f_a(x) = d(x, a)$ $\qquad f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} f_a(x)$

$f_a(x) \geq 0$

f_a è 1-Lip infatti

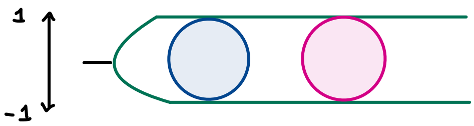
$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \rightsquigarrow d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$$

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \rightsquigarrow d(y, a) - d(x, a) \leq d(x, y)$$

$$\Rightarrow |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) \overset{\text{LEMMA}}{\Longrightarrow} f \text{ è } 1\text{-lip.}$$

Oss: $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$ (chiusura di A)

Es: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato mostrare che Ω contiene una palla (euclidea) di raggio massimo. **Oss:** La limitatezza è necessaria



$\varphi(x) := d(x, \Omega^c) \qquad \varphi(x) > 0 \iff x \in \Omega$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ considero $r_0 \doteq \max_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x)$

$\bar{\Omega}$ è chiuso, limitato $\subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ è compatto, φ è continua

1) $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$

2) $\forall r > r_0 \quad \forall y_0 \quad B_r(y_0) \cap \Omega^c \neq \emptyset$

1) $x \in \Omega^c \Rightarrow d(x_0, x) \geq d(x_0, \Omega^c) = r_0$, quindi se

$d(x_0, x) < d_0 \Rightarrow x \notin \Omega^c$ cioè $x \in \Omega$, $B(x_0, r_0)$ ovvero $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$

2) Se $B_r(y_0) \subset \Omega$ con $r > r_0 \Rightarrow d(y_0, \Omega^c) \geq r > r_0$, assurdo

LIMITI E FUNZIONI CONTINUE IN $\mathbb{R}^n$

Prop: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $x_0 \in A$

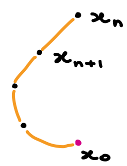
f è continua in $x_0 \iff f \circ \gamma(t): [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua in $t=0$ per ogni curva (continua) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma(0) = x_0$.

Dim: ($\Rightarrow$) f continua $\Rightarrow f \circ \gamma$ continua $\forall \gamma$ (comp. di f. continue)

($\Leftarrow$) Se f non è continua, $\exists x_n \to x_0$ tc $f(x_n) \not\to f(x_0)$ ($\nexists$ lim o è $\neq x_0$)

$\exists \gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curva tc $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(t_n) = x_n$ con $t_n \searrow 0$

$f \circ \gamma(t_n) \overset{hp.}{=} f(x_n) \not\to f(x_0) = f \circ \gamma(0) \Rightarrow f \circ \gamma$ non è continua $\lightning$



Oss: Per vedere che f non è continua "basta" trovare γ tc $f \circ \gamma$ non è continua

Tipicamente prendo le rette: $\gamma(t) = t \cdot v$, $f \circ \gamma(t) = f(t \cdot v)$

Es: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Mi chiedo: $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$?

$f(0,y) = f(x,0) = 0 \quad \forall x, \forall y$

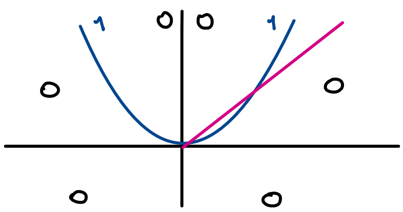
Prendo $\gamma(t) = (t,t)$, allora $f \circ \gamma(t) = \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2} \ \forall t \Rightarrow 0 = f \circ \gamma(0) \neq \lim\limits_{t \to 0} f \circ \gamma = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists$ limite perché non c'è unicità del limite, il quale deve essere $f(x_0)$ in tutta la curva.

Quindi la funzione non è continua.

Oss: $\lim\limits_{t} f(tv) = f(0) \quad \forall v \neq 0 \quad \not\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$
tutte le semirette

Es: 1) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad \underline{\forall v} \ \underline{f(tv) = 0}, \ \underline{t \ll 1}$



2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ sugli assi fa 0, per essere continua deve fare 0

Se la prendo sulla parabola $f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2} \quad \forall x \neq 0$ non ha limite 0 $\Rightarrow f$ non è cont.

Però se la guardo sulla retta $f(x, \lambda x)$ (metto λx al posto di y)

$f(x,\lambda x) = \dfrac{\lambda x^3}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \dfrac{x}{\lambda} + o(x) \longrightarrow 0 \quad$ per $x \to 0$

Come faccio a vedere che f è continua?

Si può cercare $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, $g(0)=0$, $g \geq 0$ (ad es. lineare) tc $|f(x)-f(x_0)| \leq g(|x-x_0|) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ ($x \to 0 \Rightarrow |x|=0$)

Esempi: • $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2+y^2}$ $\alpha, \beta > 0$. Per quali α, β $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$?

Cerchiamo g tc $f(x,y) \leq g(\sqrt{x^2+y^2})$, $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,y) \leq \sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha+\beta-2}$

$\alpha+\beta > 2 \Rightarrow f$ è continua. D'altro canto $f(x,x) = |x|^{\alpha+\beta-2} \not\to 0$ se $\alpha+\beta \leq 2$

• $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{|x|^\alpha + |y|^\beta} & (x,y) \neq (0,0) \quad \alpha,\beta>0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$\Phi(x,y) = (X(x,y), Y(x,y))$ $\quad \Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cont., $\Phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cont. (Φ omeomorfismo)

$\begin{cases} X = \text{sgn}(x)|x|^{\alpha/2} \\ Y = \text{sgn}(y)|y|^{\beta/2} \end{cases}$

f continua in $(0,0) \Leftrightarrow f \circ \Phi^{-1}(X,Y)$ è continua in $(0,0)$

$f \circ \Phi^{-1}(X,Y) = \dfrac{|X|^{2/\alpha} \cdot |Y|^{2/\beta}}{X^2+Y^2} \xrightarrow[(X,Y)\to(0,0)]{} 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta} > 2$, $\alpha+\beta-\alpha\beta > 0$

CALCOLO DIFFERENZIALE:

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $x_0 \in A$

La derivata parziale i^a è la derivata di f nella variabile x_i, cioè è il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t} = f_{x_i}(x_0), \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \ D_{x_i}f(x_0)$$

Se $\exists$ tutte le derivate parziali il vettore $\nabla f(x_0) = \left(\dots \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \dots\right) \in \mathbb{R}^n$ si dice gradiente di f in x_0

Dato $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, il limite $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = D_v f(x_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ si dice derivata direzionale di f lungo v.

Prop (FERMAT): Se x_0 è di max/min locale per $f \Rightarrow t=0$ è max/min locale per $f(x_0+tv)$ $\forall v$

$\Rightarrow$ se $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ esiste, si ha $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$ in particolare $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ (se esiste)

Def: f è differenziabile in $x_0 \in A$ se $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tc $f(x) = f(x_0) + v\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)$

Oss: Stiamo dicendo che $f(x)$ è approssimata, a meno di un $o(|x-x_0|)$ dall'applicazione affine $x \to f(x_0) + v\cdot(x-x_0)$.

Prop: f differenziabile in $x_0 \Rightarrow \exists \nabla f(x_0)$ e si ha $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$

Dim: Sappiamo che $f(x) = f(x_0) + v(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ fissiamo i e prendiamo $x = x_0 + te_i$

$$\frac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t} = \cancel{t} v_i + o(\cancel{t}^{1}) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Oss: lo stesso conto con $x = x_0 + tw$ ci dà che $\frac{\partial f}{\partial w} = \nabla f(x_0) \cdot w$

In particolare il massimo: $\max\limits_{w:|w|=1} \frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = |\nabla f(x_0)|$ ed è assunto nella direzione

$w = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ cioè $\nabla f(x_0)$ individua la direzione di "massima pendenza" di f.

Teo (DIFF. TOTALE): $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, suppongo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $\forall i$ e $\forall x \in B_r(x_0)$ e che

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sia continua in x_0 $\forall i$ $\Rightarrow$ f è differenziabile in x_0

Dim: $(n=2)$ $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) =$

$$\underset{\text{LAGRANGE}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + o(1)\right](x-x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(1)\right](y-y_0) \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0)$$

$$= \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

Quindi f è differenziabile in (x_0, y_0).

Oss: le stesse ~~definizioni~~ valgono per $f: A \to \mathbb{R}^m$ $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i: A \to \mathbb{R}$

f continua in x_0 $\Leftrightarrow$ f_i continua in x_0 $\forall i$

f differenziabile in x_0 $\Leftrightarrow$ f_i differenziabile in x_0 $\forall i$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Dove $Df(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$ si dice matrice Jacobiana di f in x_0.

Oss: la def. è analoga in spazi di Banach:

$f: B_1 \to B_2$ $\quad B_i$ spazi di Banach

f è differenziabile in x_0 se $\exists L: B_1 \to B_2$ lineare e continua (!) tale che

$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$

Distanza di Hausdorff

(X,d) spazio metrico, $A,B\subset X$ non vuoti e limitati

$\partial(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A)\}$ distanza tra A e B (se sono chiusi)

$\partial(A,B) = \partial(A,\bar{B}) = \partial(\bar{A},B) = \partial(\bar{A},\bar{B})$

$\mathcal{F}(X) = \{A\subseteq X : A \text{ chiuso, limitato, } A\neq\emptyset\}$ → è definita solo qui

↳ $\sup\emptyset = -\infty$

Prop: $(\mathcal{F}(X),\partial)$ è uno sp metrico (cioè ∂ è una distanza)

Dim: (1a) $\partial\geq 0$ (segue dalla def.)

(1b) $\partial(A,B)=0 \iff A=B$ $(\Leftarrow)$ ovvia

$(\Rightarrow)$ $\partial(A,B)=0 \Rightarrow \boxed{\sup_{x\in A} d(x,B)=0}$ e $\boxed{\sup_{x\in B} d(x,A)=0}$,

- $x\in A \Rightarrow d(x,B)=0 \Rightarrow x\in\bar{B}=B \Rightarrow A\subseteq B=\bar{B}$
- analogamente $B\subseteq A \Rightarrow B=A$

(2) $\partial(A,B)=\partial(B,A)$ ovvio perché ∂ è simmetrica

(3) $\partial(A,C)\leq\partial(A,B)+\partial(B,C)+\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$

$$\begin{cases} \sup_{x\in A} d(x,C)\leq\partial(A,B)+\partial(B,C)+\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0 \quad (*) \\ \sup_{x\in C} d(x,A)\leq\partial(A,B)+\partial(B,C)+\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0 \end{cases}$$

Dimostriamo (*) l'altra è analoga (basta scambiare A con C). $\varepsilon>0$ fissato.

$x\in A$ $\exists b\in B$: $d(x,b)< d(x,B)+\varepsilon/2\leq\partial(A,B)+\varepsilon/2$

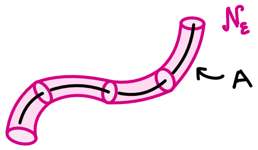
$\exists c\in C$: $d(b,c)\leq\partial(B,C)+\varepsilon/2$ come sopra

$\boxed{d(x,C)}\leq d(x,c)\leq d(x,b)+d(b,c)\leq\boxed{\partial(A,B)+\partial(B,C)+\varepsilon}$

vale $\forall x\in A$ e quindi passa anche al sup

Def: $A\subset X$, $N_\varepsilon(A) \doteq \{x\in X : d(x,A)<\varepsilon\} = \bigcup_{x\in A} B_\varepsilon(x)$ è detto intorno tubolare di A

Esempio:



se A è un "filo", $N_\varepsilon(A)$ è un tubo

Proprietà: (0) $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ è aperto

(1) $\mathcal{N}_\varepsilon(A\cup B) = \mathcal{N}_\varepsilon(A)\cup \mathcal{N}_\varepsilon(B)$

(2) $\overline{\mathcal{N}_\varepsilon(A)} \subset \underbrace{\{x\in X : d(x,A)\le \varepsilon\}}$ $\subsetneq$ non è detto siano $=$

è chiuso $\Rightarrow$ è il più piccolo chiuso che contiene $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$

(3) $\mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\mathcal{N}_{\varepsilon_2}(A)) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ $\subsetneq$ non è detto siano $=$

Prop: $\partial(A,B) = \inf\{\varepsilon>0 \,.\, A\subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \text{ e } B\subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A)\}$

Dim: $\partial(A,B) = \max\left\{\boxed{\sup_{x\in A} d(x,B)}, \boxed{\sup_{x\in B} d(x,A)}\right\} =$

$= \max\left\{\boxed{\inf\{\varepsilon>0 : A\subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B)\}}, \boxed{\inf\{\varepsilon>0 : B\subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A)\}}\right\}$

Lemma: $d_0 =: \sup d(x,B) = \inf\{\varepsilon>0 : A\subset \mathcal{N}_\varepsilon(B)\} := \varepsilon_0$

La dimostrazione della prop è conseguenza del lemma

Dim: $[d_0 \ge \varepsilon_0]$ $\forall \varepsilon<\varepsilon_0$ $d_0\ge\varepsilon$,

$\varepsilon<\varepsilon_0$ $A\not\subset \mathcal{N}_\varepsilon(B) \Rightarrow \exists a\in A :$ $\varepsilon\le d(a,B)\le d_0$ immediata

$[d_0\le\varepsilon_0]$ $\forall\varepsilon>\varepsilon_0$ $d_0\le\varepsilon$,

$\varepsilon>\varepsilon_0$ $A\subset\mathcal{N}_\varepsilon(B) \Rightarrow \forall a\in A$ $d(a,B)<\varepsilon \Rightarrow d_0\le\varepsilon$ passando al $\sup_{a\in A}$ □

Molte proprietà della metrica di X vengono ereditate dalla metrica di $\mathcal{F}(X)$

Teo (Ereditarietà per ∂): (X,d) sp. metrico

a) Se (X,d) è completo $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è completo

b) Se (X,d) è totalmente limitato $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è tot. lim.

c) Se (X,d) è compatto $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è compatto

Def: X è totalmente limitato se $\forall\varepsilon>0$ $\underbrace{\exists x_1,\dots,x_m \text{ tc } X\subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)}_{\varepsilon\text{-net}}$ $(m<+\infty)$

Cor: $0<\mu<1$, $X=\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea

$S_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contrazioni, $|S_\alpha(x)-S_\alpha(y)|\le\mu|x-y|$ $1\le\alpha\le m$

$\Phi(A) = \bigcup_{\alpha=1}^m S_\alpha(A)$

1) $\Phi : \mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$ $\partial(\Phi(A),\Phi(B))\le\mu\partial(A,B)$ Φ è una contrazione

2) $\exists!\ A_\infty \in \mathcal{J}$ $\quad \Phi(A_\infty) = A_\infty$

3) $A_0 \in \mathcal{J}$ $\quad \partial(\Phi^n(A_0), A_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Esempio: $X = \mathbb{R}$, $S_1(x) = \frac{x}{3}$, $S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, X_∞ è l'insieme di Cantor

trasformazioni — attrattore

Si chiamano sistemi di funzioni iterate.

Dim (Cor): 1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow S_\alpha(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ sono compatti

Φ è contrazione: $\delta > \partial(A, B) \Rightarrow \underbrace{\mu\delta > \partial(\Phi(A), \Phi(B))}$
(*)

$\boxed{\Phi(A) \subset \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(B))}$ e $\Phi(B) \subset \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(A))$

(*) $\Rightarrow A \subset \mathcal{N}_\delta(B) \Rightarrow S_\alpha(A) \subset \mathcal{N}_{\mu\delta}(S_\alpha(B)) \Rightarrow 1 \le \alpha \le m$ e si ha:

$$\Phi(A) = \bigcup_{1\le\alpha\le m} S_\alpha(A) \subseteq \bigcup_{1\le\alpha\le m} \mathcal{N}_{\mu\delta}\left(S_\alpha(B)\right) = \mathcal{N}_{\mu\delta}\left(\bigcup_\alpha S_\alpha(B)\right) = \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(B))$$

I punti (2) e (3) del cor. sono conseguenza del teorema delle contrazioni.

Lemma: (X, d) è sp. metrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora:

1) Se $\exists\ n_k \nearrow \infty$ tc $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

2) Se $\varepsilon_k \searrow 0$ allora $\exists\ n_k \nearrow +\infty$ tc $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$

Dim: 1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \forall n, m > N$

Se $n \ge N$, scelgo $n_k > n > N$, $d(x_n, \bar{x}) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\hookrightarrow n_k : d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N\ d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$

2) $N_k := \min\{N : d(x_n, x_m) < \varepsilon_k\ \forall n, m \ge N\}$

N_k deb. crescente $\quad n_k = N_k + k$

$n_{k+1} > n_k \ge N_k \quad d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$

Dim (Teo (a)): $(\mathcal{J}(X), \partial)$ è completo (se (X, d) lo è)

A_n succ. di Cauchy per ∂, SPG $\partial(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $k > n$ $\partial(A_n, A_k) < \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j} < 2^{-n+1}$

$A \doteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\ge n} A_k}$ $\quad$ ⚠ non è evidente che $A \ne \emptyset$

$\partial(A_n, A) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ da verificare

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad \partial(A_n, A) < \varepsilon$

Se $N: 2^{-N+1} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \quad \begin{cases} \sup_{x \in A_n} d(x, A) \leq 2^{-N+1} & (D1) \\ \sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq 2^{-N+1} & (D2) \end{cases}$

<u>Oss</u>: $(D1) \Rightarrow A_n \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A)$

$(D2) \Rightarrow A \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A_n)$

D1) $x \in A_n$ fissato, $\exists \bar{x} \in A : d(x, \bar{x}) \leq 2^{-N+1}$ (voglio dim. questo)

$(x_k)_{k=n}^{\infty}$ def. per induzione: $x_n = x$, $\begin{cases} x_{k+1} \in A_{k+1} \\ d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k} \end{cases}$

$x_k \in A_k \quad d(x_k, A_{k+1}) \leq \partial(A_k, A_{k+1}) < 2^{-k} \Rightarrow x_{k+1} \in A_{k+1} : d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k}$

è possibile costruire (x_k) ed è di Cauchy

$\Rightarrow x_k \to \bar{x}$ perché lo sp. metrico è completo; inoltre $\bar{x} \in A$ $\boxed{D1}$

D2) $\sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq 2^{-N+1}$ da dimostrare

$\sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq \sup_{x \in \bigcup_{k \geq m} A_k} d(x, A_n)$, $m > n$ (SPG)

mettere la chiusura o no è uguale

$\leq \sup_{k \geq m} \sup_{x \in A_k} d(x, A_n) \leq 2^{-n+1} \leq 2^{-N+1}$

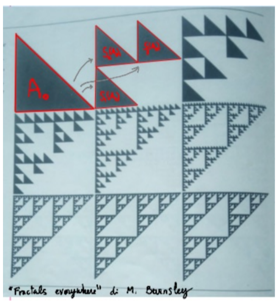
$\sup_{x \in A_k} d(x, A_n) \leq \partial(A_k, A_n) \leq 2^{-n+1} \quad \forall k \geq m > n \geq N$ $\boxed{D2}$

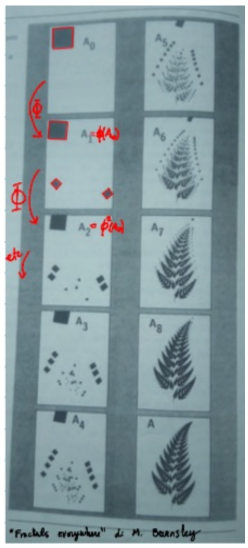
<u>Teorema</u>: (X, d) metrico. Sono equivalenti:

a) X è compatto per successioni

b) X è completo e totalmente limitato

c) Se $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{a}} A_\alpha$, A_α aperti $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ tc $X \subset \bigcup_{j=1}^{m} A_{\alpha_j}$





Esempi dell'effetto delle prime iterazioni della mappa Φ in un paio di casi. L'insieme A_∞ dipende solo dal set di contrazioni scelto, mentre risulta irrilevante il particolare insieme A_0 di partenza

Teorema: (X,d) sp. metrico

a) Se (X,d) è completo $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è completo ✓ dimostrato

b) Se (X,d) è totalmente limitato $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è tot. lim.

c) Se (X,d) è compatto $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è compatto

Ricorda: $\partial(A,B) = \inf\{\varepsilon>0 : B\subset \mathcal{N}_\varepsilon(A) \text{ e } A\subset \mathcal{N}_\varepsilon(B)\}$

Dim: (b) (X,d) tot. lim. $\Rightarrow (\mathcal{F}(X),\partial)$ è tot. lim.

Ricorda: X è tot. lim. $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0 : \exists\ \varepsilon$-net, cioè $\exists\ \vec{x}\in X : X=\bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i) = \mathcal{N}_\varepsilon(\{x_1,\dots,x_m\})$

$\varepsilon>0 \quad \exists F\subset X \quad \#F \quad X\subset \mathcal{N}_\varepsilon(F)$

$\mathcal{P}(F)$ è una ε-rete per ∂

Dato $C\in\mathcal{F}(X)$ considero $F_c = F\cap \mathcal{N}_\varepsilon(C)$

$F_c\subset \mathcal{N}_\varepsilon(C) \qquad C\subset \bigcup_{\xi\in F} B_\varepsilon(\xi) \qquad \xi\in F\setminus F_c,\ d(\xi,C)\geq\varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon(\xi)\cap C=\emptyset$

$C\subset \mathcal{N}_\varepsilon(F_c) \qquad C\subset \bigcup_{\xi\in F_c} B_\varepsilon(\xi) = \mathcal{N}_\varepsilon(F_c)$

Teorema: (X,d) metrico. Sono equivalenti:

a') (X,d) è compatto per successioni

b') (X,d) è completo e totalmente limitato

c') Se $X\subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ A_α aperti $\Rightarrow \exists\ \alpha_1,\dots,\alpha_m$ tc $X\subset\bigcup_{j=1}^m A_{\alpha_j}$

$\Updownarrow$

Lo spazio X è compatto per ricoprimenti

Oss: c') $\Rightarrow$ c)

Oss/Es: Mostrare che:

1) X tot limitato $\Leftrightarrow X=\bigcup_{i=1}^m C_i \quad \text{diam}(C_i)<\varepsilon$

2) (X tot. lim. e $Y\subseteq X$) $\Rightarrow$ Y tot. lim.

$\text{diam}\, B_\varepsilon(\xi)\leq 2\varepsilon$, $\text{diam}(C)<\varepsilon \Rightarrow C\subset B_{2\varepsilon}(\xi) \quad \forall\xi\in C$

↳ serve 2ε perché C potrebbe essere chiuso

Dim: (a') $\Rightarrow$ (b') Se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy $\underset{\text{CPT}}{\Rightarrow} \exists\, n_k : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}\in X \Rightarrow$

$\overset{\text{CAUCHY}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

Per assurdo, suppongo X non tot. lim. $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tc $\nexists$ una ε-rete

$x_0 \in X$ qualsiasi, $x_1 \in X \setminus B_{\varepsilon_0}(x_0)$, $x_2 \in X \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_0) \cup B_{\varepsilon_0}(x_1)) = \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\{x_0, x_1\})$

dato $x_0, \dots, x_k$ scelgo $x_{k+1} \in X \setminus \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\{x_0, \dots, x_k\})$. Si noti che $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0 \ \forall n \neq m$

$\Rightarrow x_n$ non ha succ. convergenti. Assurdo.

(b') $\Rightarrow$ (c') (X, d) completo tot. lim. $\Rightarrow X$ è compatto per ricoprimenti

Per assurdo suppongo $\exists (A_\alpha)_{\alpha \in a}$ di aperti, $\bigcup_{\alpha \in a} A_\alpha \supset X$ ma X non ammette ricoprimenti finiti.

Fisso $\varepsilon_k = 1/k$, $X_0 = X = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_1} C$, $\mathcal{F}_1$ famiglia finita di insiemi, $\operatorname{diam}(C) < \varepsilon_1 \ \forall C \in \mathcal{F}_1$

$X_1 = \overline{C} \in \mathcal{F}$ non ricopribile da finiti A_α

X_1 è tot. lim. ma non finitamente ricopribile, e continuo per induzione:

$\vdots$

X_{k-1} è tot. lim. ma non finitamente ricopribile,

$X_{k-1} = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_k} C$ $\quad \mathcal{F}_k$ famiglia finita di insiemi, $\operatorname{diam}(C) < \varepsilon_k \ \forall C \in \mathcal{F}_k$

$X_k = \overline{C} \in \mathcal{F}_k$ non fin. ricopribile da A, X_k tot. lim. non fin. ricopribile con (A_α)

$X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_k \supset \dots$

$\xi_k \in X_k$ se $k \geq N$, $\xi_k \in X_N \ \forall k \geq n$, $d(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}) \leq \operatorname{diam}(X_k) = \varepsilon_N = \frac{1}{N} \ \forall k_1, k_2 \geq N$

$\Rightarrow (\xi_k)$ è di Cauchy $\Rightarrow \xi_k \to \overline{\xi} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$

$\exists\, \overline{\alpha}$ tc $\overline{\xi} \in A_\alpha \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \ B_\delta(\overline{\xi}) \subset A_\alpha$ se $N > \frac{1}{2\delta}$, $X_N \subset B_\delta(\overline{\xi}) \subset A_{\overline{\alpha}} \Rightarrow$

↳ aperto

$\Rightarrow X_N$ è fin. ricopribile. Assurdo

(c') $\Rightarrow$ (a') X compatto per ricoprimenti $\Rightarrow X$ compatto per successioni

Per assurdo: X non compatto per successioni

$y \in X \quad \exists\, A_y$ intorno aperto di y : $\#\{k : x_k \in A_y\} < +\infty$

$X = \bigcup_{y \in X} A_y$ Trovo un sottoricoprimento finito (Vale (c'))

$y_1, \dots, y_m$ tc $X = \bigcup_{j=1}^{m} A_{y_j}$

$\mathbb{N} = \{k : x_k \in X\} = \bigcup_{j=1}^{m} \{k : x_k \in A_{y_j}\}$ unione finita di insiemi finiti. Assurdo $\square$

Prop: (X, d) sp. metrico compatto $\Rightarrow \exists\, D \subseteq X$, D numerabile e denso in X

Dim: (X,d) compatto $\Rightarrow$ tot. limitato, $\varepsilon_n \doteq \frac{1}{n}$, $F_n \subset X$ una ε_n-rete $\begin{cases} \# F_n < +\infty \\ \mathcal{N}_{\varepsilon_n}(F_n) \supset X \end{cases}$

$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ $\begin{cases} \text{è numerabile perché unione numerabili di insiemi finiti} \\ \text{denso} \end{cases}$

Esercizio: (X, d) metrico, $\mathcal{F}(X) \longrightarrow C(X)$

$$A \longmapsto \varphi_A(x) = d(x, A)$$

$\|\varphi_A - \varphi_B\| = \sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(y)| = \partial(A,B)$ non è detto che il sup sia finito

$(\geq)$ $\sup_{x\in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| \geq \sup_{x \in A} |\cancel{\varphi_A(x)} - \varphi_B(x)| = \sup_{x\in A} |d(x,B)|$

$(\leq)$ per esercizio

Esercizio: Se C chiuso non vuoto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ allora $\exists\, \xi_0 \in C : d(p_0, C) = d(p_0, \xi_0)$

Esercizio: X metrico compatto $f_n \in C(X, \mathbb{R})$, $\forall x \in X$ $(f_n(x)_n)$ decrescente,

$\inf_n f_n(x) = f(x) \in C(X, \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ la convergenza è uniforme, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

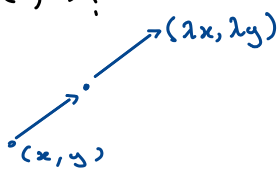
(si chiama Teorema di convergenta di DINI)

Es: $f(x,y) = \dfrac{(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^\alpha}$

Domanda 1: Per quali α f è estendibile per continuità in $(0,0)$?

Domanda 2: Per quali α l'estensione di f è differenziabile in $(0,0)$?

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^4 (x^3y - xy^3)}{\lambda^{2\alpha}(x^2+y^2)^\alpha} = \lambda^{4-2\alpha} f(x,y)$$



f è omogenea di grado $4-2\alpha$ e continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

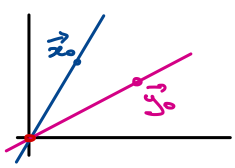
Def: $f : \mathbb{R}^N_* \to \mathbb{R}$ è pos-omogenea di grado γ se $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^\gamma f(\vec{x})$ $\forall \lambda > 0$

In generale una funzione pos-omogenea di grado γ su $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ è continua $\Leftrightarrow$ $\gamma > 0$

(a meno che f non sia costante)

Dim: Se $\gamma < 0$ $f(\vec{x}_0) \neq 0$, $\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda, \vec{x}_0) = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^\gamma f(\vec{x}_0) \overset{\gamma<0}{=} +\infty$

Se $\gamma = 0$, $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$, $\lim_{\lambda\to 0^+} f(\lambda\vec{x}) = f(\vec{x})$, $\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda \vec{y}) = f(\vec{y})$



Quando $\gamma > 0$ la funzione è continua: se $\gamma > 0$ allora

$\lim_{|\vec{x}| \to 0} |f(\vec{x})| = 0$, $m = \max_{|\vec{x}|=1} |f(\vec{x})|$, se $\vec{x} \neq \underline{0}$, allora

$$|f(\vec{x})| = |\vec{x}|^{\gamma} \left| f\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\right| \leq m|\vec{x}|^{\gamma} \xrightarrow[|\vec{x}| \to 0]{} 0$$

$\square$

Ritornando al problema iniziale, f è $(4-2\alpha)$-omogenea quindi è continua $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $4-2\alpha>0$ se $\alpha<2$

Per quali α f è differenziabile?

f è differenziabile $\Longleftrightarrow$ $\boxed{4-2\alpha > 1}$

sotto questa condizione $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ per $(x,y) \to 0$

Ricevimento: Venerdì, 16-18 Aula Seminari, luciano.sciaraffia@phd.unipi.it

DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto,

$g: V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $\quad V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto

f diff. in x_0, g diff. in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ è diff. in x_0 e $D(g\circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$

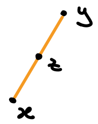
Dim. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(f(x_0) + Df(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)\right)$

$$= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))\cdot Df(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

Esempio: $f: U \to \mathbb{R}$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ diff., $\gamma: [a,b] \to U$ curva differenziabile,

$g(t) = f(\gamma(t))$, $g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

Teorema (Lagrange):



$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ diff. $[x,y] \subseteq U$, $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = \nabla f(z)(y-x)$, $\quad z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in (0,1)$

Dim: Sia $g(t) = f(x + t(y-x))$ $\quad t \in [0,1]$ applico Lagrange a $g(t)$ e ottengo:

$g(1) - g(0) = f(y) - f(x) = g'(\bar t) = \nabla f(g(\bar t)) \cdot (y-x) = \nabla f(x + \bar t(y-x)) \cdot (y-x) \quad \bar t \in (0,1)$

Oss: Non vale per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad f = (f_1, \dots, f_m)$. Si ha $f(y) - f(x) = (\dots \nabla f_i(z_i)\cdot(y-x) \dots)$

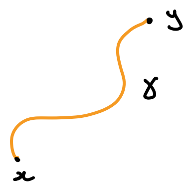
Ma z_i dipende da i. Posso scrivere $|f(y) - f(x)| \leq \max\limits_{z \in [x,y]} |Df(z)| \cdot |y-x|$

Lagrange vale solo componente per componente e non per funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ $(m>1)$

[NORME SU $M_{n \times m}$: norma euclidea: $\|M\|_e = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2\right)^{1/2} \geq \|M\| = \max\limits_{v: |v|=1} |M \cdot v|$]

Cor: $f: U \to \mathbb{R}$ diff. U aperto connesso, $\nabla f(x) = 0$ $\forall x \in U \Rightarrow f$ costante

Dim: $x, y \in U$ $\quad x \neq y$ (aperto + connesso $\Rightarrow$ connesso per archi)



$\exists\, \gamma: [0,1] \to U$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma) \cdot \gamma'(t) = 0$

$\Rightarrow f \circ \gamma$ costante $\Rightarrow f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$

DERIVATE SUCCESSIVE:

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)$$ derivata parziale k^a, ce ne sono n^k

$$(D^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$ matrice Hessiana $(n \times n)$

$$(D^k f)_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \qquad D^k f : (\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R} \quad k\text{-lineare}$$

$$D^k f(x_0)[v_1, \dots, v_k] = \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k}$$

$$D^k f(x_0)[v]^k = D^k f(x_0)[v, v, \dots, v]$$

Oss: $\frac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial x_{i_k}}$ non è in generale invariante per permutazione degli indici

Esempio: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases} \qquad \nabla f(0,0) = 0, \quad D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

non è zero

Teo (Schwarz):

$f : U \to \mathbb{R}$ diff., $x_0 \in U$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ esistono in $B_r(x_0)$ per $r>0$ e sono cont. in x_0

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$$

Dim: $h, k \in (-\delta, \delta)$,

$$f(x_0 + h e_i + k e_j) - f(x_0 + h e_i) - f(x_0 + k e_j) + f(x_0) = g(1) - g(0) = g'(\theta)$$

$$\underset{\text{LAG.}}{=} h \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h e_1 + k e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h e_i) \right] \underset{\text{LAG.}}{=} hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + \theta h e_i + \tilde{\theta} k e_j) \qquad \theta, \tilde{\theta} \in (0,1)$$

$$\underset{\text{SIMMETRIA}}{=} hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \psi h e_i + \tilde{\psi} k e_j) \qquad \psi, \tilde{\psi} \in (0,1)$$

Dove $g(t) = f(x_0 + t h e_i + k e_j) - f(x_0 + t h e_i)$

Divido per $hk \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + \theta h e_i + \tilde{\theta} k e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \psi h e_i + \tilde{\psi} k e_j)$

passo al limite per $h, k \to 0$ e uso la continuità.

Oss: Un enunciato analogo vale per le derivate di ordine k

Oss/Es: f è differenziabile 2 volte in $x_0 \Rightarrow D^2 f$ è simmetrica

FORMULA DI TAYLOR

Def: $f \in C^k(U) \Leftrightarrow f$ è diff. k volte e $D^k f$ è continuo in U

$\Leftrightarrow \exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ in U e sono tutte continue

Teo: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in U$

1) $f \in C^k(U)$ diff. k-volte in $x_0 \Rightarrow f(x) = T_k(f, x_0)(x) + o(|x-x_0|^k)$ ← RESTO DI PEANO

Dove $T_k(f,x_0)(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D^{(i)} f(x_0)[x-x_0]^i$ ← POLINOMIO DI GRADO K IN $x_1 \dots x_n$

$$D^{(i)} f(x_0)[x-x_0]^i = \sum_{j_1 \dots j_i} \frac{\partial^{(i)} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}} (x-x_0)_{j_1} \dots (x-x_0)_{j_i}$$

2) $f \in C^k(U)$ ed è diff. $(k+1)$ volte in $U \Rightarrow f(x) = T_k(f,x_0)(x) + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)} f(z)[x-x_0]^{k+1}}_{O(|x-x_0|^{k+1})}$

$z \in (x_0, x)$ RESTO DI LAGRANGE

Dim: Fisso $x \in U$ e $g(t) = f(\overbrace{x_0 + t(x-x_0)}^{x_t})$, $t \in [0,1]$

Applico il Teorema di Taylor a $g(t)$ in $t=0$ e osservo che $g^{(i)}(t) = D^{(i)} f(x_t)[x-x_0]^i$.

In particolare $T_k(f,x_0)(x) = T_k(g,0)(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = g(1) = T_k(g,0)(1) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t) = T_k(f,x_0)(x) + \frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)} f(x_t)[x-x_0]^{k-1} \Rightarrow$ 2

1 si ottiene da 2 applicato con k al posto di $(k+1)$

MASSIMI E MINIMI LOCALI:

$f: U \to \mathbb{R}$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Def: x_0 è di massimo locale se $\exists r>0$ tc $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0)$

x_0 è di minimo locale se $\exists r>0$ tc $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0)$

Teo: $f: U \to \mathbb{R}$ diff. 2 volte in x_0 $\nabla f(x_0) = 0$

1) x_0 di max locale $\Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \leq 0$

2) x_0 di min locale $\Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \geq 0$

3) $\nabla^2 f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ di max locale

4) $\nabla^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ di min locale

Dim: 1) Supp. per assurdo che $\nabla^2 f(x_0)$ non ≤ 0, cioè $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tc $\nabla^2 f(x_0)[v,v] > 0$,

$g(t) = f(x_0 + tv)$, $g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$, $g''(0) = \nabla^2 f(x_0)[v,v] > 0$

$\Rightarrow 0$ è di min locale stretto per $g \Rightarrow f(x_0 + tv) > f(x_0)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \neq 0$ ↯

2) Si fa come 1)

3) Sappiamo che $\nabla f(x_0)=0$, $\nabla^2 f(x_0)<0$, cioè $\nabla^2 f(x_0)[v,v] \leq -\delta |v|^2$ $\delta>0$, $\delta = \min_i |\lambda_i|$

per Taylor, $f(x) = f(x_0) + \frac{\nabla^2 f(x_0)}{2}[x-x_0]^2 + o(|x-x_0|^2) \leq$

se $|x-x_0| \ll 1$

$$\leq f(x_0) - \frac{\delta}{2}|x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2) \leq f(x_0) - \frac{\delta}{4}|x-x_0|^2 \Rightarrow x_0 \text{ max. locale}$$

4) come 3)

Def: x_0 punto critico, cioè $\nabla f(x_0)=0$, che non è max locale o min locale si dice punto di sella. Ad es: se $D^2 f(x_0)$ ha sia autovalore >0, sia <0 $\Rightarrow$ x_0 è di sella

MASSIMI E MINIMI (LOCALI)

Oss: Se $\nabla^2 f(x_0)$ è simmetrico $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\nabla^2 f \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \ \forall i \\ \nabla^2 f \leq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0 \ \forall i\end{array}\right\}$ λ_i autovalori

$(n=2)$ $\nabla^2 f \geq 0 \Leftrightarrow tr(\nabla^2 f) \geq 0$, $\det(\nabla^2 f) \geq 0$

$\nabla^2 f \leq 0 \Leftrightarrow tr(\nabla^2 f) \leq 0$, $\det(\nabla^2 f) \geq 0$

Def: $tr(\nabla^2 f(x_0)) =: \Delta f(x_0)$ si chiama Laplaciano di f

Il Laplaciano è l'operatore diff. più importante

Def: $f: U \to \mathbb{R}$ diff. due volte si dice armonica se verifica $\Delta f = 0$ (eq. di Laplace)

Es: $f(x,y) = ax + by + c$ $\quad a^2+b^2 \neq 0$

Cerchiamo max e min di f su $\overline{B_1(0)} = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$\nabla f(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$ non ci sono punti critici.

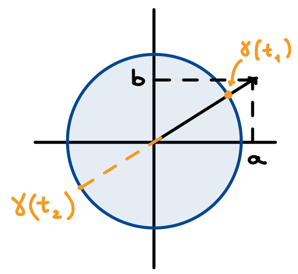
Il max e min esistono (per Weirstrass) e sono su $\partial B_1 = \{(x,y): x^2+y^2=1\}$

Parametrizziamo $\partial B_1 = Im(\gamma(t))$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

Cerchiamo max/min di $g(t) = f(\gamma(t))$:

$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (a,b)\cdot(-\sin t, \cos t) \Leftrightarrow (\cos t, \sin t) \parallel (a,b)$

$t_1, t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\gamma(t_2) = -\gamma(t_1)$



$f(\gamma(t_1)) = \sqrt{a^2+b^2} + c$ $\quad f(\gamma(t_2)) = -\sqrt{a^2+b^2} + c$

$\gamma(t_1)$ max di f, $\gamma(t_2)$ min di f

Oss: $f(x) = x \cdot v + w$ è un polinomio di I grado e quindi è sempre armonica e non ha punti critici se $v \neq 0$.

$f(x,y) = x^2 - y^2$ è armonica e ha un punto critico in $(0,0)$ ed è un pt. di sella

Prop: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $f: \overline{U} \to \mathbb{R}$ continua, $f|_U$ diff. due volte, f armonica

$\Rightarrow$ f ammette max e min globali su ∂U

Dim: Supponiamo che il min di f non sia su ∂U cioè $\exists x_0 \in U$ tale che:

$f(x_0) \le f(x) \ \forall x \in \overline{U}$ e $f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in \partial U$

In particolare $\exists \varepsilon > 0$ tc $f(x_0) \le f(x) - \varepsilon \ \forall x \in \partial U$

Quindi $\exists \varepsilon' > 0$ tc $f(x_0) < \min\limits_{x \in \partial U} \left(f(x) - \varepsilon' |x - x_0|^2 \right)$

Considero $g(x) = f(x) - \varepsilon' |x - x_0|^2$, $g(x_0) < \min\limits_{x \in \partial U} g(x) \Rightarrow g$ ha minimo in U

$\Rightarrow \exists x_1 \in U$ tc x_1 è min. assoluto di $g \Rightarrow \nabla g(x_1) = 0$, $\nabla^2 g(x_1) = \nabla^2 f(x_1) - 2\varepsilon' Id \ge 0$

Prendendo la traccia $0 \le \Delta f(x_1) - 2\varepsilon' n = -2\varepsilon' n$. Assurdo

FUNZIONI INVERTIBILI

Domanda: $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

- Quando è invertibile?
- Quando è localmente invertibile?

> **Ricorda:** $(n=1)$
> f str. monotona
> $\Updownarrow$
> f invertibile

Cioè fissato $x_0 \in U$ $\exists V$ intorno di x_0 e $W = f(V)$ intorno di $f(x_0)$ tale che $f|_V$ è invertibile tra V e W

Oss: $(n=1)$ se $f \in C^1(I)$ e $f'(x_0) \neq 0$ $x_0 \in I \Rightarrow f$ è loc. inv. con inversa C^1

Teo (INVERTIBILITÀ LOCALE):

$f: U \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, $x_0 \in U$, $\det(Df(x_0)) \neq 0$, cioè $Df(x_0)$ invertibile,

$\Rightarrow \exists V$ intorno di x_0, $\exists W = f(V)$ intorno di $y_0 = f(x_0)$, $\exists g: W \to V$ cl. $C^1(W)$

tc $g(f(x)) = x \ \forall x \in V$ e $Dg(y) = Df^{-1}(x) \ \forall x \in V$ dove $y = f(x)$

Dim: $x_0 \in U$ con $Df(x_0)$ invertibile, sia $A = (Df(x_0))^{-1}$ la matrice inversa.

Consideriamo $B_\rho(x_0)$ e $B_r(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ dove ρ abb. piccolo tale che

$\|Df(x) - Df(x_0)\| \le \dfrac{1}{2\|A\|}$ (usiamo $f \in C^1$) e $r = \dfrac{\rho}{2\|A\|}$

Oss: In questa dimostrazione, la norma di una matrice M è:

$\|M\| = \max\limits_{|v| \le 1} |M \cdot v|$ è una norma su M_{mn}, $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

In particolare se A è invertibile. $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\|A\|}$

Verifica: $\|A\| = \max_{v\neq 0} \frac{|Av|}{|v|}$, $\|AB\| = \max_{v\neq 0} \frac{|ABv|}{|v|} \leq \|A\| \cdot \max_{v\neq 0} \frac{|Bv|}{|v|}$

Vogliamo mostrare che $\forall y \in B_r(y_0)$ $\exists!\, x \in B_\rho(x_0)$ tc $f(x) = y$.

Fissiamo $y \in B_r(y_0)$ consideriamo la funzione $T(x) = x + A(y - f(x))$,

$A = (Df(x_0))^{-1}$, $x \in \overline{B_\rho(x_0)}$.

Per come abbiamo scelto ρ, r, T è una contrazione su $\overline{B_\rho(x_0)}$.

1) Verifichiamo che T è $\frac{1}{2}$ - Lipschitz

$$\|DT(x)\| = \|Id - (Df(x_0))^{-1} Df(x)\| = \|Df(x_0)^{-1}\left(Df(x_0) - Df(x)\right)\|$$

$$\leq \|A\| \cdot \underbrace{\|Df(x_0) - Df(x)\|}_{\text{per la scelta di } \rho} \leq \frac{\|A\|}{2\|A\|} = \frac{1}{2}$$

2) $T(\overline{B_\rho(x_0)}) \subseteq \overline{B_\rho(x_0)}$ fissiamo $x \in \overline{B_\rho(x_0)}$

$$|T(x) - x_0| \leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |A(y - y_0)|$$

$$\leq \frac{\rho}{2} + \|A\| \cdot r = \frac{\rho}{2} + \frac{\|A\|\,\rho}{2\|A\|} = \rho$$ cioè $T(x) \in \overline{B_\rho(x_0)}$

Per il teorema delle contrazioni $\exists!\, x = g(y) \in \overline{B_\rho(x_0)}$ tc $f(x) = y$

Sia $W = B_r(y_0) \setminus \underbrace{f(\partial B_\rho(x_0))}_{\text{compatto}}$ intorno aperto di y_0

$V = g(W) = f^{-1}(W) \subseteq B_\rho(x_0)$

V aperto (f è continua) e $x_0 \in V$ $\Rightarrow$ f è una bigezione tra V e W, e $g = f^{-1}|_W$

Vediamo ora che g è continua in W cioè $\lim_{y' \to y} g(y') - g(y) = 0$ $\forall y \in W$.

Fissiamo $y \in W$ e chiamiamo $x' = g(y')$, $x = g(y) \in V$.

Sia T la mappa definita dal punto y.

Ricorda: $T(x) = x + A(y - f(x))$

T è $\frac{1}{2}$ Lip. $\Rightarrow \frac{1}{2}|x - x'| \geq |T(x) - T(x')| = |x - x' + A(f(x') - f(x))|$

$$\geq |x - x'| - |A(y' - y)| \geq |x - x'| - \|A\| \cdot |y - y'|$$

$\Rightarrow |x - x'| = |g(y) - g(y')| \leq 2\|A\| \cdot (y - y') \Rightarrow g$ è $2\|A\|$ - Lip, in part. è continua

Vediamo ora che g è diff. in y e $Dg(y) = Df(x)^{-1}$, devo vedere che

$$\frac{g(y') - g(y) - Dg(y)(y'-y)}{|y-y'|} \xrightarrow[y' \to y]{} 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{x' - x - Df(x)^{-1}\left(f(x') - f(x)\right)}{|x'-x|} \cdot \frac{|x'-x|}{|y'-y|} =$$

$$= \frac{x'-x - Df(x)^{-1}\left(Df(x)(x'-x) + o(|x'-x|)\right)}{|x'-x|} \cdot \frac{|x'-x|}{|y'-y|} = o(1) \cdot \underbrace{\frac{|g(y') - g(y)|}{|y'-y|}}_{\leq 2\|A\|}$$

$$= o(1) \xrightarrow[y' \to y]{} 0$$

$\Rightarrow \exists \, Dg(y) = Df(x)^{-1}$

Oss: $x \to Df(x)$ è cont. e inv. $\Rightarrow x \to Df(x)^{-1}$ è cont. $\Rightarrow g \in C^1(W)$

FUNZIONI OMOGENEE

$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, γ-omogenea e $C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

1) $\gamma < 1$: f non è differenziabile in 0

2) $\gamma > 1$: f è differenziabile in 0 perché $f(\underline{x}) = 0 + o(|x|)$

$$|f(x)| = |x|^\gamma \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \le c|x|^\gamma = o(|x|) \quad \text{per } |x| \to 0$$

$c = \sup_{|x|=1} |f(x)|$

3) E se $\gamma = 1$? f è differenziabile $\Leftrightarrow$ f è lineare e 1-omogenea

Dim (3): $(\Leftarrow)$ ovvio

$(\Rightarrow)$ $f(x) = f(0) + \nabla f(0) \cdot x + R(x)$ con $R(x) = o(y)$ voglio vedere che $R(x) = 0$

$$f(x) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{\nabla f(0)\cdot(\cancel{t}x)}{\cancel{t}} + \underbrace{\frac{R(tx)}{t|x|}}_{\to 0 \text{ se } t \to 0} \cdot |x| \quad \forall t \quad \Rightarrow f(x) = \nabla f(0) \cdot x$$

$\square$

Esempio di applicazione : $f(x,y) = \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}$ $\quad \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$

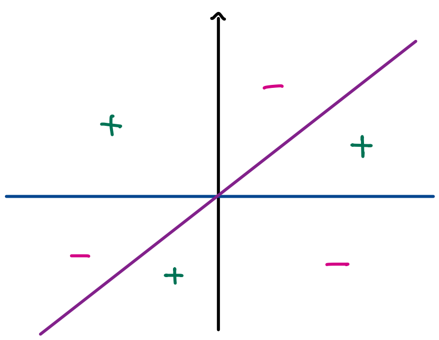
f è continua (anche in $(0,0)$) ma non differenziabile.

f è 1-omogenea, continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbb{R}^2$

$$f(at, bt) = \frac{a^2t^3 - b^2t^3}{(a^2+b^2)t^2} = t \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

non vuol dire lineare dappertutto
$\Rightarrow$ si può vedere tramite gli zeri

$$\operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn}(x^2y - xy^2) = \operatorname{sgn}(xy(x-y))$$



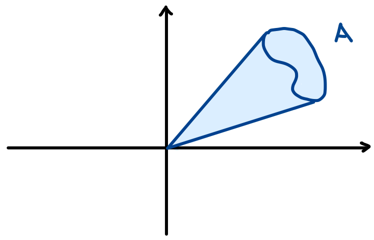
La funzione non può essere lineare perché cambia segno ogni volta che "attraversa" una di queste rette

TEOREMA DI EULERO

A <u>cono</u> aperto, $A \subseteq \mathbb{R}$, f differenziabile su A allora:

f è α-omogenea $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x) \quad \forall x \in A$

Def: A si dice cono se $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A \quad \forall \lambda > 0$



Dim: $x \in A$ fissato, $F(A) = \dfrac{f(tx)}{t^\alpha}$

f è α omogenea in direzione $x \Leftrightarrow F(t) \equiv f(x) \quad \forall t > 0$

$$-F'(t) = \frac{1}{t^{2\alpha}}\left[\nabla f(tx)\cdot x \cdot t^\alpha - f(tx)\,\alpha t^{\alpha-1}\right] = \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left[\nabla f(tx)\cdot xt - \alpha f(tx)\right]$$

Se $F' \equiv 0 \quad \forall t \Rightarrow$ (se $t=1$) $\nabla f(x)\cdot x - \alpha f(x) = 0 \quad (*)$

Viceversa se vale $(*)$ $\forall x \Rightarrow$ vale anche xt e ottengo che $F'(t) \equiv 0$ da cui f omogenea. $\square$

FUNZIONI RADIALI

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è radiale se $f(x) = \varphi(r(x))$ con $r(x) \doteq |x|$ ← norma euclidea: $|X| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

a) Se φ è C^1 allora $\nabla f(x) = \varphi'(|x|)\cdot \dfrac{x}{|x|}$

b) Se φ è C^2 calcolare $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x)$

b') " calcolare $\Delta f(x)$

$\nabla r(x) = ?$

$\Downarrow$

$\nabla r(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\sum x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}\, x_k = \frac{x_k}{|x|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r(x)}\right) = -\frac{\partial/\partial x_i\, r'(x)}{r^2(x)} = -\frac{x_i/|x|}{|x|^2} = -\frac{x_i}{|x|^3}, \qquad \nabla\left(\frac{1}{r(x)}\right) = -\frac{x}{|x|^3}$$

a) $\nabla f(x)$

$$\nabla\Big(\varphi(r(x))\Big) = \varphi'(r(x))\frac{x}{|x|} = \varphi'(|x|)\frac{x}{|x|}$$

In particolare $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varphi(|x|)\Big) = \varphi'(|x|)\dfrac{x_i}{|x|}$

$$\frac{\partial^2}{x_j x_i}\Big(\varphi(|x|)\Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi'(|x|)\cdot\frac{x_i}{|x|}\right) = \varphi''(|x|)\frac{x_j}{|x|}\cdot\frac{x_i}{|x|} + \varphi'(|x|)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i}{|x|}\right)}_{(*)}$$

$*)$ $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_i\cdot\frac{1}{|x|}\right) = \delta_{ij}\cdot\frac{1}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big(\varphi(|x|)\Big) = \varphi''(|x|)\,\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|}\left[\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right]$$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \varphi''(|x|) + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|}\,[n-1]$$

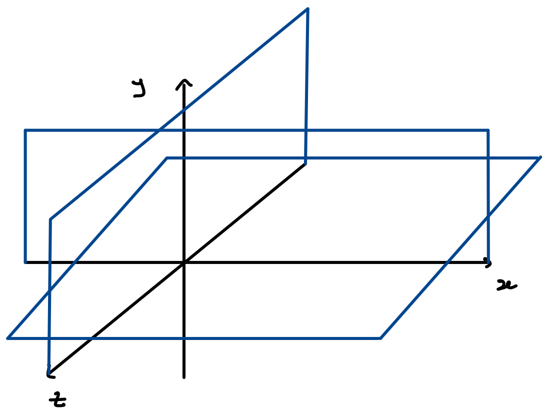
Esercizio: Caratterizzare le funzioni radiali armoniche in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f \equiv 0 \\ f = \varphi(|x|) \end{array}\right\} \iff \varphi''(t) + (n-1)\,\frac{\varphi'(t)}{t} = 0$$

$$\boxed{u = \varphi'} \longrightarrow u'(t) + (n-1)\,\frac{u(t)}{t} = 0$$

Es: Studio di funzione in $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$$



$$D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \big(\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}\big)$$

- $\{\nabla f(x) = 0\} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} + 3yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} + 3xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} + 3xy$$

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \begin{cases} 3yz = 1/x^2 \\ 3xz = 1/y^2 \\ 3xy = 1/z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2yz = 1 \\ 3xy^2z = 1 \\ 3xyz^2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} (*) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} \longrightarrow \dfrac{x}{y} = 1 \longrightarrow x = y \\ \text{analog. } \mathrm{II}/\mathrm{III} \longrightarrow y = z \end{array}\right\} x = y = z$$

se $P = (t,t,t)$ è stazionario allora $3t^4 = 1$, $t = \pm\sqrt[4]{1/3}$

$$P = t(1,1,1), \quad P = \pm\sqrt[4]{1/3}\,(1,1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + 3yz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 3z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2}{x^3}$$

Matrice Hessiana: $H_f = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 3z & 3y \\ 3z & 2/y^3 & 3x \\ 3y & 3x & 2/z^2 \end{pmatrix}$

Valuto $H_f(P_+)$, dove $P_+ = \sqrt[4]{1/3}\,(1,1,1)$. Chiamo $\sqrt[4]{1/3} = \mu$

$$H_f(P_+) = \begin{pmatrix} 2/\mu^3 & 3\mu & 3\mu \\ 3\mu & 2/\mu^3 & 3\mu \\ 3\mu & 3\mu & 2/\mu^3 \end{pmatrix}$$

si può usare il metodo dei minori (Nord-Ovest)

$\Delta_1 = 2/\mu^3$ ⊕

$\Delta_2 = \frac{4}{\mu^6} - 9\mu^2 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{4}{\mu^4} - 9\mu^4\right) = \frac{9}{\mu^2}$ ⊕

$\Delta_3 =$ Calcolare il det. $\Rightarrow$ se ⊕ $\Rightarrow H_f(P_+) > 0$ (Es: verificare $\Delta_3 > 0$)

$\Rightarrow$ Matrice $H_f(P_+)$ è definita positiva $\Rightarrow$ P è minimo locale

Es: Verificare che P_+ è minimo globale su $Q^+ \doteq \{x>0, y>0, z>0\}$

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^k(\Omega)$ $k \geq 1$, $x_0 \in \Omega$ tc $J_f(x_0) = \det[Df(x_0)] \neq 0$

(cioè $Df(x_0)$ è invertibile) $\Rightarrow$ f è un diffeomorfismo C^k in un intorno di x_0,

cioè $\exists$ U int. di x_0 e V int. di $f(x_0)$ tc $f|_U$ è una bigezione tra U e V con $f^{-1} \in C$.

Inoltre $Df^{-1}(f(x)) = Df^{-1}(x)$, $x \in U$

Oss: la condizione $\det[Df(x)] \neq 0$ $\forall x \in \Omega$ non garantisce f globalmente invertibile

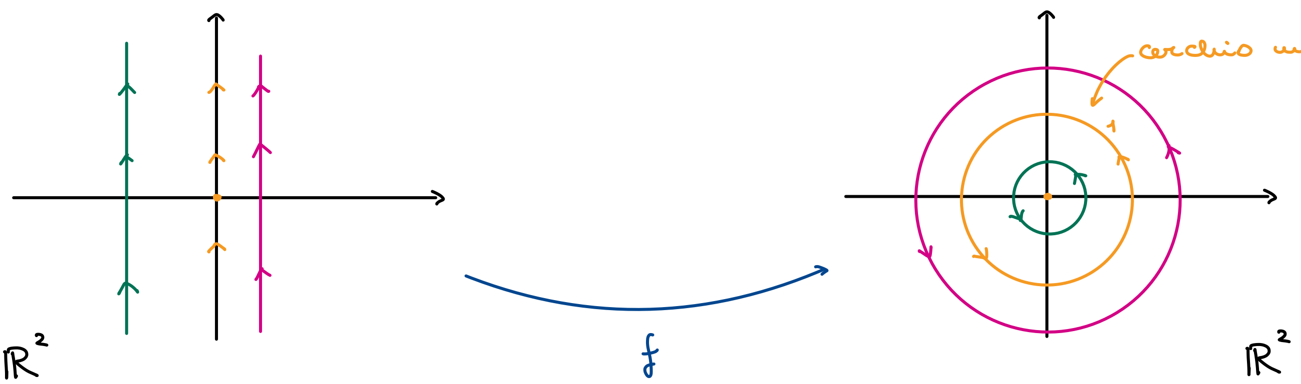
Es (esponenziale complesso):

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z = e^{Re(z)}(\cos(Im(z)) + i\sin(Im(z)))$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$

$f(x, y+2k\pi) = f(x,y)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ (sen e cos non sono iniettive)

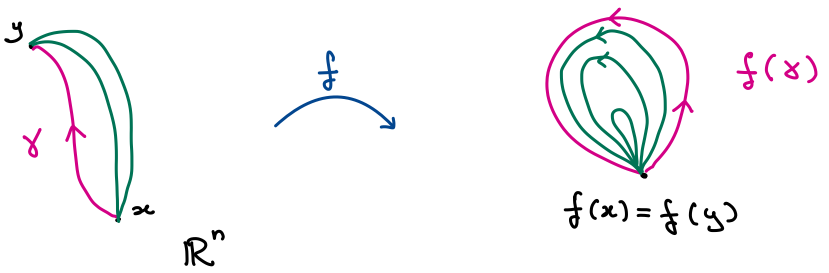
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x,y) = e^{2x} > 0$$



$f(x) \neq 0$ $\forall \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ $\Rightarrow$ localmente invertibile ma non globalmente

ARGOMENTO PER INVERTIBILITÀ GLOBALE

Supponiamo $f(x) = f(y)$ $x \neq 0$



TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (o Teorema del Dini)

Quando posso esprimere $f(x,y)=0$ in forma "esplicita" $y=g(x)$?

(Almeno localmente)

Teo: $f: \Omega \subseteq \underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y}{\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^m$ di classe C^k — serve che il n° delle y sia lo stesso del n° di equazioni

$(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $\det\big[\underbrace{D_y f(x_0,y_0)}_{\text{matrice } m\times m}\big] \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, U$ int. di x_0 e V int di y_0 ed $\exists\, g: U \to V$ di classe C^k tali che

$f(x,y) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow y = g(x)$ per $(x,y) \in U \times V$.

In particolare $f(x, g(x)) = 0$ in U quindi diff. in x ottengo

$D_x f(x,g(x)) + D_y f(x,g(x)) \cdot Dg(x) = 0$ cioè $Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} \cdot D_x f(x, g(x))$ per $x \in U$

Dim: Definiamo $\tilde{f}(x,y) = (x, f(x,y))$, $\Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$,

$$D\tilde{f}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^n} & D_x f(x_0,y_0) \\ 0 & D_y f(x_0,y_0) \end{pmatrix}, \quad \det(D\tilde{f}(x_0,y_0)) = \det D_y f(x_0,y_0) \neq 0$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ è loc. invertibile, cioè $\exists\, U$ int. di x_0, V int. di y_0, W int. di y_0 tc $\tilde{f}$ è una

bigezione tra $U \times V$ e $U \times W$ ed $\exists\, \tilde{f}^{-1}(x,y) = (x, \tilde{g}(x,y))$ $(x,y) \in U \times W$

$\tilde{g}: U \times W \to V$ di classe C^k (teo inv. locale)

In particolare: $(x,y) = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x,y)) = \tilde{f}(x, \tilde{g}(x,y)) = (x, f(\tilde{g}(x,y)))$ cioè

$$\boxed{f(x, \tilde{g}(x,y)) = y \quad \forall x \in U \text{ e } y \in W}$$

Poniamo $g(x) = \tilde{g}(x, f(x_0,y_0))$ abbiamo $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ per $x \in U$,

cioè $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ per $y = g(x)$ e $x \in U$, $g \in V$.

Cor: $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $x_0 \in \Omega$ $rk(Df(x_0)) = m$ $\Rightarrow \exists\, U$ intorno di x_0 tc

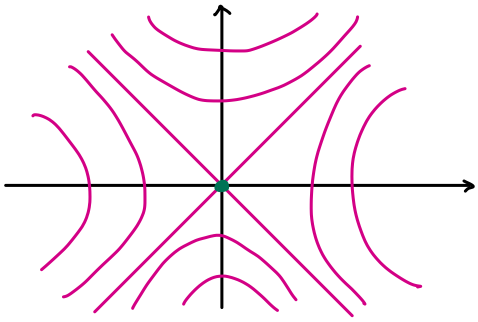
$\{f(x) = f(x_0)\} \cap U$ è il grafico di una funzione C^k in un'opportuna base.

Def: I punti di $\{f(x) = f(x_0)\}$ con $rk(Df(x_0)) = m$ si dicono punti regolari

Es: $f(x): \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la condizione diventa $\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \{f(x) = f(x_0)\}$ è

il grafico di $g: e_i^{\perp} \to \mathbb{R} \cdot e_i$, $g(x_1, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_n)$ (cioè $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$)

(Gradiente non nullo $\Rightarrow$ la funzione cresce)



Esercizio: $f(x,y) = x^2 - y^2$

Quando $\{f(x,y) = f(x_0,y_0)\}$ è una curva regolare?

Se $\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \neq 0$ cioè $(x,y) \neq (0,0)$

Esercizio: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = e^{xy} - x + y$

$f(1,0) = 0$

1) $\{f = 0\}$ è un grafico $y = g(x)$ vicino a $(1,0)$?

2) Qual è lo sviluppo di Taylor di g al 2° ordine?

Risposte:

1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 1$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2 > 0 \Rightarrow \exists\, g(x)$ con $g(1) = 0$,

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ e $g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} - 1$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1$, $\quad g'(1) = 1/2$

2) Dobbiamo trovare $g''(x)$ in $x = 1$

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))},$$

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}(x,g(x)) + f_{xy}(x,g(x))g'(x)}{f_y(x,g(x))} + \frac{f_x(x,g(x))\left[f_{xy}(x,g(x)) + f_{yy}(x,g(x))g'(x)\right]}{f_y(x,g(x))^2}$$

$f_x = ye^{xy} - 1 \qquad f_y = xe^{xy} + 1$

$f_{xx} = y^2 e^{xy} \qquad f_{xy} = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_{yy} = x^2 e^{xy}$

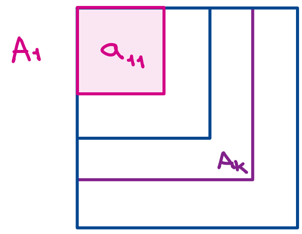
$f_{xx}(1,0) = 0 \qquad f_{xy}(1,0) = 1 \qquad f_{yy}(1,0) = 1$

$g''(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{8} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}$

CRITERIO DEI MINORI DI NORD-OVEST

A matrice simmetrica $n\times n$ NON degenere: voglio sapere qual è la segnatura di A

$A = H_f(P)$, $\nabla f(P)$; se $a_{11} > 0$, $\Delta_k = \det A_k$



indice di negatività di A = n° di cambi di segno nella sequenza $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$

Segnatura di A = quanti autovalori positivi e quanti autovalori negativi

Lezione 9: $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$

Ha due punti critici $P_\pm = \pm(\mu,\mu,\mu)$, $\mu = \sqrt[4]{1/3}$

P_+ è un minimo locale (perché $H_f(P_+)$ è def. positiva)

P_+ è min globale su $Q = \{x>0, y>0, z>0\}$

$$Q_R = \left\{ x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{R}},\ y \geq \frac{1}{\sqrt[3]{R}},\ z \geq \frac{1}{\sqrt[3]{R}},\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \right\}$$

Es: se $R \gg 1$ e $x \in Q \setminus Q_R \Rightarrow f(x) > f(P_+)$

$f(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$\Delta f(x) = \varphi''(|x|) + \frac{(n-1)}{|x|}\varphi'(|x|), \quad \Delta f \equiv 0$$

$$\varphi''(t) + \frac{(n-1)}{|x|}\varphi'(|x|)$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{(n-1)}{t}$$

$$\log|\varphi'| = -(n-1)\log t + k$$

$$\varphi'(t) = Bt^{-(n+1)} \qquad B \in \mathbb{R}$$

$\boxed{n=1}$ $\varphi(t) = Bt + C$ $(t>0)$

$\boxed{n=2}$ $\varphi(t) = B\log t + C$ $\log\sqrt{x^2+y^2}$

$\boxed{n\geq 3}$ $\varphi(t) = B't^{-n+2} + C$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

non definite nell'origine
$\Downarrow$
le uniche f armoniche def. nell'origine sono le costanti

- V sp. vettoriale, $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $[\vec{x}, \vec{y}] = \{ty + (1-t)x : 0 \leq t \leq 1\}$

Def: $C \subset V$ è convesso $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y \in C$ $[x,y] \subset C$

Oss: Intersezione di convessi è convessa

Prop: C convesso $\Leftrightarrow$ $\overbrace{\forall x_1,\dots,x_m \in C,\ \forall \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0 \ \text{tc} \ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C}^{\mathcal{P}(m)}$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$

combinazione convessa degli x_i

Dim: $(\Rightarrow)$ Suppongo di aver mostrato $\mathcal{P}_m$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = \lambda_0 \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i}}_{\in C} + \lambda_{m+1} x_{m+1} \in C$$

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \qquad \lambda_0 + \lambda_{m+1} = 1 \ , \qquad 1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$$

- Considero $\Omega \subset V$, V spazio vettoriale, Ω convesso

Def: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa $\Leftrightarrow$

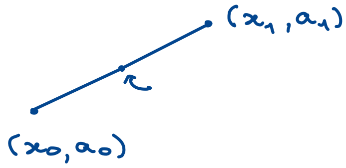
$\Leftrightarrow \forall x, y \in \Omega \ \forall \lambda \in [0,1] \ , \ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

$\mathcal{E}pi(f) = \{ (x,a) \in \Omega \times \mathbb{R} \ , \ a \geq f(x) \}$

epigrafico = punti che stanno sopra al grafico (compreso il bordo)

Prop: f convessa $\Leftrightarrow$ $epi(f) \subseteq V \times \mathbb{R}$ è convesso

Dim: $(\Rightarrow)$ (x_0, a_0) , $(x_1, a_1) \in epi(f)$, $f(x_0) \leq a_0$, $f(x_1) \leq a_1$



$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0) \leq t a_1 + (1-t) a_0$

$f(tx_1 + (1-t) y_0) \leq t \cdot a_1 + (1-t) \cdot a_0 \ \Rightarrow \ (tx_1 + (1-t)x_0, ta_1 + (1-t)a_0) \in \mathcal{E}pi(f)$

$(\Leftarrow)$ per esercizio

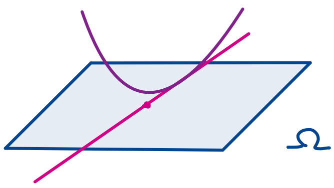
Oss: La convessità è una proprietà "unidimensionale"

Se Ω convesso, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f|_r$ è convessa $\forall r$ retta in V $\Rightarrow$ f convessa

Esercizio: Mostrare che $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa

$\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_m \in \Omega \ , \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0 \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$

$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$



intersezione del grafico con il piano

Prop: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso aperto

a) Se $f \in C^1(\Omega)$ allora f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in \Omega \ (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0$

b) Se $f \in C^2(\Omega)$ allora $b_1)$ f convessa $\Leftrightarrow H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

semidef. positiva

$b_2)$ f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x \in \Omega \ \ f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

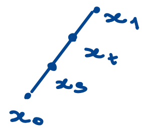
Dim: a) $x_0, x_1 \in \Omega$, $x_t \doteq t x_1 + (1-t) x_0$, $t \in (0,1)$, $\varphi(t) = f(x_t)$

f convessa $\Leftrightarrow$ φ convessa (qualunque siano x_0, x_1)

φ convessa $\Leftrightarrow$ φ' crescente (Analisi 1)

$(\Rightarrow)$ f convessa $\Rightarrow \varphi$ convessa $\Rightarrow \varphi'$ debolmente crescente $\Rightarrow \varphi'(1) - \varphi'(0) \geq 0$

$[\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)](x_1 - x_0)] \geq 0$



$(\Leftarrow)$ $t > s$ $(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_t - x_s) \geq 0$

$(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_1 - x_0)(t-s) \geq 0$

$\varphi'(x_t) \geq \varphi'(x_s) \Rightarrow \varphi'$ crescente $\Rightarrow \varphi$ convessa

b1) f convessa $\Leftrightarrow$ φ convessa $\forall x_1, x_2$, φ convessa $\Leftrightarrow \varphi''(t) \geq 0$ $\forall t$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_t) \cdot (x_1 - x_0)^{(i)}$$ comp. i-esima

$\nabla f(x_1)(x_1 - x_0)$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_t)(x_1 - x_0)(x_1 - x_0)^{(j)} = D^2 f(x_t)[x_1 - x_0]^2 = (x_1 - x_0)^t H_f(x_t)(x_1 - x_0)$$

Se f convessa $\Rightarrow \varphi''_{(t)} \geq 0$ $\forall t$ $\Rightarrow H_f$ è semi definita positiva

Viceversa se H_f è sempre def. semipositiva $\Rightarrow \varphi'' \geq 0$ $\forall x_0, x_1$ $\Rightarrow f$ è convessa

b2) per esercizio (o prox. volta) : si fa con Taylor + resto di Lagrange

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ cl. $C^2(\Omega)$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ convesso aperto

b2) f convessa $\Leftrightarrow$ $\forall x_0, x\in\Omega$, $f(x)\geq f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)$

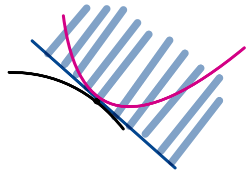
Dim: ($\Rightarrow$) si usa Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x)=f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}\underbrace{D^2f(\overset{\uparrow\,\xi\in[x_0,x]\subset\Omega}{\xi})}_{\text{semidef pos.}}[x-x_0]^2$$

$$\underbrace{\geq f(x_0)+\nabla f(x_0)(x-x_0)}_{h_{x_0}(x)}$$

($\Leftarrow$) $\{(x,y)\in\Omega\times\mathbb{R} : y\geq f(x)\}=Epi(f)$

Per vedere che $Epi(f)$ è convesso, basta vedere che è $\cap$ di convessi.



$Epi(f)=\bigcap_{x_0\in\Omega} Epi(h_{x_0})$ ← convessi

Teo: Se V sp. vettoriale; $\Omega\subset V$, Ω convesso aperto

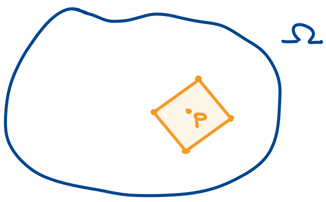
$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ convessa + localmente limitata $\Rightarrow$ f è continua (f è Loc. Lip.)

Oss 1: L'ipotesi di loc. limitatezza è necessaria

Es: Trovare una funzione lineare (quindi convessa) che non sia continua

Oss 2: Se $V=\mathbb{R}^n$ allora l'ipotesi di loc. lim. NON serve (è automaticamente verificata)

Dim (Oss2):



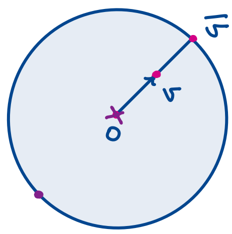
$\forall p\in\Omega$ $\exists r>0$: $\overline{B_r(p)}\subset\Omega$ ← palla per $|\cdot|_1$

$\forall x\in\overline{B_r(P)}$, $x\in co\big(\overbrace{\{P, P\pm\delta e_j, 1\leq j\leq n\}}^{F}\big)$ $\quad e_j=(0,\dots,\underset{\text{pos. } j}{1},\dots,0)$

co ↓ inviluppo convesso

$$x=\sum_{\xi\in F}\lambda_\xi\cdot\xi \qquad \sum_{\xi\in F}\lambda_\xi=1, \quad \lambda_\xi\geq 0$$

$$\Rightarrow f(x)\leq\sum_{\xi\in F}\lambda_\xi F(\xi)\leq M, \quad M=\max_{\xi\in F}\{f(\xi)\}$$



Dim (Teo): $P\in\Omega$ (Ω aperto) SPG: $f(P)=0$, $P=0$

Per hp $\exists r>0, M>0$: $\sup_{|x|\leq r} f(x)\leq M$. Voglio vedere che f è continua

$v\in B_r(0)$, $\bar v=r\underbrace{\frac{v}{|v|}}_{\text{versore}}$, $v=\lambda\bar v+\cancel{(1-\lambda)}\cdot 0$ con $\lambda=\frac{|v|}{r}\in[0,1]$

I) $f(v)\leq\lambda f(\bar v)+\cancel{(1-\lambda)}\overbrace{f(0)}^{=0}$, $f(v)\leq\frac{|v|}{r}M$

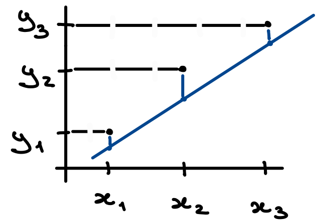
$0=\mu v+(1-\mu)(-\bar v)$ $\quad\mu=\frac{r}{|v|+r}$ $\Rightarrow$ $\overbrace{f(0)}^{=0}\leq\mu f(v)+(1-\mu)f(-\bar v)$

II) $f(v)\geq-\frac{1-\mu}{\mu}f(-\bar v)\geq-\left(\frac{|v|}{r}\right)f(-\bar v)\geq-\frac{|v|}{r}M$ $\Rightarrow$ $|f(v)|\leq\frac{M}{r}|v|$ ⇐ (I)+(II)

Es: Dare una stima per la costante di Lip su una palla centrata in 0 (event. più piccola!)

Oss: $f : \overset{\text{convesso}}{\Omega} \to \mathbb{R}$ convessa, $B = co(F)$ F insieme finito, $\sup_{x \in B} f(x) = \max_{\xi \in F} f(\xi)$

RETTA DI REGRESSIONE:



$x_1, \dots, x_n$ distinti tra loro, $y_1, \dots, y_n$ valori registrati

$y = ax + b$

$$\mathcal{E}(a,b) = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - (ax_j + b)\right)^2. \quad \text{Cerco } \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(a,b)$$

funzionale d'errore

Oss: $\mathcal{E}(a,b)$ è strett. convessa e il minimo esiste

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a,b) = -\sum 2(y_j - (ax_j + b)) \cdot (x_j) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a,b) = -\sum_{j=1}^{m} 2(y_j - (ax_j+b)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial^2 a}(a,b) = +\sum_{j=1}^{m} 2x_j^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial b}(a,b) = \sum_{j=1}^{m} 2 = 2m \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a \partial b} = 2\sum_{j=1}^{m} x_j$$

$$H_{\mathcal{E}}(a,b) = 2\begin{pmatrix} \sum x_j^2 & \sum x_j \\ \sum x_j & m \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix} \quad \text{con } u = (1, \dots, 1)$$

$$\det(H_{\mathcal{E}}) = |x|^2|u|^2 - 2(x \cdot u) \geq 0$$

Cauchy-Schwartz

Vale il $>$ perché $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, quindi $\vec{x}$ non è multiplo di u.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a,b) &= -\sum 2(y_j - (ax_j+b)) \cdot (x_j) \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a,b) &= -\sum_{j=1}^{m} 2(y_j - (ax_j+b)) \end{aligned}\right\}$$

Come trovare a e b? $\partial_a \mathcal{E} = 0$ $\quad \partial_b \mathcal{E} = 0$

$$\sum_j (y_j x_j - a x_j^2 - b x_j) = 0, \quad \sum_j (y_j - a x_j - b) = 0$$

$$x \cdot y - a|x|^2 - b x \cdot |u| = 0, \quad y \cdot u - a x \cdot u - b u^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y \cdot u \end{pmatrix}$$

Es: Finito il conto del sist. lineare

Es: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Ω aperto, f strettamente convessa $\left(f(tx_1 + (1-t)x_0) \overset{\forall t \in (0,1)}{<} tf(x_1) + (1-t)f(x_0)\right)$

Allora $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è localmente invertibile.

Esercizio (Funzioni implicite):

$f(x,y) = x^4+y^4-4xy$, $L_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}$ $(c\in\mathbb{R})$

1) Mostrare che L_c è compatto

2) Per quali valori di c L_c (è una curva regolare) si scrive loc. come grafico?

Sol: 1) $L_c = f^{-1}(\{c\})$ controimmagine di un chiuso

$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = +\infty \overset{(*)}{\Longrightarrow} L_c$ limitata

def: $\forall M>0 \ \exists R$ tc $|(x,y)|\geq R \Rightarrow f(x,y)\geq M$

(*) $c\in\mathbb{R}$ fissato, se $\lim_{(x,y)\to+\infty} f(x,y)=+\infty$, $\exists R: |(x,y)|\geq R$, $f(x,y)\geq c+1 \Rightarrow L_c\cap B_R^c(0)=\emptyset$

Es: Definire $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = \ell$, $\ell\in\mathbb{R}$

$x^4+y^4 \geq (\max\{|x|,|y|\})^4 \geq \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{16}$ mentre $|xy|\leq\sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y) \geq \frac{1}{16}r^4 - r^2 \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$

(Es: mostrare che $\lim_{t\to+\infty} f(t\vec{x}) = +\infty \not\Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x)=+\infty$)

L_c si scrive come grafico (è regolare) se c non è un valore critico

Def: c valore critico se $\exists(x,y)$: $\begin{cases}\nabla f(x,y)=0\\ f(x,y)=c\end{cases}$

Es: Trovare i punti critici e i valori critici (spoiler: 0 è un valore critico)

SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^n$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dim. $K \in \{1, \dots, n\}$ se $\forall x \in M$ $\exists U$ intorno di x ed $\exists \varphi : B_1 \to \mathbb{R}^n$ iniettiva e di classe C^1, dove $B_1 = \{ x \in \mathbb{R}^K : |x| < 1 \} \subseteq \mathbb{R}^K$ con $rk(D\varphi) = K$ e $\varphi(B_1) = M \cap U$

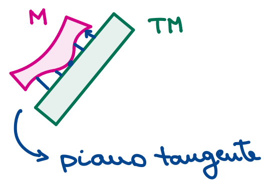
$Im(D\varphi(x)) = T_x M < \mathbb{R}^n$ sottospazio di dim. K si chiama spazio tangente a M in x

$(T_x M)^{\perp}$ si dice spazio normale a M in x

Esempio: $M = \Gamma_g \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad g : \Omega \to \mathbb{R}^{n-K}$ di classe C^1, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^K$ aperto, $\Gamma_g = \{ (x, g(x)) : x \in \Omega \}$

Oss / Es: Tutte le K-sottovarietà sono localmente grafici con una scelta opportuna delle coordinate. Infatti $\varphi : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ $\quad \varphi_1 : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$

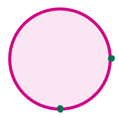
$\varphi_2 : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^{n-K}$



Dato che $rk(D\varphi) = K$, scegliendo una base opportuna posso supporre $D\varphi_1$ invertibile

$\Rightarrow \varphi_1$ (loc.) invertibile

$\psi : \varphi \circ \varphi_1^{-1}$ $\quad \psi(x) = (x, \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^n$ $\quad Im\, \psi = Im\, \varphi = \Gamma_{\varphi_2 \varphi_1^{-1}}$



Oss: $M = \{ f = c \}$ (luogo di zeri o curva di livello di f) $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-K}$

M è una K-varietà in tutti i punti dove $rk(Df) = n-K$ localmente $M = \Gamma_g$, $g : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^{n-K}$ funzione implicita con $f(x, g(x)) = c$

$T_x M = T_x \Gamma_g = \{ (v, Dg(x)v) : v \in \mathbb{R}^K \}$

Dalla relazione $D_x f + D_y f \cdot Dg = 0$ si ottiene che $Im(Df)^T = \langle \nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-K} \rangle = (TM)^{\perp}$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Cerco punti stazionari (max/min) di una funzione $g \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto ristretta al vincolo regolare $M = \{ f = 0 \}$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^K)$

Oss: La funzione può crescere solo lungo il normale al vincolo

La condizione per g in $x \in M$ diventa

$\nabla g(x) \in (TM)^{\perp} \Leftrightarrow \nabla g(x) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \nabla f_i(x)$. λ_i sono i moltiplicatori di Lagrange

Teo (Moltiplicatori di Lagrange):

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f_0 \in C^1(\Omega)$, $f = (f_1 \dots f_k) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$ $\quad M = \{ x \in \Omega : f(x) = c \}$

$x_0 \in M$ punto di massimo o minimo locale per $f_0|_M \Rightarrow \{\nabla f_i\}_{i \in \{0,\dots,k\}}$ sono linearmente dipendenti, cioè $\exists \lambda_i$ non tutti nulli tc $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0$

Oss: Se $rk(Df(x)) = k \Rightarrow \{\nabla f_i\}_{i \in \{1,\dots,k\}}$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ posso scrivere $\nabla f_0(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0)$

Il sistema $\begin{cases} f(x_0) = c \\ \nabla f(x_0) = \sum \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0) \end{cases}$ si chiama *sistema dei moltiplicatori di Lagrange*

Questa è solo una condizione necessaria.

Dim: Supponiamo x_0 minimo locale di $f_0|_M$, $c = 0$, e sia $B = B_r(x_0) = \{ x \in \Omega : |x - x_0| < r \}$ tale che $f_0(x_0) \le f_0(x)$ $\forall x \in \overline{B} \cap M$.

Dato $N > 0$ consideriamo $g_N(x) = f_0(x) + |x - x_0|^2 + N \sum_{i=1}^{k} f_i(x)^2$

$g_N(x) \ge f_0(x)$ e $g_N(x_0) = f_0(x_0) \Rightarrow x_0$ è minimo di g_N in $M \cap \overline{B}$.

Sia x_N il minimo assoluto di g_N in $\overline{B}$.

Per compattezza $x_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} x^* \in \overline{B}$, a meno di sottosuccessioni.

Inoltre $g_N(x_N)$, che è limitata, converge a $d \in \mathbb{R}$.

$$N \sum_{i=1}^{k} f_i(x_N)^2 = g_N(x_N) - f_0(x_N) - |x - x_0|^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} d - f_0(x^*) - |x^* - x_0|^2$$

Dividendo per N $\sum_i f_i(x_N)^2 \to \sum_i f_i(x^*)^2 = 0 \Rightarrow x^* \in M$

x_N è il min di g_N $\quad$ x_0 è il min di f_0

Scriviamo $f_0(x_N) + |x_N - x_0|^2 \le g_N(x_N) \le g_N(x_0) = f(x_0) \le f_0(x^*)$

$\downarrow$

$f_0(x^*) + |x^* - x_0|^2 \Rightarrow |x^* - x_0|^2 = 0$ cioè $x_0 = x^* = \lim_N g_N(x_N)$.

Per Fermat $\nabla g_N(x_N) = 0 = \nabla f_0(x_N) + 2(x_N - x_0) + 2N \sum_i f_i(x_N) \nabla f_i(x_N)$

Sia $\mu_0^N = 1$, $\mu_i^N = 2N f_i(x_N)$

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i^N \nabla f_i(x_N) = -2(x_N - x_0)$$

Normalizziamo e definiamo $\tilde{\mu}_i^N = \dfrac{\tilde{\mu}_i}{\sqrt{\sum_j \mu_j^{N^2}}} \in [-1, 1]$, $\tilde{\mu}_i^N \to \lambda_i^*$ tc $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i^{*2} = 1$

$\sqrt{\sum_j \mu_j^{N^2}} \to \ge 1$

$$\sum_i \tilde{\mu}_i^N \nabla f_i(x_N) = -\frac{2 \cdot (x_N - x_0)}{\sqrt{\sum_j \mu_j^{N^2}}} \xrightarrow[N]{} 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0 \quad \left(\text{con } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i^2 = 1\right)$$

Es: $f(x)=\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x)=|x|^2-1$ (per casa: $|x|^2-R^2$) $M=\{g=0\}=\partial B_1$

Trovare max/min di $f|_M$.

Sistema dei M.L.

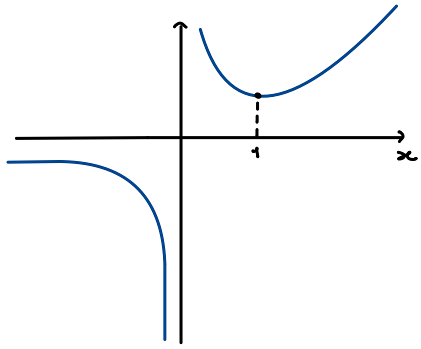
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=e^{x_i} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}=2x_i$$

$$\begin{cases} \sum_i x_i^2 = 1 \\ e^{x_i}=2\lambda x_i \ \forall i \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e } x_i \neq 0 \ \forall i$$

Dividendo per x_i ho $2\lambda = \frac{e^{x_i}}{x_i}=\frac{e^{x_j}}{x_j}$ $\forall i,j$, $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}$

$-1\leq x_i \leq 1$ $\forall i$, $\varphi|_{[-1,1]}$ iniettiva

$$\varphi'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$



$\Rightarrow x_i = x_j$ $\forall i$ (Qui mi è servito $R=1$)

da $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ ottengo $x_i=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall i$ o $x_i=-\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall i$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=ne^{\frac{1}{\sqrt{n}}} > f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=ne^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

max assoluto   min assoluto

DOMANDE TIPICHE IN UNO SCRITTO (sui moltiplicatori di Lagrange)

$M = \{ g(x) = 0 \}$ sottovarietà/vincolo, $g = (g_1, \dots, g_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(k < n)$

1. Quali sono i punti regolari di M ($x \in M$ tc $rk(Dg(x)) = k$)
2. Trovare $T_x M$ o $(T_x M)^\perp$ ($(T_x M)^\perp = \langle \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_k(x) \rangle$ → spazio generato)
3. Trovare max/min di $f|_M$ con $f \in C^1(\Omega)$

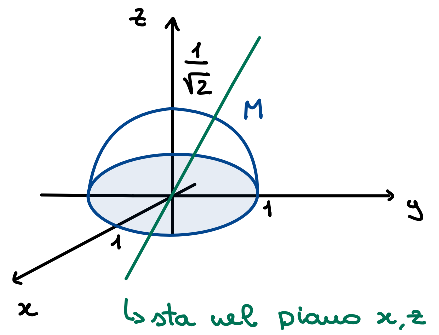
I punti in cui f o g non è C^1 li "teniamo da parte" e, se sono in numero finito, li confron. con il max o min trovati e così troviamo max o min assoluti

ESEMPI:

1. $f(x,y,z) = y(x+z)$ $\quad M = \{ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1,\ z \geq 0 \}$ ci definisce un compatto di $\mathbb{R}^n$

(ellissoide "schiacciato" sulla dim z)

Domanda 3: Max/min di f



Esiste per Weierstrass

Cerchiamo i punti critici in $\mathring{M}$ (parte interna)

$\nabla f = (y, x+z, y)$ $\quad \nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0$ PUNTI DI SELLA

$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ autovalori: $0, \lambda, -\lambda$ (calcolare x es.)

Max e min sono su ∂M; cerchiamo i punti critici sul vincolo $\underbrace{x^2 + y^2 + 2z^2}_{g(x,y,z)} = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z \geq 0 \\ y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ y = 2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \cancel{\lambda} x = 2 \cancel{\lambda} z \qquad \frac{1}{2} \nabla g = (x, y, 2z)$$

$\lambda = 0 \Rightarrow y = x + z = 0 \Rightarrow f = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f = 0$

Posso supporre $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

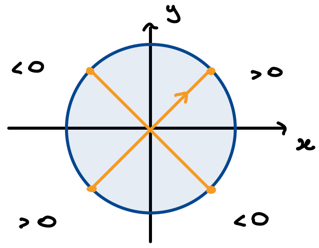
$$\begin{cases} x = 2z \\ \frac{x+z}{y} = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{x}{2} \\ y^2 = x(x+z) = \frac{3}{2} x^2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} = 3x^2 = 1$ $\quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 0 \leq z = \frac{x}{2}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Non abbiamo guardato la calotta elissoidale



Guardiamo $M \cap \{z=0\} = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$, $f(x,y,0) = x \cdot y$

max $f\big|_{M\cap\{z<0\}}$ è assunto in $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $f = \frac{1}{2}$

min in $\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $f = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow$ max $f = \frac{\sqrt{6}}{4}$ e min $f = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

② Sia $\Gamma = \{x^2+y^2+z^2=1\} \cap \{x^2+y^2=x\}$

i) Dire se Γ è una curva regolare

ii) Calcolare la minima distanza di Γ da $(0,1,0)$

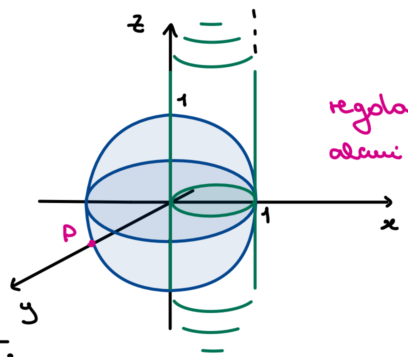
Sol: i) $\Gamma = \{g_1=0,\ g_2=0\}$

$g_1 = x^2+y^2+z^2-1 \qquad g_2 = x^2+y^2-x$

$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z) \qquad \nabla g_2 = (2x-1, 2y, 0)$

$z \neq 0$ $\quad \nabla g_1$ e ∇g_2 lin. indip.

$z = 0 \Rightarrow x=1, y=0 \qquad \nabla g_1 = (2,0,0) \parallel \nabla g_2 = (1,0,0)$



regolare meno alcuni punti

ii) max / min di $f(x,y,z) = |(x,y,z) - P| = \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$

è equivalente a cercare max / min di $f^2\big|_\Gamma$

$f^2(x,y,z) = h(x,y,z) = x^2+(y-1)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2-2y+1 \overset{\text{su } \Gamma}{=} -2y+2$

È equivalente a cercare max / min di $-y\big|_\Gamma$

$w(x,y,z) = -y \qquad \nabla w = (0,-1,0)$

$\nabla w = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \qquad \nabla g_1 = (2x, 2y, 2z) \qquad \nabla g_2 = (2x-1, 2y, 0)$

$(x,y,z) \neq (1,0,0) \qquad\qquad w = (1,0,0) = 0$

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2(2x-1) = \lambda_2(2x-1) \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ -1 = 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 2\lambda_2 y \\ 0 = 2\lambda_1 z \rightarrow z = 0 \text{ o } \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2+y^2-x = 0 \rightarrow y = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad w = \frac{1}{2} \qquad$ MAX

$P_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad w = -\frac{1}{2} \qquad$ MIN

$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad w = \frac{1}{2} \qquad$ MAX

$P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad w = -\frac{1}{2} \qquad$ MIN

③ Max / min di $f(x) = \sum_{i<j} (x_i^2 + x_j^2)^{1/2}$ su $\partial B_R = \{ |x|^2 - R = 0 \}$ $\quad g(x) = \sum_i x_i^2 - R$

$f > 0$ su ∂B_R e ammette max / min per W

sistema M.L.

$$\begin{cases} \sum x_i^2 = R^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x_i^2 = R^2 \\ \sum_{j \neq i} \dfrac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = 2\lambda x_i \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Supponiamo $x_i \neq 0 \Rightarrow 2\lambda = \sum_{j \neq i} \dfrac{1}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$

se $x_i \neq 0 \; \forall i \rightarrow \sum_{j \neq i} \dfrac{1}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \sum_{j \neq k} \dfrac{1}{\sqrt{x_k^2 + x_j^2}} \quad \forall i, k$

Guardiamo il caso n = 3 :

Supponiamo $x \neq 0, \; y \neq 0, \; z \neq 0$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \rightarrow x^2 + z = y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = R^2/3$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{6} \cdot R$$

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + z^2}$ $\qquad f(0, 0, \pm R) = 2R$

e permutazioni

$$\begin{cases} x \left(\cancel{\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} +} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) = 2\lambda x \\ \cancel{y} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 2\lambda \cancel{y} \\ \cancel{z} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 2\lambda \cancel{z} \end{cases}$$

$x = 0$ possiamo supporre $y \neq 0, \; z \neq 0$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \qquad y^2 = z^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(0, \pm\frac{R}{\sqrt{2}}, \pm\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = (1 + \sqrt{2}) R$$

$(0, 0, \pm R)$ $\qquad 2R < (1 + \sqrt{2}) R < \sqrt{6} R$

Es: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

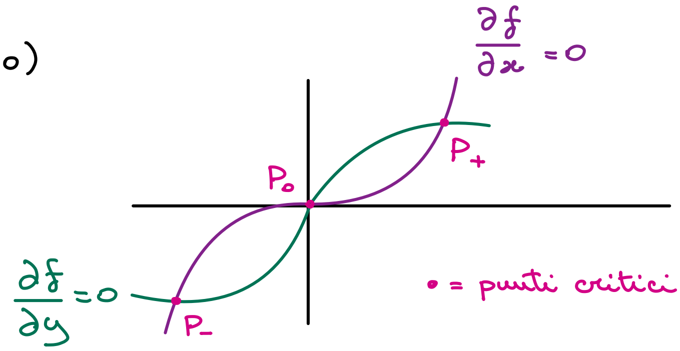
$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ linea di livello

- L_c è un compatto $\forall c \in \mathbb{R}$ (conseguenza di $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$)
- Oss/Es: Mostrare che f ha minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$
- Quando L_c è una sottovarietà (di dim 1)?

Serve che se $p \in L_c$ allora $\nabla f(p) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = 4y^3 - 4x$$



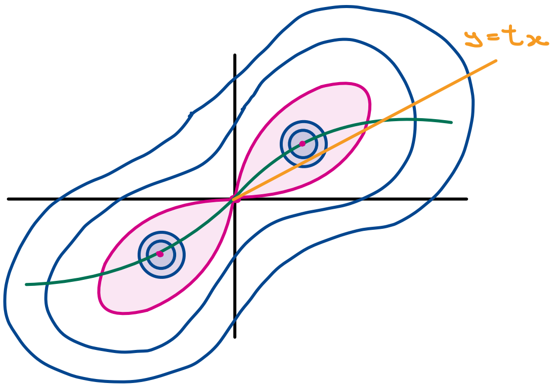
$(0,0)$ è un punto di sella perché $f(x,y) = -4xy + o(x^2+y^2)$ per $(x,y) \to (0,0)$

$f(P_+) = f(P_-) = -2$ sono punti di minimo, $f(x,y) = f(-x,-y)$

- $c < -2 \Rightarrow L_c = \emptyset$
- $c = -2 \Rightarrow L_c = \{P_+, P_-\}$
- $-2 < c < 0 \Rightarrow L_c$ è una sottovarietà regolare

L_0 non è una sottovarietà regolare

- $c > 0 \Rightarrow L_c$ è una curva regolare



Es: Parametrizzare la curva L_0 mediante l'intersezione con $y = tx$

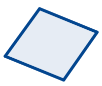
Es: $(S)\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 & (1) \\ x + y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$

Γ punti che soddisfano S

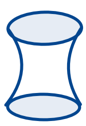
Trovare max e min di $f(x,y,z) = z$ su Γ

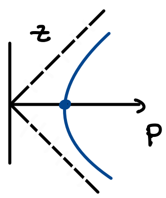
(1) v (2) non definiscono un compatto

(2) Definisce un piano ortogonale $(1,1,2)$



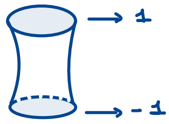
(1) In coordinate cilindriche $\rho^2 = 1 + z^2$





$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1+z^2 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$2|z| = |x+y| \le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+z^2}$$



$$4z^2 \le 2(1+z^2) \Rightarrow z^2 \le 1$$

Oss: L'insieme Γ è una sottovarietà di dimensione 1

$$\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-z^2-1 \\ x+y+2z \end{pmatrix}$$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \Gamma = \{\phi = 0\}$$

$$\forall p \in \Gamma \quad rk(D\phi(p)) = 2$$

$$D\phi(p) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

se $P \in \Gamma \cap \{x=y\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=y \\ x+y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=-x \Rightarrow x^2+x^2-(-x)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$P_+ = (1,1,-1)$$

$$P_- = (-1,-1,1)$$

$$D\phi(P_+) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 $\Rightarrow D(P_-)$ ha rango 2

Γ è una curva regolare

$$f(x,y,z) = z, \quad \varphi_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1, \quad \varphi_2(x,y,z) = x+y+2z = 0$$

Se (x,y,z) è punto staz. di f vincolato a Γ allora $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla}\varphi_1 + \lambda_2 \vec{\nabla}\varphi_2 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ incognite

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla\varphi_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad \nabla\varphi_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 2x\lambda_1 + \lambda_2 & \mathrm{I} \\ 0 = 2y\lambda_1 + \lambda_2 & \mathrm{II} \\ 1 = -2z\lambda_1 + 2\lambda_2 & \mathrm{III} \\ x^2+y^2-z^2 = 1 & \mathrm{IV} \\ x+y+2z = 0 & \mathrm{V} \end{cases}$$

$\mathrm{III} - (\mathrm{II} + \mathrm{I}) \to (-2z-2x-2y)\lambda_1 = 1$

$2(x-y)\lambda_1 = 0 \leftarrow (\mathrm{I} - \mathrm{II})$

Se $\lambda_1 = 0$: $\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} \to \lambda_2 = 0 \\ \mathrm{III} \to \lambda_2 = 1/2 \end{array}\right\}$ no sol. $\Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x \neq y$

$(x,y,z) \in \Gamma \cap \{x=y\} \Rightarrow (x,y,z) \in \{P_+, P_-\}$ definiti prima

$\Rightarrow P_+$ è punto di massimo, P_- è punto di minimo

<u>Es:</u> $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ matrici reali $n \times n$ (sp. vettoriale di dim n^2)

$SL(n) = \{A \in \mathcal{M} : \det(A) = 1\}$ è una sottovarietà di dim n^2-1

$\phi(A) \doteq \det(A)$, $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$

Basta verificare che $\forall A \in SL(n)$, $D\phi(A)$ ha rango 1

<u>Lemma:</u> (i) $\det(I + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2)$

(ii) $\underbrace{\det(A+\varepsilon H)}_{\phi(A+\varepsilon H)} = \det(A)(1+\varepsilon \boxed{\operatorname{tr} A^{-1}} H) + O(\varepsilon^2)$ se $\det A \neq 0$ ($\Rightarrow A$ invertibile)

(iii) $D\phi(A)[H] = \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}H)$

<u>Dim:</u> (iii) segue da (ii)

Perché $\phi(A+\varepsilon H) = \phi(A) + \varepsilon D\phi(A)[H] + o(\varepsilon)$

$$= \phi(A) + \varepsilon \det(A) + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + o(\varepsilon)$$

(ii) segue da (i)

Perché $\det(A+\varepsilon H) = \det(A(I+\varepsilon A^{-1}H)) \overset{\text{Binet}}{=} \det A \cdot \det(I + \varepsilon A^{-1}H)$

$$\overset{(i)}{=} \det A\,(1+\varepsilon \operatorname{tr}(A^{-1}H)) + O(\varepsilon)$$

Basta dimostrare (i):

$\det(\overbrace{I+\varepsilon H}^{B})$, $b_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon h_{ij}$, $\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\overbrace{\varepsilon(\sigma)}^{\text{segno della permutazione}}} b_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n,\sigma(n)} = (*)$

Se $\sigma \in S_n$ e $\sigma \neq id$ allora l'addendo corrispondente è $O(\varepsilon^2)$

$(*) = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn} + O(\varepsilon^2) = (1+\varepsilon h_{11}) \cdot \ldots \cdot (1+\varepsilon h_{nn}) + O(\varepsilon^2) =$

$$= 1 + \varepsilon(h_{11} + \ldots + h_{nn}) + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2) \qquad \square$$

$D\phi(A)[H] = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}A)$

Se $A \in SL(n)$, $\det(A) = 1$

$H \mapsto tr(A^{-1}H)$ è non deg. e quindi di rango 1

$T_{Id} SL(n) = \{ H \in \mathcal{M} : D\Phi(Id)[H] = 0 \} = \{ H \in \mathcal{M} \cdot tr(H) = 0 \}$

$T_A SL(n) = \{ H \in \mathcal{M} : tr(A^{-1}H) = 0 \}$

Es: Mostrare che $O(n) = \{ A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : {}^tA \cdot A = Id \}$ è una sottovarietà di $\mathcal{M}$

Sugg: $\Psi(A) = {}^tAA$, $\Psi : \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \longrightarrow Sym(n)$

$\uparrow$
$\frac{n(n+1)}{2}$

$\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

spoiler: $T_{Id} O(n) = \} H : H + {}^tH = 0 \{$

Es: $O(n) = \{ {}^tAA = Id \}$ è una sottovarietà di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)$, $\dim \mathcal{M} = n^2$

$\psi : A \to {}^tAA$

$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} \to Sym(n)$

$D\psi(A)$ ha rango massimo $\forall A \in O(n)$.

$\psi(A+H) = {}^t(A+H)\cdot(A+H) = {}^tAA + {}^tHA + {}^tAH + o(H) = \psi(A) + D\psi(A)[H] + o(H)$

$D\psi(A)[H] = {}^tHA + {}^tAH$

$D\psi(A) : \mathcal{M}(n\times n) \longrightarrow Sym(n)$

Devo verificare che $D\psi(A)$ è surgettiva.

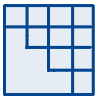
$\frac{1}{2}({}^tS\,{}^tAA + {}^tAAS) = S$

① $D\psi(A)$ è surgettivo: $\forall S \in Sym(n)$ $\exists H$, $D\psi(A)[H] = S$, ${}^tHA + {}^tAH = S$

Basta prendere $H = \frac{1}{2}AS$

$O(n)$ è una sottovarietà di $\dim(\mathcal{M}(n\times n)) - \dim(Sym(n))$, $O(n) = \psi^{-1}(Id)$

$\dim Sym(n) = 1+2+3+\ldots+n = \frac{(n+1)n}{2}$



$\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Es: $O(2)$, $T_{Id}O(2) = \{ {}^tH + H = 0 \}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ genera $T_{Id}O(2)$

$Id\, O(3)$ è generato da $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es: Trovare max e min di $\phi(A) \doteq \det(A)$ sull'insieme $M = \{ A \in \mathcal{M} : tr({}^tAA) = n \}$

$g : \mathcal{M}(n\times n) \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longmapsto tr({}^tAA)$

Oss: $M = g^{-1}(n)$

Considero $\phi_{|M}$. Studio il vincolo M, $A = (A_1, \ldots, A_n)$ vettori colonna

$\underbrace{{}^tAA}_{M} = \begin{pmatrix} {}^tA_1 \\ \vdots \\ {}^tA_n \end{pmatrix} (A_1, \ldots, A_n)$, $m_{ij} = {}^tA_i A_j = A_i \cdot A_j$

$tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \sum |A_i|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$, $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $M = \partial B_{\sqrt{n}}(0)$ in $\mathcal{M}(n\times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

È una varietà regolare compatta.

Se $(A_1, \dots, A_n) \in M \Rightarrow (\underbrace{-A_1, A_2, A_3, \dots, A_n}_{\tilde{A} \in M})$, $\phi(A) = -\phi(\tilde{A})$

Per cercare il max posso restringermi alle matrici t.c. $\det(A) \neq 0$

Se A è punto di max/min vincolato, allora:

$$\begin{cases} D\phi(A)[H] = \lambda Dg(A)[H] \quad \forall H \in \mathcal{M} & \text{I} \\ g(A) = n & \text{II} \end{cases}$$

I $\det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H) = \lambda \operatorname{tr}({}^tHA + {}^tAH) \quad \forall H \in \mathcal{M}$, $H = A$

$\det(A) n = \lambda \operatorname{tr}({}^tAA + {}^tAA)$

$\det(A) n \overset{\text{II}}{=} \lambda 2n \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\det(A)$

$g(A) = \operatorname{tr}({}^tAA) = n$

$H = AK$, $K \in \mathcal{M}(n \times n)$ arbitraria, $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertibile

$\cancel{\det(A)}\operatorname{tr}(K) = \frac{1}{2}\cancel{\det(A)}\operatorname{tr}({}^tK\,{}^tAA + {}^tAAK) \quad \forall K \in \mathcal{M}(n \times n)$

$\operatorname{tr}(K) = \operatorname{tr}({}^tAAK) \quad \forall K \in \mathcal{M}(n \times n)$

$\operatorname{tr}((I - {}^tAA)K) = 0 \quad \forall K \in \mathcal{M}(n \times n)$

- In particolare vale per $\bar{K} = I - {}^tAA$ Oss: $\bar{K} = {}^t\bar{K}$

$\operatorname{tr}((I - {}^tAA)^2) = \operatorname{tr}({}^t\bar{K}\bar{K}) = 0 \Rightarrow I - {}^tAA = 0 \Rightarrow A \in O(n)$

Es per casa: $R_1, \dots, R_n$ positivi fissati, $M = \{A \in \mathcal{M}(n \times n) : |A_i|^2 = R_i^2\}$, $A = (A_1, \dots, A_n)$

Determinare massimo e minimo di $\phi(A) = \det(A)$ ristretto a M.

Cauchy-Schwartz via Lagrange

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow x \cdot y$$

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1, |y|^2 = 1\}$

1) Mostrare che M è varietà regolare

2) Determinare max e min di $\psi_{|M}$

$M = g^{-1}(1,1)$ $\quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = \begin{pmatrix} |x|^2 \\ |y|^2 \end{pmatrix}$, $Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,{}^tx & 0 \\ 0 & 2\,{}^ty \end{pmatrix}$

$Dg(x, y)$ ha rango massimo $\forall (x, y) \in M$

$|x|^2 = 1 \Rightarrow {}^t x \neq \underline{0} \Rightarrow {}^t x$ ha comp $\neq 0$ $\Big\}$ Questo permette di individuare un minore

$|y|^2 = 1 \Rightarrow {}^t y \neq \underline{0} \Rightarrow {}^t y$ ha comp $\neq 0$ $\Big\}$ 2×2 con det $\neq 0 \Rightarrow$ rango $Dg(x,y) = 2$

2) Osservo che M è varietà compatta $\Rightarrow$ max e min esistono

(*) $D\Psi(x,y) = \lambda_1 Dg_1(x,y) + \lambda_2 Dg_2(x,y)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x,y) = y_k \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y_k}(x,y) = x_k$$

$$\Psi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad g_1(x,y) = |x|^2, \quad g_2(x,y) = |y|^2$$

$$\underset{1\le k\le n}{(*)} \quad \begin{cases} y_k = \lambda_1 2 x_k + \lambda_2 \cdot 0 \\ x_k = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 2 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 2\lambda_1 \sum x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 2\lambda_2 \sum y_k^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

a meno che il prodotto sia nullo

$c = 2\lambda_1 = 2\lambda_2$

$y_k = c x_k \quad \forall k \quad \Rightarrow x_k = c^2 x_k$

$x_k = c y_k \quad \forall k \quad \Rightarrow c \in \{0, 1, -1\}$

o $x = y = 0$

oppure $x_k = y_k \quad \forall k$

oppure $x_k = -y_k \quad \forall k$

Ritrovo Cauchy – Schwartz: $\langle x \cdot y \rangle \le |x| \cdot |y|$ e vale l'$=$ $\Leftrightarrow$ x è multiplo di y

$\square$

Tra tutte le scatole a forma di parallelepipedo di superficie esterna assegnata trovare quella di volume massimo (3d)

$$\begin{cases} Vol(x,y,z) \qquad x, y, z \\ \text{Sup esterna} = xy + yz + xz = a^2 \\ x>0, y>0, z>0, Q_+ \end{cases}$$ $\leftarrow$ aperto

Ci interessa il massimo.

$\Gamma = \{(x,y,z) : xy + yz + xz = a^2\}$, $\Gamma \cap Q_+$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$

$g(x,y,z) = xy + yz + xz$ tutte le comp. sono non nulle

$$\nabla g(x,y,z) \neq \underline{0} \quad \forall (x,y,z) \in \Gamma \cap Q_+, \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

$\Gamma \cap Q_+$ è chiuso, non è compatto

Se $(x,y,z) \in \Gamma \cap Q_+$ e una delle coordinate è più grande di R allora

$xyz \leq \frac{a^4}{R}$, infatti se $x > R$, $xz \leq a^2 \Rightarrow z \leq \frac{a^2}{x}$, $xy \leq a^2 \Rightarrow y \leq \frac{a^2}{x}$

$xyz \leq x \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{a^2}{x} \leq \frac{a^4}{x} \leq \frac{a^4}{R}$

$\max_{\Gamma \cap Q_+} Vol = \max_{\Gamma \cap Q^+_R} Vol$, $\quad Q^+_R = \{(x,y,z) \in Q^+ : |x| \leq R, |y| \leq R, |z| \leq R\}$

Se P è massimo allora $\nabla Vol(P) = \lambda \nabla g(P)$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + xz = a^2 \end{cases}$$

4 equazioni in 4 incognite. Sommando si ottiene:

$a^2 = yz + xz + xy = \lambda(2x + 2y + 2z) \quad \lambda \neq 0$

$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} \quad \frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z} \Rightarrow (x+z)y = (y+z)x \Rightarrow zy = zx \Rightarrow x = y$

Con lo stesso metodo si ottiene $y = z$.

Es$_1$: Stesso problema con un parallelepipedo senza coperchio

Es$_2$: Trovare la lattina di vol massimo (e sup. esterna assegnata)

ESERCIZI (tipici da compito)

Es 1: Trovare max e min di $f(x,y,z) = xy^2z^3$ su $D = \{ |x|+|y|+|z| \leq 1 \}$

D è compatto $\Rightarrow$ Massimi e minimi esistono

(1) Cerco punti stazionari liberi per f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

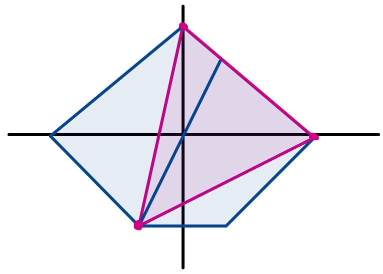
$\nabla f(x,y,z) \overset{?}{=} 0$: se $\{y=0\} \cup \{z=0\}$

Ma tali punti critici non sono né minimi né massimi (nemmeno locali).

In $int(D)$ non cadono punti di massimo o minimo relativo.

(2) Max e min di f ristretti a $S = \{ |x|+|y|+|z| = 1 \}$ ottaedro regolare

Oss$_1$: Per determinare max e min di f su S basta determinare massimi e minimi di f su



$S \cap Q = \{(x,y,z) : x+y+z = 1 \, , \, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

$(x,y,z) \in S \Rightarrow |f(x,y,z)| = f(|x|, |y|, |z|)$

Oss$_2$: Dato che $f=0$ su $\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\} \Rightarrow$ basta cercare max e min di f vincolata a $x+y+z=1$ con $x>0, y>0, z>0$

$g(x,y,z) = x+y+z \quad , \quad \nabla g \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \begin{cases} y^2z^3 = \lambda \\ 2xyz^3 = \lambda \\ 3xy^2z^2 = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

$x>0$
$y>0$
$z>0$

$\boxed{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \rightarrow y^2z^3 = 2xyz^3 \, , \, y = 2x$

$\boxed{\mathrm{I}+\mathrm{III}} \rightarrow y^2z^3 = 3xy^2z^2 \, , \, z = 3x$

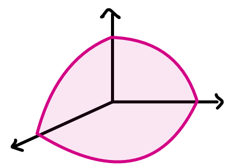
Ottengo la terna $(x, 2x, 3x) \Rightarrow x+2x+3x = 1 \, , \, x = 1/6 \, , \, y = 1/3 \, , \, z = 1/2$

$\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ è massimo di $f|_{S \cap Q}$

Conclusione: $\max_D f = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\min_D f = -f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ $\square$

Es 2: $f(x,y,z) = \log x + 2\log y + 3\log z$, $S = \mathbb{Q}_+ \cap \{x^2+y^2+z^2 = 12\}$

Determinare inf e sup di $f_{|S}$



Oss: S non è compatta ma $\lim\limits_{\underbrace{(x,y,z)}_{\in S} \to p \in \partial S} f(x,y,z) = -\infty \Rightarrow \inf f_{|S} = -\infty$

$\exists \max f_{|S} = \max f_{|S_\delta}$ con $S_\delta = S \cap \{x \geq \delta,\ y \geq \delta,\ z \geq \delta\}$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/x \\ 2/y \\ 3/z \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{troviamo il sistema:}$$

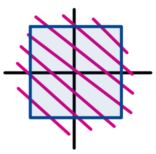
$$\begin{cases} 1/x = 2\lambda x \\ 2/y = 2\lambda y \\ 3/z = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x^2 \\ 2 = 2\lambda y^2 \\ 3 = 2\lambda z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{sommando ottengo}} \begin{cases} \lambda = 1/4 \\ x = \sqrt{2} \\ y = 2 \\ z = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \text{Dunque } (\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}) \text{ è il max } f_{|S}$$

Es 3: Consideriamo il vincolo $D = \{x^4+y^4 \leq 1\}$ e calcoliamo max e min per $f(x,y) = x + 8y$

D è compatto $\Rightarrow$ ci sono massimi e minimi.

$D = \text{int}(D) \cup \partial(D)$ e $\partial(D)$ è una sottovarietà regolare: $\partial(D) = \{(x,y) \mid x^4+y^4 = 1\}$

- int(D): $f(x,y)$ è una funzione lineare e quindi non ci sono punti stazionari
- ∂D:



Per cercare punti critici stazionari vincolati a ∂D abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4x^3 \\ 8 = \lambda 4y^3 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} x = \lambda 4x^4 \\ 8y = \lambda 4y^4 \end{matrix} \rightsquigarrow x + 8y = \lambda 4(x^4+y^4) \rightsquigarrow x + 8y = \lambda 4$$

Dividendo ottengo $\frac{x^3}{y^3} = \frac{1}{8} \rightsquigarrow 2x = y \rightsquigarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{1/17} \\ y = 2\sqrt[4]{1/17} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt[4]{1/17} \\ y = -2\sqrt[4]{1/17} \end{cases}$

$\Rightarrow \max f_{|D} = 17\sqrt[4]{\frac{1}{17}}$ e $\min f_{|D} = -17\sqrt[4]{\frac{1}{17}}$

Es 4: Trovare massimi e minimo di $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$ su $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

D è compatto $\Rightarrow \max f_{|D}$ e $\min f_{|D}$ esistono.

Come prima:
- Studio f in int(D)
- Studio f su ∂D

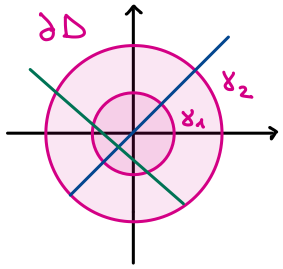
Oss: Il dominio di f è $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ e contiene D; f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$

Oss: Poiché il denominatore di f non cambia mai segno, per semplificare le cose, si possono cercare massimi e minimi su $g(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$

↳ forma quadratica def. positiva

- int(D): $\nabla g(P) \neq 0 \quad \forall P \in \text{int}(D)$

- $\partial(D)$: Uso moltiplicatori di Lagrange



$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$

- γ_1: scrivo il sistema $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+4y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x+y = \lambda 2x \\ x+4y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-2\lambda)x + y = 0 \\ x + (4+2\lambda)y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 1 \\ 1 & 4-2\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-2\lambda)(4-2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 - 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{4} \Rightarrow \lambda_+ = \frac{6+2\sqrt{2}}{4}, \quad \lambda_- = \frac{6-2\sqrt{2}}{4}$$

- γ_2: il sistema è: $\begin{cases} 2x+y = \lambda 2x \\ x+4y = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$

Svolgendo i calcoli si ottiene $y = (2\lambda_+ + 1)x$, $y = (2\lambda_- + 1)x$

TEORIA DELLA MISURA (introduzione)

Obiettivo: Misurare il "volume" di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, o integrare funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con nozioni stabili per passaggio al limite

Def: X insieme, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (insiemi che possiamo misurare), $m: \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ (funzione misura), $(X, \mathcal{E}, m)$

Def: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice σ-algebra (va bene anche numerabile; stabile per $\cup$ e $\cap$) se:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{E}$ (in part. $X \in \mathcal{E}$)
- $E_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_i^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$ (in part. $\bigcap_i E_i \in \mathcal{E}$)

Es: $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$

Oss: L'intersezione, anche infinita, di σ-algebre è una σ-algebra

In particolare, dato $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(X)$ possiamo definire $\sigma A(\mathcal{S}) = \{\cap \mathcal{E} : \mathcal{E}\ \sigma\text{-alg.}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}\}$

Es: X sp. metrico (o topologico), $\mathcal{A} = \{$aperti in $X\}$, posso considerare $\mathcal{B}(X) = \sigma A(\mathcal{A})$ la σ-alg dei Boreliani, o insiemi di Borel

Oss: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \overset{\subseteq}{\neq} \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ per un fatto di cardinalità:

$|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$ dove $c = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$

$|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| \overset{\text{non ovvio}}{=} |\mathcal{A}| \overset{\text{ovvio}}{=} c$ gli aperti sono unioni num. di intervalli aperti

Def: $\mathcal{E}$ σ-algebra, $m: \mathcal{E} \to [0, +\infty]$

- m è σ-subadditiva se $m(\bigcup_i E_i) \leq \sum m(E_i)$ $\forall E_i \in \mathcal{E}$
- m è σ-additiva se $m(\cup E_i) = \sum m(E_i)$ se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Una tale m si dice **MISURA** su X e $(X, \mathcal{E}, m)$ si dice **SPAZIO DI MISURA**

Oss: m misura $\Rightarrow$

- $m(\emptyset) = 0$
- m σ-subadditiva
- m monotona: $A \subseteq B \Rightarrow m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$
- $E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow m(\bigcup_i E_i) = \lim_i m(E_i) = \sup_i m(E_i)$
- $E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow m(\bigcap_i E_i) = \lim_i m(E_i) = \inf_i m(E_i)$

Def: $N \in \mathcal{E}$ tc $m(N) = 0$ si dice TRASCURABILE

Oss: N trascurabile, $N' \subseteq N$, $N' \in \mathcal{E}$ $\Rightarrow N'$ trascurabile

Def: $(X, \mathcal{E}, m)$ si dice COMPLETO, se $N' \subseteq N$, N trascurabile $\Rightarrow N' \in \mathcal{E}$

METODO DI CARATHÉODORY

Def: $m: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ σ-subadditiva si dice MISURA ESTERNA

Teo: X insieme, m misura esterna, $E \subseteq X$ si dice misurabile se:

$$\boxed{m(A) = m(E \cap A) + m(A \setminus E) \quad \forall A} \qquad (A \subset X)$$

Allora $\mathcal{E}_m = \{ E \subseteq X : E \text{ misurabile} \}$ è una σ-algebra, $m|_{\mathcal{E}_m}$ è una misura e $(X, \mathcal{E}_m, m|_{\mathcal{E}_m})$ è uno spazio completo.

Teo: $(X, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura $\Rightarrow$ $m^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definita da

$m^*(E) = \inf \{ m(E) : F \supseteq E, F \in \mathcal{E} \}$ è una misura esterna e $m^*|_{\mathcal{E}} = m$.

Inoltre $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{m^*}$ e $(X, \mathcal{E}_{m^*}, m^*|_{\mathcal{E}_{m^*}})$ è uno spazio di misura completo che estende $(X, \mathcal{E}, m)$

Oss: $(X, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura, $\overline{\mathcal{E}} = \{ E \cup N' : E \in \mathcal{E}, N' \subseteq N, N \text{ trascurabile} \}$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{E}$. $\overline{m}: \overline{\mathcal{E}} \to [0, +\infty]$ def. da $\overline{m}(E \cup N') = m(E)$ è una misura che estende m, inoltre $(X, \overline{\mathcal{E}}, \overline{m})$ è completo ed è la più piccola estensione completa; non è detto che $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{m^*}$

MISURA DI LEBESGUE

$X = \mathbb{R}^n$, $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$ rettangolo, $m^*(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ per $i \neq j$ plurirettangolo numerabile

Oss: Tutti gli aperti sono plurirettangoli numerabili

$m^*(P) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(R_i)$, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ definisco, $m^*(E) = \inf \{ m^*(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo numerabile} \}$

Prop: m^* è σ-subadditiva e si dice <u>misura esterna di Lebesgue</u>

Def: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{m^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e

$\mathcal{L} = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ si dice <u>misura di Lebesgue</u>

Prop: I rettangoli sono misurabili $\Rightarrow$ gli aperti sono misurabili

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ cioè $\mathcal{L}$ è di Borel

Oss: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ non è completa. Infatti $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = c < |\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$

Basta vedere che $\exists C \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, trascurabile e più che numerabile.

$(n=1)$ L'insieme di Cantor C va bene

Prop: (Supponendo l'assioma della scelta) $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Dim: $(n=1)$ Insieme di Vitali:

$x \sim y$ se $x-y \in \mathbb{Q}$ rel. d'eq., $[x] = \{x+q : q \in \mathbb{Q}\}$ classe di eq. di $x \in \mathbb{R}$, scegliamo $E \subseteq [0,1)$

tale che $E \cap [x] = \{y(x)\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Dico che E non è misurabile.

Sia $F = \{\cup (E+q) : q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\}$. Osserviamo che $(E+q_1) \cap (E+q_2) = \emptyset$.

$F \subseteq [-1,2) \Rightarrow m^*(F) \leq 3$, $F \supseteq [0,1)$ infatti $y \in [0,1) \Rightarrow y \in [x]$ per $x \in E \Rightarrow y \in E + \underbrace{(y-x)}_{\in \mathbb{Q}}$

Se E fosse misurabile $\Rightarrow$

- $\mathcal{L}(E) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(F) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}([0,1]) = 0$ ASSURDO
- $\mathcal{L}(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(F) = +\infty$ ASSURDO

$\Rightarrow E \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$

PROPRIETÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE

Def: $(X, \mathcal{E}, \mu)$ spazio di misura, X spazio metrico, μ misura di Borel

$\Rightarrow \mu$ è regolare se $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \supseteq E \text{ aperto}\} = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ compatto}\}$ $\forall E, \mathcal{E}$

Prop: la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ è regolare.

Dim: ① $\mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo numerabile}\}$

$\forall P = \bigcup_i R_i$ plurirettangolo e $\forall \varepsilon > 0$

$\exists P_\varepsilon = \bigcup_i R_{\varepsilon,i}$, $R_{\varepsilon,i} \supseteq R_i$ rettangoli aperti tc $\mathcal{L}(R_{\varepsilon,i}) \leq \mathcal{L}(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow \mathcal{L}(P_\varepsilon) \leq \mathcal{L}(P) + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(P_\varepsilon) : P \supseteq E, \varepsilon > 0\}$

② Osserviamo che $E = \bigcup_n E \cap B_n(0)$, $\mathcal{L}(E) = \lim_n \mathcal{L}(E \cap B_n(0))$

Posso supporre E limitato, considero l'insieme misurabile $\bar{E} \setminus E$.

Per ① $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon \supseteq \bar{E} \setminus E$ tc $\mathcal{L}(A_\varepsilon) \leq \mathcal{L}(\bar{E} \setminus E) + \varepsilon$.

Definiamo $K_\varepsilon = \bar{E} \setminus A_\varepsilon = \bar{E} \cap A_\varepsilon^c = E \setminus A_\varepsilon \subseteq E$, K_ε compatto

$\mathcal{L}(K_\varepsilon) = \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(E \cap A_\varepsilon) \underset{\text{misurabilità di } E}{=} \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(A_\varepsilon) + \mathcal{L}(A_\varepsilon \setminus E) \geq \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(A_\varepsilon) + \mathcal{L}(\bar{E} \setminus E)$

$\geq \mathcal{L}(E) - \varepsilon$

Def. costruttiva della misura di Lebesgue

$P = \bigcup_{i=1}^N R_i$ plurirettangolo (finito)

$\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$\mathcal{L}(P) := \sum_{i=1}^N \mathcal{L}(R_i)$ $\forall P$

$\mathcal{L}(A) := \sup\{\mathcal{L}(P) : P \subseteq A \text{ plurirettangolo finito}\}$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$\mathcal{L}(K) := \inf\{\mathcal{L}(P) : P \supseteq K \text{ plurirettangolo}\}$ $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo:

$\mathcal{L}^*(E) := \inf\{\mathcal{L}(A) : A \supseteq E \text{ aperto}\}$ misura esterna di Lebesgue (quella def. in preced.)

$\mathcal{L}_*(E) := \sup\{\mathcal{L}(K) : K \subseteq E \text{ compatto}\}$ misura interna di Lebesgue

Oss: $\mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E)$ per ogni E

Def: E è misurabile se $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_*(E) := \mathcal{L}(E)$; $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabili}\}$

Teo: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
↑Boreliani

$\mathcal{L} := \mathcal{L}^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ è una misura, cioè è σ-additiva, e si dice misura di Lebesgue.

Teo: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ coincide con la σ-algebra, definita dal criterio di Carathéodory

Oss: Potremmo definire:

$m_J^* = \inf\{\mathcal{L}(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo}\}$, $m_{J_*} = \sup\{\mathcal{L}(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo}\}$

Si ha $m_J^*(E) \geq \mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E) \geq m_{J_*}(E) \quad \forall E$

E tc $m_J^*(E) = m_{J_*}(E)$ si dice misurabile secondo Jordan.

Questa classe di insiemi non è una σ-algebra e $\mathcal{L}^*$ non induce una misura.

Inoltre m_J^* non è una misura esterna in $\mathbb{R}^n$.

Es: $E = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

E numerabile $\Rightarrow$ E misurabile con $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^*(E) = 0$.

Inoltre $m_{J_*}(E) = 0$, però si ha $m_J^*(E) = \mathcal{L}([0,1]) = 1 \Rightarrow$ E non è Jordan-misurabile

Teorema: m misura di Borel in $\mathbb{R}^n$ tc $m(K) < +\infty$ $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto,

$m(E+z) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists c \geq 0$ tc $m(E) = c\,\mathcal{L}(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Oss: Useremo la notazione $|E|$ per indicare $\mathcal{L}(E)$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$

FUNZIONI MISURABILI E INTEGRAZIONE

Def: $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura,

$f: X \to Y$ è misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Def: $[Y = \mathbb{R}^n, \nu = \mathcal{L}]$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura,

$f: X \to \mathbb{R}^n$ è Lebesgue misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (non $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$)

Def: $[X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n]$

- $f: E \to \mathbb{R}^n$, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, è Leb. misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
- $f: E \to \mathbb{R}^n$ con E di Borel, è Boreliana se $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Es: $\exists f: [0,1] \to [0,1]$ continua ed $\exists N \subseteq [0,1]$ mis. tc $f^{-1}(N)$ non è misurabile

Sia $K(x)$ la scala di Cantor e $g(x) = \dfrac{K(x)+x}{2}$.

$g: [0,1] \to [0,1]$ continua e str. crescente.

$K(C) = [0,1] \Rightarrow |g(C)| > 0$, $\exists N \subseteq C$ tc $g(N) \subseteq g(C)$ non è misurabile.

$f(x) = g^{-1}(x)$ continua e str. crescente è tc $f^{-1}(N) = g(N) \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Guardiamo $\mathcal{M}(X) = \{ f: X \to \mathbb{R}$ misurabili $\}$

Oss: $f \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow f^{-1}(A)$ è misurabile $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \{ f > t \} \subseteq X$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$

Proposizione:

1. $\mathcal{M}(X)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, cioè $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f+g \in \mathcal{M}$ e $\lambda f \in \mathcal{M}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{M}$ e $f/g \in \mathcal{M}$ se $g(x) \neq 0$ $\tilde{\forall} x$ $\quad (\tilde{\forall} x \in X = \forall x \in X \setminus N$ con $\mu(N) = 0)$
3. $f_n \in \mathcal{M}$ $\forall_n \Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{M}$, $\inf_n f_n \in \mathcal{M}$; $\limsup_n f_n \in \mathcal{M}$, $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}$

In particolare se $f_n(x) \to f(x)$ $\tilde{\forall} x \in X \Rightarrow f \in \mathcal{M}$

Dim: 1 $\{ f+g > t \} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{ f > q \} \cap \{ g > t-q \}$ misurabile

$$\{ \lambda f > t \} = \begin{cases} \{ f > t/\lambda \} & \lambda > 0 \\ \{ f < t/\lambda \} & \lambda < 0 \end{cases} \quad \text{misurabile}$$

2 Guardiamo f^2:

$$\{ f^2 > t \} = \begin{cases} X & \text{se } t < 0 \\ \{ f > \sqrt{t} \} \cup \{ f < -\sqrt{t} \} & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{misurabile} \Rightarrow f^2 \in \mathcal{M}$$

$f \cdot g = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in \mathcal{M}$ per 1

$f/g = f \cdot \dfrac{1}{g}$ basta vedere $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{M}$, $\{ \frac{1}{g} > t \} = \{ g < \frac{1}{t} \}$ mis.

3 $\{ \sup_n f_n > t \} = \bigcup_n \{ f_n > t \}$ mis., $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$ mis.

Oss: Q forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ (pol. omogeneo di grado 2) max e min di Q ristretti a $S=\{|x|^2=1\}$ allora i punti staz. vincolati che trovo col metodo di Lagrange sono autovettori di $H=H_Q$ matrice hessiana di Q

① Q è C^∞ quindi H è simmetrica

② $Q(x)=\frac{1}{2}(Hx)\cdot x + \cancel{\times}$ → non può che essere 0

③ $Q(x+v)=\frac{1}{2}(H(x+v))\cdot(x+v) = \frac{1}{2}\left[Hx\cdot x + Hx\cdot v + \overbrace{Hv\cdot x}^{*} + o(|v|^2)\right]$

(*) $Hv\cdot x = v\cdot{}^tHx = {}^tHx\cdot v$

$= \frac{1}{2}Hx\cdot x + \frac{1}{2}\left[(H+{}^tH)x\right]\cdot v + o(v^2)$

$= Q(x)+\nabla Q(x)\cdot v + o(|v|^2)$ $\qquad \nabla Q(x)=Hx$

molt. di Lagrange
↓

$$\begin{cases} Hx = 2\lambda x \\ |x|^2=1 \end{cases} \Rightarrow x \text{ è autovettore di } H \text{ con autovalore } 2\lambda$$

— o —

TEORIA DELLA MISURA: esercizi

Domanda ①: Se Ω è aperto in $\mathbb{R}^n$ limitato è vero che $\underbrace{|\partial\Omega|}_{\text{misura di Lebesgue}}=0$?

No: Controesempio in dimensione 1. Ad esempio Ω potrebbe essere un insieme denso

Esempio: $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon/2^n}(q_n)$, $[0,1]\cap\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ $\varepsilon>0$

Se $x\in[0,1]\setminus\Omega \Rightarrow x\in\partial\Omega \overset{*}{\Rightarrow} \partial\Omega\supset[0,1]\setminus\Omega \Rightarrow |\partial\Omega|\geq 1\setminus|\Omega|$

(*) $[0,1]=[0,1]\cap\Omega\cup([0,1]\setminus\Omega) \Rightarrow 1=|([0,1]\cap\Omega)|+|([0,1]\setminus\Omega)|$

$|[0,1]\cap\Omega| < |\Omega| \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon 2^{-n} \leq 2\varepsilon \Rightarrow$ $\boxed{\text{se } \varepsilon<1/2 \quad |\partial\Omega|>0}$

Domanda ②: Ω limitato, $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)>0\}$ con f di classe C^1 $\overset{?}{\Rightarrow} |\partial\Omega|=0$?

Con queste ipotesi: No

Con l'ipotesi che $\nabla f(x)\neq 0$ $\forall x\in\partial\Omega$ allora la risposta è: Sì

↳ così $\partial\Omega$ è misurabile anche secondo Peano-Jordan (*)

$\partial\Omega\subseteq\{x : f(x)=0\}$, $x\in\partial\Omega \Rightarrow f(x)=0$ e x ha un intorno V_x tale che $\partial\Omega\cap V_x$ è grafico di una funzione (per il teorema delle funzioni implicite)

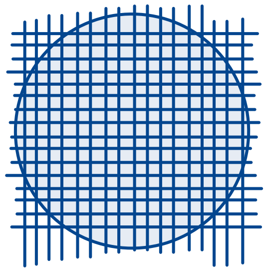
$\partial\Omega\subseteq\bigcup_{x\in\partial\Omega}V_x \xrightarrow[\text{di } \partial\Omega]{\text{per cpt}} \partial\Omega\subseteq\bigcup_i V_{x_i}$. Basta verificare che $|\partial\Omega\cap V_{x_i}|=0$ $\forall i$

(*) Basta verificare che se $\varphi: U \to \mathbb{R}$ classe C^1, $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ palla,

$\{ (x, \varphi(x)) \; x \in B \}$ ha misura nulla

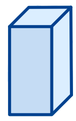
Basta inscatolarlo in un'unione di rettangoli di misura piccola:

$\varepsilon > 0 \; \exists \delta : |x-y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$



$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \quad \mathrm{diam}(Q_i) < \delta, \quad G = \bigcup \underbrace{\{ (x, \varphi(x)) : x \in B \cap Q_i \}}_{G_i}$

$x_i \in B \cap Q_i$ fissato



$G_i \subset (B \cap Q_i) \times (\varphi(x_i) - \varepsilon, \varphi(x_i) + \varepsilon)$

$|G_i| \leq |Q_i| (2\varepsilon) \qquad \sum_{i=1}^{m} |Q_i| \cong |B|$

misura N-dimens. misura (n-1)-dim

$|G| \leq \sum |G_i| \leq c |B| 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

Prop: Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $|A| > 0$. Allora $\exists V \subset A$ tc $V \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (variazione di Vitali)

Es: $Q_0 = [0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$ cubo unitario $\qquad \mathbb{R}^N = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} Q_0 + \xi$

$A = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} A \cap (Q_0 + \xi) \qquad \exists \xi \in \mathbb{Z}^N$ tc $|A \cap (Q_0 + \xi)| > 0$

$0 < |A| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |A \cap (Q_0 + \xi)|$

SPG posso supporre che $A \subseteq Q_0$, su A definisco la rel. d'equiv. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^N$

$\varphi : A/\sim \longrightarrow A \Rightarrow V \doteq \varphi(A/\sim) \subset A$

Oss: $\left. \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \\ v_1 \neq v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 - v_2 \notin \mathbb{Q}$

$A \subset \bigsqcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq 1}} (V + \xi)$ unione disgiunta

Oss: $\sqrt{N} = \mathrm{diam}([0,1]^N)$

Se supp. per assurdo V misurabile: $0 < |A| < \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V + \xi| = \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{n}}} |V| \Rightarrow |V| \neq 0$

$V + \xi_1 \cap V + \xi_2 \neq \emptyset, \quad v_1 + \xi_1 = v_2 + \xi_2 \quad \exists v_1, v_2 \in V$

$v_1 - v_2 = \xi_2 - \xi_2 \in \mathbb{Q} \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Q}^N \cap |\xi| \leq \sqrt{n}$

$\Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$

$\left| \bigcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| < \sqrt{N}}} V + \xi \right| = \sum |V| = +\infty$ ASSURDO

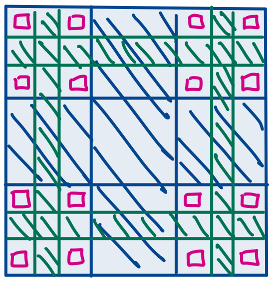
è limit., ha misura finita

Esercizio: Mostrare che se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $|A|>0$, allora $A-A$ è un intorno di 0

$A-A = \{x = a - a' \text{ con } a, a' \in A\}$ (non banale) (per casa)

Es: Esiste un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $|A|=0$ tale che $A-A$ è un intorno di 0

C è l'insieme di Cantor, $C-C \supset [-1,1]$

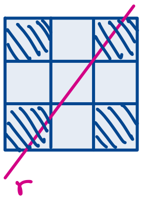


Rappresentazione di $C \times C$

In $\mathbb{R}^2$: $C \times C \subset [0,1] \times [0,1]$

$a \in [-1,1]$, $r = \{x - y = a\}$,

$r \cap C \times C \neq \emptyset \iff a \in C - C$



r interseca uno dei ▧ → quadrati di ordine 1

$Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \neq \emptyset$ per compattezza

$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ e $(\bar{x}, \bar{y}) \in C \times C$

Caratterizzazione compattezza:

Se $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Q}}$ famiglia di chiusi in X sp. compatto,

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$, $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Q}} F_\alpha \neq \emptyset$

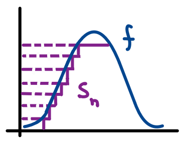
sono tutti quadrati chiusi e ogni quadrato $\neq \emptyset$

INTEGRALI: $(X, \mathcal{E}, \mu)$ spazio di misura

Def: $s: X \to \mathbb{R}$ è semplice se $\exists E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$, e $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ tale che $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$

Prop: $f \in \mathcal{M}(X)$, $f \geq 0 \Rightarrow \exists$ una successione S_n di funzioni semplici, con $S_{n+1} \geq S_n \geq 0$, tale che $\lim_n S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Dim: $S_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{\{f \geq n\}}$, $E_{n,i} = \left\{ \frac{i-1}{2^n} \leq f < \frac{i}{2^n} \right\}$ con $1 \leq i \leq n2^n$



$\Rightarrow S_n(x) \to f(x) \quad \forall x$

Oss: f limitata $\Rightarrow S_n \to f$ unif., cioè $0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{2^n} + \max\left(0, \sup_X f - n\right) \xrightarrow[n]{} 0$

Oss: f non positiva $\Rightarrow f = f^+ - f^-$

$\exists S_n$ semplice tc $S_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X$

Def (Integrale): $s \in \mathcal{M}$ semplice, $s \geq 0 \Rightarrow \int_X s \, d\mu := \sum c_i \mu(E_i)$

$f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ semplice} \right\}$

$f \in \mathcal{M} \Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^-$ se non valgono entrambi $+\infty$

Def: $f \in \mathcal{M}$ è integrabile se $\int f^+ < +\infty$ e $\int f^- < +\infty$

Proprietà: $f, g \in \mathcal{M}$ con l'int. ben definito $\Rightarrow$

1. $\int f + g = \int f + \int g$, $\int c \cdot f = c \int f \quad \forall c \in \mathbb{R}$ cioè l'integrale è lineare
2. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ monotonia
3. $a \leq f \leq b \quad \forall x$ con $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a\mu(X) \leq \int f \leq b\mu(X)$
4. $\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$
5. $A \in \mathcal{E}$ $\int_A f := \int_X f|_A$ che è ben definito
6. $N \in \mathcal{E}$ $\mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f = 0$

Oss: f int. $\Leftrightarrow |f|$ è integrabile

Def: $\mathcal{L}^1(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ integrabili} \}$ sp. vettoriale, $L^1(X) = \mathcal{L}^1(X)/\sim$ dove $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$

$(L^1(X), \| \ \|_1)$ è uno sp. normato con $\|f\|_1 = \int |f|$ (vedremo che è uno sp. di Banach)

Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Prop: $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \nu(E) = \int_E f \, d\mu$ è una misura su $(X, \mathcal{E})$

Dim: Dobbiamo vedere che ν è σ-additiva, cioè $\nu(\cup E_i) = \sum \nu(E_i)$ dove $E_n \in \mathcal{E}$ disg. 2 a 2

Se $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \nu(E) = \mu(E \cap A) \Rightarrow \nu(\cup E_i) = \mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \mu\left(\bigcup_i E_i \cap A\right) = \sum_i \mu(E_i \cap A)$

μ misura $= \sum_i \nu(E_i)$

$\Rightarrow$ la tesi è vera se f è semplice. In generale, data $0 \leq s \leq f$ semplice:

$\int_E s = \sum_i \int_{E_i} s \leq \sum_i \int_{E_i} f = \sum_i \nu(E_i)$ facendo il "sup" in s ottengo $\nu(E) \leq \sum_i \nu(E_i)$

Viceversa, dati due insiemi $A, B \in \mathcal{E}$ ed $\varepsilon > 0$

Siano s_A e s_B semplici tali che $\int_A s_A \geq \int_A f - \varepsilon/2$, $\int_B s_B \geq \int_B f - \varepsilon/2$

$\nu(A \cap B) \geq \int_{A \cup B} \underbrace{s_A|_A + s_B|_B}_{\text{semplice}} \geq \nu(A) + \nu(B) - \varepsilon \Rightarrow \nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$

In particolare $\nu(E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia} \\ \text{dell'integrale}}}{\geq} \nu\left(\bigcup_1^N E_i\right) \geq \sum_{i=1}^N \nu(E_i) \Rightarrow \nu(E) = \sum_{i=1}^\infty \nu(E)$

Cor: $E_n \in \mathcal{E}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$, $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_{\bigcup_n E_n} f = \lim_n \int_{E_n} f$

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)

$f_n \in \mathcal{M}$, $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x) \Rightarrow \int_X f = \lim_n \int_X f_n = \sup_n \int_X f_n$

Dim: $f \geq f_n \; \forall n \Rightarrow \int f \geq \int f_n$. Dobbiamo mostrare che $\int f \leq \lim_n \int f_n$.

Sia $0 \leq s \leq f$ semplice, sia $\varepsilon > 0$ e sia $E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)s\} \subseteq E_{n+1}$, inoltre $X = \bigcup_n E_n$.

Infatti $\forall x \in X$ $s(x) \leq f(x) = \lim f_n(x)$

- $f(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \; \forall n \Rightarrow x \in E_n \; \forall n$
- $f(x) > 0 \Rightarrow (1-\varepsilon)s(x) < f(x) \Rightarrow (1-\varepsilon)s(x) < f_n(x)$ def. in $n \Rightarrow x \in E_n$ def. in n

$\int_X f_n \geq \int_{E_n} (1-\varepsilon)s = (1-\varepsilon)\int_{E_n} s \Rightarrow \lim_n \int_X f_n \geq (1-\varepsilon) \lim_n \int_{E_n} s = (1-\varepsilon)\int_{X = \cup E_n} s \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sup in } s, \text{ lim in } \varepsilon}}{\geq} \int_X f$

Cor: $f_n \in \mathcal{M}$, $f_n \geq 0 \Rightarrow \int_X \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$

Lemma di Fatou: $f_n \in \mathcal{M}$, $f_n \geq 0$, $f(x) = \liminf f_n(x) \Rightarrow \int_X f(x) \leq \liminf \int_X f_n$

Dim: $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x) \leq g_{n+1}(x)$, $f(x) = \lim_n g_n(x) = \sup_n g_n(x)$

Per il teo. di conv. monotona $\int f = \lim_n \int g_n(x) = \liminf_n \int g_n \leq \liminf_n \int f_n$ $[g_n(x) \leq f_n(x) \; \forall x \, \forall n]$

Oss: $f_n = \chi_{[n,n+1]}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n = n \cdot \chi_{(0,\frac{1}{n}]}$

$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2+x^2}$

$\Big\}$ $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ ma $f = \lim_n f_n = 0$

Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue):

$f_n \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{M}$, $g \geq 0$, $\int_X g < +\infty$, supponiamo:

① $|f_n| \leq g \quad \forall n$

② $\exists f(x) = \lim_n f_n(x)$

$\Rightarrow \lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0$

$\hookrightarrow \|f_n - f\|_{L^1}$

Oss: $\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \longrightarrow 0 \Rightarrow \int f = \lim_n \int f_n$

Dim: $|f_n| \leq g \Rightarrow |f| \leq g$ e $|f_n - f| \leq 2g$

$$\int_X 2g = \int_X \lim_n \left(2g - |f_n - f|\right) \underset{\text{L. FATOU}}{\leq} \liminf_n \int 2g - |f_n - f| = \int 2g - \limsup_n \int |f_n - f|$$

$\Rightarrow \limsup_n \int |f_n - f| = 0$

Es 1: Trovare max e min assoluti di $f(x,y,z)=xy^2+yz^2$ su $B_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$

$\nabla f(x,y,z)=(y^2,\ 2xy+z^2,\ 2zy)=0 \Rightarrow y=0,\ z=0,\ |x|\le 1$: sono tutti i punti critici all'interno

Vediamo al bordo: $f_{|\partial B_1}$, possiamo scrivere $\partial B_1=\{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y,z)}=1\}$, quindi dobbiamo risolvere:

$\nabla f=\lambda\nabla g=2\lambda(x,y,z)$

$$\begin{cases} y^2=2\lambda x \\ 2xy+z^2=2\lambda y \\ 2zy=2\lambda z \\ y^2+x^2+z^2=1 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{se } z\neq 0}$

$$\begin{matrix}\lambda^2+z^2=2\lambda^2 \\ 2y=2\lambda\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda/2 \\ z=\pm\lambda \\ y=\lambda \\ \lambda^2+\frac{\lambda^2}{4}+\lambda^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2=4 \\ 9\lambda^2=4 \\ \lambda^2=\frac{4}{9}\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1/3 \\ y=\pm 2/3 \\ z=\mp 2/3 \\ \lambda=\pm 2/3 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{se } z=0}$

$$\begin{cases} y^2=2\lambda x \\ 2xy=2\lambda y \\ y^2+x^2=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{se } y\neq 0} \begin{cases} y=\pm\sqrt{2}\lambda \\ x=\lambda \\ 2\lambda^2+\lambda^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\mp\frac{\sqrt{6}}{3} \\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{se } y=0}$ $x=0$

Es 2: $M=\{x^2-xy+y^2-z^2=1,\ x^2+y^2=1\}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$?

Determinare i punti di M a massima o minima distanza dall'origine.

Trovo il rango della matrice data dal differenziale associato a M.

$g=(g_1,g_2)$, $g_1(x,y,z)=x^2-xy+y^2-z^2-1$, $g_2(x,y,z)=x^2+y^2-1$

$$D=Dg(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2x-y & -x+2y & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} D=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} -y & -x & -2z \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{considero il minore } \begin{pmatrix} -y & -x \\ x & y \end{pmatrix} = -y^2+x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm y$$

$$\Rightarrow \text{se } x=y \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -x & -x & -2z \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

M ha dimensione 1, M è chiuso e limitato $\Rightarrow$ è compatto $\Rightarrow$ ci sono max e min

$z^2=-xy$, $|z|^2=|xy|\le\frac{x^2+y^2}{2}$ e c'è uguaglianza quando x e y sono uguali

Disuguaglianza di Young

$f(p)=|p|^2$, $p\in M \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1+z^2$

Dobbiamo trovare il massimo e minimo di z sulla varietà

$\Rightarrow$ il minimo è quando $z=0$ e il massimo è $z=\frac{1}{2}$

Es 3: Dati $\alpha_1,\dots,\alpha_n>0$, con $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$, dimostrare che se $x_1,\dots,x_n>0$ allora

$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\le \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$ e che l'uguaglianza vale solo se $x_1=\dots=x_n$

Con moltiplicatori di Lagrange:

$x=(x_1,\dots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $x^\alpha\le\alpha\cdot x$

$x\longmapsto tx$ $\quad t>0$, $(tx)^\alpha=t^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}x^\alpha=tx^\alpha$, $\alpha tx=t(\alpha\cdot x)$

SPG $\alpha\cdot x=1$ e questa è la varietà su cui vogliamo fare massimi e minimi.

$\nabla f(x)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$\lambda\nabla g(x)=\lambda(\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},\ \alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}\cdots x_n^{\alpha_n},\dots,\alpha_nx_1^{\alpha_1},\dots,x_n^{\alpha_n-1})$

$\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},\dots,x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n-1})$

$$\begin{cases}\alpha_1=\lambda\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\\ \vdots\\ \alpha_n=\lambda\alpha_nx_n^{\alpha_n-1}x_1\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\\ x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}=1\end{cases}$$

$f(x)=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$, $\quad g(x)=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$

$\nabla f(x)=(\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\dots,\alpha_nx_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n-1})=\left(\alpha_1\frac{f(x)}{x_1},\dots,\alpha_n\frac{f(x)}{x_n}\right)$

$\nabla f(x)=\lambda\nabla g(x)=\lambda\alpha$

$$\begin{cases}\cancel{\alpha_1}\dfrac{f(x)}{x_1}=\lambda\cancel{\alpha_1}\\ \vdots\\ \cancel{\alpha_n}\dfrac{f(x)}{x_n}=\lambda\cancel{\alpha_n}\\ \alpha x=1\end{cases}\rightsquigarrow f(x)=\lambda x_i\quad\forall i$$

$\xrightarrow{\text{se }\lambda=0} f(x)=0$

$\xrightarrow{\text{se }\lambda\neq0} x_i=\dfrac{f(x)}{\lambda}\Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{f(x)}{\lambda}\right)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}=\dfrac{f(x)}{\lambda}\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow f(x)=1$

Es 4: Consideriamo $\mathbb{R}^{n\times n}\simeq(\mathbb{R}^n)^n$ identificando ogni matrice con i suoi vettori colonna. Determinare i punti critici di det ristretto a $(S^{n-1})^n$ e dedurre la disuguaglianza di Hadamard: $|\det(x_1,\dots,x_n)|\le|x_1|\cdot|x_n|$

Calcolare $\nabla\det(M)\cdot H=\mathrm{tr}(\mathrm{Adj}\,M^T\cdot H)$. Possiamo escludere il caso con $\det=0$ per cercare max e min. $\underbrace{\nabla\det M}_{\in(\mathbb{R}^n)^n}=\sum 2\lambda_k\underbrace{x_k}_{\in\mathbb{R}^n}$ $\quad M_k=(0,-,0,x_k,0,-,0)$ (bisogna risolvere questo sistema)

I punti critici saranno le matrici ortogonali

Es: $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabili, $|A|>0 \Rightarrow A-A$ è un intorno di 0

Sol: SPG posso supporre A compatto (altrimenti sostituisco A con $A_0 \subset A$, A_0 cpt, $|A_0|>0$)

Per regolarità (esterna) $\exists G$ aperto $G \supset A$, $\boxed{|G|<2|A|}$, $d(A,G^c)>0$ cioè il

$\min_{x\in A} d(x,G^c)>0$, e dico che $0<\varepsilon<d(A,G^c)$, $|v|<\varepsilon \Rightarrow \boxed{B(0,\varepsilon)\subset A-A}$ *

$A\subset G$, $(A+v)\subset G$. Se per assurdo $A\cap(A+v)=\emptyset$, $A\cup(A+v)\subset G$

$|A\cup(A+v)| = |A|+|A+v| = 2|A| \overset{*}{>} |G| \Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow A\cap A+v \neq \emptyset$

$\exists a\in A, \exists a'\in A : a = a'+v \Rightarrow v = a-a'$ $\square$

— o —

X metrico compatto, μ misura di Borel, $\mu(X)<+\infty \Rightarrow \mu$ è regolare

cioè $\forall A\in\mathcal{B}$, ⊛ $\mu(A) = \inf\{\mu(G): G \text{ aperto}, G\supset A\} = \sup\{\mu(K): K \underset{\text{chiuso}}{\text{cpt}}, K\subset A\}$

— o —

$\mathcal{S} = \{A\in\mathcal{B} : A \text{ soddisfa } ⊛\}$

(i) $\mathcal{S}$ è una σ-algebra

(ii) $\mathcal{S}$ contiene gli aperti

Oss: (i) + (ii) $\Rightarrow \mathcal{S}\supset\mathcal{B}$

(a) $\emptyset\in\mathcal{S}$, $X\in\mathcal{S}$

(b) $B\in\mathcal{S} \Rightarrow B^c\in\mathcal{S}$

$$\mu(B^c) = \mu(X)-\mu(B) = \mu(X) - \inf\{\mu(G): G\supset B, G \text{ aperto}\}$$

$$\parallel$$

$$\mu(X\setminus B) = \mu(X) + \sup\{-\mu(G) : G\supset B, G \text{ aperto}\}$$

$$= \sup\{\mu(X\setminus G), \mu(X)-\mu(G) : G\supset B, G \text{ aperto}\}$$

$F = X-G$

$$= \sup\{\mu(F): F\subset B^c, F \text{ chiuso (compatto)}\}$$

$\Rightarrow$ regolarità interna per B^c

Esercizio: la regolarità esterna deriva da reg. interna per B

(c) $A_i\in\mathcal{S}$, $\forall i\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in\mathcal{S}$

SPG posso supporre A_i disgiunti $\left(\text{se non lo fossero, uso } A_i' \doteq A_i\setminus\left(\bigcup_{j<i} A_j\right) \quad \bigcup A_i' = \bigcup A_i\right)$

Reg. interna: $\varepsilon > 0$ fissato, $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i) < +\infty$

Scelgo n tc $\sum_{i>n} \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall i \ \exists K_i \subset A_i$, $\mu(K_i) > \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2n}$, $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ è tale che $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon$$

— o —

$\varepsilon > 0$, $\forall i \ \exists G_i \supset A_i$ con $\mu(G_i) < \mu(A_i) + \varepsilon 2^{-i}$, G_i aperto

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \mu(G) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) + \varepsilon$$

$\Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{S}$

— o —

(ii) $\mathcal{S}$ contiene i chiusi, K chiuso, $\mu(K) = \sup\{\mu(C), C \subset K \text{ chiuso}\}$ ovvia

$\mu(K) = \inf\{\mu(G) : G \supset K\}$, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, $G_n \doteq \{x \in X : d(x,K) < \frac{1}{n}\}$, $G_{n+1} \subset G_n$

aperti

$\mu(K) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n)$, da cui la tesi $\square$

Cor: In $\mathbb{R}^N$, μ misura di Borel tc $\mu(K) < +\infty \ \forall K$ compatto $\Rightarrow \mu$ regolare

Dim: Se A limitato, $\mu(A) = \inf\{\mu(G), G \text{ aperto}, G \supset A\}$

$= \sup\{\mu(K) : K \text{ compatto}, K \subset A\}$ per il risultato precedente

Se A non è limitato posso scriverlo come unione numerabile di limitati e concludere con le solite tecniche (dettagli per esercizio)

Teo: Se μ mis di Borel in $\mathbb{R}^N$ tc $\mu(K) < +\infty \ \forall K$ compatto,

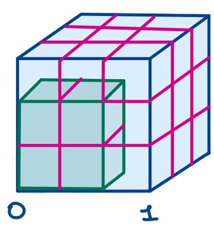
$\mu(A) = \mu(A + v) \quad \forall v \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mu = c\lambda$

misura di Lebesgue

Dim: SPG posso supporre $\mu([0,1[^N) = 1$

(Se fosse $\mu([0,1[^N) = p > 0$, $\frac{1}{p} \cdot \mu$, se $p = 0 \Rightarrow c = 0$)

Suppongo $\mu([0,1[^N) = 1$, $\mu([0,1/2[^N)$



$[0,1[^N = \bigsqcup_{\xi \in \Xi_k} \xi + [0, 1/2^k[^N$ (*)

$\Xi_k = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) : \xi_i = m_i 2^{-k}, \ 0 \le m_i \le 2^k - 1\}$

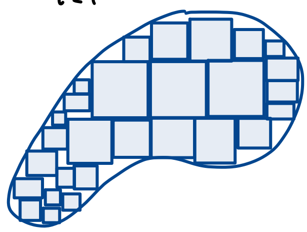
$|\Xi_k| = 2^{Nk}$

(*) $\underbrace{\mu([0,1[^N)}_{=1} = \sum_{\xi \in \Xi} \mu(\xi + [0, 2^{-k}]^N) = 2^{Nk} \mu([0, 2^{-k}[^N)$

$\mu([0,2^{-k}[^N) = 2^{-Nk} = \lambda([0,2^{-k}[^N) \Rightarrow$ Allora $\forall A$ aperto, $\mu(A) = \lambda(A)$

Perché ogni A aperto si scrive come unione numerabile di cubetti: $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) = \sum \lambda(Q_i) = \lambda(A)$



E è Boreliano: $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \supset E, A \text{ aperto}\}$

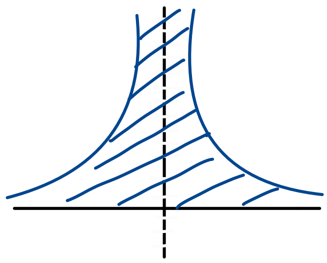
$= \inf\{\lambda(A) : A \supset E, A \text{ aperto}\} = \lambda(E)$

$\square$

Es$_1$: Mostrare che se V di Vitali, $A \subseteq V$, A misurabile $\Rightarrow |A| = 0$

Oss: Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, può succedere che $\forall A$ aperto $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx \doteq B < +\infty$

$\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}\varphi(x - r_n)}_{\varphi_n}$, $S_k = \sum_{n=1}^{k} \varphi_n$ è mis., $f(x) = \sup_k S_k$ è mis., $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$\int \underbrace{\sup_k S_k}_{= f} = \sup_k \int S_k = \sup_k \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - r_n)dx = B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

Esercizio: mostrare che $\forall n \in \mathbb{R}$, $\{f(x) \leq M\}$ è chiuso

Es: È vero che se $|f_n| \leq 1$, $\int_0^1 |f_n - f|dx \to 0$ allora $f_n(x) \to f(x)$ quasi ovunque?

(No, ma esiste una succ. con questa proprietà)

Es: Trovare un controesempio

Es: Ricondurre l'integrale $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx$ al calcolo di una serie

$\rightarrow$ metodi di analisi I

$\rightarrow$ Beppo-Levi

Teo: μ misura di Borel (regolare) su $\mathbb{R}^N$ tc $\mu(K) < +\infty$ $\forall K$ compatto
↑ conseguenza

$\forall f$ misurabile con $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in \boxed{C_c(\mathbb{R}^N)}$ tc $\int_{\mathbb{R}^N} |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$

- $C_c(\mathbb{R}^N) = \{ f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tc $\exists K$ compatto tc $f(x) = 0$ $\forall x \notin K \}$
  ↑ funzioni continue a supporto compatto

Es: Determinare la chiusura di $C_c(\mathbb{R}^N)$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$

Lemma: Nelle ipotesi del teo. precedente, se $A \in \mathcal{B}$ (boreliano) $\subseteq \mathbb{R}^N$.

Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi$ continua tc $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_A| d\mu < \varepsilon$.

Dim: Dato che μ è misurabile, dato $\varepsilon > 0$ $\exists K \subset A \subset G$ tali che $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$,
compatto ↑ ↑ aperto

$$\varphi(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, K)} \geq 0$$

Oss: Tutte le quantità sono non negative (denominatore > 0)

$0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = \chi_A(x)$ se $x \notin G \setminus K \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_A| d\mu = \int_{G \setminus K} |\varphi - \chi_A| d\mu \leq \mu(G \setminus K) < \varepsilon$

Oss: Se A è limitato questa φ può essere presa a supporto compatto.

Se $A \subset B_R(0)$ basta prendere $G \cap B_R(0)$

Dim (Teo): SPG posso supporre $f \geq 0$, $\int f d\mu < +\infty$ (verificare per esercizio)

$f \chi_{B_n(0)} \longrightarrow f$ quasi ovunque e sono dominate da f

$\int f \chi_{B_n(0)} d\mu \longrightarrow \int f d\mu$, $\exists n_0 : \int |f - \underbrace{f \chi_{B_{n_0}(0)}}_{\psi}| d\mu < \varepsilon/3$, $\psi \in L^1$

Per definizione di integrale $\exists s = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j}$ tc $0 \leq s \leq \psi$ con A_j misurabili e $A_j \subseteq B_{n_0}(0)$, $c_j > 0$

$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi - s| d\mu < \varepsilon/3$. Sia $c \doteq \sum_{j=1}^m c_j$ e $\forall j$ prendo $K_j \subset A_j \subset G_j$ tali che $\mu(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{3c}$ e
↑ compatto ↑ aperto

$$\varphi_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, K_j)}$$. Dunque posso scrivere:

$$\int |s - \sum c_j \varphi_j| d\mu = \int \Big| \sum_{j=1}^m c_j (\chi_{A_j} - \varphi_j) \Big| d\mu \leq \sum c_j \int |\chi_{A_j} - \varphi_j| d\mu \leq \Big(\sum_{j=1}^m c_j \Big) \frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon/3$$

$$\| f - \sum c_j \varphi_j \|_1 \leq \| f - \psi \|_1 + \| \psi - s \|_1 + \| s - \sum c_j \varphi_j \|_1 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Oss: $\sum c_j \varphi_j(x) = 0$ se $|x| \geq n_0$

Esercizio: Mostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(nx) dx = 0$

Es: Nelle ipotesi di sopra su μ, mostrare che se $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p d\mu\right)^{1/p} < +\infty$.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tc $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f-\varphi|^p d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon$

ASSOLUTA CONTINUITÀ DELL' INTEGRALE

(X, μ) sp. di misura, f misurabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc A misurabile, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$

Dim: Per assurdo, suppongo $\exists \varepsilon_0 > 0$ tc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists A_n$ misurabile con $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ tale che

$\hookrightarrow$ Oss. $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1$

$\circledast$ $\int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon_0$. Sia $F_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$, $F = \bigcap_n F_n$,

$\mu(F_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) = 2^{-n+1} \longrightarrow 0$, $\mu(F) = \inf \mu(F_n) = 0$ e $\chi_{F_n}(x) \longrightarrow \chi_F(x) \quad \forall x \in X$

$$\int_{A_n} |f| d\mu = \int_X |f| \cdot \chi_{A_n}(x) \, d\mu \overset{A_n \subset F_n}{\leq} \int_X |f| \chi_{F_n}(x) \xrightarrow{\text{CON. DOM.}} \underbrace{\int_X |f| \chi_F(x) \, d\mu = 0}_{\circledast} \Rightarrow |f| \chi_{F_n}(x) \leq |f| \in L^1(X)$$

Def: $\int_A f d\mu \doteq \int_X f \chi_A$

$\circledast$ $\int_{A_n} |f| d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \oplus \quad \circledast \int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon_0 \Rightarrow$ ASSURDO

Esercizio (Borel-Cantelli): Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, A_j misurabili,

$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) < +\infty$ allora $\mu\left(\bigcap_n \bigcup_{j \geq n} A_j\right) = 0$

Es: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, $\mathcal{L}^p(X, \mu) \doteq \{ f : X \to \mathbb{R}$, f misurabile, $\int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$

$f \sim g \Leftrightarrow \exists A$ tc $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x) \ \forall x \notin A$

$\mathcal{L}^p(X, \mu)/\sim \ \doteq L^p(X, \mu)$ è uno spazio NORMATO e COMPLETO rispetto a $\|f\|_p \doteq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

$(p = \infty)$ $\mathcal{L}^\infty(X) = \{ f$ misurabile tc $\exists c > 0$, $\mu(x : |f(x)| > c = 0 \}$

Sia $L^\infty(x) = \mathcal{L}^\infty/\sim$: anche questo è uno spazio normato e completo (verificare per es.)

$\|f\|_\infty := \inf \{ c > 0 : \mu(x : |f(x)| > c) = 0 \}$

$(p \in [1, +\infty[)$ $L^p(X)$ è uno sp. normato e completo

NORMATO:

(i) $\|f\|_p \geq 0 \ \forall f$ e vale $0 \Leftrightarrow f \sim 0$, $f = 0$ quasi ovunque

$\int |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow \{ |f|^p > 0 \} = \bigcup_n \{ |f|^p \geq \frac{1}{n} \} \rightarrow$ ha misura nulla

$\Downarrow$ $f \sim 0$; $\uparrow$ ha misura nulla ; $\uparrow$ hanno tutti misura nulla

(ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ linearità dell'integrale

(iii) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ sub-additività

Lemma (Dis. di Hölder): $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \int |fg| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$ (*)

Dim: $a \cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ $\forall a,b \ge 0$ (disug. di Young)

Dimostro (*) per $f_1 \in L^p$, $g_1 \in L^q$ con $\|f_1\| = 1$ e $\|g_1\|_q = 1$

$$\int_X |f_1| \cdot |g_1| \, d\mu \le \int \left[\frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \right] d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

per (*) nel caso generale applico questa

$$f_1 \doteq \frac{f}{\|f_p\|}, \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_p}$$ □

Dim: (iii) → sub-additività

$$f, g \in L^\infty, \quad \|f+g\|_p^p = \int_X \underbrace{|f+g|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow q+p=pq \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q(p-1)=p \Rightarrow p-1 = p/q$$

$$\le \int_X |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu$$

Hölder → $\le (\|f\|_p + \|g\|_p) \| \, |f+g|^{p-1} \|_q$

$$\| \, |f+g|^{p-1} \|_q = \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}$$

$$\|f+g\|_q^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p/q} \longrightarrow p-1 = p/q$$

$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ disuguaglianza di Minkowski

Es: lo spazio $L^p(X,\mu)$ è completo per $\|\cdot\|_p$.

Allora, ogni successione di Cauchy (risp. a $\|\cdot\|_p$), converge (in $\|\cdot\|_p$)

Dim: $(f_n) \in L^p(X)$ di Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ tc $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \ \forall n,m \ge N$

$n_k \doteq N(2^{-k})$, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Verifico che $\tilde{f}_k \doteq f_{n_k}$ converge in $L^p(X)$
uso conv. dom.

(Da questo segue che tutta la succ. f_n converge allo stesso limite)

$$g_n(x) := |\tilde{f}_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|$$

$$\|g_n\|_p \le \|\tilde{f}_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p, \quad g_n \nearrow, \quad g(x) \doteq \sup g_n(x)$$

$$\int_X g_n(x)^p d\mu \longrightarrow \int_X g(x)^p d\mu \quad \text{Beppo Levi}$$

In particolare $g(x) < +\infty$ $\tilde{\forall} x \in X$

$X_0 = \{ x : g(x) < +\infty \}$, $\mu(X \setminus X_0) = 0$

$\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)]$ se $g(x) < +\infty$ questa serie è assolut. convergente

$|\tilde{f}_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x)$ e $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X_0$

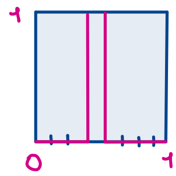
$\tilde{f}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\forall x \in X_0$ $\Rightarrow$ $|\tilde{f}_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ $\forall x \in X_0$

$|\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g^p(x)$ e $\int_X |\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p d\mu \to 0$
↳ conv. dom.

Cor: Se $f_n \longrightarrow f$ in L^p $\Rightarrow$ $\exists$ sottosucc. tc $f_{n_k} \longrightarrow f$ q.o. , $|f_{n_k}| \leq g \in L^p$

Controesempio: $f_k(x) \doteq \chi_{[0,1]}(2^k x - k)$ con $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$ e $f_k \in L^1([0,1])$,

$\|f_k\|_1 \to 0$ ma $f_k \not\to 0$ quasi ovunque (verificare)



Punto chiave della dimostrazione della completezza di L^p

Se $(f_n)_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ è di Cauchy per $\|\cdot\|_p$ allora $\exists (n_k)_k$ $\exists f \in L^p, g \in L^p$ tali che

$f_{n_k} \longrightarrow f$ q.o. , $|f_{n_k}| \leq g$ quindi $f_{n_k} \to f$ in L^p e anche $f_n \to f$ in L^p (*)

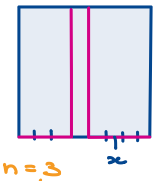
(*) **Prop**: Se $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \exists$ succ. $f_{n_k} \longrightarrow f$ quasi ovunque e

$\exists g \in L^p, g \geq 0, |f_{n_k}| \leq g$

Dim: $f_n \longrightarrow f$ in $L^p \Rightarrow f_n$ di Cauchy per $\|\cdot\|_p$

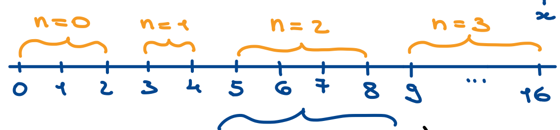
Oss$_1$: $f \in C_c(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, $\int f > 0$, $f_n(x) = f(x-n)$, $f_n(x) \to 0$ $n \to \infty$ ma $f_n \not\to 0$ in L^1

Oss$_2$: $f_n \to f$ in $L^p \not\Rightarrow f_n \to f$ q.o. , $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$, $f_k(x) = \chi_{[0,1]}(2^n x - k)$



$f_k(x) = 1 \Leftrightarrow 2^n x - k \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-k}]$

$\|f_k\|_1 = 2^{-n}$ $\forall 2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$, $\|f_k\|_1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$



$f_k(x) = 1$ per infiniti valori di k (almeno una volta per ogni $[2^n+1, 2^{n+1}]$)

Def: f funzione continua, $\mathrm{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

$C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$ per $\|\cdot\|_1$, se μ misura di Borel tc $\mu(K) < +\infty$ $\forall K$ compatto

↳ vale anche per $L^p_\mu(\mathbb{R}^N)$ con $\|\cdot\|_p$

Prop: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $C_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$

Oss: $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \longrightarrow f\chi_\Omega \in L^p(\Omega)$. Viceversa, data $f \in L^p(\Omega)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \quad , \; \tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N) \; , \; \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Dim: Data $f \in L^p(\Omega)$ considero $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ def. come sopra e scelgo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tc

$\|\varphi - f\|_p < \varepsilon$ e supp. φ potrebbe non essere contenuto in Ω

$\Omega_n \doteq \{x : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\} \cap B_n(0)$, $\overline{\Omega_n}$ è compatto, $\overline{\Omega_n} \subset \Omega$, $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$

$$g_n(x) = \frac{d(x, \Omega^c_{n+1})}{d(x, \Omega^c_{n+1}) + d(x, \overline{\Omega}_n)} \quad , \; 0 \leq g_n(x) \leq 1 \, ,$$

$\varphi_n = g_n(x)\varphi \longrightarrow \varphi$ $\forall x \in \Omega$ e la convergenza è anche in L^p

$\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \Omega$, $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi(x)|$, $\exists \bar{n} : \|\varphi - \varphi_n\|_p < \varepsilon \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_p < 2\varepsilon$

Prop: $f \in L^p(\Omega)$ $\quad p \in [1, +\infty[$

- se $\varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f\varphi \in L^p(\Omega)$
- se $\int_\Omega \varphi f \, d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dim: $\varphi_n \in C_c(\Omega)$ tc $\varphi_n \longrightarrow \mathrm{sgn}(f)|f|^{p-1}$ in $L^q(\Omega)$ con conv. q.o. e dominata

$$0 = \int_\Omega \varphi_n f \, dx \xrightarrow{\text{conv. dom.}} \int_\Omega \underbrace{f \cdot \mathrm{sgn}(f)|f|^{p-1}}_{|f|^p} dx \Rightarrow \int_\Omega |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ q.o. in } \Omega$$

$\square$

Prop: $\overline{C_c(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathbb{R}^N)$

funzioni $\{ f \in C(\mathbb{R}^N) \; \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \}$

Dim: Se $f \notin C_0(\mathbb{R}^n)$, $\exists \varepsilon_0 \; \exists |x_n| \to +\infty$ tc $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow g \in C_c(\mathbb{R}^N) \; \|f - g\| \geq \varepsilon_0$

viceversa se $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\|f \cdot g_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

Oss: $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq g_n \leq 1$, allora $g_n(x) = 1$ se $|x| \leq n$ o $g_n(x) = 0$ se $|x| \geq n+1$

SERIE DI FOURIER

Sia $I = (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R}$, allora si ha:

$$L^2_{\mathbb{C}}(I) \cong L^2_{\mathbb{R}}(I) \times L^2_{\mathbb{R}}(I)$$

$$f \longleftrightarrow (u, v)$$

con $f(t) = u(t) + iv(t)$ e $u, v \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$

Definisco $\langle f, g \rangle \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \, dt$ prodotto interno a $L^2(I)$ (complesso coniugato)

Allora avrò: $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 + |v(t)|^2 dt$

Definisco anche $e_k(t) \doteq e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$ con $k \in \mathbb{Z}$

Allo stesso modo ho $\|e_k\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2 dt = 1$

e $\langle e_k, e_h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot e^{-iht} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t} dt = \delta_{hk}$

Sia $\hat{f}_k \doteq \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ COEFFICIENTI DI FOURIER di f

Preso $n \in \mathbb{N}_0$, definisco le somme parziali della serie, ottenute troncandola in modo simmetrico: $S_n f := \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k$ ← Proiezione ortogonale di f su $V_n := \mathrm{span}\{e_k : |k| \leq n\}$

Prop: a) $\|S_n f\|^2 = \sum_{|k|\le n} |f_k|^2$

b) $\langle f - S_n f , e_h \rangle = 0 \quad |h| \le n$

c) $\|f - S_n f\|^2 = \min \{ \|f-p\|^2 : p \in V_n \}$

d) $\|f\|^2 = \|S_n f\|^2 + \|f - S_n f\|^2$ (Pitagora)

Dim: a) $\|S_n f\|^2 = \langle S_n f , S_n f \rangle = \langle \sum_{|k|\le n} \hat{f}_k e_k , \sum_{|h|\le n} \hat{f}_h e_h \rangle = \sum_{\substack{h,k \\ |h|\le n \\ |k|\le n}} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_h} \langle e_k , e_h \rangle = \sum_{|k|\le n} |f_k|^2$

b) $\langle f - S_n f, e_n \rangle \underset{|h|\le n}{=} \langle f - \sum_{|k|\le n} \hat{f}_k e_k , e_h \rangle =$

$= \langle f , e_h \rangle - \sum_{|k|\le n} \hat{f}_k \langle e_k , e_h \rangle = \langle f, e_h \rangle - \langle f, e_h \rangle = 0$

c) $p \in V_n$, $\|f-p\|^2 = \|\underbrace{f - S_n f}_{a} + \underbrace{S_n f - p}_{b}\|^2 \Rightarrow \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \langle a,b \rangle + \langle b,a \rangle + \|b\|^2$

$b \in V_n$, $f - S_n f \in V_n^{\perp}$, con $\langle a,b \rangle = \langle b,a \rangle = 0$

$\|f-p\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f - p\|^2 \ge (|f - S_n f|)^2$

d) Per $p=0$ ottengo $\|f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$

Cor: • $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 \le \|f\|^2$ disuguaglianza di Bessel

• $\lim_{|k|\to\infty} |f_k| = 0$

Dim: deriva da (a) + (d): $\|f\|^2 \ge \|S_n f\|^2 = \sum_{|k|\le n} |\hat{f}_k|^2$ e passando al sup: $\|f\|^2 \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$

Teo: a) $S_n f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ in $L^2_{\mathbb{C}}(I)$

b) $\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$ uguaglianza di Parseval

c) $\langle f, g \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$

Cor: (b+c)

$$\begin{aligned} L^2_{\mathbb{C}}(I) &\longrightarrow \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

è un'isometria

Dim (Teo): il punto (b) del Teorema segue dal punto (d) della proposizione.

$\|S_n f - f\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (*)

Fatto: $\bigcup_{n\ge 0} V_n$ è denso in $C_c(I)$ per $\|\cdot\|_\infty$

Richiami di teoria:

$I=(-\pi,\pi)$, $L^2_{\mathbb{C}}(I)\cong L^2_{\mathbb{R}}(I)\times L^2_{\mathbb{R}}(I)$ con $f(t)=u(t)+iv(t)$ e $u,v\in L^2_{\mathbb{R}}(I)$

$$\langle f,g\rangle \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad \text{e} \quad \|f\|^2=\langle f,f\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt$$

$e_k(t)\doteq e^{ikt}=\cos(kt)+i\sin(kt)$ con $k\in\mathbb{Z}$

$S_nf := \sum_{|k|\le n}\hat{f}_k e_k$ con $\hat{f}_k \doteq \langle f,e_k\rangle$

Proiezione ortogonale di f su $V_n:=\text{span}\{e_k:|k|\le n\}$ $\Rightarrow$ Oss: $\dim_{\mathbb{C}}V_n=2n+1$

$$\|f\|^2=\|S_nf\|^2+\|f-S_n\|^2=\sum_{|k|\le n}|\hat{f}_k|^2+\underbrace{\|f-S_n\|^2}_{o(1)\text{ per } n\to\infty}$$

Teorema: Se $f\in L^2(I)$

a) $\|f-S_nf\|\longrightarrow 0$ per $n\to\infty$

b) $\|f\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_k|^2$ uguaglianza di Parseval

c) $f,g\in L^2(I)$ e $\langle f,g\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}_k\overline{\hat{g}_k}$

Fatto: $\bigcup_{n\ge 0}V_n$ è denso in $C_c(I)$ per $\|\cdot\|_\infty$

Teorema di Stone-Weierstrass (a valori in $\mathbb{C}$):

Se T sp. compatto, $C(T,\mathbb{C})$ con $\|\cdot\|_\infty$. Se $A\subset C(T,\mathbb{C})$ è una sottoalgebra tale che:

(I) A separa i punti ($\forall t_1\ne t_2\in T\ \exists\alpha\in A$ tc $\alpha(t_1)\ne\alpha(t_2)$)

(II) A contiene le costanti

(III) Se $\alpha\in A\Rightarrow\bar{\alpha}\in A$ (*)

allora $\text{chiu}(A)=C(T,\mathbb{C})\to$ algebra

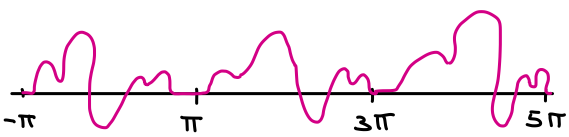
Oss: $T=\mathbb{R}/\sim$ $\quad x\sim y\Leftrightarrow x=y+2k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

$C(T,\mathbb{C})\approx C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})\equiv$ funzioni 2π-periodiche

$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$, A è una sottoalgebra e contiene le costanti

e_1 separa i punti: $e^{it_1}=e^{it_2}\Leftrightarrow t_1\sim t_2$

SW $\Rightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$ è densa in $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ per $\|\cdot\|$



Dim: Sia $f \in L^2(I)$, $\varepsilon > 0$ fissato, $\varphi \in C_c(I)$, $\|f - \varphi\| < \varepsilon/2$

$p \in V_{\bar n}$ tc $\|\varphi - p\| \overset{(*)}{\le} \|\varphi - p\|_\infty < \varepsilon/2 \Rightarrow \|g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dt \overset{(*)}{\le} \|g\|_\infty^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt$

$\|f - p\| \le \|f - \varphi\| + \|\varphi - p\| < \varepsilon \rightsquigarrow \|f - S_n f\|^2 \le \|f - p\|^2 < \varepsilon^2$

Se $n \ge \bar n \Rightarrow p \in V_n$, $\varepsilon > 0$ $\exists \bar n$: se $n > \bar n$, $\|f - S_n f\| < \varepsilon$

$\langle f, g\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat f_k \hat g_k \rightsquigarrow \langle S_n f, g\rangle = \sum_{|k| \le n} \hat f_k \langle e_k, g\rangle = \sum_{|k|\le n} \hat f_k \overline{\hat g_k}$ Oss: $\langle e_k, g\rangle = \overline{\langle g, e_k\rangle} = \overline{\hat g_k}$

$L^2 \to \mathbb{C}$ è continua (Per Cauchy-Schwartz)

$f \longmapsto \langle f, g\rangle$ Passando al limite per $n \to \infty$ ottengo la tesi

$\square$

CAUCHY-SCHWARTZ per prodotti Hermitiani

H spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$, $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

↳ sp. con prod. Herm. completo per def. posto $\|X\|^2 \doteq \langle X, X\rangle$

$\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$, $\langle x, y\rangle = e^{i\theta}|\langle x, y\rangle|$, $z = |z|e^{i\theta}$, $z + \bar z = 2\mathrm{Re}\, z$

(*) $\|x + te^{i\theta}y\|^2 = \langle x + te^{i\theta}y, x + te^{i\theta}y\rangle = \|x\|^2 + t(e^{i\theta}\langle y, x\rangle + \underbrace{e^{-i\theta}\langle x, y\rangle}_{|\langle x, y\rangle|}) + t^2\|y\|^2$

$\underset{\forall t \in \mathbb{R}}{0 \le} \underbrace{\|x\|^2}_{C} + 2t\underbrace{|\langle x, y\rangle|}_{B/2} + t^2\underbrace{\|y\|^2}_{A} \rightsquigarrow |\langle x, y\rangle|^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2$

Oss: $L^1(I) \supset L^2(I) \supset L^\infty(I)$ con $I = (-\pi, \pi)$ e $\|g\| \le \|g\|_\infty$

$f \in L^2(I) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f| \cdot 1\, dt \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\right)^{1/2}$

Convergenza delle serie di Fourier in media quadratica

Sia $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat f_k e_k$ in $L^2(I)$

$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) + f(-t))}_{f_0(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) - f(-t))}_{f_1(t)}$

$$f_0(t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat f_k e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat f_k e^{-ikt}\right] = \hat f_0 + \sum_{k \ne 0}^{+\infty} \hat f_k \cos(kt)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat f_k e^{ikt} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat f_k e^{-ikt}\right] = \sum_{k \ne 0} i \hat f_k \sin(kt)$$

Se $f(t) \in \mathbb{R}$ $\forall t$ allora.

$$\hat f_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt} dt = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt} = \overline{\hat f_k}$$

In tal caso: $f_0(t) = \hat{f}_0 + \sum_{k\geq 1} \left(\hat{f}_k + \hat{f}_k \right) \cos(kt)$

$$f_1(t) = \sum_{k\geq 1} i \left(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k} \right) \sin(kt)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \left(\cos kt - i \sin kt \right) dt$$

$$\left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k} \right) = 2\mathrm{Re}\, \hat{f}_k = \overbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)}^{a_k}$$

$$i\left(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k} \right) = 2i^2 \mathrm{Im}\, \hat{f}_k = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)}_{b_k}$$

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right]$ <u>serie convergente in L^2</u>

<u>Es</u>: Verificare che $\mathbb{1}$, $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ $(k \geq 1)$ sono un sistema ortogonale in $L^2_{\mathbb{R}}(I)$

<u>Es</u>: Mostrare che $g \in L^2_{\mathbb{R}}(0,\pi)$, $g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kt)$ conv. in L^2 per opportuni $c_k \in \mathbb{R}$

<u>Oss</u>: Se f è dispari $a_k = 0$ $\forall k \geq 0$, se f è pari $b_k = 0$ $\forall k \geq 1$

<u>Es</u>: Verificare che se $f \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$, $\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k\geq 1} \left[a_k^2 + b_k^2 \right]$ (Parseval in $\mathbb{R}$)

<u>Prop</u>: Se $(\hat{f}_k)_k \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (cioè se $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < +\infty$) allora la $\sum \hat{f}_k e_k$ è unif. conv. a f

<u>Teo</u>: $f_k : X \to F$, F Banach, $\sup_X \|f_k\|_F \leq M_k$ con $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ converge uniformemente

<u>Dim</u>: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ è una succ. di Cauchy. Sia $\varepsilon > 0$, N tc $\sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon$;

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|_F = \left\| \sum_{m+1}^{n} f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{m+1}^{n} \|f_k(x)\|_F \underset{n,m\geq N}{\leq} \sum_{k=N}^{+\infty} M_k \underset{\text{se } N \text{ grande}}{<} \varepsilon \quad \text{con } n > m \geq N$$

$S_n(x)$ converge (F è completo)

$$\|S_n(x) - S(x)\|_F \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_F \leq \sum_{n+1}^{+\infty} M_k \to 0$$

□

<u>Dim (Prop)</u>: $|\hat{f}_k e_k(t)| = |\hat{f}_k|$ quindi se $\sum |\hat{f}_k|$ converge $\sum \hat{f}_k e_k(t)$ conv. unif. a f

<u>Es</u>: Scrivere lo sviluppo in serie delle funzioni $f(t) = t$, $f(t) = |t|$ su $(-\pi, \pi)$

e dire se la serie converge uniformemente

<u>Oss</u>: Se f_n di Cauchy per $\|\cdot\|_\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists N : n, m \geq N$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall x \in X \setminus \underset{\text{di mis nulla}}{E_{n,m,k}}$

$X \setminus \overbrace{\bigcup_{n,m,k} E_{n,m,k}}^{m(E)=0}$ $\forall x \notin E$, $f_n(x)$ di Cauchy, $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X \setminus E$

Testo di riferimento: Folland, Real Analysis

MISURE PRODOTTO:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura

Si definisce $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (σ-algebra prodotto) la σ-algebra su $X \times Y$ generata dai "rettangoli" $E \times F$, con $E \in \mathcal{A}$ e $F \in \mathcal{B}$, cioè la più piccola σ-alg. che contiene i rett.

Def: $\mu \times \nu$ è una misura prodotto di μ e ν se è definita su $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e

$\mu \times \nu(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$ $\forall E \in \mathcal{A}$ e $F \in \mathcal{B}$

Prop: $\exists$ una misura prodotto

costruzione: $(\mu \times \nu)^*(E) = \inf \{ \sum_i \mu(E_i)\nu(F_i) : (E_i, F_i)_i \text{ tc } E \subseteq \bigcup E_i \times F_i \}$

$E \subseteq X \times Y$

- $(\mu \times \nu)^*$ è una misura esterna
- $\exists \mathcal{M}$ σ-alg. dei misurabili tc $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura completa
- $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ e $(\mu \times \nu)^*(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$

Oss: $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ è la misura prodotto massimale, è anche l'unica misura prodotto se μ e ν sono σ-finite

Es: $X = ([0,1], \mathcal{L})$, $Y: ([0,1], \mathcal{P}(Y), \nu)$, $\nu(F) = \#F$, $F \subseteq Y$

La misura prodotto non è unica: $X \times Y = [0,1]^2$, $\mathcal{M}([0,1]) \otimes \mathcal{P}([0,1])$

Oss: In generale $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$ e $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ non è completa

Esempi: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$

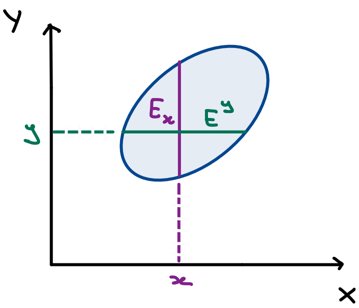
$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m})$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ non misurabile

$F \subseteq \mathbb{R}^m$ trascurabile

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n \times F}}{V \times F} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m}) \text{ ma } \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

SEZIONI E RESTRIZIONI



$E \subseteq X \times Y$

$\forall x \in X \quad E_x := \{ y : (x,y) \in E \} \subseteq Y$

$\forall y \in Y \quad E^y := \{ x : (x,y) \in E \} \subseteq X$

$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \; f_x(y) := f(x,y) : Y \to \mathbb{R}$ e $\forall y \; f^y(x) := f(x,y) : X \to \mathbb{R}$

Prop: ∘ $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow E_x \in \mathcal{B} \; \forall x \in X, \; E^y \in \mathcal{A} \; \forall y \in Y$

∘ $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu) \Rightarrow f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{B}, \nu) \; \forall x, \; f^y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \; \forall y$

Dim: $\mathcal{E} = \{ G \subseteq X \times Y$ che verificano (*) $\}$ Osserviamo che $E \times F \in \mathcal{E} \; \forall E, F$

Si mostra che $\mathcal{E}$ è una σ-algebra (da verificare) $\Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

Per il secondo punto, osserviamo che $f_x^{-1}(I) = f^{-1}(I)_x \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X$ e $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$f^{y^{-1}}(I) = f^{-1}(I)^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y$ e $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Oss: Se $(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$ è un completamento di $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ allora vale la tesi con $\tilde{\forall}$ invece di $\forall$ ($\tilde{\forall}$ = "per quasi ogni")

Oss: Non vale il viceversa (esercizio)

Domanda: Come si esprime $\mu \times \nu(E)$ in funzione di $\mu(E^y)$ e $\nu(E^x)$?

Prop: μ, ν σ-finite $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow$

1. $x \to \nu(E_x)$ è misurabile in $(X, \mathcal{A}, \mu)$
2. $y \to \mu(E^y)$ è misurabile in $(Y, \mathcal{B}, \nu)$
3. $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) \, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu(y)$

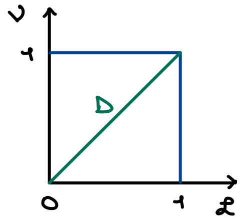
Dim: Gli insiemi $E \subseteq X \times Y$ che verificano 1, 2 e 3 sono una σ-alg. che cont. i rettangoli:

∘ I rettangoli verificano

CLASSE MONOTONA:
- ∘ Per linearità $\cup$ finite e $\cap$ finite di rettangoli verificano
- ∘ Le $\cup$ numerabili crescenti verificano (Beppo-Levi)
- ∘ Le $\cap$ numerabili decrescenti verificano (σ-finitezza)

∘ Una classe monotona, che contiene $\emptyset$ e $X \times Y$, è una σ-algebra

Es: $X = Y = [0,1]$, $\mu = \mathcal{L}$, $\nu(E) = \# E$



$X \times Y = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$

$$\int_0^1 \underbrace{\nu(E_x)}_{=1} d\mathcal{L} = 1 > \int_0^1 \mathcal{L}(E^y)\, d\nu = 0$$

Si ha anche $(\mathcal{L} \times \nu)^*(D) = +\infty$ (verificare)

Teo (Fubini - Tonelli):

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura σ-finiti

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ spazio prodotto (unico)

① (TONELLI) $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$, $f \geq 0 \Rightarrow f_x$ e f^y sono misurabili,

$x \to \int_Y f_x$ e $y \to \int_X f^y$ sono misurabili $\forall (x,y)$ e $\boxed{\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y\, d\mu\right) d\nu}$

② (FUBINI) $f \in L^1(X \times Y) \Rightarrow$ vale la stessa cosa con $\tilde{\forall}$ al posto di $\forall$

Dim:

① ∘ $f = \chi_E \Rightarrow$ è la prop. precedente dato che $f_x = \chi_{E_x}$ e $f^y = \chi_{E^y}$

∘ $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ semplice $\Rightarrow$ linearità di $\int$

∘ $f \in \mathcal{M} \Rightarrow f = \sup_n s_n$, $s_n \geq 0$ semplice, $s_{n+1} \geq s_n \Rightarrow \sup_n (s_n)_x = f_x$, $\sup_n (s_n)^y = f \Rightarrow$ si applica Beppo-levi

② $f \in L^1 \Rightarrow f = f^+ - f^-$ la decomposizione commuta con le restrizioni $\Rightarrow$ linearità di $\int$ e il pt ①

Oss: Per vedere se $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$ sta in $L^1(X, Y)$ basta controllare che $\int_{X \times Y} |f| < +\infty$ cioè

$$\int_X \int_Y |f|_x\, d\nu\, d\mu < +\infty \quad \text{o} \quad \int_Y \int_X |f|^y\, d\mu\, d\nu < +\infty$$

Oss: Il teorema vale anche per $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$ e $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$

spazio prodotto completo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ con $\tilde{\forall}$ al posto di $\forall$

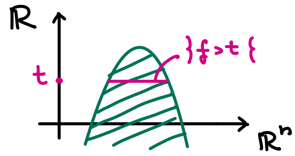
Oss: In $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mathcal{L})$ possiamo iterare n volte il Teo $\Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$, $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1 \dots x_n)\, dx_1\right) dx_2 \dots dx_n$$

Prop: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}) \Leftrightarrow S_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y < f(x)\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1})$

se $f \geq 0$ si ha: $\int_{\mathbb{R}^n} f = \mathcal{L}^{\mathbb{R}^{n+1}}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$

Dim: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \iff (S_f \cap \{y=t\}) = \{f>t\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \ \forall t$



Supponiamo S_f misurabile $\Rightarrow S_f \cap \{y=t\} = \{f>t\}$ misurabile $\tilde{\forall} t$

$\{f>t\} = \bigcup_n \{f>t_n\}$ $\quad t_n > t_{n+1} \longrightarrow t \Rightarrow \{f>t\}$ misurabile $\forall t \Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Supponiamo $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f = \sup_n s_n$ con $s_n \le s_{n+1}$ semplici.

$S_f = \bigcup_n S_{s_n}$ misurabile se S_s misurabile $\forall s$ semplice.

$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$ con $E_i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, E_i disgiunti, $S_s = \bigcup_{i=1}^{N} E_i \times (-\infty, c_i)$ misurabile

Inoltre, se $s \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum c_i \mathcal{L}(E_i) = \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ $\Rightarrow$ concludo per Beppo-Levi per $f \geq 0$

Oss: Si può definire, per $f \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f := \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$.

Questa è una definizione equivalente dell'intervallo di Lebesgue.

ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE CON SEZIONI MISURABILI (con ipotesi del continuo)

ω_0 primo ordinale infinito (numerabile)

ω_1 primo ordinale non numerabile

$\rightarrow$ IC: $|\omega_1| = c = 2^{\aleph_0} = 2^{|\omega_0|}$

$\Rightarrow \exists$ bigezione $f: [0,1] \rightarrow \omega_1$. Considero l'insieme $E = \{(x,y) \in [0,1]^2 : f(x) < f(y)\}$

Oss: $\forall x \in [0,1]$ $f(x)$ è un ordinale numerabile

$E^y = \{x . f(x) < f(y)\} \Rightarrow E^y$ è finito o numerabile $\Rightarrow$ di BOREL

$E_x = \{y : (x,y) \in E\} = \{y : f(x) < f(y)\} \Rightarrow E_x^c$ è finito o numerabile $\Rightarrow E_x$ è di BOREL

Se E fosse leb. misurabile varrebbe F.T.

$$\mathcal{L}(E) = \int_0^1 \mathcal{L}(E_x)\,dx = 1$$
$$= \int_0^1 \mathcal{L}(E^y)\,dy = 0$$

$\Rightarrow$ ASSURDO

MISURABILE $\Rightarrow$ SEZIONI MISURABILI

MISURABILE $\not\Leftarrow$ SEZIONI MISURABILI

OPERATORI DI COMPOSIZIONE

$u \rightarrow T(u) = f(x,u)$

Def: (X, A, μ) spazio di misura. $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice di CARATHÉODORY se

① $f(x,\cdot)$ è continua $\tilde{\forall} x \in X$ quasi per ogni

② $f(\cdot, t)$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$

Prop: $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di Carathéodory

$|f(x,t)| \leq h(x) + C|t|$ $C > 0$ e $h \geq 0$ con $\int_X h < +\infty$ misurabile

$\Rightarrow$ ① $\forall u \in \mathcal{M}(X)$ $T(u)(x) := f(x, u(x))$ è misurabile e ② $T: L^1 \rightarrow L^1$ con continuità

Oss: $u_n \rightarrow u$ in $L^1(X) \Rightarrow \exists n_k$ e $g \geq 0$, $g \in L^1(X)$ tc

$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ $\tilde{\forall} x \in X$ e $|u_{n_k}(x)| \leq g(x)$ $\tilde{\forall} x \in X$

tutte le nozioni sono stabili per limite puntuale

Dim: Vediamo che $f(x, u(x))$ è misurabile

$u = \sum c_i \chi_{E_i}$ semplice $\Rightarrow f(x,u) = \sum f(x, c_i) \chi_{E_i}(x)$ misurabile

in generale sia $s_n \rightarrow u$ puntualmente, s_n semplice $\Rightarrow f(x, s_n(x)) \rightarrow f(x, u(x))$ $\tilde{\forall} x$

$\Rightarrow f(x,n)$ è misurabile. Vediamo che $u \in L^1 \Rightarrow T(u) \in L^1$

$\|T(u)\|_{L^1} = \int_X |f(x,u)| \le \int_X h + C\int|u| < +\infty$

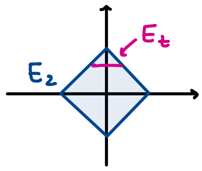
Infine, sia $u_n \to u$ in $L^1(X)$, $\exists\, n_k$ tc $u_{n_k} \to u$ $\tilde\forall x$ e $|u_{n_k}| \le g$ $\tilde\forall x$ con $\int g < +\infty$

$\Rightarrow f(x,u_{n_k}(x)) \to f(x,u(x))$ $\tilde\forall x$. $|f(x,u_{n_k}(x))| \le h(x) + Cg(x)$

Per il Teo di Leb. $\underset{\|T(u_{n_k}) - T(u)\|_{L^1(X)}}{\underbrace{\int_X |f(x,u_{n_k}(x)) - f(x,u(x))|}} \xrightarrow[k]{} 0$

$\Rightarrow T(u_n) \to T(u)$ in $L^1(X)$

ESERCIZI: ① $E_n = \{x\in\mathbb{R}^n : \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|}_{\|x_1\|} \le 1\}$



Calcolare $|E_n|$ volume

Per F.T. $|E_n| = \int_{-1}^{1} |E_t|\,dt$, $E_t = \{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} : (x_1,\dots,x_{n-1},t)\in E_n\}$

$= \{x\in\mathbb{R}^{n-1} : \sum_1^{n-1}|x_i| \le 1-|t|\} = (1-|t|)E_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

$\Rightarrow |E_t| = |E_{n-1}|(1-|t|)^{n-1}$

$\Rightarrow |E_n| = |E_{n-1}|\int_{-1}^{1}(1-|t|)^{n-1}dt = 2|E_{n-1}|\int_0^1(1-t)^{n-1} = 2|E_{n-1}|\int_0^1 t^{n-1}dt = \frac{2}{n}|E_{n-1}| = \frac{2^2}{n(n-1)}|E_{n-2}| =$

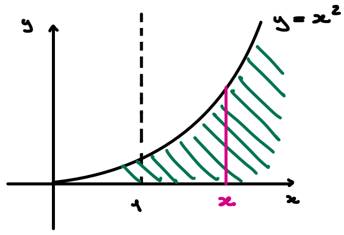
$= \frac{2^k}{n-(n-k+1)}|E_{n-k}| =$

$= \frac{2^{n-1}}{n!}|E_1| = \frac{2^n}{n!} \xrightarrow[n]{} 0$

② $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 1,\ 0\le y\le x^2\}$. Calcolare $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$ con $f(x,y) = \frac{1}{x(x^2+y^2)}$

$\int_{\mathbb{R}^2} f\cdot\chi_E$

$\int_E f = \int_1^\infty\left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_1^\infty\int_0^{x^2}\frac{1}{x(x^2+y^2)}\,dy\,dx$



$\int\frac{1}{(y^2+a^2)}\,dy = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right) + c$

$\int_E f = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\arctan(x)\,dx = -\frac{1}{x}\arctan(x)\Big|_1^\infty + \int_1^\infty\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} + \lim_{M\to\infty}\int_1^M\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \lim_M\left(\log\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}\right) + \log\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}$

$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a+(a+b)x^2+cx}{x(1+x^2)}$ $\quad a=1,\ b=-1,\ c=0$

Es: $f(t) = t$ su $(-\pi,\pi)$

$g(t) = |t|$ su $(-\pi,\pi)$ } sviluppo in seni e coseni

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \quad 0 \le k \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt \quad k \ge 1$$

1) f dispari $\Rightarrow a_k(f) = 0$

f pari $\Rightarrow b_k(g) = 0$

$f(t) = t$ $\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t}_{\text{derivo}} \overbrace{\sin(kt)}^{\text{integro}}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t\,\frac{(-\cos t)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kt)}{k}\,dt = \frac{2}{\pi k}(-\cos k\pi) + 0$

$= \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}$

$f(t) \overset{\text{in } L^2}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin(kt)$ $\qquad$ Oss: $\left((-1)^k\frac{2}{k\pi}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$

$\notin \ell^1(\mathbb{N})$

2) $g(t) = |t|$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\cancel{\pi}}\pi^{\cancel{2}} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos kt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[t\,\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{1}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -4/\pi k^2 & k \text{ disp.}\end{cases}$$ per $k \ge 1$ $\quad (a_0 = \pi)$

$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{k\ge 1\\ k\equiv 1(2)}} \frac{\cos(kt)}{k^2}$ $\qquad a_k \in \ell^1(\mathbb{N}) \Rightarrow$ la serie conv. unif.

Oss: $0 = g(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k \text{ disp}} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k\text{ disp.}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Divagazione: $S = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

$$S = \sum_{k\text{ disp}}\frac{1}{k^2} + \sum_{k\text{ pari}}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{h^2} \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{6}$$

Oss: $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ $\quad S_n f = \sum_{|k|\le n}\hat{f}_k e_k \longrightarrow f$ in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$

funzioni 2π-periodiche continue

$S_n f \longrightarrow \tilde{f}$ in $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ $\quad 2\pi$ periodica che coincide con f su $(-\pi,\pi)$

$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$ $\quad k - \frac{1}{2} \le \frac{x}{2\pi} < k + \frac{1}{2}$

Esercizio: Mostrare che $\int_a^{a+2\pi} \tilde{f}(t)\,dt$ non dipende da $a \in \mathbb{R}$

È naturale pensare f come funzione di $L^2(\mathbb{T})$: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\sim$ con $x \sim y \Leftrightarrow x - y = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio: Se $f \in L^2_{\mathbb{C}}(a, a+T)$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(s)\overline{g(s)}\,ds$

le funzioni $\tilde{e}_k(t) = e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$ sono un sistema ortonormale completo (generano $L^2_{\mathbb{C}}(a, a+T)$)

Esempio: $a = 0$ $T = 1$ $\tilde{e}_k(t) = e^{i2\pi kt}$

Prop: Se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ continua e derivabile, allora $\hat{f}_k \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ e vale la disuguaglianza:

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus(0)} |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^{1/2} \|f'\|_2$$

Dim: $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt}\,dt \right)$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{ik}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt}\,dt \right) = \frac{1}{ik}\left(\hat{f'} \right)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus(0)} |\hat{f}_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus(0)} \frac{1}{|k|} |(\hat{f'})_k| \leq \sqrt{\left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \right)\left(\sum_{k \neq 0} |(\hat{f'})_k|^2 \right)}$$

prod. scalare in $\ell^2(\mathbb{Z}\setminus(0))$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus(0)} |\hat{f}_k| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'|\,dt \right)$$ per identità di Parseval applicata a f'

Esercizio: lo stesso argomento funziona anche se f ha un numero finito di punti angolosi

Prop: Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora definendo $f_h(x) \doteq f(x-h)$, $f_h \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{h \to 0} \|f - f_h\| = 0$

Es: Dimostrarlo anche in L^p $(p \neq \infty)$

Dim: Argomento di densità

Sia $\varepsilon > 0$, scelgo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$: $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B_R(0)}$

$$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \overset{H-C}{\Rightarrow} \varphi \text{ è U.C.} : \exists \delta > 0 : (x-y) < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

Se $|h| < \delta$ $\quad |\varphi(x) - \varphi_h(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow \|\varphi - \varphi_h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow \|\varphi - \varphi_h\|_1 < \varepsilon/3$

$$\|f - f_h\| \leq \underbrace{\|f - \varphi\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\varphi - \varphi_h\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\varphi_h - f_h\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|f - f_h\|_1 < \varepsilon \quad \forall |h| < \delta$$

LEMMA DI RIEMANN:

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{i\lambda t} dt = 0$, $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-h) e^{i\lambda(t-h)} dt$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt + f\left(t-\frac{\pi}{\lambda}\right) \underbrace{e^{i\lambda(t-\pi/\lambda)}}_{e^{i\lambda t - i\pi} = -e^{i\lambda t}} dt \right] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) e^{i\lambda t}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - \overset{f_{\pi/\lambda}(t)}{f\left(t-\frac{\pi}{\lambda}\right)} \right| dt = \frac{1}{2} \| f - f_{\pi/\lambda} \|_1 \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

$\square$

LEMMA (NUCLEI DI DIRICHLET):

$D_n(t) \doteq \sum_{|k|\leq n} e^{ikt}$, $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)}$ con $t \neq 0$

Dim: Per esercizio. Suggerimenti:

- $e^{int} D_n(t)$ è una somma geometrica
- moltiplicare $e^{-it/2}$ sopra e sotto la formula che si trova

Oss: $D_n(t)$ è pari, per $t \neq 0$: $D_n(0) = n+1$ e si ha $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} D_n(t)\, dt = 1$

$$S_n f = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}_k e_k = \sum_{|k|\leq n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{|k|\leq n} e^{ik(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(t-s)\, ds$$

Def: Dico che $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π periodica è regolare a tratti se su ogni periodo ha un numero finito di discontinuità e fuori è C^1 con derivata limitata (es: $f(t) = t$)

Teorema: Se f è regolare a tratti, $S_n f(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-) \right]$ e $f(x^\pm) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$

Dim: $S_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt \underset{t=x+s}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(-s)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s)\, ds =$

D è pari

integrando è 2π-periodico

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+s) D_n(s)\, ds}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x^-)} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+s) D_n(s)\, ds}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x^+)}$$

$$f(x_0^+) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+s) D_n(s)\, ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0^+) D_n(s)\, ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+s) D_n(s)\, ds =$$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(s)\, ds = 1$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x_0^+) - f(x_0+s)\right) D_n(s)\, ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \boxed{\frac{f(x_0^+) - f(x_0+s)}{s} \cdot \frac{s}{\boxed{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}}} \boxed{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right)} ds$$

$\to D_n(s)$

$g_x(s)$ è in L^1, $\sup|f'| \geq \left| \dfrac{f(x^+) - f(x+s)}{s} \right|$ $= \frac{1}{\pi}\int g_x(s) \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right) ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per Riemann-Lebesgue

è limitata perché un fattore è limitato da 2 e l'altro dal sup di f'

TEOREMA DEL CAMBIO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Domanda: $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\phi \in C^1(\Omega)$, $E \subseteq \Omega$ misurabile per Lebesgue

① $\phi(E)$ è misurabile?

② Posso stimare $|\phi(E)|$

Caso lineare: $\phi(x) = L \cdot x$ $L \in M(n)$

caso 1: $\det L = 0 \iff \dim(\mathrm{Im}(L)) < n$, $\mathrm{Im}(L) \subsetneq \mathbb{R}^n \Rightarrow |\mathrm{Im}(L)| = 0$

$L \cdot E = \phi(E) \subseteq \mathrm{Im}(L)$ $\forall E \Rightarrow |\phi(E)| = 0$ $\forall E$

caso 2: $\det L \neq 0$ LK compatto $\forall K$ compatto, LA aperto $\forall A$ aperto

LE è misurabile e $|LE|$ è una misura invariante per traslazioni

$|LE| = c(L)|E|$, $c(L) = |L[0,1]^n|$

Lemma: $c(L) = |\det L|$

① $c(L \cdot T) = c(L) \cdot c(T)$

$|\det(L \cdot T)| = |\det L| |\det T|$

- Se $L \in O(n)$ (ortogonale) allora manda le palle in sé stesse: $LB = B$ $c(L) = 1$
- L diagonale, $|L([0,1]^n)| = \prod |\lambda_i| = |\det L|$ $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- $L \in M(n)$ $L = ADB$ D diagonale, $A, B \in O(n)$, $c(L) = c(A)c(D)c(B) = |\det(D)| = |\det(L)|$

②

$Q = [0,1]^2$ v_1 LQ

$$|LQ| = |v_1| \cdot \Big| \underbrace{v_2 - \langle v_2, \tfrac{v_1}{|v_1|} \rangle \tfrac{v_1}{|v_1|}}_{\tilde{v}_2} \Big|$$

$$= |\det \tilde{L}| = |\det L|$$

$L = (v_1 | v_2)$ $\tilde{L} = (v_1 | \tilde{v}_2)$

Teorema (CAMBIO DI VARIABILE):

$\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\phi \in C^1$, ϕ iniettiva

① $E \subseteq \Omega$ misurabile $\Rightarrow \phi(E)$ misurabile e $|\phi(E)| = \int_E |J_\phi(x)|\, dx$, $J_\phi = \det(D\phi)$

② $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mis. con $f \geq 0$ o $f \in L^1(\Omega)$ $\int_{\phi(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega (f \circ \phi)(x) |J_\phi(x)|\, dx$

($y = \phi(x)$ cambio di variabile, $f = \chi_{\phi(E)}$, $f \circ \phi = \chi_E$)

Lemma: $\phi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ C^1 con $\|D\phi\|\le C$, $E\subseteq\Omega$ mis. $\Rightarrow$ $\phi(E)$ mis. e $|\phi(E)|\le\int_E|J_\phi(x)|\,dx$

Dim: $\phi(B_r(x_0))\subseteq B_{Cr}(\phi(x_0))$ $\forall r$ e $\forall x_0$

- $|N|=0 \Rightarrow |\phi(N)|=0$
- K compatto $\Rightarrow$ $\phi(K)$ compatto
- $K\in\mathcal{F}_\sigma$ cioè $K=\bigcup_i K_i$ K_i compatti $\Rightarrow$ $\phi(K)\in F_\sigma$

1) $\phi(B)$ Borel. $\forall B$ Borel (va mostrato)

o

2) E mis. $\Rightarrow$ $E=F\cup N$ $F\in F_\sigma$ e $|N|=0$ (va mostrato)

$\phi(E)=\phi(F)\cup\phi(N)$ misur.

Claim: $\forall$ K compatto $\forall\varepsilon>0$ $\exists r_0$ t.c. $\phi(Q_r(x_0))\subseteq F_{x_0}\left(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0)\right)$ $\forall r\in(0,r_0)$, $\forall x_0\in K$

dove $Q_r(x_0)=\prod_i\left[(x_0)_i-\frac{r}{2},(x_0)_i+\frac{r}{2}\right]$ e $F_{x_0}(x)=\phi(x_0)+D\phi(x_0)(x-x_0)$

Dim: $i\in\{1,\dots,n\}$

$$\left|\phi_i^{(x)}-(F_{x_0})_i^{(x)}\right|=\left|\phi_i(x)-\phi_i(x_0)-D\phi_i(x_0)(x-x_0)\right|\overset{\text{LAGR.}}{=}\left|\left(D\phi_i(\xi_i)-D\phi_i(x_0)\right)\cdot(x-x_0)\right|\le\overbrace{r\cdot{}^n\omega(r)}^{o(r)}$$

ω modulo di continuità di $D\phi$ ($\omega(r)=\max\limits_{\|x-y\|\le r}|f(x)-f(y)|$ modulo di continuità)

Scelgo r_0 tc $\omega(r_0)$. Prendendo le misure:

$$|\phi(Q_r(x_0))|\le F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0))|=|J_\phi(x_0)|\,(1+\varepsilon)^n r^n=(1+\varepsilon)^n\int_{Q(x_0)}|J_\phi(x_0)|\,dx$$

$$=(1+\varepsilon)^n\int_{Q_r(x_0)}|J_\phi(x)|+\underbrace{(|J_\phi(x_0)|-|J_\phi(x)|)}_{\le\varepsilon\text{ per }r_0\text{ piccolo}}\,dx$$

$$\le(1+\varepsilon)^n\int|J_\phi(x)|+\varepsilon(1+\varepsilon)^n r^n\qquad\forall r<r_0,\ \forall x\in K$$

$\boxed{E=\bigcup_i Q_i}$ $|Q_i\cap Q_j|=0$ $i\ne j$ $Q_i=Q_{r_i}(x_i)$ $r_i<r_0$ $x_i\in K$

$|\phi(E)|\le(1+\varepsilon)^n\int_E|J_\phi(x)|+\varepsilon(1+\varepsilon)^n|E|$

A aperto $A=\bigcup E_n$ $E_n\subseteq E_{n+1}$ E_n unione num. di cubi

$|\phi(A)|\le(1+\varepsilon)^n\int_A|J_\phi(x)|+\varepsilon(1+\varepsilon)^n|A|$

E misurabile, $|E|<\infty$, $A\supseteq E$ aperto $|A|\le|E|+\varepsilon$,

$|\phi(E)|\le|\phi(A)|\le(1+\varepsilon)^n\int_E|J_\phi(x)|+C\varepsilon(1+C)^n+(|E|+\varepsilon)(1+\varepsilon)^n$. Mando $\varepsilon\to0^+$

($C\to\|J_\phi\|_\infty$)

Cor: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mis. $f\ge0$ $\Rightarrow$ $\int_{\phi(\Omega)}f\le\int_\Omega(f\circ\phi)|J_\phi|$

Dim: $f=\chi_{\phi(E)}$ ok, f semplice per linearità, f generale per appros. con funzioni semplici

Cor: $Z=\{x : J_\phi(x)=0\} \Rightarrow |\phi(Z)| \le \int_Z |J_\phi(x)| = 0$ (LEMMA DI SARD)

Dim. (Teo): Supp. $\phi^{-1} \in C^1$ (vero se $J_\phi(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$)

$$|J_\phi(x)\cdot J_{\phi^{-1}}(\phi(x))| = \det(D\phi(x)\cdot D\phi^{-1}(\phi(x))| = 1$$

$$\int_{\phi(\Omega)} f \le \int_\Omega (f\circ\phi)|J_\phi| \underset{\phi^{-1}}{\le} \int_{\phi(\Omega)} (f\circ\phi\circ\phi^{-1})\,|J_\phi|\cdot|J_{\phi^{-1}}| = \int_{\phi(\Omega)} f$$

Il caso L^1 si fa per linearità

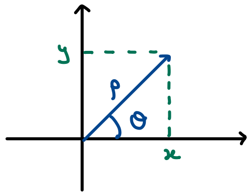
Generalizzazione (no dim.):

$\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1 non nec. iniettiva $\Rightarrow \displaystyle\int_{\phi(\Omega)} f(y)\cdot N(y)\,dy = \int_\Omega (f\circ\phi)(x)\,|J_\phi(x)|\,dx$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile, $f \ge 0$ o $f \in L^1$, $N(y) = \#\{\phi^{-1}(y)\}$

Esempi:

① Coordinate polari



$\phi : \underset{\rho}{[0,+\infty)} \times \underset{\theta}{[0,2\pi)}$, $\phi = (x,y)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad J_\phi = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\theta\,d\rho$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \pi \int_0^\infty e^{-\rho^2} 2\rho\,d\rho = \pi$$

$\|$ F. T.

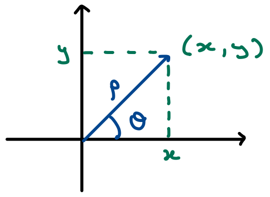
$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

ESEMPI DI CAMBI DI VARIABILE

① COORDINATE POLARI:

$$\Phi(\rho,\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad J_\Phi = \rho \geq 0$$



② COORDINATE CILINDRICHE

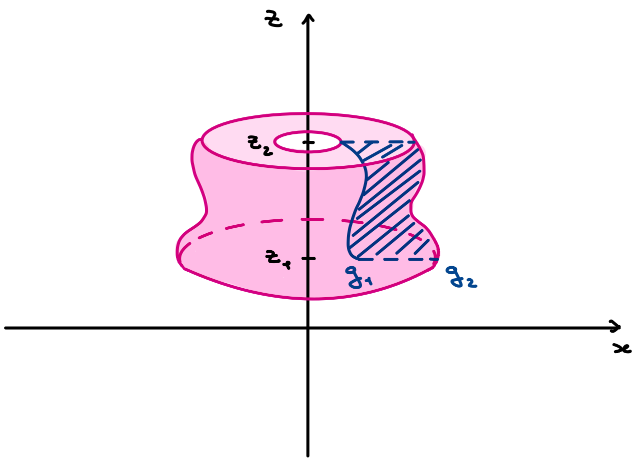
$$\phi(\rho,\theta,z): [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad D\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_\phi = \rho$$

SOLIDI DI ROTAZIONE

$$E = \Big\{ z_1 \leq z \leq z_2 \,,\; g_1(z) \leq \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=\rho} \leq g_2(z) \Big\}$$

$$\phi^{-1}(E) = \big\{ z_1 \leq z \leq z_2 \,,\; g_1(z) \leq \rho \leq g_2(z) \big\}$$



$$|E| = \int_{\phi^{-1}(E)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \overset{\text{F.T.}}{=} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz =$$

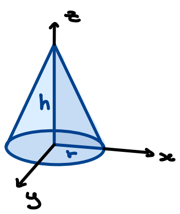
$$= \pi \int_{z_1}^{z_2} \left[g_2(z)^2 - g_1(z)^2 \right] dz$$

BARICENTRO DI $E \subseteq \mathbb{R}^n$ MISURABILE

$$B_E = \frac{1}{|E|} \int_E x \, dx \in \mathbb{R}^n$$

$E \subseteq \mathbb{R}$ solido di rotazione attorno un certo asse $\Rightarrow B_E$ sarà su quell'asse

Es: Calcolare il baricentro di un cono di altezza h e raggio r

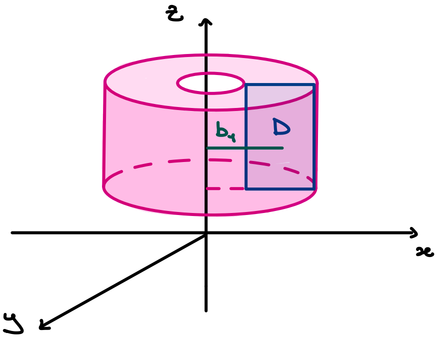


$$E = \left\{ (x,y,z) : 0 \leq z \leq h \,,\; \sqrt{x^2+y^2} \leq r\left(1 - \frac{z}{h}\right) \right\} \qquad B = (0,0,B_z) \qquad |E| = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{|E|} \int_E z \, dx\,dy\,dz \overset{\text{coord. cil.}}{=} \frac{3 \cdot 2\pi}{\pi r^2 h} \int_0^h z \int_0^{r\left(1-\frac{z}{h}\right)} \rho \, d\rho \, dz = \frac{6}{r^2 h} \int_0^h \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz =$$

$$= 3h \int_0^h \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{dz}{h} \overset{t = z/h}{=} 3h \int_0^1 t(1 - 2t + t^2)\, dt = 3h\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{h}{4}$$

Esempio precedente (TEOREMA DI GULDINO)



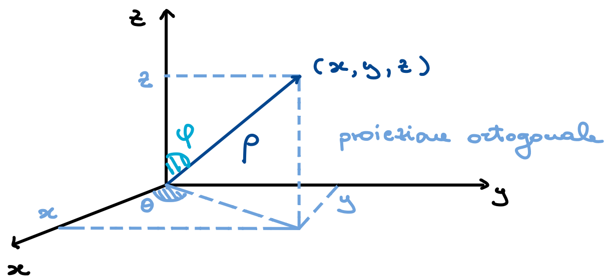
$$D = \{(x,z) : z_1 \le z \le z_2,\ g_1(z) \le x \le g_2(z)\}$$

$$E = \{(x,y,z) : z_1 \le z \le z_2,\ g_1(z) \le \sqrt{x^2+y^2} \le g_2(z)\}$$

$$|E| = 2\pi \underbrace{\int_{z_1}^{z_2}\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} x\,dx\,dz}_{\int_D x} = 2\pi b_1 |D| \qquad \text{TEOREMA DI GULDINO}$$

$$B_D = (b_1, b_2) \text{ con } b_1 = \frac{1}{|D|}\int_D x\,dx \text{ e } b_2 = \frac{1}{|D|}\int_D z\,dz$$

COORDINATE POLARI IN $\mathbb{R}^3$:



$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z)$$

$$\rho \in [0, +\infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad D\Phi = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$J_\Phi = \cos\varphi\left(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\right) - \rho^2\sin\varphi\sin^2\varphi = -\rho^2\sin\varphi \quad \text{e} \quad |J_\Phi| = \rho^2\sin\varphi \ge 0$$

AREA DELLA SFERA:

$$B_R = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \le \rho \le R\} \rightsquigarrow |B_R| = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin\varphi = 2\pi \underbrace{\left(\int_0^R \rho^2\right)}_{= R^3/3} \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi\right)}_{= 2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CALCOLO DEL VOLUME:

$$E = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\} \quad a, b, c > 0$$

$$|E| = ? \to X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{b} \quad Z = \frac{z}{c} \qquad L = \begin{pmatrix} 1/a & & 0 \\ & 1/b & \\ 0 & & 1/c \end{pmatrix} \qquad \det L = \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$$

$$(X, Y, Z) = L \cdot (x, y, z)$$

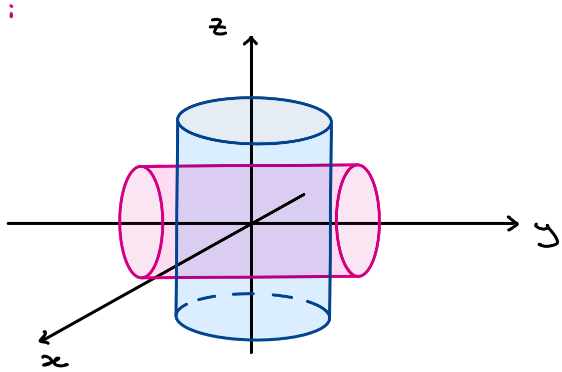
$$LE = B_1, \quad |LE| = (\det L)|E| = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow |E| = \frac{4}{3}\pi\, a \cdot b \cdot c$$

VOLUME DELL'INTERSEZIONE DI DUE CILINDRI (esercizio):

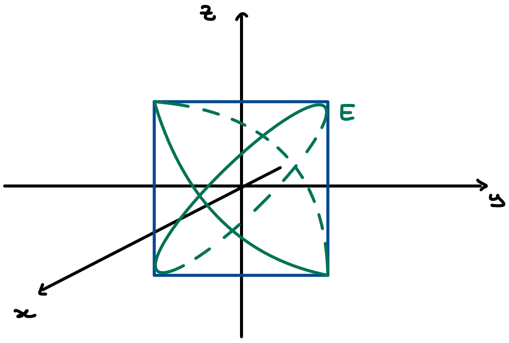
$$C_R^1 = \{(x,y,z) \cdot x^2 + y^2 \le R^2\}$$

$$C_R^2 = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 \le r^2\}$$

$$E = C_R^1 \cap C_r^2 \qquad r \le R \qquad |E| = ?$$



Caso $r = R$:



$$E_x = \left\{ (y,z) : |y| \le \sqrt{R^2 - x^2}, \quad |z| \le \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

↳ Quadrato di lato $2\sqrt{R^2 - x^2}$

$$|E| = \int_{-R}^{R} |E_x|\, dx = 8\int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = 8\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{16}{3} R^3$$

Caso $r < R$: Per casa

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

Def: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ continua si dice "curva"

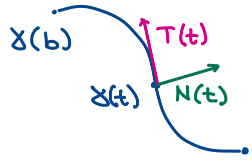
- γ è chiusa se $\gamma(a)=\gamma(b)$
- $Im(\gamma)$ si dice supporto della curva
- γ è regolare se $\gamma\in C^1$ e $\gamma'(t)\neq 0$ $\forall t\in[a,b]$
- γ è regolare a tratti se γ è continua ed $\exists t_1<\dots<t_N\in[a,b]$, $t_1=a$, $t_N=b$: $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ è regolare

Oss: γ regolare $\Rightarrow$ γ è localmente grafico di una funzione C^1, cioè (a meno di rotaz. e traslaz.)

$\forall \bar t\ \exists\varepsilon$ tc $\gamma(t)=(t,u(t))$ con $t\in(\bar t-\varepsilon,\bar t+\varepsilon)$, $u:(\bar t-\varepsilon,\bar t+\varepsilon)\to\mathbb{R}^{n-1}$ di classe C^1

↳ verif. per esercizio

Il vettore $T(t)=\dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\in S^{n-1}$ si dice vettore tangente a γ in t



$r(t)=\{\gamma(t)+\lambda\gamma'(t):\lambda\in\mathbb{R}\}$ è la retta tangente

- Se $n=2$, $N(t)=R\cdot T(t)$ è il vettore normale dove si sceglie $R=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ rot. di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario

- Il vettore $\vec K(t)=\dfrac{T(t)'}{|\gamma'(t)|}=\dfrac{\gamma''(t)-\langle\gamma'',T(t)\rangle T(t)}{|\gamma'(t)|^2}$ è il vettore curvatura

proiezione lungo $T(t)$

$0=\partial_t\langle T(t),T(t)\rangle=2\langle T'(t),T(t)\rangle \Rightarrow \langle\vec K(t),T(t)\rangle=0$

Se $n=2$, $\vec K(t)=k(t)\cdot N(t)$

curvatura (scalare) di γ

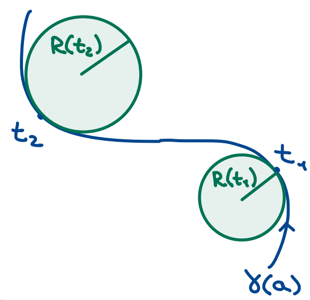
Se $n>2$, $\vec K(t)\in T(t)^{\perp}$ ← spazio di dimensione $n-1$

Posso scrivere $\vec K(t)=k(t)N(t)$ con $N(t)=\dfrac{\vec K(t)}{|K(t)|}\in S^{n-1}$ e $k(t)>0$ ← curvatura scalare

Def: γ si dice biregolare se è regolare e se $\vec K(t)\neq 0$ $\forall t$

Oss: $R(t)=\dfrac{1}{|k(t)|}$ è il raggio del cerchio osculatore cioè

l'unico cerchio che approssima meglio γ vicino a $\gamma(t)$.



La curvatura scalare di un cerchio è $k=\frac{1}{R}$

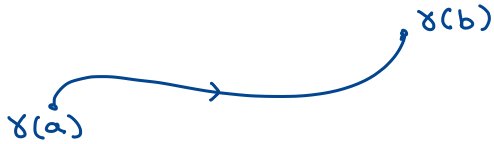
RIPARAMETRIZZAZIONE: γ_1,γ_2 curve, $\gamma_1:I_1\to\mathbb{R}^n$, $\gamma_2:I_2\to\mathbb{R}^n$

$\gamma_1\sim\gamma_2$ se $\exists\psi:I_1\to I_2$ continua e bigettiva (monotona) tc $\gamma_1=\gamma_2\circ\psi$

Questo definisce una relazione di equivalenza sulle curve.

Si ha $Im(\gamma_1)=Im(\gamma_2)$, ψ si dice riparametrizzazione.

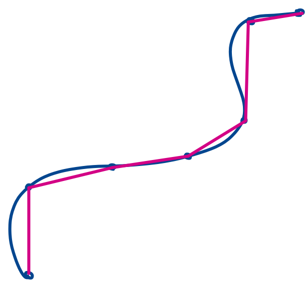
Oss: Se ψ è crescente allora γ_1 e γ_2 hanno lo stesso verso, altrimenti hanno verso opposto.



Oss: $T(t)$ e $\vec{k}(t)$ non dipendono dalla classe di equivalenza:

$$T_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma_1'(t)|} = \frac{\gamma_2'(\psi(t))\psi'(t)}{|\gamma_2'(\psi)|\cdot|\psi'(t)|} = \pm T_2(\psi(t)) \quad \left(\vec{k}_1(t) = \vec{k}_2(\psi(t))\right)$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva, $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_N = b\}$ partizione

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \in [0, +\infty]$$ lunghezza di γ

Se $L(\gamma) < +\infty$ la curva si dice rettificabile

Oss: $L(\gamma)$ non dipende dalla classe di equivalenza, cioè dalla parametrizzazione di γ

Teorema: γ curva $C^1 \Rightarrow \gamma$ rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Dim: $\mathcal{P}$ partizione, $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\right| \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|$

Sommando in i $\sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \le \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \Rightarrow L(\gamma) \le \int |\gamma'(t)|\,dt$ in part. γ è rettificabile

$\gamma'(t)$ unif. cont., $\forall \varepsilon\ \exists \delta$ tc $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$ se $|t-s| < \delta$

Scelgo $\mathcal{P}$ tc $(t_i - t_{i-1}) < \delta\ \forall i$

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\,dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t) - \gamma'(s)|\,dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1})$$ oss: $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$

scelgo $s \in [t_{i-1} - t_i]$

Passando ai moduli:

$$|\gamma'(s)|(t_i - t_{i-1}) = \left|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s))\,dt\right| \le |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow |\gamma'(s)| \le \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon$$

Integro in $s \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)|\,ds \le |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$

Sommo in $i \Rightarrow \int_a^b |\gamma'(s)|\,ds \le \sum_i |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(b-a) \le L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$

Concludo per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Oss: $L(\gamma)$ non è la "lunghezza del supporto" almeno se γ non è iniettiva

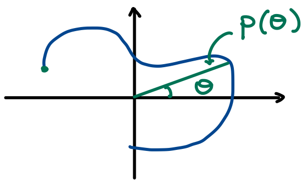
Oss: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $a < c < b$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ (oss: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$)

$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$

Es: Se $\gamma(t) = (t, u(t))$ $\quad u : [a,b] \to \mathbb{R}^{n-1}$

$$\gamma'(t) = (1, u'(t)),\ |\gamma'(t)| = \sqrt{1+u'(t)^2} \quad e \quad L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+u'(t)^2}\,dt$$

Es: $\gamma(\theta) = (p(\theta)\cos\theta,\ p(\theta)\sin\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $p : [\theta_1,\theta_2] \to [0,+\infty)$



$$\gamma'(\theta) = (-p\sin\theta + p'\cos\theta,\ p\cos\theta + p'\sin\theta)$$

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{p^2+p'^2} \Rightarrow L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{p^2+p'^2}\,d\theta$$

Es: $\gamma(t) = \begin{cases} (t, t\sin(1/t)) & t \in (0,1] \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$ $\quad$ continua, non regolare vicino a $t=0$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma\big|_{[\varepsilon,1]},\quad L(\gamma_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 |\gamma'(t)dt| \Rightarrow L(\gamma) = \lim_{\varepsilon\to 0} L(\gamma_\varepsilon) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+\left[t\sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\right]'^2}\,dt \longrightarrow \left(t\sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)' = \sin\left(\tfrac{1}{t}\right) - \tfrac{1}{t}\cos\left(\tfrac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\left(t\sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)'^2} = \sqrt{\sin\left(\tfrac{1}{t}\right)^2 + \underbrace{\tfrac{1}{t^2}\cos\left(\tfrac{1}{t}\right)^2 - \tfrac{1}{t}\sin\left(\tfrac{2}{t}\right)}_{O\left(\frac{1}{t^2}\right)} + 1}$$

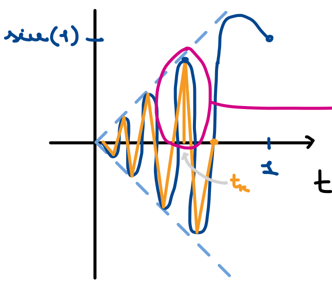
$O\left(\frac{1}{t^2}\right) \to$ vero se $\left|\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ cioè $\frac{1}{t} \in \bigcup_{k\geq 1} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

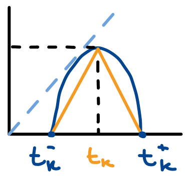
$$\Rightarrow t \in \tilde{I} = \bigcup_{k\geq 1} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}+k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4}+k\pi}\right],\quad \sqrt{1+\left(t\sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)'^2} \geq \frac{c}{t} \quad t \in \tilde{I}$$

$$L(\gamma) \geq c\int_{\tilde{I}} \frac{1}{t} = c\sum_k \left[\log\left(\frac{1}{-\frac{\pi}{4}+k\pi}\right) - \log\left(\frac{1}{\frac{\pi}{4}+k\pi}\right)\right] = c\sum_k \log\left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{k\pi - \frac{\pi}{4}}\right) = c\sum_k \log\left(1 + \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}}{k\pi - \frac{\pi}{4}}}_{O\left(\frac{1}{k}\right)}\right) =$$

$$= c\sum_k O\left(\tfrac{1}{k}\right) = +\infty$$

ALTRO MODO:

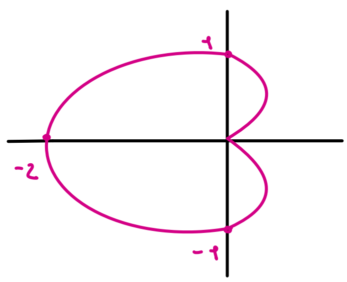




$$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \in O\left(\tfrac{1}{k}\right) \qquad t_k^- = \frac{1}{(k+1)\pi} \in O\left(\tfrac{1}{k}\right) \qquad t_k^+ = \frac{1}{k\pi} \in O\left(\tfrac{1}{k}\right)$$

$$L(\gamma) \geq \sum_{k\geq 1} \sqrt{\underbrace{(t_k^+ - t_k)^2 + t_k^2}_{\in O\left(\frac{1}{k}\right)}} + \sqrt{\underbrace{(t_k - t_k^-)^2 + t_k^2}_{\in O\left(\frac{1}{k}\right)}} = +\infty$$

Es (CARDIOIDE): $p(\theta) = 1 - \cos\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$



$$\gamma(\theta) = (p\cos\theta,\ p\sin\theta) \qquad \cos\theta = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2+p'^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta^2 - 2\cos\theta + \sin\theta^2} =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta} = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \underset{y = \theta/2}{=} 4\int_0^{\pi} \sin(y) = 8$$

Es: $Q = [0,1)^N \subseteq \mathbb{R}^N$, $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$, $\langle f,g\rangle = \int_Q f(x)\overline{g(x)}\,dx$ con $x = (x_1,\dots,x_n)$

Sia $e_k(x) \doteq e^{2\pi i k\cdot x}$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $k\cdot x = \sum_{i=1}^N k_i x_i$

- e_k è un sistema ortonormale

$$\langle e_k, e_h\rangle = \int_Q e^{2\pi i kx} e^{-2\pi i hx}\,dx = \int_Q e^{2\pi i (k-h)x}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i (k_1-h_1)x_1}\,dx_1 \cdot \ldots \cdot \int_0^1 e^{2\pi i (k_N-h_N)\cdot x_N}\,dx_N = \delta_{k_1-h_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{k_n-h_n} = \delta_{hk}$$

$f\in L^2_{\mathbb{C}}(Q)$, $k\in\mathbb{Z}^N$, $\hat{f}_k = \langle f, e_k\rangle$ e $S_n f = \sum_{|k|\le n} \hat{f}_n e_k$ con $|k| = \sum_{i=1}^N k_i$

® $S_n f \longrightarrow f$ in L^2 , $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} |\hat{f}_k|$

(per ottenere il risultato bisogna verificare che $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}^N}$ è completo)

Es: $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)}\,dx\,dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

È un caso particolare di $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}Ax\cdot x}\,dx$ con A matrice simmetrica definita positiva

In questo caso specifico la matrice è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Guardiamo il caso generale:

Supponiamo $x = My$, allora $Ax\cdot x = (AMy)(My) = ({}^tMAMy)\cdot y$

Posso prendere come matrice M una una matrice M una matrice ortogonale che diagonalizza A:

$$M^{-1}AM = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = D$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}Ax\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}Dy\cdot y}\underbrace{|\det M|}_{\substack{=1 \text{ perché} \\ M \text{ ortogonale } (*)}}\,dy = \int_{\mathbb{R}^N}\prod_{i=1}^N e^{-\frac{\lambda_i}{2}y_i^2}\,dy = \prod_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda_i}{2}y_i^2}\,dy_i = \underbrace{\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}}$$

nel caso considerato all'inizio questo dà $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

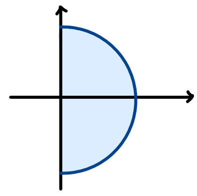
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,dt \underset{\substack{s=\sqrt{\lambda}t \\ ds = \sqrt{\lambda}dt}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}\frac{ds}{\lambda} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

(*) M ortogonale $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $M^tM = MM^t = Id$

$\det(MM^t) \underset{\text{Binet}}{=} \det(M)\det(M^t) = \det(Id)$

Dunque si ha $\det(M) = \pm 1 \Rightarrow |\det(M)| = 1$

Es: Calcolare il baricentro di un semidisco $D^+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2, \ x \geq 0 \}$



$$\bar{x}_{D^+} = \frac{\int_{D^+} x\,dx\,dy}{\int_{D^+} dx\,dy} \quad \leftarrow \frac{\pi R^2}{2}$$

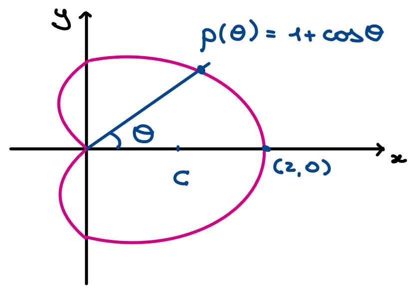
opzioni → Fubini-Tonelli
→ cambio di variabili

Jacobiano delle coord. polari

$$\int_{D^+} x\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^R \rho\cos\theta \, \rho \, d\rho\, d\theta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 d\rho \right) = \frac{2R^3}{3}$$

$$\bar{x}_{D^+} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4}{3\pi} R$$

Es: Determinare l'area della cardioide $\rho \leq 1 + \cos\theta$

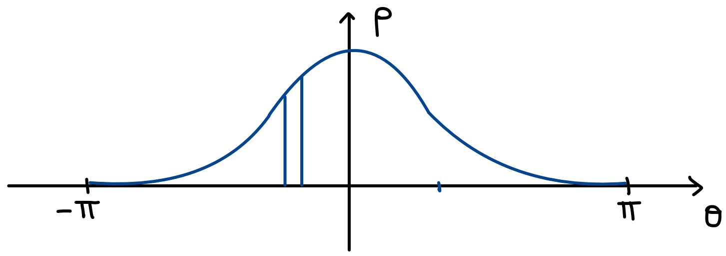


$C = \Phi(D) \quad D = \{ \rho \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi : \rho \leq 1 + \cos\theta \}$

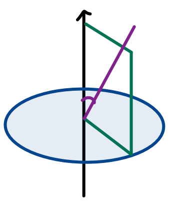
$$\text{Area}(C) = \iint_C dx\,dy = \iint_D J_\Phi \, d\rho\, d\theta = \iint_D \rho \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho\, d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi) + \underbrace{\frac{1}{2}\pi}_{\text{da } \cos^2} = \frac{3}{2}\pi$$



Es: Calcolare il determinante del cambio di coordinate "sferiche" osservando che si tratta di una composizione di due coordinate "cilindriche"



(ρ, θ) su x, y

$\Rightarrow (\rho, z)$ prendo coordinate polari

Es: Calcolare $\iint_D \frac{1}{1+x+y} dx\,dy = (*)$ con $D = \{ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \}$

$$(*) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{1+x+y} dy = \int_0^1 \left[\log(1+x+y) \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\log 2 - \log(1+x) \right] dx =$$

$$= \log 2 - \left[\left[x \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \right] = \cancel{\log 2} - \cancel{\log 2} + \int_0^1 \frac{x+1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1 - \log 2$$

Es: Calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$ con $D = \{ x \geq 0 ; \ x^2+y^2-2y \leq 0 \}$

Es: Calcolare $\iiint_E xz\,dx\,dy\,dz$ con $E = \{ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 : 0 \leq y \leq 2 - x^2 - z^2 \}$

Fisso (x,z): $\iint_D \left(\int_0^{2-x^2-z^2} xz\,dy \right) dx\,dz$ con $D = \{ x \geq 0, z \geq 0 : x^2+z^2 \leq 2 \}$

$$\iint_D xz(2-x^2-z^2)\,dx\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos\theta\sin\theta(2-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta \overset{F.T.}{=} \left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta\right)\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^3-\rho^5)\,d\rho =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(2-\frac{8}{6}\right) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Es: $I=[a,b]$, $u\in C^1(I)$, $u(a)=u(b)=0$

(i) $\exists c>0$ tc $\int_a^b |u(t)|^2dt \le c^2\int_a^b |u'(t)|^2dt$

(ii) Mostrare che $c=\frac{(b-a)}{\pi}$ è la miglior scelta

Sol: SPG posso supporre:
- $a=0$ (traslazione)
- $b=\pi$ (riscalamento lineare)
- $c=1$

Estendendo u a $[-\pi,\pi]$ ottengo in maniera dispari $(\tilde{u})$: ho che $\tilde{u}$ è C^1 e è estendibile a una funzione C^1 e è estendibile a una funzione C^1 e 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$

$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin(kt)$ con $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{u}(t)\sin(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\sin(kt)\,dt$

$\tilde{u}' = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k\cos(kt)$ → converge in L^2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{u}|^2dt = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{u}'|^2dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2 < +\infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{u}|^2dt = 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \le 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{u}'|^2dt$$

La disuguaglianza vale sempre ed è ottimale se $b_k=0\ \forall k\neq 1$ $\square$

Sia $\varphi \in L^1([0,+\infty))$:

① $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, n\omega_n t^{n-1}\,dt$ dove ② $\omega_n \doteq |B_1^{(n)}(0)| = \dfrac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$ con $\Gamma(x) \doteq \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

misura di Lebesgue della palla n-dimensionale; Γ di Eulero

Dim: Chiamo $\omega_n \doteq |B_1^{(n)}(0)|$. Faccio un cambio di variabile: $|B_r^{(n)}(0)| = r^n\omega_n$

Dimostro (1) per $\varphi = \chi_{[a,b]}$ $0 \le a \le b$ ⇝ per φ continua a supporto compatto ⇝ per $\varphi \in L^1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|)\,dx = \int_{a\le|x|\le b} dx = |B_b^{(n)}(0) \setminus B_a^{(n)}(0)| = (b^n - a^n)\omega_n = \omega_n \int_a^b n t^{n-1}\,dt$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|)\,dx = \omega_n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(t)\, n t^{n-1}\,dt$$

Es: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \pi^{n/2}$ Ricorda: caso particolare di $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}Ax\cdot x}\,dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$ con $A = 2Id$, $\sqrt{\det A} = 2^{n/2}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} n\omega_n t^{n-2}\, \underbrace{2t\,dt}_{ds} = \frac{n}{2}\omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s}(\sqrt{s})^{n-2}\,ds = \frac{n}{2}\omega_n\int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1}\,ds \qquad s = t^2$$

$$\pi^{n/2} = \frac{n}{2}\omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{con} \quad \omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Γ DI EULERO

$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

Per esempio: $n=2$ $\quad \omega_2 = \dfrac{\pi}{\Gamma(1)} = \pi$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$n=1$ $\quad \omega_1 = \dfrac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = 2\dfrac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}$

$n=3$ $\quad \omega_3 = \dfrac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{4}{3}\pi$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Oss: La quantità $\boxed{n\omega_n t^{n-1}}$ rappresenta la misura (n-1)-dimensionale della $\partial B_t^{(n)}(0)$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE (in $\mathbb{R}^N$)

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$

Teo: $f * g(x)$ è ben definita per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$

Dim: $(p=1)$ $\Phi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = f(x-y)g(y)$ Oss: Φ è misurabile

$y \in \mathbb{R}^N$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x,y)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx\,|g(y)| = \|f\|_1 |g(y)|$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x,y)|\,dy \le \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_1 |g(y)|\,dy = \|f\|_1\|g\|_1 \overset{F.T.}{\Longrightarrow} \Phi \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

$f(x-y)g(y)$

Pertanto per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ è ben definita $x \longmapsto \int f(x-y)g(y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^N, dx)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f*g|(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\,dy\,dx \overset{F.T.}{\leq} \|f\|_1 \|g\|_1$$

$(p>1)$ $h(x) = \left(|f| * |g|^p\right)(x)$, $h \in L^1$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p$ $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$(f*g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \Rightarrow |f(x-y)g(y)| = \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}}_{L^q_y} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|}_{L^p_y}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \|f\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{1/p}$$

$$(f*g)(x) \leq \|f\|_1^{1/q} (h(x))^{1/p} \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f*g|^p(x)\,dx \leq \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\,dx \leq \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \|g\|_p^p$$

$$\Rightarrow \|f*g\|_p \leq \|f\|_1^{1/q} \|f\|_1^{1/p} \|g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$ esercizio: $f*g = g*f$

Prop: $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f*g \in C(\mathbb{R}^N)$

Dim. $f \in C_c(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f$ è U.C. $\rightsquigarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$$|f*g(x) - f*g(x')| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y)-f(x'-y)]g(y)\,dy\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)-f(x'-y)|\,|g(y)|\,dy$$

se $|x-x'|<\delta \rightarrow$ $|f(x-y)-f(x'-y)|<\varepsilon$ $\quad \overset{}{\leq} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,dy \leq \varepsilon \|g\|_1$

Es: Mostrare che la stessa conclusione vale se $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

Prop: Se $f \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$

Allora $f*g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ (1) e $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ (2)

Dim. oss 1: $f*g \in C(\mathbb{R}^N)$ per quanto visto prima

oss 2: $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \in C(\mathbb{R}^N)$

Per il teorema del differenziale totale basta verificare (2)

$$(*) \quad \left|(f*g)(x+he_i) - (f*g)(x) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g\right)(x)\,h\right| = o(h)$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \Big[\underbrace{f(x+he_i-y)-f(x-y)}_{} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\,h\Big] g(y)\,dy\right| = (*)$$

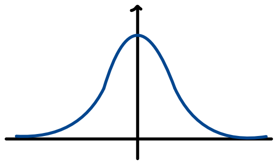
$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+the_i-y)\cdot h\,dt$$

ω modulo di continuità di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$(*) \leq |h| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \left| \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+the_i-y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\right]}_{\text{se } h \text{ è piccolo, è piccola}} dt\, g(y)\,dy \right| \leq |h|\,\omega(|h|)\,\|g\|_1 = o(h)$$

$\square$

Prop: $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = 1$, $\operatorname{supp}\rho \subseteq B_1(0)$



$\rho_n(x) \doteq n^{1/N}\rho(nx)$, $\operatorname{supp}\rho_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(0)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\,dx = 1$

Se $f \in L^1$ considero $\rho_n * f \in L^1$, $\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n * f \longrightarrow f$ in L^1

Dim: $\rho_n * f \in C^\infty$ si dimostra applicando ripetutamente la prop. precedente:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} \left(\rho_n * f\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} \rho_n\right) * f$$

Per verificare la convergenza:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n * f - f|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int \rho_n(x-y) f(y)\,dy - f(x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\,|f(y) - f(x)|\,dy\,dx$$

$x-y=w$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(w)\,|f(x-w) - f(x)|\,dw\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{|w| \leq \frac{1}{n}} \rho_n(w)\,|f(x-w) - f(x)|\,dw\,dx$$

$$= \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} \rho_n(w) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-w) - f(x)|\,dx}_{\|f - f_w\|_1 \xrightarrow[w \to 0]{} 0}\,dw$$

continuità dell'integrale rispetto alle traslazioni

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \|f - f_w\|_1 < \varepsilon \quad \forall\ |w| < \frac{1}{n_0}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f * \rho_n(x) - f(x)|\,dx \underset{\text{se } n \geq n_0}{<} \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} \rho_n(w)\,\varepsilon \cdot dw = \varepsilon$$