



Dipartimento  
di Matematica  
Università di Pisa

# APPUNTI DEL CORSO DI **ANALISI MATEMATICA II**

A cura di Chiara Di Sano  
[c.disano1@studenti.unipi.it](mailto:c.disano1@studenti.unipi.it)

Con il contributo di Alessandra Cattafi e Arianna Misuraca

SECONDO SEMESTRE

Rielaborazione delle lezioni dei prof.  
M. Novaga  
C. Carminati  
A.A. 2022-2023

Es 1:  $C = \{g(x,y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  di cui,  $g(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ .  $C$  è compatto?

$$\begin{aligned} \nabla g &= 0 & 3x^2 + y &= 0 & y &= -3x^2 & x=y=0 \\ & & 3y^2 + x &= 0 & 27x^4 + x &= 0 \\ & & & & 27x^3 = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} = y \\ & & & & g\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &> 0 \end{aligned}$$

$$x^3 + t^3 x^3 + t x^2 = 0 \quad x(t) = \frac{-t}{1+t^3} \quad t \neq -1, \quad y(t) = \frac{-t^2}{1+t^3}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} h(t) = h(-1) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 1/\lambda \\ 3y^2 + x = 1/\lambda \\ g = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 3y^2 + x \\ 3(x^2 - y^2) = x - y \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \textcircled{1} \ x = y \\ \searrow \textcircled{2} \ x + y = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} \quad 0 = x^3 + y^3 + xy = (x+y)(x^2+y^2-xy) + xy$$

$$f(x, y) = x + y - \frac{xy}{x^2 + y^2 - xy} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy > -3xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 > 0$$

Es 2:  $f(x, y) = \frac{x^3 y (1 - xy)}{\sin(x^3 + |y|^d)} \approx \frac{x^3 y}{x^4 + |y|^d}$  ④ continuità in  $(0, 0)$

$$f(0,0) = 0$$

 $\alpha > 0$ 

② differenziabilità in  $(0,0)$

passaggio in  
coord. polari

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= x^2 & |x| &= |x|^{1/2} \\ Y &= |y|^{d/2} \cos(y) & |y| &= |y|^{2/d} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad |f(x, y)| = \frac{|x|^{3/2} |y|^{2/d}}{|x|^2 + |y|^2} = \rho^{\frac{3}{2} + \frac{2}{d} - 2} |\cos \theta|^{\frac{3}{2}} |\sin \theta|^{2/d}$$



$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \frac{2}{d} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{d < 4}$$

$$2) 0 < d < 4 \Rightarrow f \text{ è diff. in } (0,0)?$$

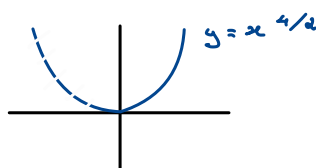
$$f(x,y) = v(x,y) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$f(x,y) = f(-x,-y) \Rightarrow v=0 \text{ se esiste}$$

$$f \text{ diff.} \Leftrightarrow \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\text{Se guardiamo } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(1-xy) + x^3y(-x)}{\sin(x^4+|y|^d)} - \frac{d x^3(1-xy) \cos(x^4+|y|^d) |y|^{d-1}}{\sin(x^4+|y|^d)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \sim \frac{1}{x}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+|y|^d)}$$



Continuità lungo le rette:  $x^4 = |y|^d$

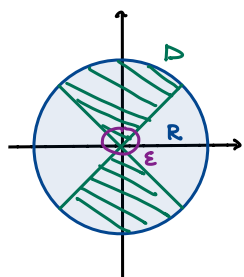
$$f(x, x^{4/d}) = \frac{x^{3+4/d}}{2x^4\sqrt{x^2+x^{8/d}}} \sim \frac{1}{2} x^{3+4/d-5} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{d} - 2 > 0 \quad \frac{1}{d} > \frac{1}{2} \quad \boxed{d < 2} \text{ cond. necessaria}$$

Supponiamo  $0 < d < 2$ :

$$x \neq 0, y \neq 0 \quad \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^4+|y|^d)} < \frac{x^3y}{2|x||x^2|y|^{d/2}} = \frac{|y|}{2}^{1-\frac{d}{2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \quad \boxed{\text{se } d < 2}$$

Es 3:  $f_d(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} (x^2+y^2)^d$  ① Integrabilità su D

1)  $f_d = (x^2+y^2)^d$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  ② Calcolare  $\int_D f_0$  su D



$$D = \{ |x| < |y| \}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[D \setminus B_\epsilon(0)] \cap B_R(0)} f_d$$

$\epsilon \rightarrow 0 \text{ e } R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} & \text{coord. polari} \quad x^2+y^2 = \rho^2, \rho^2 = t, 2\rho d\rho = dt \\ & \downarrow \\ & = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} 2\rho \cdot \rho^{2d} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} t^d e^{-t} dt = \\ & = \frac{\pi}{2} \Gamma(d+1) \quad \boxed{d > -1} \end{aligned}$$

$\uparrow$   $\Gamma$  di Eulero

$$2) \int_D f_0 = \frac{\pi}{2} \Gamma(1) = \frac{\pi}{2}$$

Oss:  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

INTEGRAZIONE LUNGO CURVE

$\gamma: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  regolare a tratti,  $A$  aperto

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \begin{array}{l} \text{tiene conto dello Jacobiano della curva} \\ \text{invariante per riparametrizzazione della curva} \end{array}$$

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f \quad \text{se } \tilde{\gamma}(t) = \gamma(\sigma(t)) \quad \sigma: [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ monotona } C^1 \text{ a tratti}$$

LAVORO DI CAMPO DI VETTORI

$v = (v_1, \dots, v_n)$  campo di vettori

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma} v \cdot T = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

↳ lavoro di  $v$  lungo  $\gamma$

Invariante per riparam. crescenti

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma \quad \sigma \text{ monotona, } C^1 \text{ a tratti}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} v = \int_{\gamma} v \quad \text{se } \sigma \text{ crescente, } \int_{\tilde{\gamma}} v = - \int_{\gamma} v \quad \text{se } \sigma \text{ decrescente}$$

Oss: Integrando lungo 1 ottengo la lunghezza della curva

1. FORME DIFFERENZIALI

Def:  $L \in (\mathbb{R}^n)^*$  si dice un covettore se  $\exists! v \in \mathbb{R}^n$  t.c.  $L(x) = \langle v, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Oss:  $(\mathbb{R}^n)^* = \{ L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare e continua} \}$  il duale di  $\mathbb{R}^n$   
 ↳ in  $\mathbb{R}^n$  lineare  $\Rightarrow$  continua

Oss: le f. lineari in  $\mathbb{R}^n$  sono rappresentate da 1. matrice (\*) contr.

Oss:  $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$  come sp. vettoriale. In generale  $X^* \cong X$  se  $X$  è di Hilbert  
 ma non vale per i Banach (es:  $L_p$ )

Def:  $dx_i \in (\mathbb{R}^n)^*$  campo di covettori:  $dx_i(x) = \langle e_i, x \rangle = x_i$  base di  $(\mathbb{R}^n)^*$

Def:  $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  si dice 1 forma differenziale su  $A$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \quad a = (a_1, \dots, a_n), \quad \omega(x)[v] = \langle a, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$\omega$  continua e  $\gamma$  regolare a tratti

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b a(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Es:  $\omega(x, y) = -y dx + x dy$   $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$   $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)}_{=1} dt = 2\pi \quad a(x, y) = (-y, x)$$

Es:  $f \in C^1(A)$

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{differenziale di } f, \text{ 1-forma}$$

Il campo di vettori associato è  $\nabla f(x)$

Def:  $\omega$  1-forma continua si dice **esatta**, e il campo associato si dice conservativo, se  $\exists f \in C^1(A)$  t.c.  $\omega = df$

Es:  $\omega = x dx + y dy$  è esatta,  $\left(f = \frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ ,  $\omega = -y dx + x dy$  non è esatta

infatti, se  $\exists f$  t.c.  $\frac{\partial f}{\partial x} = -y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow$

Derivando a croce  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial y} = -1$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} = +1$  **contraddice Schwartz**

Integrando a croce  $f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int -y dx = -xy + c_1(y)$   
 $= \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int x dy = xy + c_2(y)$  assurdo

Def:  $\omega$  è esatta  $\Rightarrow f$  si dice primitiva di  $\omega$  o potenziale del campo associato

Def:  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  di classe  $C^1$  si dice chiusa se  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$

Oss:  $\omega$  è esatta e  $C^1$ ,  $f \in C^2 \Rightarrow \omega$  chiusa

Oss:  $\omega$  esatta  $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$  dipende da  $\gamma$  solo attraverso gli estremi  $\gamma(a), \gamma(b)$   $\leadsto$  Fisica 2: quando solo  $\Delta V$  agli estremi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \nabla f(\gamma) \cdot \gamma' dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

In particolare  $\int_{\gamma} \omega = 0 \quad \forall \gamma$  curva regolare chiusa

Oss:  $\exists \omega$  chiusa ma non esatta

$$\omega: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \quad \omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \int_{\gamma} \omega = 2\pi \neq 0$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \omega$  chiusa

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Teorema:  $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  1-forma continua,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto

le seguenti affermazioni sono equivalenti:

①  $\omega$  esatta

②  $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$  e  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b) \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$

③  $\gamma$  chiusa  $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$

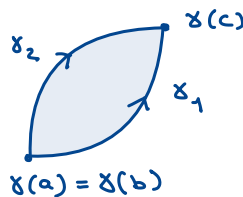
Dim: ①  $\Rightarrow$  ② e ①  $\Rightarrow$  ③ visti

③  $\Rightarrow$  ②:  $\gamma_1, \gamma_2$   $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\gamma(a) = \gamma(b)$

$c \in (a, b)$   $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$

$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2): [a, 2b-a] \rightarrow \mathbb{R}^n$

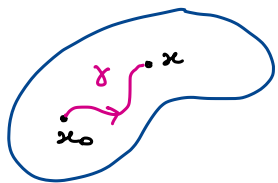


$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(2b-t) & t \in [b, 2b-a] \end{cases} \quad \text{chiusa}$$

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

②  $\Rightarrow$  ③  $\gamma$  chiusa si scrive come  $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con gli stessi estremi

②  $\Rightarrow$  ① Cerchiamo una primitiva di  $\omega$



A Scegliamo  $x_0 \in A$ , sia  $\tilde{A} \subseteq A$  la componente connessa di  $x_0$ ,  
e definiamo  $f(x) = \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega$  dove  $\gamma_{x_0, x}$  è una generica curva  
con estremi  $x$  e  $x_0$

Devo verificare che  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x) \quad \forall i$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma_{x_0, x+h e_i}} \omega - \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega = (*)$$

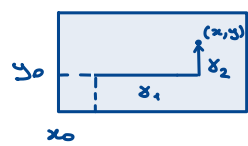
dove  $\gamma_h(t) = x + te_i$   $t \in [0, h]$   $\gamma'_h(t) = e_i$

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h a_i(x + te_i) dt = a_i(x) \quad \text{per il Teo della media integrale}$$

Oss: In  $\tilde{A}$  cc di  $x_0$  ho costruito  $f$  che dipende da  $x_0$ , due primitive di  $w$  in  $\tilde{A}$  differiscono per una costante

Prop: A rettangolo, anche illimitato (ad es:  $\mathbb{R}^n$ ),  $w$  1-forma  $C^1$  chiusa  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow w$  è esatta

Dim: Per semplicità fissiamo  $n=2$  (in generale si fa in modo simile)



e fissiamo  $(x_0, y_0) \in A$

$$w(x, y) = a dx + b dy$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad \gamma_1(t) = (t, y_0) \quad t \in [x_0, x]$$

$$\gamma_2(t) = (x, t) \quad t \in [y_0, y]$$

$$f(x, y) = \int_{\gamma} w = \int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, t) dt$$

Va verificato che  $\frac{\partial f}{\partial x} = a$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt = a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, t) dt = \\ &= a(x, y_0) + a(x, y) - a(x, y_0) \end{aligned}$$

Allo stesso modo  $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

FORME CHIUSE E ESATTE

1- forme differenziali:

vs

campi di vettori:

- esatta

- conservativo

- primitiva

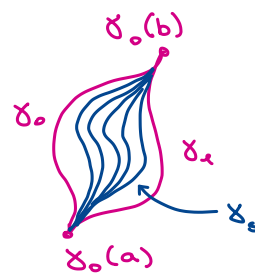
- potenziale

- chiusa

- irrotazionale

Def:  $\omega = \sum a_i dx_i \in C^1$  chiusa se  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$ Si possono caratterizzare gli aperti.  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  t.c.  $\omega$  chiusa  $\Rightarrow \omega$  esattaDef:  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  curve con  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  e  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ sono omotope a estremi fissati in  $A$  se  $\exists H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$  continua  
 $\downarrow \ni t$   $\downarrow \ni s$ tale che:  $\bullet H(t, 0) = \gamma_0(t) \quad \forall t$  $\bullet H(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t$  $\bullet H(a, s) = \gamma_1(a) \quad \forall s$  $\bullet H(b, s) = \gamma_1(b) \quad \forall s$ 

$$\gamma_s(t) = H(t, s) \quad t \in [a, b]$$

In topologia, due funzioni continue da uno spazio topologico  $X$  ad un altro  $Y$  sono dette omotope (dal greco homos = identico e topos = luogo) se una delle due può essere "deformata con continuità" nell'altra, e tale trasformazione è detta omotopia fra le due funzioni.Oss: Posso supporre che  $H$  abbia la stessa regolarità di  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ Se  $\gamma_0$  è omotopa a  $\gamma_1$  in  $A$  scriviamo  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ Prop:  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow A$  con gli stessi estremi,  $\omega$  forma chiusa in  $A$ Se  $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ Dim: Mostriamo che  $f(s) = \int_{\gamma_s} \omega$ , dove  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  è costante in  $s$ .

$$f'(s) = \partial_s \int_{\gamma_s} \omega = \partial_s \int_{H(t,s)} \omega dt \Rightarrow \text{Facciamo la dim. in } n=2 \text{ e supp. } H \in C^2$$
$$\omega = a dx + b dy, \quad H = (H^1, H^2)$$

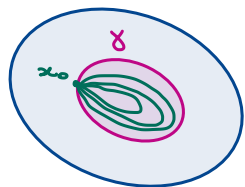
$$f'(s) = \partial_s \int_0^1 (\omega \cdot H) H_t dt = \partial_s \int_0^1 (a H_t^1, b H_t^2) \cdot (H_t^1, H_t^2) dt =$$
$$= \int_0^1 (a_x H_s^1 + a_y H_s^2, b_x H_s^1 + b_y H_s^2) (H_t^1, H_t^2) + (a, b) \cdot (H_{ts}^1, H_{ts}^2) dt =$$
$$= \int_0^1 a_x H_s^1 H_t^1 + a_y H_s^2 H_t^1 + b_x H_s^1 H_t^2 + b_y H_s^2 H_t^2 - \partial_t(a, b) \cdot (H_s^1, H_s^2) dt$$

Oss: I termini di bordo si cancellano:  $H_s(0, s) = H_s(1, s) = 0$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[ \cancel{a_x H_s^1 H_t^1} + a_y H_s^2 H_t^1 + \cancel{b_x H_s^1 H_t^2} + \cancel{b_y H_s^2 H_t^2} \right. \\
&\quad \left. - \cancel{a_x H_t^1 H_s^1} - a_y H_t^2 H_s^1 - \cancel{b_x H_t^1 H_s^2} - \cancel{b_y H_t^2 H_s^2} \right] dt \\
&= \int_0^1 (a_y - b_x) (H_s^2 H_t^1 - H_t^2 H_s^1) dt = 0 \text{ poiché } \omega \text{ chiusa}
\end{aligned}$$

Def: A si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa  $\gamma: [0,1] \rightarrow A$

con  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in A$  è omotopa in A a estremi fissi alla curva cost.  $i_{x_0}(t) = x_0 \forall t$



$$\exists H: [0,1]^2 \rightarrow A \text{ t.c. } H(0,s) = H(1,s) = x_0 \quad \forall s$$

$$H(t,s) = \gamma(t), \quad H(t,1) = x_0 \quad \forall t$$

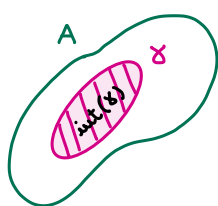
Oss:  $\gamma \sim i_{x_0}$  e  $\omega$  chiusa  $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

Oss:  $\gamma \sim i_{x_0} \Rightarrow \gamma \sim i_{x_1} \quad \forall x_1 = \gamma(\bar{t})$

Cor: A semplicemente connesso,  $\omega$  chiusa  $\Rightarrow \omega$  esatta

Oss:  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è semplicemente connessa  $\Rightarrow \forall \gamma: [0,1] \rightarrow A$  curva semplice chiusa (iniettiva)  $\Rightarrow A \supseteq \text{int}(\gamma)$

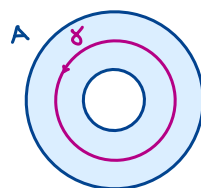
$\text{int}(\gamma)$  è la componente connessa limitata di  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{spt}(\gamma)$  cioè "A non ha buchi"



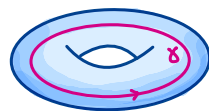
• A connesso  $\Rightarrow$  A sempl. connesso (vera in  $\mathbb{R}^n$ )

•  $A = B_R \setminus B_r \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$  A non semplicemente connesso

•  $A = \text{Toro in } \mathbb{R}^3$  non semplicemente connesso



$\Rightarrow$



Oss: A non è sempl. connesso  $\Rightarrow \exists$  forme chiuse non esatte

## COSTRUZIONE DEL GRUPPO FONDAMENTALE DI A

Sia  $x_0 \in A$  e  $C_{x_0} = \{ \gamma: [0,1] \rightarrow A \text{ curve con } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \}$ .

Consideriamo  $\pi_1(A, x_0) = C_{x_0} / \sim$ . Definiamo in  $C_{x_0}$  l'operazione  $*$ :  $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Prop:  $*$  definisce una struttura di gruppo (non commutativo) in  $\pi_1(A, x_0)$ :  $[\gamma_1] + [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$

Dim (Traccia): Verificare che:

①  $\gamma_1 \sim \sigma_1, \gamma_2 \sim \sigma_2 \Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2 \sim \sigma_1 * \sigma_2$  sia una buona definizione

②  $([\gamma] + [\sigma]) + [\eta] = [\gamma] + ([\sigma] + [\eta])$  associativa

③ Data  $\gamma \exists \sigma$  t.c.  $[\gamma] + [\sigma] = [i_{x_0}]$  (Basta prendere  $\sigma(t) = \gamma(1-t)$ )

Oss: A connesso,  $x_0, x_1 \in A \Rightarrow (\pi_1(A, x_0), +) \cong (\pi_1(A, x_1), +)$  iso di gruppi

Def: A connesso  $(\pi_1(A, x_0), +)$  si dice **GRUPPO FONDAMENTALE** di A

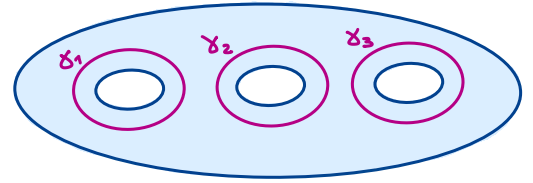
Oss: A connesso è semplicemente connesso  $\Leftrightarrow \pi_1(A) = \{0\}$

Prop: A connesso,  $[\gamma_1] \dots [\gamma_N]$  generatori di  $\pi_1(A)$ ,  $\omega$  chiusa e  $\int_{\gamma_i} \omega = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow \omega$  esatta

Es:  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , A ha N-buchi,  $\text{int}(\gamma_i) \ni i^{\text{°}}$  buco

$\Rightarrow [\gamma_i]$  generano  $\pi_1(A)$

$\rightarrow$  gruppo libero generato da  $[\gamma_1] \dots [\gamma_N]$





FORME DIFFERENZIALI (CHIUSE E ESATTE)

Una forma differenziale è una mappa  $\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto

$$x \mapsto \sum_i A_i(x) dx_i$$

Si chiede  $\omega$  almeno  $C^0$  o  $C^1$  come regolarità minima

*duale*  
*funzioni*  
*forma diff. che vale 1 su  $e_i$  e 0 sul resto*

Richiamo definizione:

**Forma chiusa:** se le derivate miste sono uguali, cioè  $\partial_i A_j = \partial_j A_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

*deve valere in ogni punto*

e  $\omega = \sum A_i(x) dx_i$  la vogliamo minimo  $C^1$

**Forma esatta:** se ammette un potenziale, cioè  $\exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $\partial_i U = A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$  e  $dU = \omega$

*in maniera più compatta*  
*diff. di U*

Conseguenza del Teorema di Schwartz:

Se  $U$  è una forma di classe  $C^1$  allora  $U$  esatta  $\Rightarrow U$  chiusa

( $\Leftarrow$ ) non sempre è vero, localmente è vero, ma potrebbe non esserlo su tutto  $\Omega$ .

Ogni qual volta ci si restringe a un dominio semplicemente connesso è vero.

Non si possono sempre ricollare le forme che troviamo assieme, dipende dalla topologia dello spazio

Es: Dire se le seguenti forme differenziali sono chiuse, esatte (e nel caso determinare  $U$ )

①  $\omega(x, y) = -y dx + \sin(xy) dy$

②  $\omega(x, y) = \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y dx - x dy)$

③  $\omega(x, y, z) = (y - z) dx + (x + z + 1) dy + (y - x + 1) dz$

Sol: Una cosa che si può fare è prima vedere se è chiusa, poi vedere se è esatta.

A volte conviene cercare direttamente il potenziale

①  $\omega(x, y) = \underbrace{-y dx}_{A_1} + \underbrace{\sin(xy) dy}_{A_2}$

$A_1(x, y) = -y, \quad A_2(x, y) = \sin(xy)$

Poniamo la condizione per la chiusura:  $\partial_y A_1 = \partial_x A_2$

$-1 = \cos(xy) y \leftarrow \text{non è vera } \forall x, y$

$\Rightarrow$  la forma ① non è chiusa

②  $\omega(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(y dx - x dy)$  è chiusa?

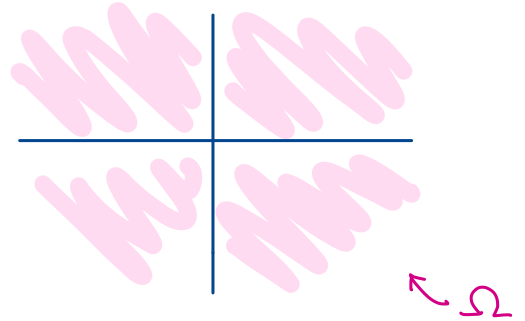
$$A_1(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}, \quad A_2(x, y) = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

Condizione per la chiusura:  $\partial_y A_1 = \partial_x A_2$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \Rightarrow \text{la condizione è verificata}$$

$\Rightarrow \omega$  è chiusa  $\rightarrow$  ciò risponde anche alla 2ª domanda: chi è  $\text{Dom}(\omega)$ ? L'insieme su cui è def.

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{xy=0\}}_{\text{gli assi } x, y} \rightarrow$  insieme di definizione di  $\omega$



Ci sono 4 componenti convesse, ognuno di questi pezzi

è semplicemente connesso perché un rettangolo infinito

$\Rightarrow \omega$  è anche esatta

Ciò non ci dice ancora chi è la primitiva, ma volendo potremmo calcolarla.

Sappiamo che  $\exists U$ :  $\frac{\partial U}{\partial x} = A_1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_2 = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

per trovare  $U$  basta integrare

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + C \rightarrow \text{Ora basta controllare che la derivata in } x \text{ mi dia } A_1 \text{ e la derivata in } y \text{ mi dia } A_2 \text{ e lo finito}$$

$$U = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \text{ è un potenziale}$$

③  $\omega(x, y, z) = \underbrace{(y-z)}_{A_1} dx + \underbrace{(x+z+1)}_{A_2} dy + \underbrace{(y-x+1)}_{A_3} dz$

Verifica chiusura:  $\partial_j A_i = \partial_i A_j$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \partial_y A_1 &= \partial_x A_2 \Leftrightarrow 1 = 1 \\ \bullet \partial_z A_2 &= \partial_y A_3 \Leftrightarrow 1 = 1 \\ \bullet \partial_z A_1 &= \partial_x A_3 \Leftrightarrow -1 = -1 \end{aligned} \right\} \text{vera} \rightarrow \omega(x, y, z) \text{ chiusa}$$

È anche esatta poiché è definita su tutto  $\mathbb{R}^3$  che è sempre connesso

Applichiamo lo stesso metodo di prima:

$$\int A_1(x, y, z) dx = x(y-z) + \underbrace{\psi(y, z)}_{\text{come completo ora?}} \rightarrow \text{questa "costante" è importante, altrimenti i conti non tornano}$$

È sicuro, per costruzione, che  $\frac{\partial U}{\partial x} = A_1$

Ora dobbiamo imporre:  $\frac{\partial U}{\partial y} = A_2$  e  $\frac{\partial U}{\partial z} = A_3$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \partial_y \psi(y, z) = x + z + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y \psi = z + 1 \\ \partial_z \psi = y + 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \psi \text{ è un potenziale per} \\ \omega' = (z+1)dy + (y+1)dz \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -x + \partial_z \psi(y, z) = y - x + 1$$

La funzione  $\psi(y, z) = zy + y + z$  è un potenziale  $\Rightarrow$  Otteniamo  $U = x(y-z) + zy + y + z$

### Un caso generale:

Non è vero che una forma ha sempre una primitiva: in alcuni casi ciò è vero poiché il problema si riduce a un caso unidimensionale.

Ecco un caso dove ciò è vero:

$\omega = \sum A_i(x) dx_i$  con  $A_i(x) = \frac{a(|x|)}{|x|} x_i$   
↳ ci riduciamo a 1 variabile  $\rightarrow \forall i$  sono uguali  
 $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ non dipende davvero da } n \text{ variabili,} \\ \text{ma solo dal modulo di } x / \text{distanza dall'origine} \end{array} \right.$

Allora  $\omega$  è esatta su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\omega = dU$  con  $U(x) = \phi(|x|)$  con  $\phi'(t) = t a(t)$

Detta in maniera "fisica" stiamo dimostrando che le forze centrali sono conservative

forma chiusa  $\longleftrightarrow$  campo irrotazionale

$\int$  forma  $\longleftrightarrow \int$  campo di vettori

forma esatta  $\longleftrightarrow$  campo conservativo

Dim: Stiamo supponendo  $a$  almeno continua  $\Rightarrow t a(t)$  ammette una primitiva

Chiamo  $\Phi$  la primitiva di  $t \mapsto t a(t)$

Verifichiamo direttamente che questa espressione verifica la condizione porta:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = \phi'(|x|) \frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \phi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} = |x| \frac{a(|x|)}{|x|} x_i = A_i(x)$$

Un campo vettoriale così è sicuramente conservativo anche se il dominio non fosse sempl. connesso

Esempio:  $\omega(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$

stessa  $f$  che dip. solo dalla dist. dall'origine  $\Rightarrow$  siamo nel caso di prima

$\omega(x, y)$  è esatta:  $a(t) = \frac{1}{t^2} \rightarrow t a(t) = \frac{1}{t}$ ,  $\phi(t) = \log(|t|)$   
↳ a meno di 1 costante

$\Rightarrow U(x, y) = \log(x^2 + y^2) \rightarrow$  vista altre volte, è armonica, cioè  $\Delta U = 0$  identicamente  
↳ Laplaciano

Prop:  $\Omega$  aperto,  $\Omega$  sempl. connesso,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Delta u \equiv 0$  su  $\Omega$  (se  $u$  è armonica)

$\Rightarrow \exists v: \nabla u \cdot \nabla v = 0$  in ogni punto (cioè le curve di livello di  $u$  e  $v$  in ogni punto dove il grad.  $\uparrow$  gradiente non si annulla devono intersecarsi ortogonalmente)

Dim:  $Du = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$ ,  $\exists v$   $Dv = \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rightarrow$  modo più banale per trovare un vettore ortogonale

ciò si traduce nel seguente modo: se  $w(x,y) = -\partial_y u dx + \partial_x u dy$  deve essere almeno chiusa

Imponiamo chiusa:  $-\partial_y^2 u \stackrel{?}{=} \partial_x^2 u$  vero perché equivale a dire  $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$

Siccome il dominio è semplicemente connesso  $\Rightarrow$  la forma è anche esatta

! Abbiamo usato pesantemente  $\Omega$  sempl. connesso, senza avremmo trovato solo primitive locali

Quindi dato che  $\Omega$  è semplicemente connesso  $\exists v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $dv = w$  e quindi  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$  su  $\Omega$

Terminologia: Tali  $u, v$  si chiamano armoniche coniugate.

E se  $\Omega$  non è semplicemente connesso?

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

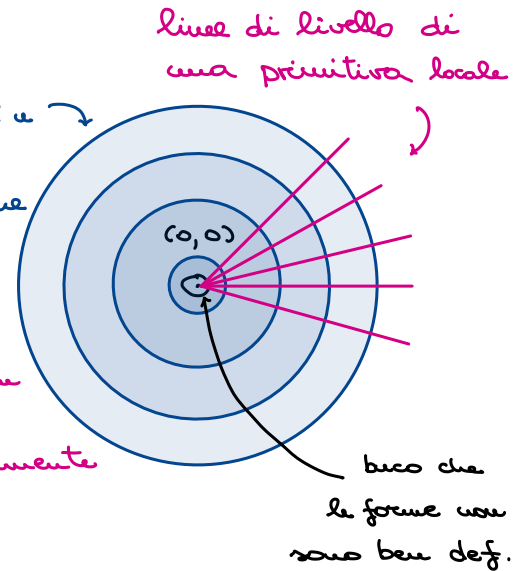
$$\partial_x u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \partial_y u = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$w_0 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{forma chiusa che ha primitiva} \\ \text{locale costante lungo le rette} \end{array} \right.$

linee di livello di  $u$   
centri concentrati  
attorno all'origine

la funzione che ci dà  
l'argomento di un punto  
nel piano complesso ha un  
andamento a spirale ma  
non possiamo def. globalmente



Esercizio: Scrivere una primitiva di  $w_0$  definita su  $\{x > 0\}$

Esercizio:  $\int_{\gamma} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} \xrightarrow{w}$   $\gamma(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos^5(t)) \cos(2t) \\ (2 + \frac{1}{2} \sin^3(t)) \sin(2t) \end{pmatrix}$

Calcolare l'integrale su  $\gamma$ . Ci sono due modi:

(1) Usare la definizione se  $w = A dx + B dy$  e  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b (A(\gamma(t)) \dot{x}(t) + B(\gamma(t)) \dot{y}(t)) dt$$

(2) Semplificare il calcolo riconoscendo che questa forma ha proprietà buone

$$w = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy}_{w_1 \text{ chiusa + esatta}} + \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy}_{w_2 \text{ chiusa ma non esatta}}$$

$\Rightarrow \omega$  è chiusa perché somma di forme chiuse

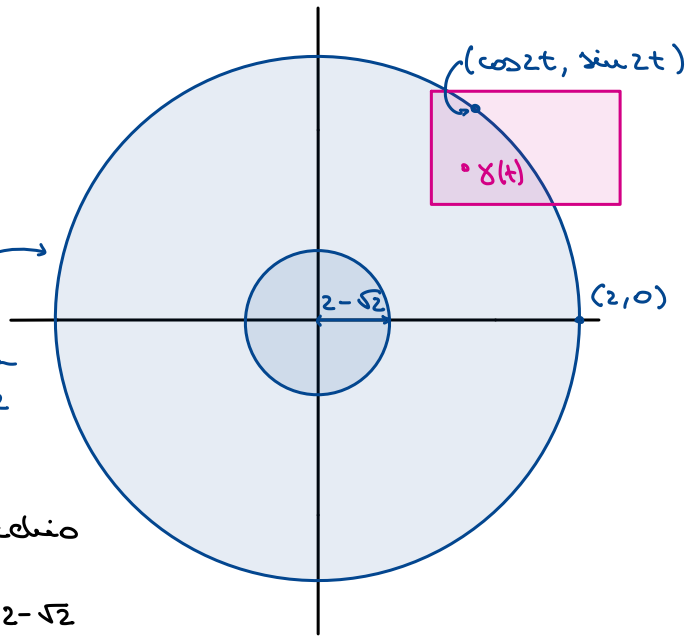
$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 \stackrel{*}{=} \int_{\gamma} \omega_2 \quad (*) \int_{\gamma} \omega_1 = 0 \text{ perché è una forma esatta e l'integrale è la diff. di potenziale agli estremi ma la forma è chiusa}$$

la curva sta nel dominio di  $\omega$ ?

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos^5(t)) \cos(2t) \\ (2 + \frac{1}{2} \sin^3(t)) \sin(2t) \end{pmatrix}$$

questi ci fanno scostare di qualcosa  $< 1$

se avessimo solo  $2\cos 2t, 2\sin 2t$   $\gamma$  che gira su una circonf. di raggio 2



$$\begin{cases} |x(t) - 2\cos(2t)| \leq 1 \\ |y(t) - 2\sin(2t)| \leq 1 \end{cases} (*)$$

$(*) \Rightarrow \gamma(t)$  non è mai distante più di  $\sqrt{2}$  dal cerchio

$\Rightarrow \gamma(t)$  starà sempre fuori dal cerchio di raggio  $2 - \sqrt{2}$

Quindi possiamo togliere il termine relativo al  $\sin$  e al  $\cos$  usando un'omotopia ammissibile (cioè che rimane chiusa e dentro il dominio di  $\omega$ ).

$$\gamma_{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} (2 + \lambda \cos^5(t)) \cos(2t) \\ (2 + \frac{\lambda}{2} \sin^3(t)) \sin(2t) \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_{\lambda}} \omega_2 \text{ non dipende da } \lambda$$

$$\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega_2 \stackrel{(*)}{=} \int_{\gamma_0} \omega_2 = 4\pi \text{ su una curva che gira 2 volte attorno l'origine}$$

$(*)$  Attenzione:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ,  $\omega$  chiusa  $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$  è vero se l'omotopia è a estremi fissati hp necessaria

Esempio:  $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \rightarrow$  semicirconferenza



$$H(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \end{pmatrix}, t \in [0, \pi], \lambda \in [0, 1], \gamma_1(t) = H(1, t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \gamma_0(t) = H(0, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_0} \omega = 0, \int_{\gamma_1} \omega = \pi \Rightarrow \text{la condizione agli estremi è necessaria}$$

Nel caso visto nell'esercizio gli estremi non sono fissati ma le curve sono tutte omotope. Perché funziona allora?

Oss: lo stesso risultato vale se alla condizione "omotope a estremi fissati"

si sostituisce "omotopia tra curve chiuse"

Esempio:  $H(\lambda, t) : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\forall \lambda \quad \left. \begin{array}{l} H(\lambda, a) = P_A \\ H(\lambda, b) = P_B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{gli estremi} \\ \text{sono fissati} \end{array} \quad H(\lambda, a) = H(\lambda, b) \rightarrow \text{omotopia tra curve chiuse } \forall \lambda \in [0, 1]$

Esercizio: Sia  $\gamma_i = H(i, \cdot)$ ,  $\delta(\lambda) \doteq H(\lambda, 0) = H(1, \lambda)$

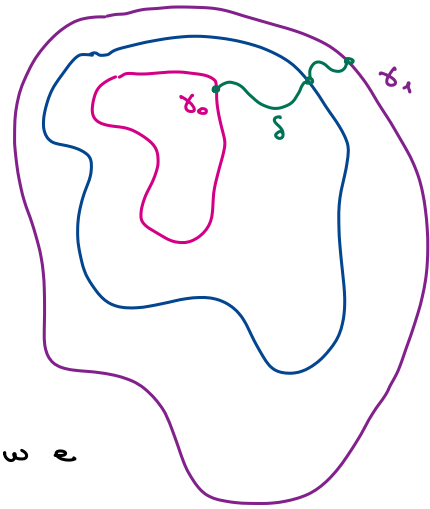
la curva  $\gamma_0 \sim \delta^{-1} \gamma_1 \underset{\text{concatenata}}{*} \delta$  con un'omotopia a estremi fissati

Serve un'omotopia  $C^2$  e riparametrizzare.

Verificare i dettagli per esercizio.

Esercizio: Sia  $w = \frac{y dx - x dy}{(y-x)^2 + x^2}$  determinare il dominio di  $w$  e

dire se  $w$  è chiusa, esatta e in tal caso calcolare il potenziale



Prop: Sia  $\omega$  una forma chiusa su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (di classe almeno  $C^1$ )

Allora  $\exists c \in \mathbb{R}$ ,  $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  tale che  $\omega = dU + c\omega_0$  dove

$$\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad \left( \text{il gruppo di coomologia } H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R} \xrightarrow{\text{forme di ordine 1}} \text{gtd} \right)$$

Voglio cercare di capire quanto deve essere  $c$ . Partiamo dal fondo: assumo che la tesi sia vera  $\rightarrow$  Come voglio  $c$ ?

Dim: Fisso  $c \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega$  unico modo sensato,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$\omega_1 = \omega - c\omega_0$  è chiusa perché differenza di forme chiuse

$\omega_1$  è esatta in quanto chiusa e in quanto  $\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega - c \int_{\gamma} \omega_0 = 2\pi c - c 2\pi = 0$

Scelgo  $U$  tale  $dU = \omega_1 \Rightarrow$  Tesi

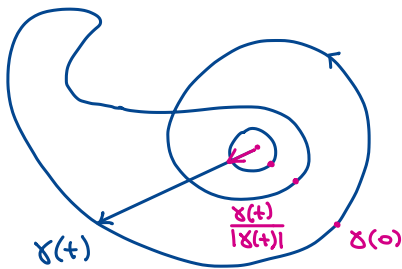
□

### INDICE DI AVVOLGIMENTO DI UNA CURVA :

Curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0$

Oss<sub>1</sub>: Se  $\gamma$  è una curva chiusa in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow \text{ind}(\gamma) \in \mathbb{Z}$

Dim: Considero un'omotopia con dato periodico al bordo tra  $\gamma(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$

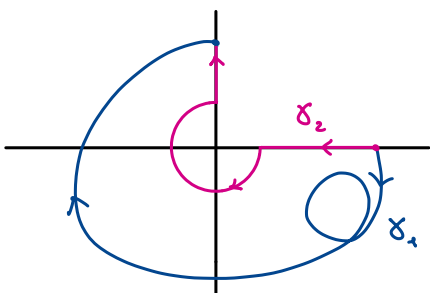


$$H(\lambda, t) = \lambda \gamma(t) + (1-\lambda) \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \quad \lambda \in [0, 1]$$

conta quante volte giro attorno all'origine  
in senso antiorario

Oss<sub>2</sub>: Se  $\gamma$  è una curva qualsiasi e  $\gamma_1 \sim \gamma_0$  è a estremi fissati allora  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$

Es:



Quanto vale  $\int_{\gamma} \omega_0$ ? Vale  $-\frac{3}{2}\pi$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e l'integrale di  $\omega_0$  sui pezzi rettilinei di  $\gamma_2$  è nullo

Esempio:  $t \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \quad \omega_0(\sigma(t))\sigma'(t) = \frac{bt(a) - at(b)}{(a^2t^2 + b^2t^2)} = 0$

Esercizio:  $w(x, y) = \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x + \frac{x^4 + x^2 y^2}{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} dy$

$x^2(x^2 + y^2)$

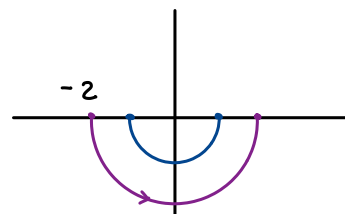
• Dire se  $w$  è chiusa o esatta

• Calcolare  $\int_\gamma w$  dove  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix} \quad -2 \leq t \leq 2$

$w = w_0 - x^2 dy$  non è chiusa perché  $x^2 dy = w_0 - w$ , quindi  $w$  non è esatta

$\int_\gamma w = \int_\gamma w_0 - \int_\gamma x^2 dy, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix} \quad t \in [-2, 2]$

$\int_\gamma w_0 = \pi \quad \int_\gamma x^2 dy = \int_{-2}^2 t^2 \cdot 2t dt = 2 \int_{-2}^2 t^3 = 2 \left[ \frac{t^4}{4} \right]_{-2}^2 = 0$



Esercizio: Fare lo stesso calcolo per  $\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi/2]$

(verificando prima che  $|\sigma(t)| \neq 0 \quad \forall t$ )

Es:  $w_d(x, y) = \left( \underbrace{\frac{dxy}{x^4 + y^2}}_A, \underbrace{\frac{x^2}{x^4 + y^2}}_B \right) \quad d \in \mathbb{R} \text{ parametro, } w_d \text{ chiusa e esatta}$

Domini di definizione:  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $w_d$  chiusa  $\Leftrightarrow \partial_y A = \partial_x B$

$$\left. \begin{aligned} \partial_x B &= \frac{2x(x^4 + y^2) - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{-2x^5 + 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2} \\ \partial_y A &= dx \frac{x^4 + y^2 - y \cdot (2y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{dx^5 - 2dxy^2}{(x^4 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} w_d \text{ chiusa} \Leftrightarrow d = -2$$

Es per casa: cercare curva omotopa a  $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$  in modo che il calcolo  $\int_\gamma w_d$  venga semplice

Proviamo a integrare:

$$U(x, y) = \int B dy = \int \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy = \int \frac{1/x^2}{1 + (1/x^2)^2} dy = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) + c(x)$$

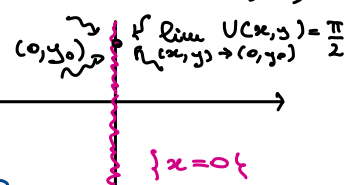
$\begin{cases} \frac{dy}{x^2} = t \\ \frac{dy}{x^2} = dt \end{cases}$

Si verifica facilmente che  $\frac{\partial U}{\partial x} = A \Leftrightarrow c(x) = \text{cost.}$ ,  $U(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right)$

$dU = w$  i domini non coincidono!  $U: \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{U}(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & x \neq 0 \\ \pi/2 & x=0, y>0 \\ -\pi/2 & x=0, y<0 \end{cases}$$

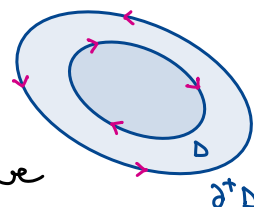
continua e  $C^1 \rightarrow d\tilde{U} = w_d \Rightarrow \tilde{U} \in C^0$   
(coincide col suo limite in ogni punto)





TEOREMA DI GAUSS-GREEN (ne parleremo solo in  $\mathbb{R}^2$  per oggi)Def:  $D \subset \mathbb{R}^2$  chiusura di un aperto, con bordo regolare①  $D$  normale rispetto a  $x$  se  $\exists f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$D = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x); x \in [a, b]\} \text{ con } f \leq g$$

 $D$  normale rispetto a  $y$ , si scambia  $x$  con  $y$ ②  $D$  normale regolare se  $f, g \in C^1$ ③  $D$  regolare se è unione finita di domini normali regol. con int. disgiuntoOss:  $D$  regolare  $\Rightarrow \partial D \in C^1$  a tratti $\partial D$  è unione finita di curve chiuse  $C^1$  a tratti $\partial^+ D$  è l'orientazione "positiva" di questo sistema di curveTeo (Gauss - Green): $D \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare,  $f \in C^1(A)$  con  $A \supseteq D$  aperto  $\Rightarrow$ 

$$\textcircled{1} \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ D} f dy$$

dipendono dal verso di percorrenza!

 $\partial^+$  mi indica che il verso è antiorario

$$\textcircled{2} \int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial^+ D} f dx$$

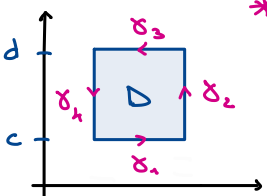
Dim: Dimostriamo  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  si fa allo stesso modo.

$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i, D_i \text{ normale regolare}$$

 $\textcircled{1a}$  Supponiamo  $D$  normale rispetto a  $y$ 

$$\exists h, g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, D = \{(x, y) : h(y) \leq x \leq g(y)\}$$

$$* = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d (f(g(y), y) - f(h(y), y)) dy$$



$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial_i} f \langle T_i, e_2 \rangle = \int_{\partial_2} f \langle T_2, e_2 \rangle + \int_{\partial_4} f \langle T_4, e_2 \rangle$$

Chi è  $\int_{\gamma_2}$ ? Posso parametrizzare  $\gamma_2(y) = (g(y), y) \quad y \in [c, d]$

$$T_2 = \frac{(g'(y), 1)}{\sqrt{1 + g'(y)^2}} \Rightarrow \int_{\gamma_2} f \langle T_2, e_2 \rangle = \int_c^d f(g(y), y) \cdot \langle \overset{1}{\gamma_2'}, e_2 \rangle = \int_c^d f(g(y), y) dy$$

$$\int_{\gamma^+ D} f dy = \int_c^d [f(g(y), y) - f(h(y), y)] dy = (*)$$

(1b) Supponiamo  $D$  normale rispetto a  $x$

$$D = \{(x, y) : h(x) \leq y \leq g(x), x \in [a, b]\}$$

Introduciamo il "potenziale"  $F(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{xy}} f dy = \int_a^x f(t, h(t)) h'(t) dt + \int_{h(x)}^y f(x, t) dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \cancel{f(x, h(x)) h'(x)} + \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \cancel{f(x, h(x)) \cdot h'(x)} \\ &= \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \end{aligned}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left( \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx + f dy$$

1-forma esatta

$$\int_{\partial^+ D} dF = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} f dy = - \int_{\partial^+ D} \left( \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx$$

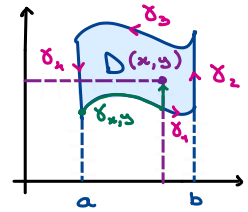
$$= - \int_{\gamma_1} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx + \int_{\gamma_3} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx =$$

$$\text{con } \gamma_1(s) = (s, h(s)) \quad s \in [a, b] \quad \gamma_1'(s) = (1, h'(s))$$

$$\gamma_3(s) = (s, g(s)) \quad s \in [a, b] \quad \gamma_3'(s) = (1, g'(s))$$

$$\langle \gamma_1'(s), e_1 \rangle = \langle \gamma_3'(s), e_1 \rangle = 1$$

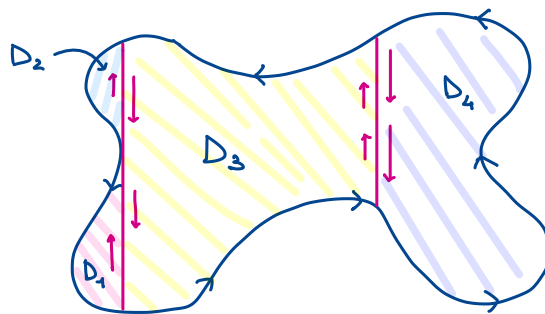
$$= \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx + \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$



1c  $D$  regolare  $D = \bigcup_{i=1}^N D_i$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_i \int_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x} \text{ additività di } f$$

$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_i \int_{D_i} f dy$$



L'integrale di  $f dy$  su  $\partial^+ D_i \cap \partial^+ D_j$  è nullo ( $i \neq j$ )

### Conseguenza del teorema

$D \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare,  $F = (F_1, F_2)$

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A \supseteq D$  aperto, campo di vettori  $C^1$

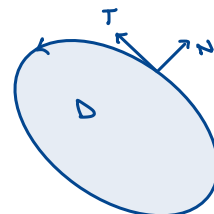
$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$  divergenza di  $F$

Teo (Divergenza):  $\partial^+ D = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$   
 (immagine di unione finita di singole curve  $\gamma$  (con una sola  $\gamma$ ))

$$\int_D \text{div } F = \int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \int_D \frac{\partial F_2}{\partial y} \stackrel{\text{G.G.}}{=} \int_{\partial^+ D} F_1 dy - F_2 dx = \int_I F_1 \cdot y' - F_2 \cdot x' dt =$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad T(t) = \frac{(x', y')}{|\gamma'|}, \quad N(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|\gamma'|}$$

$$= \sum \int_{\gamma} F \cdot N = \int_{\partial^+ D} F \cdot N \quad \hookrightarrow \text{FLUSSO DI } F \text{ ATTRAVERSO } \partial D$$



Teo (Stokes): È uguale al teo della divergenza in dimensione 2! Si distinguono in dimensione  $\geq 3$ , ecco perché in Fisica vengono distinti

$$\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy$$

"  
 $\text{rot}(F)$   
 ROTORE DI  $F$

↳ Integrale della forma associata a  $F$  lungo  $\partial^+ D$ .  
 Lavoro o circuitazione di  $F$  lungo  $\partial^+ D$

Oss: Se  $F$  è irrotazionale, cioè  $F_1 dx + F_2 dy$  è chiusa  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy = 0 \quad \forall D \subseteq A \text{ regolare quindi se } A \text{ è semplicemente connesso}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa in } A \Rightarrow \text{la forma è esatta}$$

Cor (Formula dell'area):

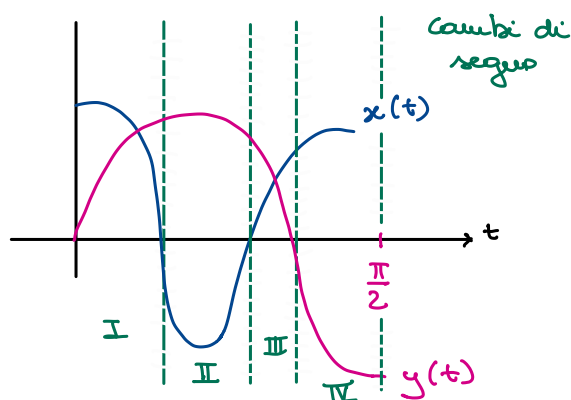
$$\text{Se scegli } f(x, y) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad |D| = \int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\partial^+ D} x dy = - \int_{\partial^+ D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x dy - y dx$$

Esercizio:  $\omega = \omega_0 - x^2 dy$  dove  $\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  è una forma chiusa ma non esatta

$$\int_{\gamma} \omega \text{ con } \gamma(t) = (\cos 4t, \sin 3t) \text{ con } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_0 - \int_{\gamma} x^2 dy \rightarrow \text{fare il conto}$$

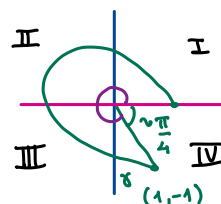
Quante volte la curva gira intorno all'origine, e in che direzione?

Idea: contare i quadranti  $\rightarrow$  faccio due grafici sovrapposti



$$\gamma(0) = (1, 0)$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, -1)$$



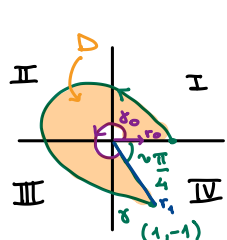
sto integ.  
lungo una  
circonf.  
int. 0

Quando si annulla la  $x \rightarrow$  asse verticale

Quando si annulla la  $y \rightarrow$  asse orizzontale

$$\int_{\gamma} \omega_0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Metodo alternativo con Gauss-Green (Traccia):



$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\gamma_0} \omega_0$$

Considero il dominio evidenziato  $D$ .

$$\int_{\partial D} \omega_0 = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

= 0 perché la forma è chiusa

$$+\partial D = \gamma + \gamma_1 + (-\gamma_0) + \gamma_2$$

$$0 = \int_{\partial D} \omega_0 = \int_{\gamma} \omega_0 + \int_{\gamma_1} \omega_0 - \int_{\gamma_0} \omega_0 + \int_{\gamma_2} \omega_0 \Rightarrow \int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\gamma_0} \omega_0$$

Ripasso:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  di classe  $C^1$ ,  $i(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0$ ; se  $\gamma$  chiusa  $\Rightarrow i(\gamma) \in \mathbb{Z}$

Dim:  $\phi: (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(p, \theta) \rightarrow \begin{pmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{pmatrix} \text{ coord. polari}$$

$$\text{Se } \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R} \text{ allora } \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_{\phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0 \leadsto \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_a^b \theta'(t) dt \text{ con } \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sia } \phi \circ \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} p(t) \cos \theta(t) \\ p(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}. \text{ Si ha } \int_{\phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0 = \int_a^b \frac{N}{p^2(t)} dt$$

$$N = x dy - y dx$$

$$dx \sim p' \cos \theta - p \sin \theta \cdot \theta'$$

$$dy \sim p' \sin \theta + p \cos \theta \cdot \theta'$$

$$N = p \cos \theta (p' \sin \theta + p \cos \theta \cdot \theta') - p \sin \theta (p' \cos \theta - p \sin \theta \cdot \theta') = p^2 \cos^2 \theta \cdot \theta' + p^2 \sin^2 \theta \cdot \theta' = p^2 \theta'$$

$$(*) = \int_a^b \frac{p^2 \theta'}{p^2} = \int_a^b \theta' dt$$

Oss/Es: Se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  di classe  $C^1$  con  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , allora, fissato  $p \in \Phi^{-1}(\gamma(a))$ ,

$\exists! \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  di classe  $C^1$  tale che  $\Phi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ ,  $\Phi(\tilde{\gamma}(a)) = p$  e in particolare

$$\text{si ha } \Phi(\tilde{\gamma}(b)) = \gamma(b) = \gamma(a)$$

$$\Phi^{-1}(\gamma(a)) = \{ p + k(0, 2\pi) : k \in \mathbb{Z} \} \text{ tutti i pt. in cui } \theta \text{ diff. di } 2\pi$$

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\Phi(\tilde{\gamma})} \omega_0 = \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \text{dim. che l'indice di una curva chiusa è in } \mathbb{Z}$$

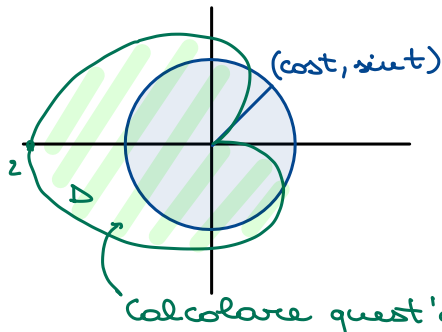
Applicazione di Gauss-Green:

$$\text{Ripasso: } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

Caso particolare: formula dell'area

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

Esempio: Determinare l'area racchiusa dalla curva  $\gamma: \begin{cases} x(t) = (1 - \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 - \cos t) \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



la curva è iniettiva,  $1 - \cos t \geq 0$   
 $\sim$  se  $t \neq 0 \text{ mod } 2\pi$

Esercizio: Verificare che  $|\gamma'(t)| \neq 0$

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= (1 - \cos t) \cos t [\sin^2 t + (1 - \cos t) \cos t] - (1 - \cos t) \sin t [-\sin t + 2 \cos t \sin t] \\ &= (1 - \cos t) [\cos t \sin^2 t + \cos^2 t - \cos t + \sin^2 t - 2 \cos t \sin^2 t] \\ &= (1 - \cos t) [1 - (\cos^2 t + \sin^2 t) \cos t] = (1 - \cos t)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Area } D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - 2 \cos t + \cos^2 t] dt = \pi + \frac{1}{2} (2\pi) \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \pi$$

Teo:  $D$  dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$  con bordo di lunghezza finita ( $\ell = 2\pi$ ) omeomorfo al disco unitario allora ha area minore o uguale a  $\pi$ .

Dim: Voglio vedere  $\text{Area}(D) \leq \pi$  e vale  $\Leftrightarrow D$  è un disco di raggio 1

Sia  $\gamma$  la parametrizzazione di  $\partial D$  per lunghezza d'arco.

[ Se  $\gamma \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$  definisco  $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$   $s'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$

$s: [a,b] \rightarrow [0, l(\gamma)]$ , posto  $g: [0, l(\gamma)] \rightarrow [a,b]$   $g = s^{-1}$

$\tilde{\gamma} \doteq \gamma \circ g: [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $|\tilde{\gamma}'| \equiv 1$  (verificare)

↑ Parametrizzazione di  $\gamma$  per lunghezza d'arco  $l(\tilde{\gamma}_{[0,s]}) = s \quad \forall s \in [0, l(\gamma)]$

$\gamma: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$  Param. di  $+\partial D$  per lung. d'arco

$$l(\partial D) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} [x'(t)^2 + y'(t)^2] dt$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') dt \quad z(t) = x(t) + i y(t) \quad z \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

↑  $2\pi$ -periodica

$$l(\partial D) = \int_0^{2\pi} \dot{z} \bar{z} dt = \int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2 dt, \quad \text{Area}(D) = \text{Im} \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\bar{z} z') \right)$$

$$z = \sum c_k e^{ikt} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) e^{-ikt} dt \quad \dot{z}(t) = \sum i k c_k e^{ikt} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2$$

$$l(\partial D) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} |k c_k|^2 \Rightarrow \text{Area}(\partial D) = \frac{\text{Im}}{2} \left( 2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \bar{c}_k c_k \right) = \frac{2\pi}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2$$

Qss:  $l(\partial D) = 2\pi \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^2 |c_k|^2 = 1$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^2 |c_k|^2 \leadsto \text{Area}(D) \leq \pi$$

Qss/Es: l'uguaglianza vale  $\Leftrightarrow c_k = 0 \quad \forall k \neq 1, c_1 = 1$

INTEGRAZIONE DI K-SUPERFICI (APPROCCIO PARAMETRICO)

Def:  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  è una sup. di dimensione  $k$  (o  $k$ -rep) di classe  $C^1$ , se  $\forall x_0 \in \Sigma$   
 $\exists \varphi: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B_1 \subseteq \mathbb{R}^k$  palla unitaria, di classe  $C^1$  t.c.  $x_0 \in \varphi(B_1) \subseteq \Sigma$  e  
 $\text{rk}(D\varphi(x)) = k \quad \forall x \in B_1$ .



Diciamo che  $\Sigma$  è "embedded" se possiamo sempre scegliere  $\varphi$  t.c.  $\varphi(B_1) \supseteq \Sigma \cap B_r(x_0)$ ,  $r > 0$

Come si calcola l'area  $k$ -dim di  $\Sigma$ ?

Supponiamo  $\Sigma = \varphi(B)$ ,  $\varphi \in C^1$ ,  $\text{rk}(D\varphi) = k$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  aperto

Caso ①:  $\varphi$  lineare, cioè  $\varphi(x) = Lx$ ,  $L$  matrice  $k \times n$ ,  $\text{rk}(L) = k$

①a)  $L$  ortogonale, cioè  $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$ ,  $L^t L = \text{Id}_k$ ,  $H^k(\Sigma) := |U|_{\mathbb{R}^k}$   
 ↳ misura  $k$ -dim. di  $\Sigma$

①b)  $L$  generale, posso scrivere  $L = L' \cdot S$ ,  $S \in M_{k \times k}$ ,  $L'$  ortogonale

$$H^k(\Sigma) = H^k(L' \cdot S \cdot (U)) = |S(U)|_k = |\det S| \cdot |U|_k$$

↳ Formula dell'area in  $\mathbb{R}^k$

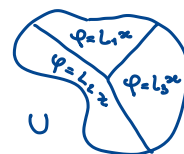
Oss:  $L^t L = S^t \underbrace{L'^t L'}_{\text{Id}_{\mathbb{R}^k}} S = S^t S \in M_{k \times k}$

$$\det(L^t L) = \det(S^t S) = \det(S)^2 \rightarrow H^k(\Sigma) = \sqrt{\det(L^t L)} |U|_{\mathbb{R}^k}$$

Oss (Formula di Cauchy-Binet):  $\det(L^t L) = \sum_{M \text{ minore di rango } k \text{ di } L} \det(M)^2$

Caso ②:  $\varphi$  lineare a tratti,  $\Sigma = \varphi(U)$ ,  $H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)} dx$

Caso ③:  $\varphi \in C^1$ ,  $\Sigma = \varphi(U)$ ,  $\text{rk}(D\varphi(x)) = k \quad \forall x \in U$



$\exists \varphi_n$  lineare a tratti t.c.  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  e  $D\varphi_n(x) \rightarrow D\varphi(x)$  unif. in  $x \in U$  per  $n \rightarrow +\infty$   
 ↳ andrebbe dimostrato

Definiamo  $H^k(\Sigma) := \lim H^k(\varphi_n(U)) = \lim \int_U \sqrt{\det(D\varphi_n^t D\varphi_n)} = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}$

Oss: Talvolta si usa la notazione  $J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi}$

Oss:  $k=n$  ritroviamo la formula  $|\varphi(U)| = \int_U J_\varphi$

$k=1$   $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^b$   $D\varphi = \varphi'$ ,  $J_\varphi = |\varphi'|$ ,  $H^1(\varphi(a,b)) = L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|$

$$\boxed{k=2, n=3} \quad \varphi = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} \\ \varphi_{3x} & \varphi_{3y} \end{pmatrix} \quad D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} |\varphi_x|^2 & \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \\ \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle & |\varphi_y|^2 \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \sqrt{|\varphi_x|^2 |\varphi_y|^2 - \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle^2} = |\varphi_x \wedge \varphi_y| \quad \text{prod. vettore} \quad \text{coe } a \wedge b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

caso ②:  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i) \quad \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset \quad i \neq j,$

$$H^k(\Sigma) := \sum_{i=1}^N \int_{U_i} J_{\varphi_i} dx$$

Esempio (Grafici):

$$\Sigma = \Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}, \quad f \in C^1$$

$$\varphi(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix}, \quad J_\varphi = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}, \quad H^{n+1}(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

Oss:  $H^k(\Sigma)$  è invariante per riparametrizzazione

$$\Sigma \circ \varphi(U) = \psi(V), \quad V = \phi(U), \quad \phi \text{ diffeomorfismo } C^1 \text{ tra } U \text{ e } V$$

$$\psi = \varphi \circ \phi^{-1}, \quad D\psi = D\varphi \cdot [D\phi]^{-1}, \quad D\varphi = D\psi \cdot D\phi$$

$$H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \int_U \sqrt{\det (D\phi)^t D\psi^t D\psi D\phi} = \int_U J_\psi J_\phi dx \stackrel{\text{FORMULA DELL'AREA}}{=} \int_V J_\psi$$

Def:  $\Sigma$   $k$ -superficie,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\Sigma \subseteq A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$   $\int_\Sigma f := \int_U (f \cdot \varphi) J_\varphi dx$

In generale  $\Sigma = \bigcup_i \varphi_i(U_i)$ ,  $\int_\Sigma f := \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (f \cdot \varphi_i) J_{\varphi_i} dx$

Oss:  $\int_\Sigma f$  è invariante per riparametrizzazioni

### FLUSSO DI UN CAMPO DI VETTORI

$$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n \quad (n-1)\text{-sup embedded } \underline{\text{orientabile}}, \quad \forall x \in \Sigma, \quad \exists 2 \text{ scelte del vettore normale in } T_\Sigma(x)^\perp, \quad N(x) \text{ e } -N(x)$$

$\Sigma$  si dice orientabile se  $\exists$  scelta continua di  $N(x)$ .

$(\Sigma, N)$  si dice una sup. orientata

Def:  $(\Sigma, N)$  sup. orientata di dim.  $n-1$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo di vettori continuo,

$\Sigma \subseteq A$  aperto,  $\int_\Sigma \langle v, N \rangle$  si dice flusso di  $v$  attraverso  $\Sigma$

Oss: Dipende dalla scelta dell'orientazione  $N$



Esempio:  $\Sigma = \partial U$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto con bordo  $C^1$

$\Sigma$  è orientabile.  $N^e(x)$  normale esterna ( $N^e(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$  se  $U = \{f < 0\}$ )

$N^i(x)$  normale interna

Oss: Quando si considera il flusso di  $v$  attraverso  $\Sigma = \partial U$ , di norma si considera  $N^e(x)$

Teorema della divergenza:

$\Sigma = \partial U$  ipersuperficie  $C^1$  (o  $C^1$  a tratti),  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato,

$v: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo di vettori di cl.  $C^1$ ,  $\bar{U} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} v \cdot N^e = \int_U \operatorname{div} v(x) dx \quad \text{dove } \operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} \text{ è la } \underline{\text{divergenza}} \text{ di } v$$

Oss: Non tutte le  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  embedded sono orientabili.

$\hookrightarrow$  esempio:



Oss: Se prendo  $v = \nabla f$  con  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$

$$A \supseteq \bar{U}, \Sigma = \partial U \Rightarrow \int_{\partial U} \nabla f \cdot N^e = \int_U \operatorname{div}(\nabla f) = \int_U \Delta f \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ laplaciano di } f.$$

Teo (DIVERGENZA):

$\Sigma = \partial U$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato,  $\Sigma$  di classe  $C^1$ ,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$ ,

$$\bar{U} \subseteq A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \Rightarrow \int_{\partial U} F \cdot N^e = \int_U \operatorname{div} F \text{ dove } \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Dim: NB: Il flusso è additivo, così come l'integrale

$\Rightarrow$  se funziona su un cubo, funziona anche sull'unione di cubi

passo ①:  $(x', y) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $(x_0', y_0) \in \Sigma$

Supponiamo che  $\exists C = B_r(x_0') \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  e

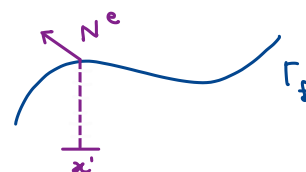
$f: B_r(x_0') \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  di classe  $C^1$  t.c.  $\Sigma \cap C = \Gamma_f$



referimento:  
 $\begin{matrix} y \\ \uparrow \\ x' \end{matrix}$

Supp. che  $\sigma(x) = u(x)e_n$ , con  $u(x): A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\operatorname{spt} u \subseteq C$ ;  $\operatorname{div} \sigma = \frac{\partial u}{\partial y}(x', y)$

$$\int_U \operatorname{div} \sigma = \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial y}(x', y) = \int_{B_r(x_0')} \int_{y_0 - \varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx' = \int_{B_r(x_0')} u(x', f(x'))$$



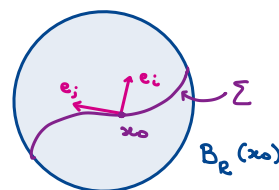
$$= \int_{\Gamma_f} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}} = \int_{\Sigma \cap C} u e_n \cdot N_\Sigma^e = \int_\Sigma \sigma \cdot N^e \quad N^e = \left( -\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

passo ②:  $x_0 \in \Sigma$  supponiamo che  $\exists R$  t.c.  $\operatorname{spt} \sigma \subseteq B_R(x_0)$  e  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\exists f_i: e_i^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $\Sigma \cap B_R(x_0) = \Gamma_{f_i}$  in direzione  $e_i$

Oss: Si può sempre supporre, prendendo  $R$  piccolo,

se  $N(x)$  non è parallelo a  $e_i \forall i$



$$\int_U \operatorname{div} \sigma = \int_U \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_U \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_\Sigma \sigma_i e_i \cdot N = \int_\Sigma \sigma \cdot N$$

per ① applicato con  $\sigma = \sigma_i \cdot e_i$

Es: l'operatore di div. è indipendente dalla base

passo ③: Supponiamo  $\operatorname{spt}(\sigma) \subseteq B_R(x_0)$  ma che  $N(x_0) = e_i$  per qualche  $i$

Scegliamo  $L \in M_{n,n}$  ortogonale t.c.  $LN(x_0)$  non è  $\parallel$  a  $e_j \forall j$  e osserviamo che

$$\int_U \operatorname{div} \sigma = \int_{B_R(x_0) \cap U} \operatorname{div} \sigma dx \stackrel{\text{va verificato}}{=} \int_{L(B_R(x_0) \cap U)} \operatorname{div} L\sigma(L^{-1}y) dy = \int_{L(\Sigma)} L\sigma \cdot (L^{-1}y) LN(L^{-1}y)$$

②

$$= \int_{L(\Sigma)} \sigma(L_y^{-1}) \cdot N(L_y^{-1}) \stackrel{(*)}{=} \int_{\Sigma} \sigma(x) N(x) \quad \text{con } x = L^{-1}y$$

va verificato

passo ④: Dato che  $\Sigma$  è compatto, possiamo trovare  $x_1, \dots, x_N \in \Sigma$  e  $R > 0$

ta  $\Sigma \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_R(x_i)$ ,  $\Sigma \cap B_R(x_i)$  è grafico

$\forall i \in [0, 1, \dots, N]$   $\exists \eta_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  di classe  $C^1$  *partizione dell'unità*

ta  $\sum_{i=0}^N \eta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{U}$ ,  $\text{spt}(\eta_i) \subseteq B_R(x_i) \quad \forall i$

Possiamo scrivere  $\sigma = \sum_{i=0}^N \sigma \eta_i \quad \forall x \in \bar{U}$ ,

$$\text{div } \sigma = \sum_{i=0}^N (\text{div } \sigma) \eta_i + \sigma \cdot \nabla \eta_i = \text{div } \sigma + \sigma \cdot \nabla \left( \sum_{i=0}^N \eta_i \right) = \text{div } \sigma$$

$$\int_U \text{div } \sigma = \sum_{i=0}^N \int_U \text{div}(\sigma \eta_i) \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^N \int_U \text{div}(\sigma \eta_i) \stackrel{③}{=} \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma} (\sigma \cdot N) \eta_i = \int_{\Sigma} \sigma \cdot N$$

$$\textcircled{*} \int_U \text{div}(\sigma \eta_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{div } w = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx = 0 \quad , \quad w(x) = \begin{cases} \sigma \cdot \eta_0 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Fubini-Tonelli

## INTEGRALI SU SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

$\Sigma = \varphi(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio regolare,  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$ , iniettiva,

$\bar{D} \subseteq A$ ,  $\text{rk}(D\varphi) = 2 \iff \varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma \neq 0 \quad \forall (\mu, \sigma) \in \bar{D}$

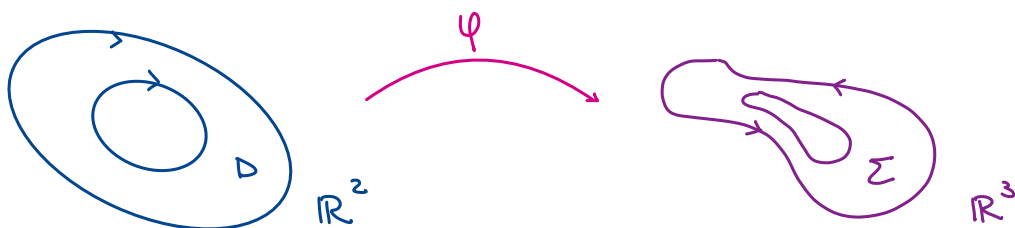
$\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma \in \langle \varphi_\mu, \varphi_\sigma \rangle^\perp = T\Sigma^\perp$  quindi  $N := \frac{\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma}{|\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma|}$

Definisce un'orientazione di  $\Sigma$ .

caso ①  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\int_{\Sigma} f = \int_D f(\varphi) J\varphi = \int_D f(\varphi) |\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma| d\mu d\sigma$

caso ②  $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo di vettori continuo

$$\int_{\Sigma} F \cdot N = \int_D F(\varphi) \cdot \frac{(\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma)}{|\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma|} \cdot |\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma| = \int_D F(\varphi) (\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma) d\mu d\sigma \quad \text{con } N = \frac{\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma}{|\varphi_\mu \wedge \varphi_\sigma|}$$



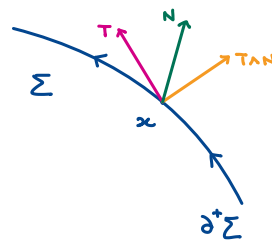
Se consideriamo l'orientazione positiva di  $\partial D$ ,  $\varphi$  induce un'orientazione positiva di  $\partial \Sigma$  che indichiamo con  $\partial^+ \Sigma$

Si può verificare che  $\forall x \in \partial \Sigma$

**\***) Il vettore  $T \wedge N \in T_{\Sigma}(x)$  punta sempre "fuori" da  $\Sigma$

Analogamente, data  $(\Sigma, N)$  superficie orientata in  $\mathbb{R}^3$

è def. l'orientazione positiva  $\partial^+ \Sigma$  della condizione **\***)



### Teorema di Stokes:

$(\Sigma, N)$  superficie in  $\mathbb{R}^3$ , compatta, orientata, di classe  $C^1$  e dato  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$

di classe  $C^1$  con  $\Sigma \subseteq A$  aperto  $\Rightarrow \int_{\Sigma} (\text{rot } F) \cdot N = \int_{\partial^+ \Sigma} F$

si dice rotore di  $F$   
( $\text{rot } F, \nabla \wedge F$ )

Dove  $\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$

INTEGRAZIONE SU K-SUPERFICI

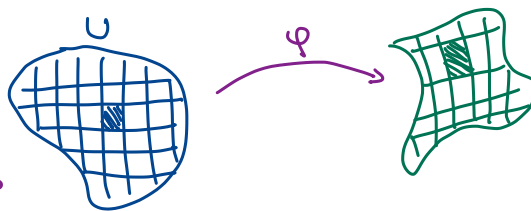
$U \subseteq \mathbb{R}^k$   $k \leq n$ ,  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare,  $\varphi$  iniettiva,  $\text{rk}(D\varphi(x)) = k$ ,  $\Sigma = \varphi(U)$

$$H^k(\Sigma) = \int_U \underbrace{\sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}}_{J_\varphi(x)} dx$$

$J_\varphi(x) \rightarrow$  fattore locale

$$\int_\Sigma f = \int_U (f \circ \varphi)(x) J_\varphi(x) dx$$

$\hookrightarrow$  mi dice quanto un rettangolo viene espanso o contratto



Oss: Si suppone di avere già una riparametrizzazione, negli esercizi non sempre è così

Casi particolari e esempi

## • Caso di superficie da un grafico

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Sigma = \{(x, u(x)) : x \in U\}$ ,  $\varphi: x \rightarrow (x, u(x))$

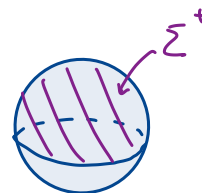
$$\int_\Sigma f = \int_U f(x, u(x)) \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

## • Calcolo della superficie della sfera di raggio r

$\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \rightarrow$  divido le due calotte

$$u(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$H^2(\Sigma^+) = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy = (*) \rightarrow \text{passo in coord. polari}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}; \quad |\nabla u|^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2 - x^2 - y^2}$$

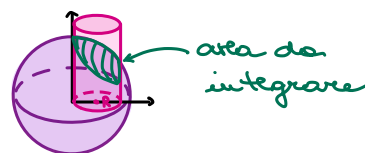
$$(*) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho = 2\pi r^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} y dy =$$

$$= 2\pi r^2 \left[ -\sqrt{1 - y^2} \right]_0^1 = 2\pi r^2 \quad (\text{Area di una semisfera}) \Rightarrow \text{Area } \Sigma = 4\pi r^2$$

Esercizi. 1) Trovare l'area della regione  $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq Rx\} \quad R > 0$

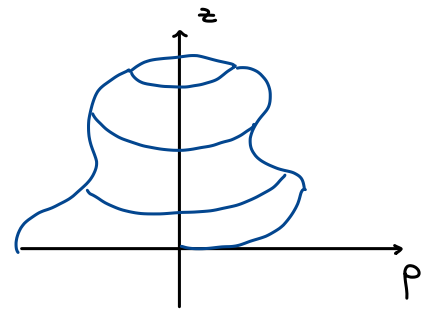
$$(*) \rightarrow x - Rx + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

2) Trovare l'area della regione  $\{z = x \cdot y : x^2 + y^2 \leq 1\}$



## Superfici di Rotazione

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos \theta \\ \rho(t) \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} t \in [a, b] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$



$$D\varphi = (\varphi_t, \varphi_\theta) \quad , \quad \varphi_t = \begin{pmatrix} \rho' \cos \theta \\ \rho' \sin \theta \\ z' \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_\theta = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_t \cdot \varphi_t & \varphi_t \cdot \varphi_\theta \\ \varphi_\theta \cdot \varphi_t & \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho')^2 + (z')^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{I}_\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)}$$

$$\mathcal{I}_\varphi(t, \theta) = \rho \sqrt{(\rho')^2 + (z')^2} \quad , \quad \Sigma = \varphi([a, b] \times [0, 2\pi])$$

$$H^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b \rho \sqrt{(\rho')^2 + (z')^2} dt$$

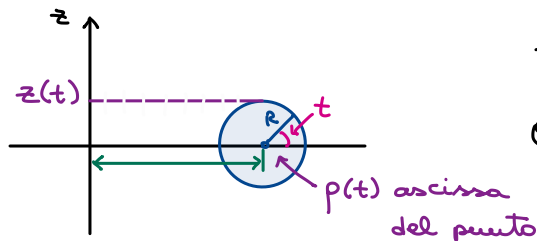
## Applicazioni:

• Area di un toro:

$$\rho(t) = a + R \cos t$$

$$z(t) = R \sin t$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

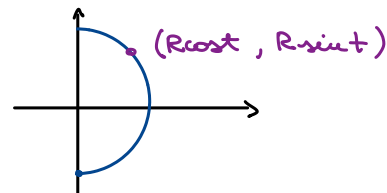


$$H^2(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + R \cos t) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R \int_0^{2\pi} a + R \cos t dt = 4\pi^2 R a$$

Esercizio: Fare lo stesso calcolo per ricavare la superficie della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad , \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dove R è la distanza dall'origine



Teorema della divergenza: applicazioni

$$1) F(x, y, z) = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad , \quad r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

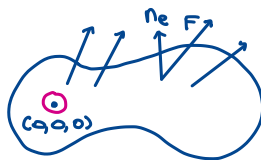
$$\partial_x r = \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} \partial_x (r^{-3}) &= -3r^{-4} \partial_x r \\ &= -\frac{3x}{r^5} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} F = \partial_x \left( \frac{x}{r^3} \right) + \partial_y \left( \frac{y}{r^3} \right) + \partial_z \left( \frac{z}{r^3} \right)$$

$$\partial_x \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \quad \partial_y \left( \frac{y}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \partial_z \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

$$\operatorname{div} F = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto limitato con bordo liscio

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n_e \stackrel{?}{=} \iint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0$$

↑  
è vero?

Sì, se  $(0,0,0) \notin \bar{\Omega}$  applicando il teorema della divergenza

Se  $(0,0,0) \in \Omega$  applico il teorema della divergenza a  $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$  (\*)

(\*) prendo  $\varepsilon$  piccolo in modo che  $\overline{B_\varepsilon(0)} \cap \partial\Omega = \emptyset$

$$\iint_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \operatorname{div} F = 0$$

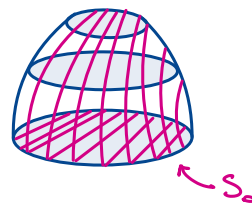
$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}_e - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \quad n_e = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \quad F = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

$$F \cdot n_e = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{è costante su } \partial B_\varepsilon(0))$$

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \begin{cases} 0 & (0,0,0) \notin \bar{\Omega} \\ 4\pi & (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

2)  $S = \{x^2+y^2+z^4=1, z \geq 0\}$ ,  $F(x,y,z) = (x, y, x+y-2z)$

Calcolare  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e$  ⚠ use è una sup. chiusa



In realtà ha divergenza nulla:  $\operatorname{div} F = 1+1-2=0$

$$V = \{x^2+y^2+z^4 \leq 1; z \geq 0\}$$

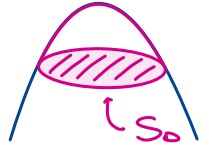
$$\partial V = S \cup S_0 \rightsquigarrow 0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \rightarrow \text{Calcolo questo}$$

$$\int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x+y) \, dx \, dy = 0$$

$$\text{Quindi } \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e = 0$$

3) Calcolare  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$ ,  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$ ,  $S = \{z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$

Si può procedere in due modi diversi:



1) Calcolo usando la def.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \text{ dove } V \text{ è il volume bordato } S \cup S_0$$

2)  $(x, y) \mapsto (x, y, 2 - x^2 - y^2)$  param. cartesiana

$$U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad \vec{n}_e = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|}$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_U F(x, y, 2 - x^2 - y^2) \cdot \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|} dx dy = *$$

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \quad \varphi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \vec{e}_1(2x) + \vec{e}_2(2y) + \vec{e}_3$$

*non danno contributo*

$$* = \int_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2(2x) + y^2(2y) + 2 - x^2 - y^2) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} 2 - x^2 - y^2 dx dy \quad \text{finire conti per esercizio}$$



Teorema (Stokes):

$(\Sigma, N)$  sup. orientata, compatta, con bordo, di classe  $C^1$

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$   $N$  campo normale continuo

↳ param. da una funz.  $C^1$   
con bordo  $C^1$

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A \supseteq \Sigma$  aperto  $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \int_{\partial^+ \Sigma} F$$

**ROTORE DI F:**  $\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$

Dim: ① Supponiamo  $\Sigma = \varphi(\bar{D})$ ,  $\varphi: \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  iniettiva

$D$  dominio regolare in  $\mathbb{R}^2$ .

Supponiamo  $\varphi \in C^2$  (il caso  $\varphi \in C^1$  si fa per approssimazione).

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$F(x, y, z) = \left( \underset{=F_1}{X(x, y, z)}, \underset{=F_2}{Y(x, y, z)}, \underset{=F_3}{Z(x, y, z)} \right)$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot N = \int_D (\text{rot } F)(\varphi) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) du dv$$

$$= \int_D (z_y - y_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (x_z z_x)(x_v z_u - x_u z_v) + (y_x - x_y)(x_u y_v - x_v y_u)$$

$$\partial \Sigma = \varphi(\partial D), \quad \gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [0, 1]$$

$\gamma$  parametrizza  $\partial^+ D$

$\varphi(\gamma(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$  parametrizza  $\partial^+ \Sigma$

$$\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v' + z_u u' + z_v v')$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F = \int_0^1 F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt = \int_0^1 (X x_u + Y y_u + Z z_u) u' + (X x_v + Y y_v + Z z_v) v' dt$$

$$= \int_{\partial^+ D} (X x_u + Y y_u + Z z_u) du + (X x_v + Y y_v + Z z_v) dv =$$

**GAUSS GREEN**  $\rightarrow$

$$= \int_D (X x_v + Y y_v + Z z_v)_u - (X x_u + Y y_u + Z z_u)_v du dv =$$

PRODOTTO VETTORE

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$

$$J\varphi = |\varphi_u \wedge \varphi_v|$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

$$= (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

$$\text{rot } F = (z_y - y_z, x_z - z_x, y_x - x_y)$$

$$= \int_D (X_x x_\mu x_\sigma + X_y y_\mu x_\sigma + X_z z_\mu x_\sigma + Y_x x_\mu y_\sigma + Y_y y_\mu y_\sigma + Y_z z_\mu y_\sigma + \\ + Z_x x_\mu z_\sigma + Z_y y_\mu z_\sigma + Z_z z_\mu z_\sigma - X_x x_\sigma x_\mu - X_y y_\sigma x_\mu - X_z z_\sigma x_\mu - \\ - Y_x x_\sigma y_\mu - Y_y y_\sigma y_\mu - Y_z z_\sigma y_\mu - Z_x x_\sigma z_\mu - Z_y y_\sigma z_\mu - Z_z z_\sigma z_\mu) du dv \\ = \int_\Sigma \text{rot } F \cdot N \quad \text{verifica diretta}$$

② In generale  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{D})$ ,  $\varphi_i(D) \cap \varphi_j(D) = \emptyset$   $i \neq j$

$$N = \frac{(\varphi_i)_\mu \wedge (\varphi_i)_\sigma}{|(\varphi_i)_\mu \wedge (\varphi_i)_\sigma|} \quad \text{in } \varphi_i(\bar{D}) \subseteq \Sigma$$

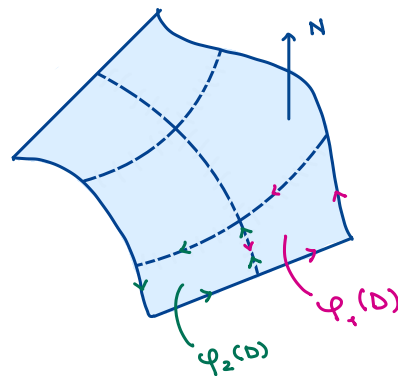
$$\int_\Sigma \text{rot } F \cdot N = \sum_i \int_D \text{rot } F(\varphi_i) \cdot ((\varphi_i)_\mu \wedge (\varphi_i)_\sigma) du dv$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F^* = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ \Sigma_i} F, \quad \Sigma_i = \varphi_i(\bar{D})$$

\* segue dal fatto che

$$\int_{\partial^+ \Sigma_i \cap \partial^+ \Sigma_j} F = - \int_{\partial^+ \Sigma_j \cap \partial^+ \Sigma_i} F$$

cioè  $\partial^+ \Sigma_i$  e  $\partial^+ \Sigma_j$  sono orientazioni opposte della "curva"  $\partial \Sigma_i \cap \Sigma_j$



## K-FORME DIFFERENZIALI IN $\mathbb{R}^n$

Forme multilineari alternanti di grado  $k$  ( $k$  covettori) → siamo nel duale

Un  $k$ -covettore  $\omega$  è una funzione

$$\omega: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$(h_1, \dots, h_k) \mapsto \omega(h_1, \dots, h_k)$$

↳ va da una  $k$ -upla di vettori in  $\mathbb{R}^n$

1)  $\omega$  è lineare in ogni  $h_i$ , cioè  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mu, \nu \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(h_1, \dots, h_{i-1}, \alpha\mu + \beta\nu, h_{i+1}, \dots, h_k) = \alpha\omega(\dots, \mu, \dots) + \beta\omega(\dots, \nu, \dots)$$

2)  $\omega(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(h_1, \dots, h_k)$

Es:  $\omega(h) = v \cdot h$  1-covettore,  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(h_1, \dots, h_n) = \det(h_1, \dots, h_n)$$

Oss:  $h_i = h_j$  per  $i \neq j$   $w(h_1 \dots h_k) = 0$

Oss: I  $k$ -vettori costituiscono uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  che si indica con  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  (il prodotto vettoriale è alternante)

Dati  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \{1, \dots, n\}$ , pongo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Definisco  $dx_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k}$  e  $dx_\lambda(h_1 \dots h_k) = \det((h_j)_{\lambda_i})_{ij}$  matrice  $k \times k$

L'insieme dei  $dx_\lambda$  con  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$  definiscono una base di  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \Lambda_k = \binom{n}{k}$$

Es:  $dx_1, \dots, dx_n$  sono una base di  $\Lambda_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$

◦  $dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$  sono una base di  $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$

◦  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  genera  $\Lambda_n(\mathbb{R}^n)$  ( $\dim \Lambda_n(\mathbb{R}^n) = 1$ )

Oss:  $dx_\lambda = 0$  se  $\lambda_i = \lambda_j$  per qualche  $i \neq j$

$dx_{\lambda'} = \text{sgn}(\sigma) dx_\lambda$  se  $\lambda'_i = \lambda_{\sigma(i)}$   $\forall i$  in particolare  $dx_\lambda = 0 \forall \lambda$  se  $k > n$

Def: È definito un prodotto esterno  $\wedge : \Lambda_k \times \Lambda_e \rightarrow \Lambda_{k+e}$ ,  $\wedge(w, \alpha) = w \wedge \alpha$

Definito sulla base:

$$\wedge(dx_\lambda, dx_\mu) = dx_\lambda \wedge dx_\mu = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_e}$$

Si estende a  $w = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} a_\lambda dx_\lambda$  e  $\alpha = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,e}} b_\mu dx_\mu$

$$\Lambda_{n,k} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_1 < \dots < \lambda_k\}$$

Prop: Il prodotto esterno  $\wedge$  soddisfa

$$\circ (a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$$

DISTRIBUTIVA

$$\circ c \cdot a \wedge b = c(a \wedge b)$$

$$\circ a \wedge b = (-1)^{k_e} (b \wedge a) \text{ se } a \in \Lambda_k \text{ e } b \in \Lambda_e$$

ALTERNANTE

$$\circ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

ASSOCIATIVA

Def:  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto  $\omega : A \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$  si dice una  $k$ -forma differenziale

$$\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) dx_\lambda \quad (\text{con } \omega_\lambda : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1)$$

Differenziando una  $k$ -forma otteniamo una  $k+1$ -forma

Def: Date  $w, d$   $k$ -covettori, si può definire  $w \cdot d = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} w_\lambda d_\lambda \in \mathbb{R}$

è un prodotto scalare su  $\Lambda_k$

Oss: Le  $k$ -forme in  $A$  sono uno spazio vettoriale

Def: Data  $w$   $k$ -forma, cioè  $w = \sum_{\lambda} w_{\lambda} dx_{\lambda}$ ,  $w_{\lambda} \in \mathbb{C}^+$ , def. la  $(k+1)$ -forma

$$dw = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} dw_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} \quad dw_{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i \quad \underline{d} \text{ si dice } \underline{\text{differenziale esterno}}$$

$\xrightarrow{\text{1-FORMA}} \text{K-FORMA}$

Prop (proprietà di  $d$ ):  $w_1, w_2$   $k$ -forme,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\odot d(c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 dw_1 + c_2 dw_2$$

$$\odot d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db \quad \text{con } a \text{ } k\text{-forma, } b \text{ } l\text{-forma}$$

$$\odot d^2 a = d(da) = 0 \quad \forall a \text{ } k\text{-forma } \mathbb{C}^2$$

Richiami di teoria: $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$ 

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \mathbf{e}_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \mathbf{e}_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

Nabla - calcolo:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \text{rot}(\nabla \varphi) = 0 & \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 & \varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{b) } \text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0 & \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 & \vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \varphi \\ \vec{F} \end{array}} \right\} \text{ di classe } C^2$$

Notazione (in fisica):  $\nabla \varphi$  gradiente,  $\nabla \cdot F$  divergenza,  $\nabla \times F$  rotore

$$\text{a) } \nabla \varphi = (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi)$$

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = \mathbf{e}_1(\partial_2 \partial_3 \varphi - \partial_3 \partial_2 \varphi) + \dots = 0 \text{ per il Teo di Schwartz}$$

$$\text{b) } \text{rot} \vec{F} = \mathbf{e}_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \mathbf{e}_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \mathbf{e}_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = \partial_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \partial_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \partial_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = 0$$

Oss:  $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^3$ 

$$\text{rot} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow F = \nabla \varphi \text{ per } \varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) ?$$

Sì, ma solo se  $\Omega$  è semplicemente connessoEsercizio: Trovare un controesempio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$  il campo è tangenziale rispetto a un cerchio sull'asse  $z$ 

$$F(x, y, z) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \text{ dominio tale che } \text{rot} \vec{F} = 0 \text{ ma } F \neq \nabla \varphi$$

Forma chiusa ma non esatta

Esercizio:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ( $\Omega$  aperto)

$$G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G \text{ di classe } C^1$$

$$\text{div } G = 0 \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} \exists \vec{F} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{ rot } \vec{F} = \vec{G} \leadsto \text{In generale è falso}$$

un tale  $\vec{F}$  viene chiamato **POTENZIALE VETTORE**

$$\text{Controesempio: } G(x, y, z) = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \text{div } \vec{G} = 0 \text{ su } \Omega$$

CLAIM:  $G$  non è il rotore di alcun  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Per assurdo:  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\text{rot } \vec{F} = \vec{G}$

Sia  $a \in (0, 1)$  e  $S_a = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq a\}$

$$\iint_{S_a} G \cdot n_e = \iint_{S_a} \text{rot } F \cdot n_e \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial^+ S_a} \vec{F}$$

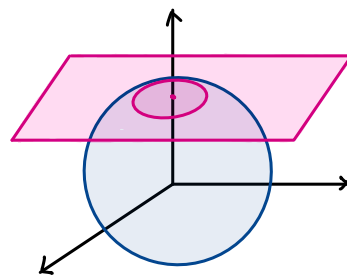
$\downarrow a \rightarrow 1$

$$\iint_S G \cdot n_e = 4\pi$$

$\downarrow a \rightarrow 1$

$$0$$

$\rightarrow$  ASSURDO!



Prop:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$ ,  $G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  t.c.  $\text{div } G = 0$ .

Allora  $\exists F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  t.c.  $\text{rot } \vec{F} = G$

Es1: Sia  $G = (1, 1, 1)$ . Determinare  $F$  in  $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  t.c.  $\text{rot } F = G$ .

Es2: Sia  $G = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$ ,  $\Omega = \{z > 0\}$ , determinare  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  t.c.  $\text{rot } F = G$

Dim (Prop):

$$G = \text{rot } F \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 & (1) \\ G_2 = \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 & (2) \\ G_3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 & (3) \end{cases}$$

$\Omega$  semplicemente connesso

Oss: Se  $\text{rot } F = \text{rot } \tilde{F} \Rightarrow \text{rot}(F - \tilde{F}) = 0 \Rightarrow F - \tilde{F}$  è un gradiente:  $F - \tilde{F} = \nabla U$

ANSATZ (ipotesi a priori):  $F_1 = 0$  su  $\Omega$  (non è necessario pensarlo)

Prendo  $x_0 \in I_1$  fissato arbitrariamente, e scrivo:

$$F_3(x, y, z) - \underbrace{F_3(x_0, y, z)}_{f(y, z)} = \int_{x_0}^x \partial_1 F_3(t, y, z) dt \stackrel{(2)}{=} - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt$$

$$F_3(x, y, z) = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt + f(y, z)$$

$$F_2(x, y, z) - \underbrace{F_2(x_0, y, z)}_{h(y, z)} = \int_{x_0}^x \partial_1 F_2(t, y, z) dt \stackrel{(3)}{=} \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt$$

$$F_2(x, y, z) = \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt + h(y, z)$$

ANSATZ:  $f(x, y) = 0$

Cerco  $h \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  in modo che anche la relazione (1) sia verificata

$$G_1(x, y, z) = - \int_{x_0}^x \partial_2 G_2(t, y, z) dt - \int_{x_0}^x \partial_3 G_3(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z)$$

$\text{div } G = 0 \rightarrow$

$$= \int_{x_0}^x \partial_1 G_1(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z)$$

$$= G_1(x, y, z) - G_1(x_0, y, z) - \partial_z h(y, z)$$

$$\partial_z h(y, z) = -G_1(x_0, y, z). \text{ Sia } z_0 \in I_3 \text{ arbitrario e } h(y, z) \doteq - \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, s) ds$$

Conclusione: il campo  $F_1 = 0$

$$F_2 = \int_{x_0}^x G_3(t, x, y) dt - h(y, z)$$

$$F_3 = - \int_{x_0}^x G_2(t, x, y) dt$$

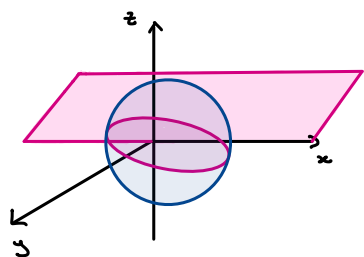
con  $x_0 \in I_3, z_0 \in I_3$ , soddisfa  $\text{rot } \vec{F} = \vec{G}$

Esercizio: Sia  $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$ ,  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

$\Gamma$  curva definita da  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = y\}$  si dimostra che  $\Gamma$  è una curva con il teorema delle f. implicite

Calcolare  $\oint_{\gamma} F$  direttamente  
usando il Teo di Stokes

$\gamma$  può essere scritta come  $\phi = (0, 0)$  con  $\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ z - y \end{pmatrix}$   
 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\text{rk}(D\phi(p)) = 1 \quad \forall p \in \phi^{-1}(0)$  ↑ verif. per esercizio



$$\oint_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

con  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione della curva

$$e_1 = (1, 0, 0) \in \Gamma, v = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in \Gamma$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x(t) \\ \leftarrow y(t) \\ \leftarrow z(t) \end{matrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^{2\pi} [(y+z)x'(t) + (z+x)y'(t) + (x-y)z'(t)] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{2} \sin t (-\sin t) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \cos t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \left( \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{2} \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t \right] dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t dt = 0$$

Calcolo via Stokes:

$$\oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Considero come  $\Sigma = \{ z = y, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$  ( *altra scelta:  $\tilde{\Sigma} = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1, y - z \leq 0\}$*  *meno astuta* )

$$\oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} = \iint_{\Sigma} [-2, 0, 0] \cdot \vec{n}$$

$$\text{rot } \vec{F} = e_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \text{ dove } F = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$$

$\Sigma = \{ y - z = 0 \}$  + altra cond. { quindi per trovare la normale devo fare

il gradiente di  $y - z$  e ottengo:  $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Ottengo } [-2, 0, 0] \cdot \vec{n} \equiv 0.$$



Richiami di teoria:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  dominio ammissibile  $\rightarrow$  soddisfa le hp del teo di divergenza

$f \in C(\Omega)$  allora  $\underbrace{\int_{\partial D} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n} e}_{\text{flusso sul bordo del gradiente}} = \underbrace{\int_D \text{div}(\vec{\nabla} f)}_{\substack{\text{ha come comp.} \\ \text{le derivate} \\ \text{nelle varie comp.}}} = \int_D \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{x_i} f) = \int_D \Delta f dx$

Oss: In particolare, se  $\Delta f \equiv 0 \Rightarrow$  il flusso attraverso il bordo del dominio è  $\equiv 0$

va bene anche un aperto qualsiasi

Prop:  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Sono equivalenti:

Oss.

$n=3$ :  $3\omega_3 r^2 = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^2 = 4\pi r^2$   
superficie della sfera di raggio  $r$

a)  $\Delta f(p) = 0 \quad \forall p \iff f$  è armonica

b)  $\forall p \in \mathbb{R}^n, \forall r \in (0, 1]$   $\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} f = f(p)$  dove  $\omega_n = \text{Vol}_n(B_1)$

$\iff$  la media di un'armonica su una palla di raggio  $r$  è = alla  $f$  al centro della palla

c)  $\forall p \in \mathbb{R}^n \quad \forall r \in (0, 1), \frac{1}{\underbrace{\omega_n r^n}_{\text{volume palla}}} \int_{B_r(p)} f = f(p)$

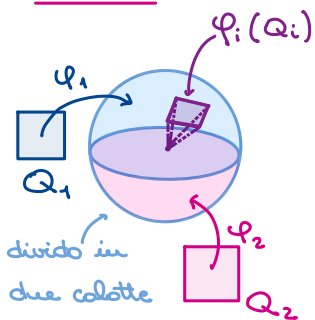
Dim: (a  $\Rightarrow$  b) SPG  $p=0$ : a meno di una traslazione, se  $p \neq 0 \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x-p)$  il centro  $\tilde{x}=0$

$\mu(r) = \frac{1}{n\omega_r r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n\omega_r} \int_{\partial B_r(0)} f_r$

$f_r(\vec{x}) = f(r\vec{x})$  con  $r \in [0, 1]$

$\hookrightarrow$  "parametrisiamo" la palla di raggio  $r$  con quella di raggio 1

dim. (1)



$\int_{\partial B_1} f = \int_{\varphi_1(Q_1)} f + \int_{\varphi_2(Q_2)} f \quad \varphi_i: Q_i \rightarrow \partial B_1(0)$

$\int_{\varphi(Q)} f = \int_Q f(\varphi(u)) \cdot J_\varphi(u) du = (*)$  con  $u \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\psi(x) = r\varphi(x)$  riporto su una sfera più piccola

$(*) = \int_Q f(\psi(u)) \frac{J_\psi(u)}{r^{n-1}} du \stackrel{1}{=} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} f = (*)$

$J_\varphi(u) = \sqrt{\det(D\varphi^T \cdot D\varphi)}$  con  $D\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \dots & \partial_{n-1} \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \dots & \partial_{n-1} \varphi_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n & \dots & \partial_{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}$   
matrice  $(n-1) \times (n-1)$

$[D\varphi^T \cdot D\varphi]_{ij} = (\partial_i \vec{\varphi}) \cdot (\partial_j \vec{\varphi})$  con  $\psi(u) = r\varphi(u)$

$[D\psi^T \cdot D\psi] = r^2 [D\varphi^T \cdot D\varphi]_{ij} \Rightarrow \det(D\psi^T \cdot D\psi) = r^{2(n-1)} \det(D\varphi^T \cdot D\varphi) \Rightarrow J_\psi = r^{n-1} J_\varphi$

L'integrale su una superficie come la sfera la definiamo tramite delle carte. Poi l'integrale sulla sfera sarà la somma di queste carte

(\*)<sup>def.</sup>  $= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\varphi(Q)} f \rightarrow$  lo abbiamo fatto per un pezzo di sfera parametrizzato da una carta, usando tutte le carte otteniamo tutta la formula

$$\mu(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_r(0)} f \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(0)} f r$$

$$\mu_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\varphi(Q)} f r = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q f_r(\varphi(u)) J_\varphi(u) du$$

$$\mu'_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q \nabla f(\underbrace{r\varphi(u)}_\psi) \cdot \varphi(u) J_\varphi(u) du \quad f_r(\vec{x}) = f(r\vec{x}) \quad , \quad \varphi(u) = \frac{\psi(u)}{|\psi(u)|}$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_Q \nabla f(\psi(u)) n_e(\psi(u)) J_\psi(u) du$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_e$$

$$\mu'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_e \quad \leftarrow \text{rimettendo tutto assieme}$$

$$\text{Se } \nabla f = 0 \Rightarrow \mu'(r) = (*) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \overbrace{\operatorname{div} \vec{\nabla} f}^{\Delta f} dx = 0$$

$$\Rightarrow \mu(r) \equiv \text{cost} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \mu(r) = f(0)$$

(b  $\Rightarrow$  a) SPG  $p=0$

$$\mu(r) = \text{cost} \Rightarrow \mu'(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \Delta f dx \equiv 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \Delta f(0) = 0$$

(\*) Oss: Se  $g$  funz. continua e  $\int_{B_r(0)} g(x) dx = \omega_n r^n g(0) + o(r^n)$  per  $r \rightarrow 0$

Lemma:  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $J(r) \doteq \int_{B_r(0)} u(x) dx$

$$\text{Allora } J(r) = \omega_n r^n \mu(0) + C(n) \Delta \mu(0) r^{n+2} + o(r^{n+2})$$

$$\text{Dim: } u(x) = u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^T H_u(0) x + o(|x|^2)$$

Se  $r$  è "piccolo", integrando tutti i pezzi:

$$J(r) = u(0) \omega_n r^n + \underbrace{\int_{B_r(0)} \nabla u(0) \cdot x dx}_{=0 \text{ perché } f \text{ dispari su dom. simmetrico}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \int_{B_r(0)} x_i x_j dx + o(r^{n+2})$$

$$\int_{B_r(0)} x_i x_j dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ per questioni di simmetria} \\ \int_{B_r(0)} x_i^2 dx & i = j \end{cases}$$

$$\int_{B_r(0)} x_i^2 dx = \frac{1}{n} \int_{B_r(0)} |x|^2 dx \rightarrow \text{la possiamo vedere come funzione radiale}$$

per simmetria non dipende da chi sia  $i$

elemento di superficie della palla di raggio  $t$

$$\text{Se } \varphi \text{ è funzione reale } L^1 \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \underbrace{n \omega_n t^{n-1}} dt$$

Applichiamo questa formula con  $\varphi(t) = t^2 \chi_{[0,r]}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx &= \int_0^{+\infty} \varphi(t) n \omega_n t^{n-1} dt = \int_0^r t^{n+1} n \omega_n dt \\ \parallel \\ \int_{B_r(0)} x^2 dx &= \frac{r^{n+2}}{n+2} n \omega_n = \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}(r) = n \omega_n r^n + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(0) \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2} + o(r^{n+2}) = n \omega_n r^n + \frac{\omega_n}{2n+4} r^{n+2} \Delta u + o(r^{n+2})$$

$$(c \Rightarrow a) \quad \text{Se } \int_{B_r(p)} f(x) dx = f(p) \quad \text{con } \bar{f}(x) = f(x) - f(p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} \bar{f}(x) dx \equiv 0 \rightarrow \text{per il risultato precedente traslato}$$

↖ Questo  $\Leftrightarrow \Delta f(0) = 0$

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \cdot \left[ \frac{\omega_n}{2n+4} r^{n+2} \Delta f(0) + o(r^{n+2}) \right] = \frac{1}{2n+4} r^2 \Delta f(0) + o(r^2) \quad \text{per } r \rightarrow 0$$

$$(b \Rightarrow c) \quad \int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{|x-p|=r} f \right) dr = \int_0^R (f(p) n \omega_n r^{n-1}) dr = f(p) \omega_n R^n$$

integrazione su gusci sferici  $\rightarrow$  lo tratteremo nella lezione seguente

Es per casa: Sia  $\gamma(t) = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$  dove  $\omega(x, y) = (\sin y - y) dx + x(\cos y + 1) dy$

Sugg: Scrivere  $\omega$  come la somma di una forma esatta e una forma "simplex"

INTEGRAZIONE PER "GUSCI SFERICI"

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{S(r)} f \right) dr \quad (\star) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n \text{ fisso e } S(r) = \{ |x-p| = r \}$$

Utilizzando la formula si ottiene immediatamente (b)  $\Rightarrow$  (c) nel teorema di ieri

Riepilogo: (b)  $\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \left( \int_{\partial B_R(p)} f \right) = f(p)$  e (c)  $\frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(p)} f(x) dx = f(p)$

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx \stackrel{(\star)}{=} \int_0^R \left( \int_{\partial B_r(p)} f \right) dr \stackrel{(b)}{=} \int_0^R f(p) n\omega_n r^{n-1} dr = f(p) \omega_n [r^n]_0^R = f(p) \omega_n R^n \quad (c) \text{ è dimostr. } \square$$

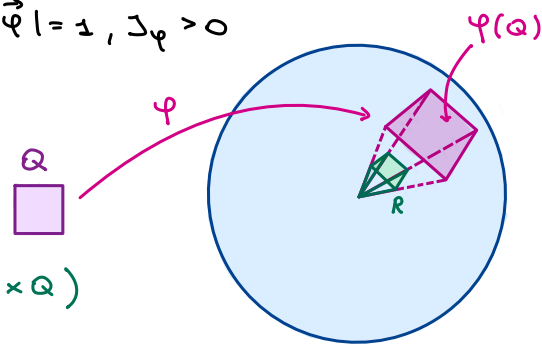
( $\star$ )  $\int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{S(r)} f \right) dr$  dimostriamo questo

Lemma:  $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  dominio,  $\vec{\varphi} \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{\varphi}$  isometrica,  $|\vec{\varphi}| = 1$ ,  $J_{\varphi} > 0$

$\varphi$  parametrizza una porzione di sfera unitaria

$$\begin{aligned} \phi: [0, R] \times Q &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (r, u) &\longmapsto r\varphi(u) \end{aligned}$$

$\phi$  parametrizza una parte di cono generato da  $\varphi(Q) \rightarrow C = \phi([0, R] \times Q)$



( $\star'$ )  $\int_C f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{C(r)} f \right) dr \quad C(r) = C \cap \{ |x| = r \}$

Oss: ( $\star'$ )  $\Rightarrow$  ( $\star$ )  $B_R(0) = \cup C_j$ ,  $\cup C_j(r) = S_r$

$$\sum_j \int_{C_j} f(x) dx \stackrel{*}{=} \sum_i \int_0^R \left( \int_{C_j(r)} f \right) dr = \int_0^R \left( \sum_j \int_{C_j(r)} f \right) dr = \int_0^R \left( \int_{S_r} f \right) dr$$

$$\int_C f(x) dx = \int_{[0, R] \times Q} f(r\varphi(u)) \cdot |\det D\varphi(r, u)| dr du = \textcircled{a} \quad \text{con } C = \phi([0, R] \times Q)$$

$$\phi(r, u) = \begin{pmatrix} r\varphi_1(u) \\ \vdots \\ r\varphi_n(u) \end{pmatrix} \quad D\phi(r, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u) & r\partial_{u_1}\varphi_1(u) & \cdots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_1(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(u) & r\partial_{u_1}\varphi_n(u) & \cdots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_n(u) \end{pmatrix}$$

$$|\det D\phi| \stackrel{\textcircled{b}}{=} \sqrt{\det(D\phi^T \cdot D\phi)} = (*)$$

Biject  $\rightarrow$

$$D\phi^T \cdot D\phi = \begin{pmatrix} |\vec{\varphi}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & [r^2 \partial_{u_i} \vec{\varphi} \cdot \partial_{u_j} \vec{\varphi}]_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (\partial_{u_i} \vec{\varphi}) \cdot \vec{\varphi} = 0 \quad (\cdot)$$

$$\sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)} = r^{(n-1)} J_\varphi(u) \quad \text{con } J_\varphi(u) = \sqrt{D\varphi^T \cdot D\varphi}$$

$$\textcircled{a} = \int_0^R \left( \int_Q \underbrace{f(r\varphi(r))}_{\Psi} \underbrace{J_\varphi(u)}_{\Psi} r^{n-1} d\mu \right) dr = \int_0^R \left( \int_{C(r)} f \right) dr \quad C(r) = C \cap \{|x| = r\}$$

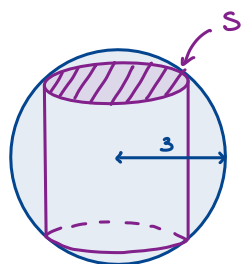
$$\textcircled{c} \varphi: Q \rightarrow \{|x| \leq 1\} \quad \partial_{u_i} \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}$$

$$\hookrightarrow |\vec{\varphi}|^2 = 1, \partial_{u_i} (|\varphi|^2) = 0 \Rightarrow 2\vec{\varphi} \cdot \partial_{u_i} \vec{\varphi} = 0$$

Esercizi pratici:

Es<sub>1</sub>:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{1+y^2} + 3z^2 \\ 2z - \log(1+y^2) \\ z \end{pmatrix} \quad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 0\}$$



$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} = ?$$

Calcoliamo la divergenza:  $\text{div } \vec{F} = \frac{2y}{1+y^2} + \frac{-2y}{1+y^2} + 0 = 0$

$\partial V = S \cup S_0$  dove  $S_0$  è un disco. E  $V = ?$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \textcircled{+} \quad -(x^2 + y^2) \geq 4$$

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq \sqrt{5}\} = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{5}\}$$

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq \sqrt{5}\}, \quad S_0 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z = \sqrt{5}\} = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = \sqrt{5}\}$$

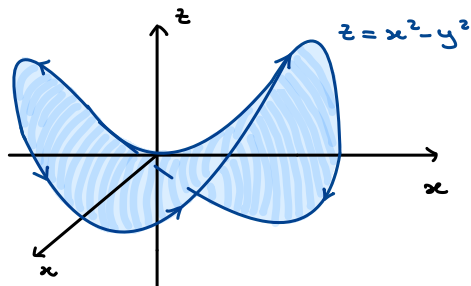
$$0 = \int_V \text{div } F = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}^+ - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^+ \Rightarrow \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^+ = \int_{S_0} \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} z \, dx \, dy = 8\pi$$

Es<sub>2</sub>:

$$F = \begin{pmatrix} (x + e^{x^2})z \\ -yz \\ x(y + e^{x^2}) \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint_\gamma F = \int_0^{2\pi} [\cos t + e^{\cos^2 t} \cos 2t] \cos 2t (-\sin t) + (-\sin t \cos 2t) \cos t + \cos t (\sin t + e^{\cos^2 t} \cos 2t) (-2 \sin 2t) dt$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix} \quad \text{e } \gamma = \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2\}$$



$\gamma$  parametrizza  $\partial S$  dove  $S = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 - y^2\}$

Attenzione:  $S = \{x^2 + y^2 = 1, z \leq x^2 - y^2\}$  non va bene: illimitato



$$\oint_\gamma \vec{F} = \int_S \text{rot } F \cdot \vec{n}$$

attenzione al segno

$$F = \begin{pmatrix} (x+e^{xz})z \\ -yz \\ x(y+e^{xz}) \end{pmatrix} \quad \text{rot } F = e_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$= \begin{pmatrix} x - (-y) \\ x + \cancel{e^{xz}} + \cancel{zx}e^{xz} - [y + \cancel{e^{yz}} + \cancel{xy}e^{yz}] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finire per esercizio.

Sugg: usare param. cartesiane  $(x, y, u(x, y))$ ,  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,

$$\int_S \text{rot } F \cdot n = \int_D \text{rot } F(x, y, u(x, y)) \cdot \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{|\varphi_x \times \varphi_y|} \cdot |\varphi_x \times \varphi_y| dx dy =$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix} \right] dx dy = \boxed{\quad} \quad \text{con } \varphi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}, \varphi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix}$$

↑ prodotto vettoriale

Soluzione:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } -u_x = -2x \text{ e } -u_y = +2y$$

← è la normale giusta

$$\boxed{\quad} = \int_D (x+y)(-2x) + (x-y)2y dx dy = -2 \int_D (x^2 + y^2) dx dy = -2(2\pi) \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho = -4\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = -\pi$$

FORME DIFFERENZIALI

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\Omega^k(A) = \{ \omega : A \rightarrow \wedge_k(\mathbb{R}^n) \text{ } k\text{-forma diff.} \}$

$\hookrightarrow$  sp. vettoriale su  $\mathbb{R}$

$\wedge$  prodotto esterno  $\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \rightarrow \Omega^{k+l}$

$d$  differenziale esterno  $d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ ,  $\omega = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} dx_{\lambda}$ ,  $d\omega = \sum_{\lambda} d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda}$

Prop: ①  $d(a+b) = da + db$

②  $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$   $a \in \Omega^k$

③  $\omega \in C^2 \Rightarrow d^2\omega = 0$

Dim: ① linearità della derivata

②  $a = \sum_{\lambda} a_{\lambda} dx_{\lambda}$   $b = \sum_{\mu} b_{\mu} dx_{\mu}$

$$a \wedge b = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda} b_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$$

$$d(a \wedge b) = \sum (d \cdot a_{\lambda} \cdot b_{\lambda} + a_{\lambda} db_{\mu}) dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$$

$$= \sum da_{\lambda} dx_{\lambda} \wedge b_{\mu} dx_{\mu} + a_{\lambda} db_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}$$

$\hookrightarrow$  1-FORMA

$$= da \wedge b + \sum (-1)^k a_{\lambda} dx_{\lambda} \wedge db_{\mu} \wedge dx_{\mu}$$

$$= da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$$

③  $d(dx_{\lambda}) = 0 \quad \forall \lambda$

$$\omega_{\lambda} \text{ funzione } C^2, d\omega_{\lambda} = \sum_i \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i$$

$$d^2\omega_{\lambda} = d\left(\sum_i \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i =$$

$$= \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

$$d^2\omega = d \sum_{\lambda} d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} = \sum_{\lambda} d^2\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} = 0$$

Def:  $\omega \in \Omega^k$  è esatta se  $\omega = d\omega'$   $\omega' \in \Omega^{k-1}$

$\omega \in \Omega^k$  è chiusa se  $d\omega = 0$

Oss:  $\omega \in C^1$  esatta  $\Rightarrow \omega$  chiusa

Oss: le forme chiuse (risp. esatte) sono sottosp. di  $\Omega^k$

Si definisce  $H^k(A) = \{w \in \mathbb{R}^k \text{ chiuse}\} / \sim$  con  $w_1 \sim w_2$  se  $w_1 - w_2$  è esatta

È chiamato  $k$ -esimo gruppo di coomologia di  $A$  (a coef. reali)  $\rightarrow$  Topologia algebrica

Es:  $H^1(A) = \{0\}$  se  $A$  è sempl. connesso

### PULLBACK DI UNA FORMA DIFFERENZIALE

Esempio:  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f \in C^1$ ,  $\sigma(x)$  campo di vettori su  $A$  con  $\sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f$  induce un campo  $w: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $w(f(x)) = df(\sigma(x))$

Data  $f$  come sopra,  $w \in \Omega^k(\mathbb{R}^m) \Rightarrow w^\# \in \Omega^k(A)$  pullback di  $w$  attraverso  $f$

è definito da  $w^\#(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = w(df \sigma_1, \dots, df \sigma_k)$ .

In coordinate, se  $w = \sum_{\lambda} w_{\lambda} dx_{\lambda}$ , si ha  $w^\# = \sum_{\lambda} (w_{\lambda} \circ f) dx_{\lambda}^\#$ , dove

$$dx_{\lambda}^\# = df_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge df_{\lambda_k} = \sum_{\mu \in \Lambda_{k,n}} \det \left| \frac{\partial (f_{\lambda_1} \dots f_{\lambda_k})}{\partial (y_{\mu_1} \dots y_{\mu_k})} \right| dy_{\mu} \quad \text{con } y \in A \subseteq \mathbb{R}^n, x = f(y) \in \mathbb{R}^m$$

Oss:  $w \in \Omega^0$  cioè  $w: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$w^\# = w \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \in \Omega^n(\mathbb{R}^m), w = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, n=m \Rightarrow w^\# = (a \circ f) \bigwedge_{j=1}^m dy_j \wedge \dots \wedge dy_m$$

Prop:  $(w_1 + w_2)^\# = w_1^\# + w_2^\#$ ,  $(w_1 \wedge w_2)^\# = w_1^\# \wedge w_2^\#$ ,  $(dw)^\# = dw^\#$

### K-SUPERFICI ORIENTABILI IN $\mathbb{R}^n$

$V \subset \mathbb{R}^n$  sottospazio con  $\dim V = k$

$(h_1, \dots, h_k)$  base di  $V$   $\left\{ \begin{array}{l} (h_1 \dots h_k) \sim (h'_1 \dots h'_k) \text{ se } \det G > 0 \text{ dove } G \in GL(k) \\ (h'_1, \dots, h'_k) \text{ base di } V \end{array} \right.$  tale che  $G h_i = h'_i \quad \forall i$

$\{(h_1, \dots, h_k)\} / \sim = \{V^+, V^-\}$  due orientazioni di  $V$

Per convenzione  $[(e_1, \dots, e_k)]$  si dice orientazione positiva di  $\mathbb{R}^k$

Def:  $M \subseteq \mathbb{R}^n$   $k$ -varietà  $C^1$  si dice orientabile se  $\exists f: M \rightarrow \{TM^+, TM^-\}$  continua  
una tale  $f$  si dice un'orientazione di  $M$

Oss: Non significa che  $\exists f: M \rightarrow \{(h_1(x), \dots, h_k(x))\}$  continua base di  $T_x M$

"essere orientabili" è molto più debole di questa condizione

Oss:  $M = \varphi(U)$ ,  $\varphi \in C^1$   $r_k(D\varphi) = k \Rightarrow M$  è orient. e  $[(D\varphi(e_1) \dots)]$  è un'orientaz. di  $M$



Prop:  $M$  orient.  $\Leftrightarrow \exists \{\varphi_i\}_{i=1,\dots,N}$ ,  $\varphi_i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$  iniettiva t.c.  $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U)$   
 $\hookrightarrow$  CARTE

e  $\det(D\phi_{ij}) > 0 \quad \forall i,j$  dove  $\phi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  con  $\text{rk}(D\varphi_i) = k$

Es:  $M \subseteq \mathbb{R}^n$   $(n-1)$  sup.,  $M$  orientabile  $\Leftrightarrow \exists$  scelta continua di  $N: M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^+ \setminus \{0\}$

## INTEGRAZIONE DI K-FORME SU K-SUPERFICI ORIENTABILI

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\omega \in \Omega^k(U)$ ,  $\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , definiamo  $\int_U \omega := \int_U a$

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^1$  iniettiva,  $\text{rk}(D\varphi) = k$  con  $M = \varphi(U)$   $k$ -sup.  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$\int_M \omega = \int_U \omega^*$  con  $\omega^*$  pullback di  $\omega$  attraverso  $\varphi$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$   $k$ -sup. orientata,  $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{U})$ ,  $\varphi_i(U) \cap \varphi_j(U) = \emptyset \quad i \neq j$

$[(d\varphi_i(e_1) \dots d\varphi_i(e_k))] \text{ è l'orientazione di } M \quad \forall i \text{ e } \forall x \in U$

$\Rightarrow \int_M \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U)} \omega = \sum_i \int_U \omega_i^*$ ,  $\omega_i^*$  è il pullback con  $\varphi_i$

Oss: Se  $M^+$  e  $M^-$  sono le due orientazioni di  $M$ :  $\int_{M^+} \omega = - \int_{M^-} \omega$

Prop:  $\int_M d\omega_1 + \beta \omega_2 = d \int_M \omega_1 + \beta \int_M \omega_2 \quad d, \beta \in \mathbb{R}$

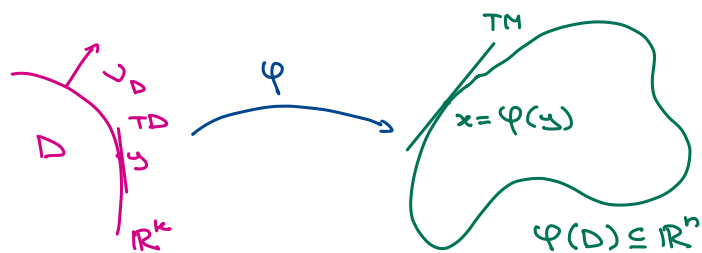
$\int_{M_1 \cup M_2} \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega$  se  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

## VARIETÀ CON BORDO

$M$   $k$ -var.  $C^1$  con bordo se  $\forall x \in M$ ,  $\exists U$  intorno di  $x$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  dominio regolare (con bordo) e  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi \in C^1$ , iniettiva,  $\text{rk}(D\varphi) = k$  t.c.  $M \cap \bar{U} = \varphi(D)$

$\partial M = \bigcup_{\varphi} \varphi(\partial D)$  bordo di  $M$ ,  $(k-1)$ -superficie  $C^1$

$\rightarrow$  imprecisione: il bordo di  $M$  non è l'immagine dei bordi di  $D$ , è l'immagine dei pti



in cui per poter parametrizzare devo

prendere un punto sul bordo di  $D \rightarrow$  non posso  
 $\hookrightarrow$  stanno sempre sul bordo come pt. int.

Oss: Se prendo l'immagine di un dom. regolare e poi ci attacco un'altra carta, il bordo si cancella

$M$  orientata posso scegliere  $\varphi$  t.c.  $[(d\varphi(e_i) \dots)]$  è l'orientazione di  $M$

$\forall y \in \partial D$  scelgo  $(v_1, \dots, v_{k-1})$  base di  $TD$  t.c.  $[(v_1, \dots, v_{k-1}, v_D(y))] = [(e_1 \dots e_k)]$

Questa è l'orientazione positiva  $\partial D^+$  di  $\partial D$

$\Rightarrow [(\dots d\varphi(y) \vee_i \dots)]$  def. un'orientazione di  $\partial M$ , cioè se  $M$  è orientabile  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \partial M$  è orientabile e un'orientaz. di  $M$  ne induce una di  $\partial M$

Teorema (Stokes):

$M$   $k$ -sup.  $C^1$  in  $\mathbb{R}^n$  orientata  $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  forma diff. in  $C^1 \Rightarrow \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

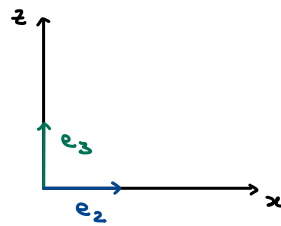
Dim (Traccia): Se  $M = \varphi(D)$ ,  $\int_{\varphi(D)} d\omega = \int_D d\omega^\# = \int_{\partial D} \omega^\# = \int_{\partial M} \omega$   
Teo div. in  $\mathbb{R}^k$

Esercizi di ricapitolazione

1)  $\gamma(t) = e_1 \cos t + e_3 \sin 2t$  con  $|t| \leq \frac{\pi}{2}$

$D = \text{span}\langle e_1, e_3 \rangle$  regione limitata da  $\gamma$

$V$  solido ottenuto ruotando  $D$  attorno all'asse  $z$



$\text{Vol}(V) = ?$

• Studio di  $\gamma(t)$  ( $\Leftrightarrow$  verificare che il problema abbia senso)

$\gamma(-\frac{\pi}{2}) = 0 = \gamma(\frac{\pi}{2})$   $\gamma$  è chiusa (ok)

$\gamma$  è iniettiva:  $\cos t_1 = \cos t_2 \Rightarrow |t_1| = |t_2|$    
 $\begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \rightarrow \sin 2t_1 = -\sin 2t_2$

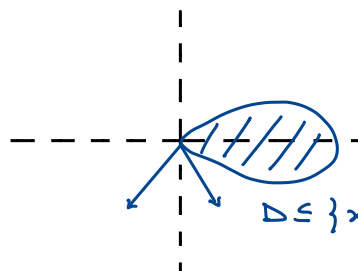
Quindi se anche  $\sin 2t_1 = \sin 2t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$  (ok)

$\Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 2 \sin t \cos t \end{pmatrix}$

Derivata di  $\gamma$ :  $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$

$\gamma'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\gamma'(-\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$



parte tangente a una retta e arriva tangente a un'altra retta

$\text{Vol}(V) = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_D p dp d\theta dz = 2\pi \int_D p dp dz$    
 (coord. cilind. F.T.  $\theta \in [0, 2\pi]$ )

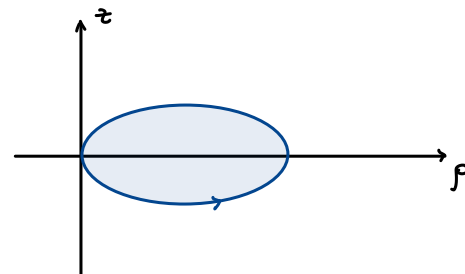
$F(p, z) = \begin{pmatrix} p^{3/2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \iint_D \text{div } F dp dz = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt = (*)$

uso il tes della divergenza per trovare il campo

In generale si ha che  $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$   $n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}|}$

la norma è ortogonale al vettore  $\dot{\gamma}$

$\Rightarrow$  devo ruotare  $n$  di  $\frac{\pi}{2}$  in senso orario



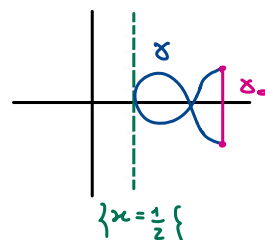
$(*) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{2} \cdot (2 \cos 2t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \cos 2t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t (\cos^2 t - \sin^2 t) dt$    
 (F1(γ(t)) n1(γ(t)) · 1/|γ̇|)

Es. per casa: 1) Finire il conto

2) Cercare un altro campo con la stessa divergenza che semplifica il calcolo

$$2) \omega(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) dx}_A - \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) dy}_B$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2+1}{2} \\ 2t^3-t \end{pmatrix} \quad t \in [-1, 1]$$



$$\int_{\gamma} \omega = ? \quad \text{Dom } \omega = \{x \neq 0\}$$

$$\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\omega$  è chiusa:  $\partial_y A = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}$

||

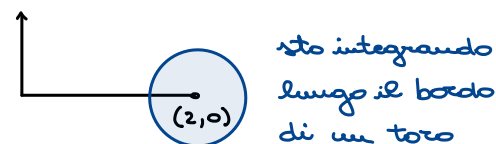
$$\partial_x B = - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$\omega = Adx + Bdy$  è chiusa  $\Rightarrow \omega$  è esatta su  $\{x > 0\}$  (siamo su  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  simple. connesso  $\Rightarrow$  ok)

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} \log(1+t^2) x(t) - \arctan t \right] dt = - \int_{-1}^1 \arctan t dt = 0 \quad \gamma \sim \gamma_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in (-1, 1)$$

3)  $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ z + \sin x + y \\ \cos x \end{pmatrix}$   $T \leftrightarrow r(\theta, \varphi) = \begin{cases} (2+\cos\varphi)\cos\theta \\ (2+\cos\varphi)\sin\theta \\ \sin\varphi \end{cases} \quad \theta, \varphi \in [0, 2\pi]$  *coord cilindriche*

$$\int_T \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_V \text{div rot } F dx dy dz = 0 \quad \text{se osservo che } T = \partial V$$



Es per casa: Fare l'esercizio con Stokes

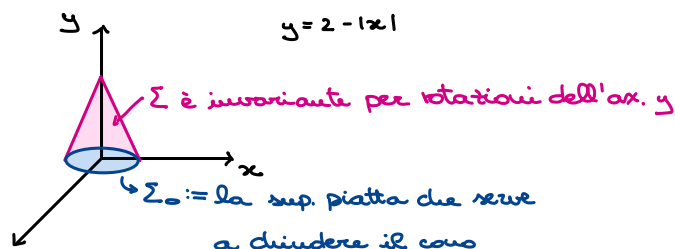
4)  $\Sigma = \{(x, y, z) : y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, y \geq 0\}$  *superficie*,  $F = \begin{pmatrix} y \sin(x + \cos z^4) - 3z \\ y^8 e^{x+z} \\ 3x + 5x^2 z \end{pmatrix}$  *campo*

Trovare  $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$

$V$  superficie bordata da  $\Sigma$  e  $\Sigma_0$ .

$$\int_V \text{div rot } F = \int_{\Sigma_0} \text{rot } F \cdot \underline{\vec{n}} + \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$$

Calcolo questo: mi interessa la 2<sup>a</sup> componente di  $\text{rot } F$



$$\text{rot } F = e_1(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 = y \cdot (\text{"altri termini"}) - 3 - 3 - 10xz$$

$$\int_{\Sigma_0} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{x^2+z^2 \leq 2} (-6 - 10xz) dx dz = -6 \cdot 4\pi = -24\pi$$

Il campo diventa  $F(x, 0, z)$   
 ↳ Area del disco di raggio 2

5) Sia  $\omega = \frac{x dy - y dx}{(x+y)^2 + y^2}$ ,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$   $t \in [0, 2\pi]$

- $\omega$  è chiusa?
- $\omega$  è esatta?
- Verifichiamo che  $\omega$  è chiusa

Dove  $\omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Calcoliamo  $\int_{\gamma} \omega$ : cerco una primitiva di  $\omega$  (in questo modo sto anche dim. che è esatta)

$$dU = \omega \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{(x+y)^2 + y^2}$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = - \int \frac{y}{(x+y)^2 + y^2} dx = - \int \frac{y}{z^2 + y^2} dz = \arctan\left(\frac{z}{y}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{y}\right) \rightarrow \text{def. su } \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$$

$$U = -\arctan\left(\frac{x+y}{y}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{y^2}} \cdot \frac{\cancel{y} - \cancel{y} - \cancel{y}}{y^2} + c'(y) = \frac{x}{y^2 + (x+y)^2} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = \text{cost}$$

$$U^+ \text{ estensione per continuità di } U \text{ a } \{y \geq 0\}, U^+(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y = 0, x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma^+} \omega + \int_{\gamma^-} \omega = \int_{\gamma^+} \omega = U^+(-1, 0) - U^+(1, 0) = \pi$$

$$U^-(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & y < 0 \\ \pi/2 & y = 0, x > 0 \\ -\pi/2 & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

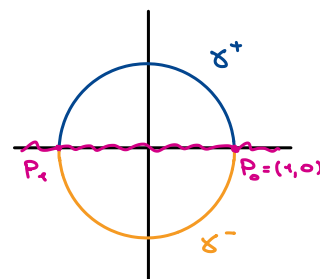
$$\int_{\gamma^-} \omega = U^-(-1, 0) - U^-(1, 0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{\gamma} \omega = +\pi + \pi = 2\pi \Rightarrow \omega \text{ non è esatta}$$

6)  $\omega(x, y) = \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^2}$ ; calcolare  $\int_{\gamma} \omega$  con  $\gamma(t) = (t, \sin t)$   $t \in [\pi, 2\pi]$

$\omega = dU$  con  $\omega$  radiale, cioè  $U(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ ,  $dU = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x dx + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y dy$

con  $\varphi'(t) = \frac{t^{-2}}{2}$  e  $\varphi(t) = -\frac{1}{2t} \Rightarrow U(x, y) = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)}$



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0 \quad \text{eq. diff. di ordine } k, \text{ forma implicita}$$

$$F: I \times (\mathbb{R}^n)^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

↳ il dominio può essere anche contenuto

$$I \subseteq \mathbb{R}, y: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funzione incognita}$$

$$\text{In certi casi si può scrivere: } y^{(k)}(x) = \tilde{F}(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \text{ forma esplicita}$$

Col cambio di variabile  $Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^n$  posso scrivere l'equazione

$$\text{come } Y' = f(x, Y) \text{ per un'opportuna } f \text{ continua} \quad \left( \begin{array}{l} \text{potrebbe non converire dal punto di} \\ \text{vista del calcolo ma da quello teorico} \end{array} \right)$$

↳ 1° ord.

Domanda: Sotto quali ipotesi esistono soluzioni? Sono uniche?

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \rightarrow \text{dato iniziale} \end{cases} \quad f: I \times A \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^n, (x_0, y_0) \in I \times A$$

Per semplicità supponiamo  $I_a = (x_0 - a, x_0 + a)$ ,  $A = B_r(y_0)$ ,  $a > 0$ ,  $r > 0$

Teorema (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale):

Supponiamo  $f$  continua, limitata e uniformemente lipschitziana in  $y$ , cioè  $\exists L > 0$  tale che:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \text{lipschitziana in } y$$

$\Rightarrow \exists \delta \in (0, a]$  e  $\exists! y \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ ,  $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  del pb. di Cauchy

Oss (Formulazione integrale): Integrando  $y' = f(x, y)$  otteniamo:  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (*)$

$y(x)$  è sol. del pb. di Cauchy  $\Leftrightarrow$  risolve  $(*)$

Per risolvere  $(*)$  basta supporre  $y$  continua, la sol. è automaticamente  $C^1$ .

Dim: Cerchiamo una sol. continua di  $(*)$ , utilizzando il teorema delle contrazioni.

Considero  $(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  spazio di Banach,  $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Sia  $X_{\delta, r} = \{y \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) : y(x) \in \overline{B_r(y_0)} \quad \forall x \in I_\delta\}$  sottospazio chiuso di  $C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \Rightarrow X_{\delta, r}$  è metrico e completo

Per  $y \in X_{\delta, r}$  def.  $F(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

$F: X_{\delta, r} \longrightarrow C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \rightsquigarrow y \text{ è sol. di } (*) \Leftrightarrow y = F(y)$

Devo vedere che  $F$  è una contrazione su  $X_{\delta,r}$ , cioè:

①  $F(y) \in X_{\delta,r} \quad \forall y \in X_{\delta,r}$

②  $\exists C \in (0,1)$  t.c.  $\|F(y_1) - F(y_2)\|_{\infty} < C \|y_1 - y_2\|_{\infty} \quad \forall y_1, y_2 \in X_{\delta,r}$

Se sono verificate ① e ②  $\Rightarrow \exists!$  sol. di  $y$  per il teo delle contrattivi

① Devo vedere  $|F(y)(x) - y_0| \leq r \quad \forall x \in I_{\delta}$

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq M \cdot \delta \leq r \quad \text{se } \delta \leq \frac{r}{M} \quad \text{con } M = \max_{I_{\delta} \times B_r(y_0)} |f(t, y)|$$

②  $|F(y_1)(x) - F(y_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt$

$$\leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq L \cdot \delta \|y_1 - y_2\|_{\infty} < \|y_1 - y_2\|_{\infty} \quad \text{se } \delta < \frac{1}{L}$$

Quindi se  $\delta \leq \min\left(0, \frac{1}{M}, \frac{1}{L}\right)$   $\exists!$  sol.  $y$  del problema di Cauchy

Oss: Senza la lipschitzianità di  $f$  non c'è unicità

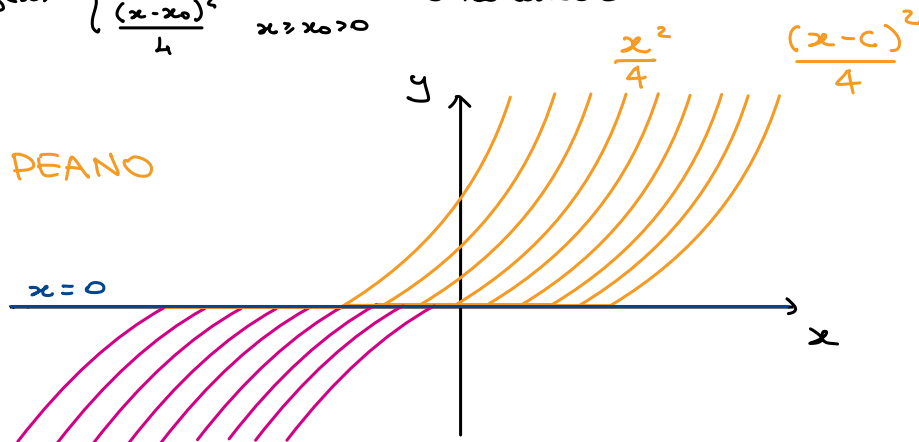
$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y(x) = 0$  è soluzione

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{(x-x_0)^2}{4} & x \geq x_0 > 0 \end{cases}$$

è soluzione

BAFFO DI PEANO



SOLUZIONE MASSIMALE:  $y: I_{\delta} \rightarrow B_r(y_0)$  sol. del pb di Cauchy

Supponiamo  $\delta < a$ ,  $y$   $M$ -lip.  $|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq M = \|f\|_{\infty}$ . Allora  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm \delta} y(x) = y^{\pm}$

Se  $y^+ \in B_r(y_0)$ , cioè  $|y^+ - y_0| < r \Rightarrow$  posso riapplicare il teorema ed estendere la soluzione in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta + \delta')$  con  $\delta' > 0$  e lo stesso con  $y^- \in B_r(y_0)$ .

In questo modo definisco una soluzione massimale del pb di Cauchy:

$y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow B_r(y_0)$  tale che:

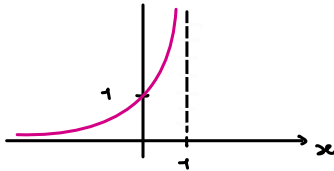
①  $\delta_2 < a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} y(x) \in \partial B_r(y_0)$

②  $\delta_1 < a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} y(x) \in \partial B_r(y_0)$

In particolare, se  $a = r = +\infty$ , cioè  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \Rightarrow \delta_{1,2} < +\infty \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x_0 + \delta_{1,2}} |y(x)| = +\infty$

È anche detto **Teorema dell'arietato o fuga dai compatti**

**Es:** 
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-\infty, 1)$$
  
 $\delta_1 = +\infty, \delta_2 = 1$



**Oss:**  $\delta_{1,2} \leq a$ ,  $y$  è M-lip., se  $\delta_2 < a \Rightarrow r = |y(x+\delta_2) - y_0| \leq M \delta_2$  cioè  $\delta_2 \geq \min(a, \frac{r}{M})$  e  $\delta_1 \geq \min(a, \frac{r}{M})$   
 $\Rightarrow$  l'intervallo di esistenza dipende da  $a$  e da  $M$  ma non da  $L$

### Teorema (Peano):

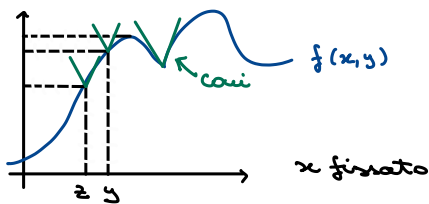
Se  $f$  è solo continua  $\Rightarrow \exists \delta \geq \min(a, \frac{r}{M})$  ed  $\exists$  una sol.  $y: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$  del pb di Cauchy

**Dim:** Approssimo  $f$  con  $f_k$  K-lip. con  $K \in \mathbb{N}$

**es:**  $f_k(x, y) = \inf_{z \in B_r(y_0)} \{ f(x, z) + K|z - y| \}$  *inf. convolution*

$(x, y) \rightarrow f(x, z) + K|z - y|$  è K-lip. in  $y \forall z \Rightarrow f_k(x, y)$  è K-lip

$f_k \leq f_{k+1} \leq f$  e  $\lim_k f_k(x, y) = \sup_k f_k(x, y) = f$ , inoltre  $f_k \rightarrow f$  uniforme, cioè  $\|f - f_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$



Applico il teorema precedente con  $f_k$  e ottengo una sol. massimale  $y_k: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$  del pb.  $\begin{cases} y' = f_k(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Osserviamo che  $y_k$  è M-lip. quindi le  $y_k$  sono equicont. ed equilimitate

$\Rightarrow$  Per il Teo di Ascoli-Arzelà  $\exists$  sottosucc.  $k_n$  t.c.  $y_{k_n} \xrightarrow{n} y \in C(I_\delta, \overline{B_r(y_0)})$  unif.

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x) &= \lim_n y_{k_n}(x) = \lim_n y_0 + \int_{x_0}^x f_{k_n}(t, y_{k_n}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_n f_{k_n}(t, y_{k_n}(t)) dt = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \text{ cioè } y \text{ è sol. del pb. di Cauchy} \end{aligned}$$

### Teorema (esistenza globale):

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$  con  $a, b \in C(\mathbb{R})$ ,  $a \geq 0, b \geq 0$

$\Rightarrow$  ogni sol. massimale del pb. di Cauchy è globale, cioè è def. su tutto  $\mathbb{R}$

**Dim:** Sia  $y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sol massimale e supponiamo per assurdo  $\delta_2 < +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} |y(x)| = +\infty$ . Sia  $z(x) = |y(x)|$ ; possiamo supporre  $z > 0$ :

$$\Rightarrow z'(x) = y'(x) \cdot \frac{y(x)}{|y(x)|} \leq |f(x, y(x))| \leq a(x)z(x) + b(x)$$



$$z(x) \leq \tilde{z}(x) \text{ dove } \tilde{z}(x) \text{ risolve } \begin{cases} \tilde{z}' = a\tilde{z} + b \\ \tilde{z}(x_0) = z(x_0) = |y_0| \end{cases}$$

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

$$(e^{-A})' = e^{-A}(\tilde{z}' - a\tilde{z}) = e^{-A}b$$

$$e^{-A(x)}\tilde{z}(x) - \tilde{z}(x_0) = \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt$$

$$z(x) \leq \tilde{z}(x) = e^{A(x)}|y_0| + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)}b(t) dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} z(x) \leq e^{A(x_0 + \delta_2)}|y_0| + \int_{x_0}^{x_0 + \delta_2} e^{A(x)-A(t)}b(t) dt \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{ASSURDO}} \quad \curvearrowright$$

DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

problema di Cauchy

Ci dice che sotto le hp di Cauchy-Lip.  
se ci "spostiamo di poco" si "sposta di poco"  
anche la soluzione

Prop: Sia  $f$  continua e  $L$ -lip. in  $y$ ,  $y(x) = \phi(x_0, y_0)(x)$  soluzione del pb di Cauchy

$\Rightarrow \phi$  è lipschitziana in  $y_0$  e si ha  $|\phi(x_0, y_0)(x) - \phi(x_0, y_1)(x)| \leq |y_0 - y_1| e^{L|x-x_0|}$

Dim: Poniamo  $y_i(x) = \phi(x_0, y_i)(x)$ ,  $i \in \{0, 1\}$

$w(x) = |y_0(x) - y_1(x)|$  lipschitziana in  $x$

$$w'(x) = \frac{y_0'(x) - y_1'(x)}{|y_0(x) - y_1(x)|} \cdot [y_0'(x) - y_1'(x)]$$

$\leftarrow x \ y_0(x) \neq y_1(x)$

$$w'(x) \leq |y_0'(x) - y_1'(x)| = |f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))| \leq L |y_0(x) - y_1(x)| = L \cdot w$$

la sol. di  $z' = Lz$  è  $z(x) = z_0 e^{L(x-x_0)}$ .

Per confronto:  $w(x) \leq |y_0 - y_1| e^{L(x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0$

la stima per  $x < x_0$  si fa scambiando  $x$  con  $-x$

□

SISTEMI LINEARI

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x) \quad \text{con } x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$A: I \rightarrow M_{n,n} \text{ continua}$$

$$b: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continua}$$

Oss: le soluzioni esistono globalmente ( $\forall x \in I$ ) e sono uniche

Se  $A(x) \equiv A$  il sistema si dice a coefficienti costanti

Se  $b(x) = 0$  il sistema si dice omogeneo

a meno di traslarlo sottraendone una  
stacciamo lo spazio di dimens.  $n$

Prop: le soluzioni formano uno spazio affine di dimensione  $n$

In particolare, le soluzioni del sistema omogeneo  $y' = A(x) \cdot y$  sono uno spazio

vettoriale di dimensione  $n$  e una soluzione di  $y' = A(x)y + b$  si scrive come

$$y(x) = y_p(x) + y_o(x) \quad \text{dove } y_o(x) \text{ è una soluzione di } y' = A(x)y \text{ e } y_p(x) \text{ è una}$$

soluzione particolare del sistema

Dim: ① Consideriamo il pb. di Cauchy 
$$\begin{cases} y' = A(x) \cdot y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia  $\phi(x_0, y_0)(x)$  soluzione, e  $y_0 \rightarrow \phi(x_0, y_0)(x)$  lineare bigettiva (per l'unicità)  
 $\Rightarrow$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione  $n$

② Siano ora  $y_1, y_2$  sol. di  $y' = A(x)y + b(x)$  e  $w = y_1 - y_2$

$\Rightarrow w'(x) = A(x)y_1(x) + b - A(x)y_2 + b = A(x)w$ ,  $w$  è soluzione  $w' = Aw$

la soluzione generale di  $y' = Ay + b$  si può scrivere  $y(x) = y_p(x) + \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$   $c_i \in \mathbb{R}$

Dove  $y_p$  è una sol. particolare e  $\{y_i\}$  sono una base di sol. di  $y' = A(x)y$

Oss: le equazioni lineari di ordine  $k$   $y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{(i)}(x) + b$  si possono scrivere

come sistema del primo ordine ponendo  $Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \rightarrow$

$\Rightarrow Y' = AY + B$  con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix}$  e  $B(x) = (0, \dots, 0, b(x))$

### CASO LINEARE OMOGENEO A COEFFICIENTI COSTANTI

$y' = Ay$ ,  $A \in M_{n,n}$  fissata,  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

### Esponenziale di matrici:

Data  $A \in M_{n,n}$  definiamo  $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in M_{n,n}$  (sulle matrici, come su  $\mathbb{R}^n$ , le norme sono tutte equivalenti)

Sulle matrici consideriamo la norma:  $\|A\| = \max_{|x|=1} |A \cdot x|$

Oss: la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  è assolutamente convergente

$$\|e^A\| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} < +\infty$$

Se consideriamo le funzioni  $f_N(A) = \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} : M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$  sono uniformemente

convergenti a  $e^A$ , per  $N \rightarrow +\infty$ , sui compatti di  $M_{n,n}$

### Proprietà di $e^A$ :

① Se  $AB = BA$  (altrimenti non è vero)  $\Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

dim:  $e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^k B^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k! (n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$   
↓ non è la dim. delle matrici  
↑ serve che commutino  
↑ prodotto di Cauchy

②  $e^A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \text{Id} + \frac{A}{n} \right)^n$  si dimostra come per  $e^x$

③  $\det(e^A) = e^{\text{tr} A} > 0$  analogamente a  $e^x$  che è sempre positiva e invertibile su  $\mathbb{R}^+$   $\rightarrow$

In particolare  $e^A$  è sempre invertibile e  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

$(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}, \cdot)$   
tramite  $e^x$

dim: Siano  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  gli autovalori di  $A$ . Usando ② si ha:

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \lim_N \det \left( \text{Id} + \frac{A}{N} \right)^N = \lim_N \left[ \det \left( \text{Id} + \frac{A}{N} \right) \right]^N = \lim_N \left[ \prod_{i=1}^N \left( 1 + \frac{\lambda_i}{N} \right) \right]^N \\ &= \lim_N \left[ 1 + \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right]^N = e^{\sum_{i=1}^N \lambda_i} = e^{\text{tr} A} \end{aligned}$$

④  $M$  invertibile  $\rightarrow e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M$  più teorico che applicativo

dim:  $e^{M^{-1}AM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^{-1}AM)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{-1}A^k M}{k!} = M^{-1}e^A M$

Come si calcola  $e^A$ ?

① Caso  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  diagonale

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

② Caso  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  <sup>superdiagonale</sup>  $= B + C$ ,  $B = \lambda \text{Id}$ ,  $e^B = e^\lambda \text{Id}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e^A = e^B \cdot e^C = e^\lambda \cdot e^C$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{k!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \frac{1}{2} & \dots & & \end{pmatrix}$$

Teorema: la funzione  $x \rightarrow e^{Ax}$  è differenziabile  $\forall x \in \mathbb{R}$  e si ha  $\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax}$

Corollario: l'unica soluzione di  $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  è  $y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0$  ( $Ax = (a_{ij})x$ )

Dim:  $\frac{d}{dx} e^{Ax} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - \text{Id}}{h} = e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} - \text{Id}}{h} =$

$$= e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{(k-1)!} = e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \left( A + h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+2} h^j}{(j+2)!} \right) = A \cdot e^{Ax} \left( \text{Id} + \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+2} h^j}{(j+2)!} \right) = A e^{Ax}$$

$\hookrightarrow$  serie assolutamente convergente

SISTEMI LINEARI, CASO  $n=2$ :

$$y' = Ay, \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

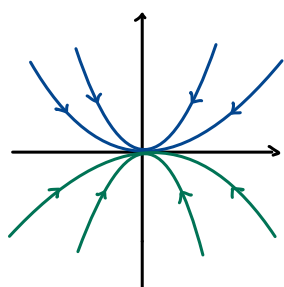
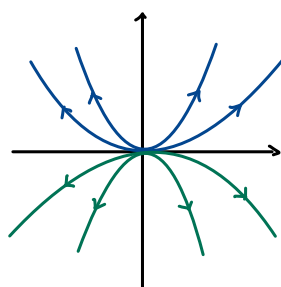
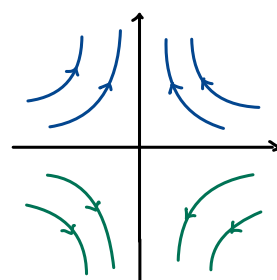
Siano  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , autovalori di  $A \rightarrow$  ho 3 casi: autovalori in  $\mathbb{R}$    
 ① diagonalizzabile   
 ② non diagonalizzabile   
 ③ autovalori in  $\mathbb{C}$

## ① CASO DIAGONALIZZABILE:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e } M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leadsto e^A = M \cdot e^{M^{-1}AM} \cdot M^{-1} \text{ (visto ieri)}$$

$$e^{M^{-1}AM} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la sol di } y' = (M^{-1}AM)y \text{ è } y(x) = (c_1 e^{\lambda_1 x}, c_2 e^{\lambda_2 x}), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

↑  
def. dal cambio di coord.  $M$

NODO STABILE:  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ NODO INSTABILE:  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ SELLA:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 

## ② CASO NON DIAGONALIZZABILE:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

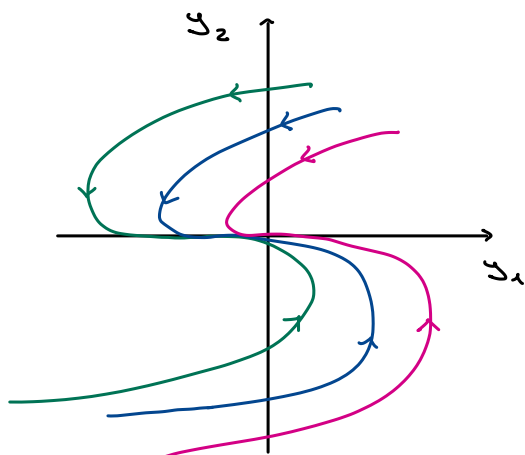
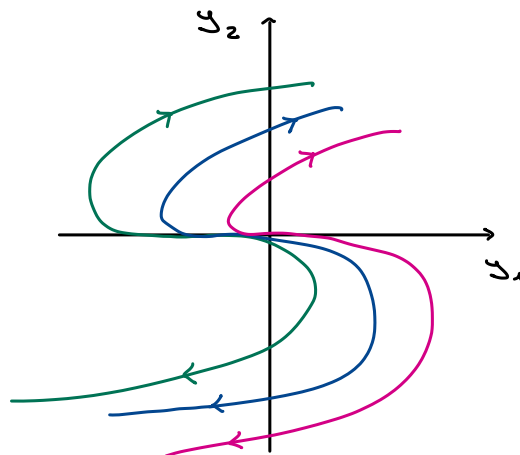
$$y' = (M^{-1}AM)y \rightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \rightarrow y_2 = c_2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2 \rightarrow y_1 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$\hookrightarrow y_1' = \lambda(c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}) + c_2 e^{\lambda x} = \lambda y_1 + y_2$$

$$y(x) = e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x, c_2)$$

↳ tutti dà una perturbazione simile al nodo

NODO IMPROPRIO STABILE:  $\lambda < 0$ NODO IMPROPRIO INSTABILE:  $\lambda > 0$

### ③ CASO COMPLESSO

$$\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}, \quad \lambda = \alpha + i\beta \Rightarrow M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{M^{-1}AM} = e^{\alpha} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

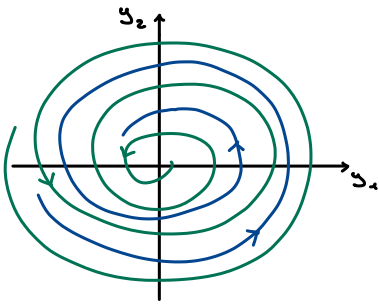
verificare

↳ rotazione di angolo  $\beta$

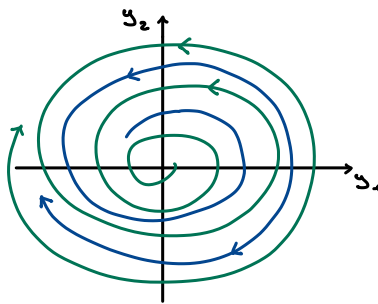
se gli autovalori sono in  $\mathbb{C} \Rightarrow$  sono coniugati  
 ↳ no Jordan  $\rightarrow$  è diagonalizzabile  
 ↳ rotazione + dilatazione:  $\underbrace{\alpha \cdot \text{Id}}_{\text{dilataz.}} + \underbrace{i\beta}_{\text{rotazione}}$

Oss: È diretta conseguenza del caso ① perché  $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$

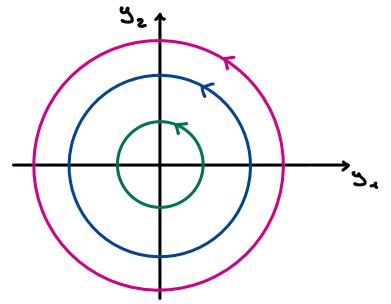
$$y' = (M^{-1}AM)y \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x), -c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x))$$



FUOCO STABILE:  $\alpha < 0$



FUOCO INSTABILE:  $\alpha > 0$



CENTRO:  $\alpha = 0$

### SISTEMI NON OMOGENEI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\begin{cases} y' = Ay + b(x) & b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ costante} \\ y(x_0) = y_0 & A \in \mathbb{M}_{n,n} \end{cases}$$

In analogia con le equazioni del primo ordine:

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0 + \underbrace{e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^x e^{-As} \cdot b(s) ds}_{y_p(x), \text{ sol. particolare con } y_p(x_0) = 0}$$

Verifichiamo che  $y_p$  è soluzione:  $y_p' = A e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As} \cdot b(s) ds + \cancel{e^{Ax}} \cdot \cancel{e^{-Ax}} b(x) = A y_p + b$

### SISTEMI NON LINEARI AUTONOMI

$$y' = f(y), \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto e } f \in C^1(A)$$

Il sistema si dice autonomo quando  $f$  dipende solo da  $y$

$y_0$  t.c.  $f(y_0) = 0$  si dice **punto stazionario** del sistema ( $y(x) = y_0$  è una soluzione)

Oss: Generalmente, il sistema  $y' = f(y)$ , vicino a  $y_0$ , si comporta come il sistema linearizzato  $z' = Df(y_0)z$  (dove poniamo  $z(x) = y(x) - y_0$ )

Teorema di linearizzazione (HARTMAN-GROBMAN): *non facciamo la dimostrazione*

$f \in C^1(A)$ ,  $y_0 \in A$ ,  $f(y_0) = 0$ ,  $\text{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$  autovalore di  $Df(y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists U$  intorno di  $y_0$  e  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  omeomorfismo tc  $\Phi(y_0) = 0$  e, detta  $y(x, y_1)$  la

soluzione di  $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_1 \end{cases}$ ,  $z(x_0, z_0) := \Phi(y(x, \Phi^{-1}(z_0)))$  risolve il sistema

linearizzato  $\begin{cases} z' = Df(y_0)z \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$

Oss:  $y_0$  tc  $\text{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$  si dice punto stazionario iperbolico

Oss: In generale  $\Phi$  è Hölder ma non  $C^1$ , cioè non è diffeomorfismo

Esempio di applicazione: (sistema autonomo in  $n=2$ )

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases} \Rightarrow \text{PUNTI STAZIONARI (punto } y_1' = 0 \text{ e } y_2' = 0) \begin{cases} y_1(1 - (y_1^2 + y_2^2)) = y_2 & \text{I} \\ y_2(1 - (y_1^2 + y_2^2)) = -y_1 & \text{II} \end{cases}$$

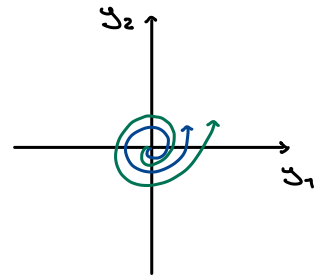
moltiplico I per  $y_2$

$$y_1 y_2 (1 - (y_1^2 + y_2^2)) = y_2^2 = -y_1^2 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0 \rightsquigarrow Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

moltiplico II per  $y_1$

$$\begin{array}{l} \text{SISTEMA} \\ \text{LINEARIZZATO} \end{array} \begin{cases} z_1' = z_1 - z_2 \\ z_2' = z_1 + z_2 \end{cases} \quad \text{AUTOVALORI } (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1+i \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1-i$$



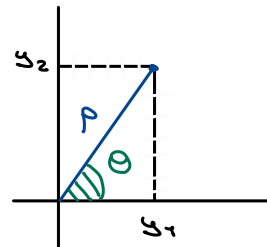
Possiamo applicare il Teorema di linearizzazione

Domanda: Come si comporta il sistema lontano da  $(0,0)$ ?

Passiamo a coordinate polari:

$$(y_1, y_2) \rightarrow (r, \theta)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} r' = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \frac{y_1 y_1' + y_2 y_2'}{r} \\ \theta' = \frac{1}{1 + y_2^2/y_1^2} \cdot \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases}$$

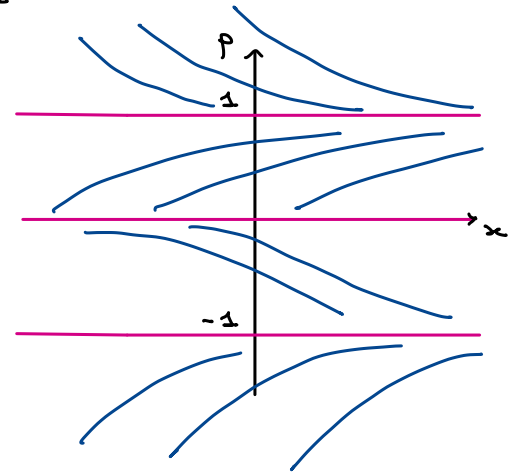
$$\begin{cases} p' = \frac{y_1^2 - y_1 y_2 - y_1^2 p^2 + y_1 y_2 + y_2^2 - y_2^2 p^2}{p} = \frac{p^2 - p^4}{p} = p - p^3 \\ \theta' = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 - y_1 y_2 p^2 - y_1 y_2 + y_2^2 + y_1 y_2 p^2}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1 \end{cases}$$

$$\theta(x) = \theta_0 + x$$

$$p' = p - p^3$$

$p(x) = 1$  è soluzione stabile

$(p, \theta) = (1, x)$  è un'orbita periodica del sistema



Teorema di Poincaré - Bendixson:

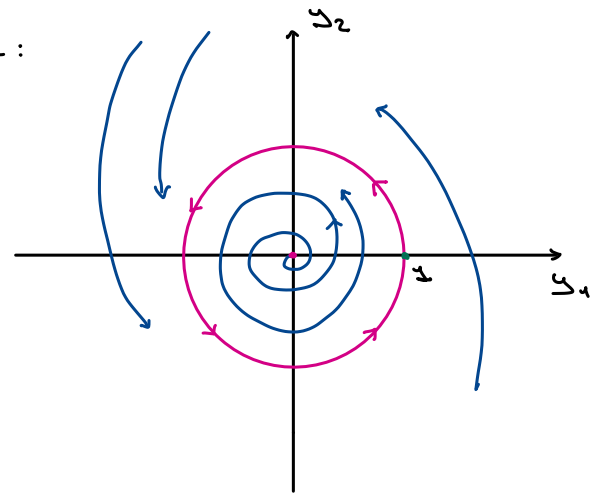
$n=2$ ,  $y' = f(y)$ ,  $f \in C^1(A)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, supponiamo che:

①  $\exists K \subseteq A$  compatto invariante, cioè  $y(x_0) \in K$

$$\Rightarrow y(x) \in K \quad \forall x > x_0$$

②  $f(y) \neq 0 \quad \forall y \in K$

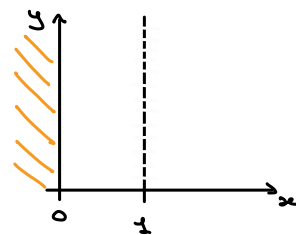
$$\Rightarrow \exists \text{ sol periodica in } K$$





Esercizio 1: studio qualitativo di un'equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \overbrace{\arctan y}^{F(x,y)} - \frac{1}{x} \\ y(1) = b \end{cases}$$

con  $y$  si intende  $y(x)$ , e si prende  $b \in \mathbb{R}$ l'eq. è def. solo per  $x > 0$ Domande:

a) C'è esistenza e unicità della soluzione?

b) Descrivere l'intorno massimale di def.

c)  $\exists! b^*$  t.c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ ?

d) Dire se ci sono asintoti obliqui

a) lip. (locale) in  $y$ :  $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2|$ 

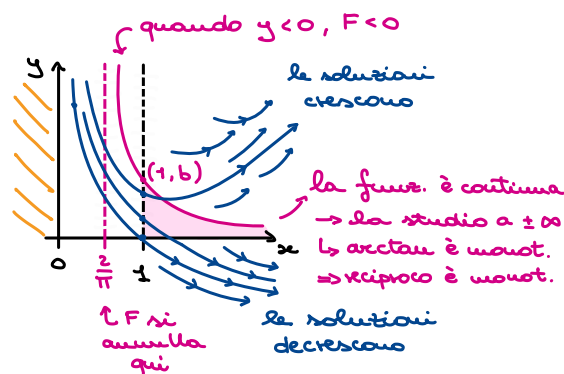
$$|\arctan y_1 - \arctan y_2| \leq C |y_1 - y_2| \quad (d_k)$$

 $\Rightarrow$  sono verificate le hp di Cauchy-Lip.  $\Rightarrow \exists!$  sol.b)  $F(x, y) \leq A(x) + B(x)|y|$  con  $A, B$  continue in  $x$  $\Rightarrow$  allora c'è esistenza globale su  $\{x > 0\}$ 

Dobbiamo capire com'è fatta la soluzione:

•  $F(x, y) > 0$ ?  $\arctan y > \frac{1}{x}$  se  $y > 0$ •  $F(x, y) = 0$ ? Studiamo  $\arctan y = \frac{1}{x}$  (\*)

$$(*) \Leftrightarrow x = (\arctan y)^{-1} = \frac{1}{\arctan y}$$

Al variare di  $b$  possiamo dedurre alcune cose:• caso  $b \leq 0$ : la soluzione sarà sempre negativaEsercizio per casa: Cosa succede per  $x \rightarrow 0$ ?• Cosa succede per  $x \rightarrow +\infty$ ? 2 casi: valore finito o infinito?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = l \Leftrightarrow l = -\infty \quad \text{Per assurdo: se } l \in \mathbb{R} \text{ allora } \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \arctan l < 0$$

Non è compatibile con  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = l \in \mathbb{R}$  (\*)

Spiegazione (\*):  $y(n+1) - y(n) = y'(\xi) \cdot 1 \quad \xi \in (n, n+1)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow \infty & \downarrow & \\ 0 = l - l & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} y(\xi) = \arctan l & \Rightarrow \text{ASSURDO} \end{array}$$

c)  $\exists b: y_b(x)$  attraversa la curva  $F(x, y) = 0 \rightarrow$  è un intervallo:  $(b^*, +\infty)$

$\bar{y}(x) = \lim_{b \rightarrow b^*} y_b(x)$  il limite esiste  $\forall x$  fissato

Sui compatti di  $(0, +\infty)$  la convergenza è uniforme: vale perché c'è convergenza monotona su un intervallo compatto (dal tes di dipendenza continua dai dati iniziali)

Da questo segue che:  $y_b(x) = b + \int_1^x g'(t) dt = b + \int_1^x F(t, y_b(t)) dt$

Se  $b \rightarrow b^*$  ottengo che  $\bar{y}(x) = b^* + \int_1^x F(t, \bar{y}(t)) dt \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \bar{y} = y_{b^*}$  unica soluzione con dato iniziale  $b^*$

Allora diciamo che:

- $\bar{y} > 0$
  - $\bar{y}(x) < (\arctan y)^{-1}$ , o meglio,  $\arctan \bar{y}(x) < \frac{1}{x}$   
 $\hookrightarrow$  curva rossa
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}(x) = 0$

$$(y_{b_1}(x) - y_{b_2}(x))' = \arctan y_1(x) - \arctan y_2(x) = \frac{1}{1 + \xi^2} (y_{b_1}(x) - y_{b_2}(x)) \quad \xi \in [y_2(x), y_1(x)]$$

$b_1 > b_2$

Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} y_{b^*}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y_b(x) = 0$  con  $b < b^*$

$$(y_{b^*}(x) - y_b(x))' \geq \frac{1}{2} (y_{b^*} - y_b) \quad \forall x \geq x_0$$

$\underbrace{\quad}_{w(x)} \quad \underbrace{\quad}_{\text{stima dal basso di (*)}}$

$$w' \geq \frac{1}{2} w \quad \forall x \geq x_0 \Rightarrow w(x) \geq w(x_0) e^{\frac{x-x_0}{2}}$$

d) Asintoti: Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$ , esiste asintoto?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \arctan y(x) - \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$y(x) \text{ ha un asintoto} \Leftrightarrow \underbrace{y(x) + \frac{\pi}{2} x}_{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c \in \mathbb{R}$$

$$h'(x) = y'(x) + \frac{\pi}{2} = \arctan y + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \quad \text{⊖} \quad -\arctan \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad y(x) \rightarrow -\infty$$

Quando  $y(x) < 0$  si ha:  $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$

Se  $y(x)$  asintotico a  $-\frac{\pi}{2}x + c$ :  $y(x) \sim -\frac{\pi}{2}x$  per  $x \rightarrow \infty$ ,  $\arctan \frac{1}{y(x)} \sim -\frac{2}{\pi}x$

$$\Rightarrow h'(x) \sim \frac{1}{x} \left( -1 + \frac{2}{\pi} \right) \quad \text{negativa}, \quad h(x) = h(x_0) + \int_{x_0}^x h(t) dt$$

$h$  non può essere limitata perché  $\int_{x_0}^{+\infty} h'(x) dx$  non è convergente

Per vedere che non c'è asintoto a  $+\infty$  si ripete lo stesso ragionamento

## Esercizio 2: Sistema 2x2

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & x(t) \\ y' = g(x, y) & y(t) \end{cases} \quad f, g \text{ sono funzioni } C^0$$

Dico che questa equazione si dice esatta se  $\omega = g dx - f dy$  è una forma esatta

Prop: Se l'eq. è esatta, allora  $\exists U \in C^1$  tale che  $g(x, y) = U_x(x, y)$ ,  $f(x, y) = -U_y(x, y)$   
↑ potenziale

$$U(x(t), y(t)) \equiv \text{cost}$$

$$\frac{d}{dt} (U(x(t), y(t))) = U_x(x, y) \cdot x' + U_y(x, y) \cdot y' = g(x, y)x' - f(x, y)y' = g(x, y)f(x, y) - f(x, y)g(x, y) = 0$$

Esempio: 
$$\begin{cases} x' = \overbrace{Ax + By}^f \\ y' = \underbrace{Cx + Dy}_g \end{cases} \quad \text{Per quali } A, B, C, D \text{ il sistema è esatto?}$$

$$g dx - f dy = dU \text{ è esatta} \Leftrightarrow \text{chiusa}$$

$$f(x, y) = Ax + By, \quad g(x, y) = Cx + Dy$$

$$\partial_y g = \partial_x (-f)$$

$$D = -A \Leftrightarrow A + D = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx - Ay \end{cases}$$

$$dU = (Cx - Ay) dx - (Ax + By) dy$$

$$U(x, y) = \frac{C}{2} x^2 - Axy - \frac{B}{2} y^2$$

Esercizi 1)  
per casa

$$(*) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

① Verificare che tutte le sol. sono limitate

② Se  $\begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{matrix}$  determinare il punto più vicino e quello più lontano dall'origine

Sol: Prossima volta

2) Ridurre la soluzione di (\*) alla sol. di un'eq. scalare del II ordine

3) È sempre possibile ricondurre la soluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti di dimensione  $n$  alla sol. di una eq. scalare di ordine  $n$ ?

SISTEMI LINEARI NON AUTONOMI

$$y' = A(x)y + b(x) \text{ con } A, b \text{ continue su } I \subseteq \mathbb{R}$$

caso omogeneo:  $b(x) = 0$

$$y' = A(x)y, \text{ le soluzioni sono uno spazio vettoriale di dimensione } n$$

Si vede osservando che esiste una biiezione

Fatto:  $y_1, \dots, y_n$  sono indipendenti in  $C(I, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$  sono indep.  $\forall x_0 \in I$

↳ È una conseguenza del teorema di esistenza

Def: Date  $n$  sol.  $y_1, \dots, y_n$  la matrice  $W(x) = (y_1 | \dots | y_n)$  si dice matrice Wronskiana

$w(x) = \det W(x)$  si dice determinante Wronskiano

$W, w$  verificano: 1)  $W'(x) = A(x)W(x)$

$$2) w'(x) = [\operatorname{tr} A(x)] w(x)$$

1) Segue da  $y'_k = A(x)y_k \quad \forall k$

2) È un'equazione del 1° ordine scalare che ha soluzione  $w(x) = w(x_0)e^{F(x)}$  dove si ha:

$$F(x) = \int_{x_0}^x \operatorname{tr}(A(s)) ds. \text{ In particolare } \Rightarrow w(x_0) = 0 \text{ per qualche } x_0 \in I \Rightarrow w(x) = 0$$

$w \equiv 0 \Leftrightarrow y_1, \dots, y_n$  sono dipendenti

Verifichiamo che  $w' = (\operatorname{tr}(A))w$ :

$$w'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det W(x+h) - \det W(x)}{h}$$

def. di  $W'(x)$

$W' = AW$

$$W(x+h) \stackrel{\downarrow}{=} W(x) + hW'(x) + o(h) \stackrel{\downarrow}{=} (I + hA)W + o(h)$$

$$\det[W(x+h)] = \det[(I + hA)W] + o(h) = \det(I + hA) \det(W) + o(h) = \prod_{i=1}^n (1 + h\lambda_i) w + o(h)$$

↳ Binet

pol. caratteristico  
↳ autovalori di A

$$* = [1 + h \operatorname{tr}(A)] w + o(h)$$

$$(*) \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum \text{autovalori}(A)$$

$$\text{Si ha: } \prod_{i=1}^n (1 + h\lambda_i) = 1 + (\sum h\lambda_i) + (\sum h^2 \lambda_i \lambda_j) + (\sum h^3 \lambda_i \lambda_j \lambda_k) + \dots + o(h) = 1 + \sum h\lambda_i = 1 + h \operatorname{tr}(A)$$

Inseriamo nel limite:

$$w'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + h \operatorname{tr}(A)]w - w + o(h)}{h} = \operatorname{tr}(A) \cdot w$$

Oss: Il teorema di esistenza non è strettamente necessario, però mi dice qualcosa

in più nel caso non omogeneo

caso non omogeneo:  $b(x) \neq 0$

$$y' = A(x)y + b(x)$$

Se  $y_1, \dots, y_n$  sono soluzioni di  $y' = Ay$  e  $y_p$  è una soluzione particolare, allora:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i + y_p \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ (generano uno spazio affine).}$$

Come nel caso autonomo, data una matrice Wronskiana  $W$ , con  $\det W \neq 0$ ,

$$\Rightarrow y_p(x) = W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + b(x) \text{ è la sol. particolare che verifica } y_p(x_0) = 0$$

$$\text{Infatti: } y_p'(x) = W'(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + W(x) W(s)^{-1} b(s) = AW(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + b(x) = Ay_p(x) + b(x)$$

⚠ non mi dice come trovare le  $n$  soluzioni

Esempi di sistemi non lineari:

1) Modelli di dinamica di popolazioni

caso 1 popolazione:

$x(t)$  = # individui al tempo  $t$

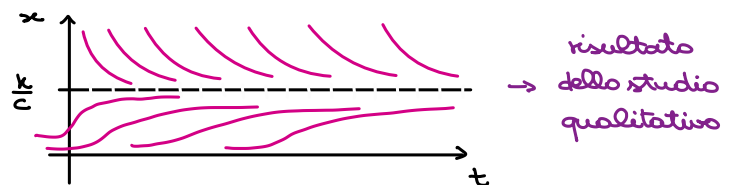
$$x'(t) = \underset{\substack{\text{crescita} \\ \downarrow}}{k} x(t) - \underset{\substack{\text{competizione} \\ \downarrow}}{c} x^2(t) \quad k, c > 0$$

(\*) crescita esponenziale della popolazione in presenza di cibo e spazio limitato

(\*\*) Tuttavia, quando la popolazione cresce troppo rallenta la crescita (si crea, appunto, competizione)

$x \equiv 0$  è soluzione,  $\leftarrow$  sol. staz.

$x \equiv \frac{k}{c}$  è soluzione (stabile)  
 $\hookrightarrow$  ce lo dice il modello



risultato dello studio qualitativo

caso 2 popolazioni:  $x(t), y(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = (k_1 - a_{11}x - a_{12}y)x \\ y'(t) = (k_2 - a_{21}x - a_{22}y)y \end{cases}$$

coef. tutti  $> 0$ , ci interessa  $x \geq 0, y \geq 0$

$k_i$  = tasso di crescita,  $a_i$  = tasso di competizione

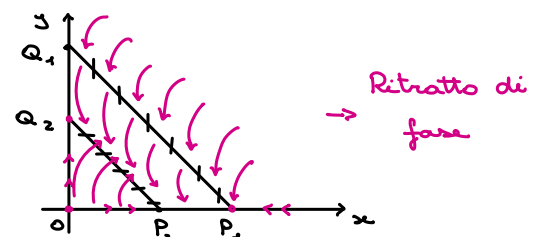
PUNTI STAZIONARI:  $\begin{cases} x'=0 \\ y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{k_1}{a_{12}} & (R_1) \\ y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{k_2}{a_{22}} & (R_2) \end{cases} \rightarrow \text{lo supporto } x \neq 0, y \neq 0$

Abbiamo vari casi: studiamo le orbite nel I quadrante (le popolazioni sono positive)

caso 1:  $R_1$  e  $R_2$  non si intersecano nel I quadrante

" $R_1 > R_2$ "  $Q_1 = (0, \frac{k_1}{a_{12}}), Q_2 = (0, \frac{k_2}{a_{22}})$

$P_1 = (\frac{k_1}{a_{11}}, 0), P_2 = (\frac{k_2}{a_{21}}, 0)$



$Q_2, P_1, O$  sono punti stazionari. Vediamo, la loro stabilità

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} k_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}y & k_2 - a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}$$

•  $J(O) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$  nodo instabile

•  $J(Q_2) = \begin{pmatrix} \overbrace{k_1 - \frac{a_{12}k_2}{a_{22}}}^{>0} & 0 \\ \underbrace{-\frac{a_{21}k_2}{a_{22}}}_{<0} & -k_2 \end{pmatrix}$  sella

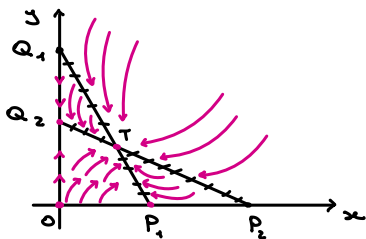
•  $J(P_1) = \begin{pmatrix} -k_1 & -\frac{a_{12}k_1}{a_{11}} \\ 0 & \underbrace{k_2 - \frac{a_{21}k_1}{a_{11}}}_{<0} \end{pmatrix}$  nodo (improprio) stabile  
 $\hookrightarrow \frac{k_2}{a_{21}} < \frac{k_1}{a_{11}} \text{ e } \frac{k_2}{a_{22}} < \frac{k_1}{a_{12}}$

" $R_2 > R_1$ " si fa analogamente

Se  $x(t_0) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  cioè la popolazione 2 si estingue

caso 2: le rette si intersecano in  $T$  con le seguenti condizioni:

$$\frac{k_2}{a_{22}} < \frac{k_1}{a_{12}}, \quad \frac{k_2}{a_{21}} > \frac{k_1}{a_{11}}$$



Punti stazionari:  $O, P_1, Q_2, T$

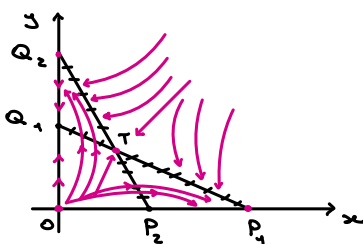
$J(O) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$  traiettorie uscenti nodo instabile

Dal disegno mi aspetto  $Q_2$  e  $P_1$  punti di sella,  $T$  nodo instabile (verificare)

Se  $x(t_0) > 0$  e  $y(t_0) > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T$ , cioè le popolazioni convivono

caso 3: le rette si intersecano in  $T$  con le seguenti condizioni:

$$\frac{k_2}{a_{22}} > \frac{k_1}{a_{12}}, \quad \frac{k_2}{a_{21}} < \frac{k_1}{a_{11}}$$



Punti stazionari:  $O, P_1, Q_2, T$

Ci aspettiamo  $P_1$  e  $Q_2$  nodi stabili e  $T$  sella (verificare)

$k_2 - \frac{a_{21}k_1}{a_{11}} < 0$  e  $k_1 - \frac{a_{12}k_2}{a_{22}} < 0 \Rightarrow P_1$  e  $Q_2$  sono nodi stabili

Genericamente  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  o  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ , cioè sopravvive una sola popolazione

## Modello preda - predatore (Volterra - Lotka):

$x(t)$  prede che hanno cibo e spazio abbondante

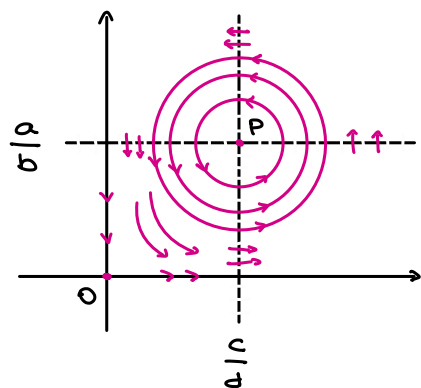
$y(t)$  predatori che in assenza di prede calano di numero

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy - \varepsilon x^2 & \text{con } a, b > 0, \varepsilon \geq 0 \\ y'(t) = -cy + dxy - \delta y^2 & \text{con } c, d > 0, \delta \geq 0 \end{cases}$$

Poniamo  $\varepsilon = 0 = \delta$  per semplicità; la differenza con il problema di prima è il segno di  $y'$

Cerco i punti stazionari:

$$\begin{cases} x' = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{a}{b} \\ y' = 0 \Leftrightarrow y = 0, x = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow P = \left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right), 0 \text{ punti stazionari}$$



$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

$$J(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{sella}$$

Ci aspettiamo P centro o fuoco:

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = -ac, \lambda = \pm i\sqrt{ac} \text{ è un centro} \rightarrow \text{non vale, però, il Teo di linearizzazione (gli autovalori sono immaginari puri)}$$

$\Rightarrow$  Cerco l' integrale primo:

$V(x, y)$  è un integrale primo del sistema se  $V(x(t), y(t))$  è costante in  $t$ , cioè

$$0 = \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \nabla V(x, y) \cdot (x', y') = V_x \cdot x' + V_y \cdot y' = V_x(a - by)x + V_y(-c + dx)y$$

$$\text{Divido per } xy \Rightarrow 0 = V_x \left( \frac{a}{y} - b \right) + V_y \left( -\frac{c}{x} + d \right)$$

$$\text{Posso provare a prendere } V_x = -\frac{c}{x} + d, V_y = b - \frac{a}{y}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & V = -c \log(x) + dx + f(y) \\ \textcircled{2} \quad & V = -a \log(y) + b(y) + g(x) \end{aligned}$$

$V(x, y) = dx + by - c \log(x) - a \log(y)$  è un integrale primo

$V$  è convessa,  $\lim_{x \rightarrow 0, +\infty} V(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0, +\infty} V(x, y) = +\infty$ ,  $V$  ha minimo in  $P \Rightarrow P$  centro

Esercizio 1: soluzione di un allievo

a) Calcolare  $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$  con  $F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, x y z)$ ,  $\Sigma = \{z = x^2 + y^2\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 4\}$

cilindro in  $\mathbb{R}^3$ 

1) Capiamo chi è  $\Sigma$ :  $z = x^2 + y^2$  è una parabola ruotata attorno all'asse  $z$  e la taglio in  $z = 4$  piano

2) Noto che  $\Sigma$  è la superficie esterna (senza il piano superiore)  $\rightarrow$  non è chiusa

3) Chiamo  $\Sigma' = \{z = 4, x^2 + y^2 \leq 4\} =$  disco superiore

4) Applico il Teorema della divergenza a  $\Sigma + \Sigma'$ :

$$\left( \int_{\Sigma} + \int_{\Sigma'} \right) (\text{rot } F \cdot \vec{n}) = \int_V \text{div Rot } F = 0$$

$V \leftarrow$  volume  $\rightarrow$  perché il rot ha divergenza nulla sempre

$$\int_{\Sigma'} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\Sigma'} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) = \int_{\Sigma'} 0 = 0$$

$\uparrow$  ridiretto verso  $z$   
 $\rightarrow$  del rot  $F$  resta solo la componente lungo  $z$

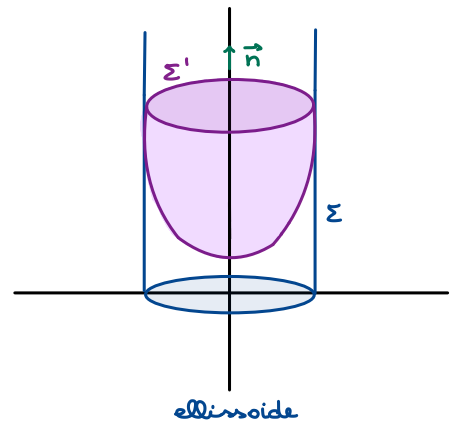
alternativamente (sol. del tutor)

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot \vec{t} \quad \partial \Sigma \text{ lo parametrizzo con } \gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow \partial \Sigma$$

$\downarrow$  tangente

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$



b) Calcolare  $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$  con  $F(x, y, z) = (e^{xy}, e^{xz}, x^2 z)$ ,  $\Sigma = \{4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\} \cap \{y < 0\}$

$$\Sigma' = \{x^2 + y^2 \leq 1, y = 0\}$$

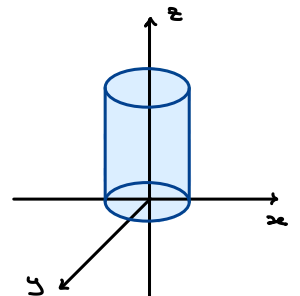
$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\partial \Sigma} F \cdot \vec{t} \quad \text{parametrizziamo } \partial \Sigma \text{ con } \gamma(t) \quad (\text{coordinate polari})$$

$$\text{Calcoliamo } \gamma'(t) \rightarrow \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

Esercizio 2:

Calcolare  $\int_{\Sigma} F \cdot \vec{t}$  con  $F(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$  e  $\Sigma = \{x + z = 5\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 9\}$

Oss: Un cilindro pieno tagliato da un piano è un'ellisse



$$\text{Usa Stokes: } \int_{\Sigma} F \cdot \vec{t} = \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\Sigma} (1, 0, -1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dA = \int_{\Sigma} \frac{1-x}{\sqrt{2}} dA = \frac{1}{\sqrt{2}} |\Sigma| = \frac{1}{\sqrt{2}} 3\sqrt{2} \cdot 3\pi = 3\pi$$

$\uparrow$  area  
 $\downarrow$  elem. d'area

Alternativamente: uso le coordinate polari:  $\Sigma = (p \cos \theta, p \sin \theta, 5 - p \cos \theta)$  con  $p \leq 3$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$



### Esercizio 3:

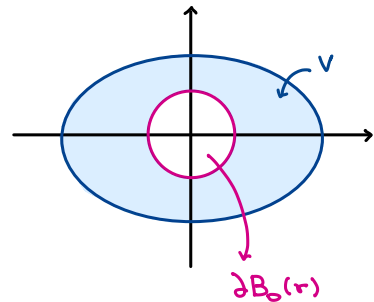
Calcolare  $\int_{\Sigma} F \cdot n$  con  $F = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$  e  $\Sigma = \{4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36\} = \text{ellissoide}$

$$\int_{\Sigma} F \cdot n = \oint_{\partial \Sigma} (F, \Sigma) = \int_{\partial \Sigma} \text{div} F = 0 \text{ perché si ha } \text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0, \text{ infatti:}$$
$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \left[ \underbrace{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}_{=0} \right] = 3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

⚠ F ha una singolarità nell'origine  $F = \frac{F^3}{|r|^3} \rightarrow$  prendo una sferetta di raggio piccolo attorno l'origine

$$\int_{\Sigma} F \cdot n = \int_{\partial B_0(r)} F \cdot n + \int_{\text{V}} \text{div} F$$

$\parallel$   $\text{V} \rightarrow$  volume racchiuso fra le 2 superfici  
 $\parallel$   
 $4\pi r^2 \cdot \frac{r}{r^3}$   $\parallel$   $0$   
 $\parallel$   
 $4\pi$



$\Rightarrow F \perp$  alla superficie

Esercizi per casa: 1) Calcolare  $\int_{\partial \Sigma} F \cdot t$ ,  $F = (y^2, 2xz, e^{xy})$ ,  $\Sigma = \{x^2 + y^2 \leq 16\} \cap \{z = 5\}$

2) Calcolare  $\int_{\Sigma} F \cdot n$ ,  $F = (\cos z + xy^2, xe^{-z}, \sin y + xz^2)$

$$\Sigma = \partial(\{z \leq 4\} \cap \{x^2 + y^2 \leq z\})$$

SISTEMI 2x2

$$(*) \begin{cases} x' = ax + by & x(t) \text{ con } x(0) = x_0 \\ y' = cx + dy & y(t) \text{ con } y(0) = y_0 \end{cases} \quad M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Prop: le due componenti  $(x(t), y(t))$  della sol. di  $(*)$  soddisfano l'eq. differenziale del II ordine  $u'' - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr } M} u' + \underbrace{(ad-bc)}_{\text{det } M} u = 0$

Dim: Basta derivare la 1<sup>a</sup> equazione:

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + by' = ax' + bcx + bdy & by &= x' - ax \\ &= ax' + bcx + d(x' - ax) \end{aligned}$$

$$x'' = -(a+d)x' + (ad-bc)x = 0 \quad (\text{si risolve come visto in Analisi I})$$

Idem per  $y' \Rightarrow$  Tesi

Esempio di applicazione:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Verificare che tutte le sol. sono limitate} \\ \textcircled{2} \text{ Se } \begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{matrix} \text{ determinare il punto pi\u00f9 vicino e quello pi\u00f9 lontano dall'origine} \end{array}$$

$x(t), y(t)$  sono soluzioni dell'equazione:  $u'' - \text{tr } M u' + \text{det } M u = 0$

$$\text{con } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr } M = 0, \text{det } M = 4 \Rightarrow u'' + 4u = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t \\ y(t) = \gamma \cos 2t + \delta \sin 2t \end{cases}$$

Che cosa sono  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ? Si trovano tramite le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &\Rightarrow \alpha \cos 0 + \cancel{\beta \sin 0} = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ x'(t) = -2\alpha \sin 2t + 2\beta \cos 2t &\Rightarrow x'(0) = 1 \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \\ y(0) = 0 &\Rightarrow \gamma \cos 0 + \cancel{\delta \sin 0} = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ y'(t) = 2\gamma \cos 2t &\Rightarrow y'(0) = 5 \Rightarrow 2\delta \cos 0 = 5 \Rightarrow \delta = \frac{5}{2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \\ y(t) = \frac{5}{2} \sin 2t \end{array} \right.$$

Es: Fare lo stesso calcolo trovando autovalori e autovettori della matrice

Es: Usare le espressioni trovate per determinare max e min di  $R(t) = x(t)^2 + y(t)^2$

Oss: Dato che la matrice è della forma  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$ , cioè a traccia nulla, il sistema (\*) è esatto e quindi la funzione  $U(x, y) = \frac{C}{2}x^2 - Axy - \frac{B}{2}y^2$  è costante sulle orbite, in questo caso:  $U(x, y) = \frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$ .

L'orbita in questione è  $\underbrace{\left\{ \frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{2} \right\}}_{\text{vincolo}} \hookrightarrow U(0,0)$  : è l'eq. di un'ellisse e il punto

di max/min distanza si trova con i moltiplicatori di Lagrange:  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(5x - y) \\ 2y = \lambda(-x + y) \end{cases} \begin{cases} \text{risolvere è equiv.} \\ \text{a trovare autovettori} \\ \text{e autovalori della mat.} \end{cases} \rightarrow \text{mi danno la direzione}$$

Oss:  $\frac{2}{\lambda}$  è autovalore di  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{2} \rightarrow \text{det. la lunghezza}$  Finire il calcolo per esercizio

### SISTEMI AUTONOMI:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $u' = F(u)$  (\*) sistema autonomo

Sia  $u: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$  è sol. massimale di (\*)

$\{u(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$  si dice traiettoria di (\*)

(una traiettoria ha in maniera naturale anche un'orientazione)

Oss 1: Se  $u$  è sol. di (\*) e  $c \in \mathbb{R}$ , anche  $v(t) = u(t-c)$  è sol. di (\*) (basta derivare)

Oss 2: Se  $u$  e  $\tilde{u}$  sono sol di (\*) e  $u(t_0) = \tilde{u}(t_1)$  allora  $\tilde{u}(t) = u(t + t_0 - t_1)$

Dim: Basta vedere che  $\tilde{u}$  e  $v(t) = u(t + t_0 - t_1)$  sono due sol. dello stesso pb di Cauchy

infatti sono entrambe sol. di (\*) e  $v(t_1) = u(t_1 + t_0 - t_1) = u(t_0) = \tilde{u}(t_1) \Rightarrow v \equiv \tilde{u}$

Cor: Se  $u$  è una sol non costante di (\*) tc  $u(t_0) = u(t_1) \Rightarrow u$  è periodica con per.  $T \neq 0$

Dim: Per l'oss. sopra:  $u(t) = u(t + t_0 - t_1) \quad \forall t$  ( $\Rightarrow u$  è def. su tutto  $\mathbb{R}$ )

Possiamo considerare  $t_0 - t_1 \in \mathcal{P} = \{p : u(t) = u(t+p)\} \neq \emptyset$

$\mathcal{P}$  è chiuso (se ho  $p_n \in \mathcal{P}$ ,  $p_n \rightarrow p_0 \Rightarrow p_0 \in \mathcal{P}$ )  
 $\mathcal{P}$  è un gruppo additivo  $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P} \text{ ha un el. min o } \mathcal{P} = \mathbb{R}$

Quindi  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap [0, +\infty)$  si ha che: (a)  $\inf \mathcal{P}^+ = 0 \Rightarrow \mathcal{P} = \mathbb{R}$  non può succedere (\*)

oppure (b)  $\inf \mathcal{P}^+ = \min \mathcal{P}^+ = p_0 > 0 \Rightarrow p_0$  è il periodo di  $u$  e  $t_0 - t_1 = k p_0$  con  $k \in \mathbb{Z}$

(\*) Se  $\inf \mathcal{P}^+ = 0$  allora  $\mathcal{P}$  è denso perché se prendo  $p \in \mathcal{P}$  t.c.  $0 < p < \frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow \exists k$  t.c.  $k p \in (a, b)$  prendo  $p$  qui  lo abbiamo visto ad Analisi 1 (lez 11-21/10/21)

Qui mi serve gruppo additivo: tutti gli elem. di  $\mathcal{P}$  della forma  $k p$  continuano a stare in  $\mathcal{P}$

Cor: a) Ogni orbita corrisponde a una famiglia di traslate di una stessa soluzione

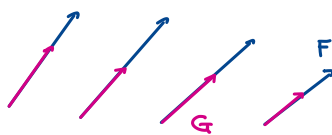
b) Due orbite si intersecano se coincidono (cioè se sono la stessa orbita)

$\Omega$  è foliato da orbite (cioè è un'unione disgiunta di orbite)

Cosa succede con le parametrizzazioni?

$$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$\lambda \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad \lambda > 0$$



$$G(x) = \lambda(x) F(x)$$

$$u' = F(u) \quad \boxed{\text{SF}}, \quad v' = G(v) \quad \boxed{\text{SG}}$$

Prop: I due sistemi hanno le medesime traiettorie

Dime: Mostro che se  $v$  è sol. di (SG) allora  $u(t) \doteq v(\psi(t))$  con  $\psi = \varphi^{-1}$  e

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \lambda(v(s)) ds; \text{ si ha che } u \text{ soddisfa (SF) con } u(0) = v(t_0)$$

$$\hookrightarrow \varphi'(s) = \lambda(v(s)) \text{ per le TFCI}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} [v(\psi(t))] = \underbrace{v'(\psi(t))}_{\text{SG}} \underbrace{\psi'(t)}_{\text{SF}} = \underbrace{\lambda(v(\psi(t))) F(v(\psi(t)))}_{\text{SG}} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \\ &= \lambda(\cancel{v(\psi(t))}) F(v(\psi(t))) \cdot \frac{1}{\lambda(\cancel{v(\psi(t))})} \Rightarrow u'(t) = F(u(t)) \end{aligned}$$

### DERIVATA DI UNA FUNZIONE LUNGO UNA TRAIETTORIA

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), E \in C^1(\Omega, \mathbb{R}), u' = F(u)$$

Definisco la derivata di  $E$  lungo la traiettoria del campo  $F$ :

$$\frac{d}{dt} (E(u(t))) = \nabla E(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla E(u(t)) \cdot F(u(t))$$

Definisco la derivata di  $E$  lungo le linee di flusso di  $F$ :

$$\dot{E}(x) \doteq \vec{\nabla} E(x) \cdot \vec{F}(x)$$

Def:  $E$  è un integrale del moto (per  $F$ ) se  $\dot{E} \equiv 0$

Esempio:  $\ddot{x} = -\nabla U \rightsquigarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -\nabla U(x) \end{cases}$

$$E(x, y) = \frac{|y|^2}{2} + U(x) \quad \text{con } U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\nabla U(x) \end{pmatrix}, \quad F: \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

$$\nabla(x, y) E \cdot F = \nabla U(x) \cdot y + y \cdot (-\nabla U(x)) = 0$$

Esempio 2 (Sistemi Hamiltoniani): più in generale

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \quad H \in C^1$$

$$\begin{cases} p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se un sistema ha questa forma, allora } H \\ \text{risulta essere un integrale primo} \end{array}$$

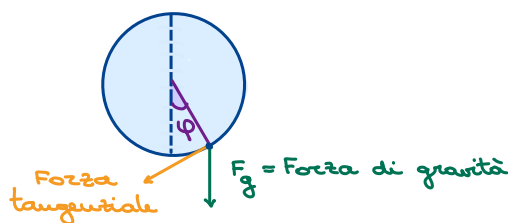
$$\dot{H}(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \cdot \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \leftarrow \text{generalizzazione dell'es. 1 e dei sistemi esatti}$$

Esempio di applicazione (esercizio):

$$\ddot{\varphi} = -K \sin \varphi \quad \text{pendolo rigido}$$

$$\varphi = q \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = p$$

$$(s) \quad \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -K \sin q \end{cases}$$



$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + K(1 - \cos q)$$

a) Verificare che  $H$  è un integrale primo per  $S$

b) Descrivere le curve di livello di  $H$  che corrispondono alle traiettorie di  $(s)$

MISURE DI HAUSDORFF

Def:  $k \in [0, +\infty)$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(E)$  si dice misura di Hausdorff  $k$ -dim. di  $E$ ,  
 dove  $\mathcal{H}_\delta^k(E) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^k : \text{diam}(E_i) \leq \delta \text{ e } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$  ↳ misura esterna

Oss:  $\omega_k \frac{\text{diam}(E_i)^k}{2^k}$  è l'area  $k$ -dim. del disco  $B_r \subseteq \mathbb{R}^k$  con  $r = \frac{\text{diam}(E_i)}{2}$

$\omega_k = |B_1| = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$  dove  $\Gamma$  è la  $\Gamma$  di Eulero ⚠ Stirling:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  vale anche per  $\Gamma$

Oss:  $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\delta_1}^k(E) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^k(E) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(E)$

Oss: Se imponiamo  $E_i$  palla  $\forall i$  otteniamo  $S^k(E) \geq \mathcal{H}^k(E)$  misura di Hausdorff sferica

Teo: 1)  $\mathcal{H}^k$  è una misura esterna in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , cioè  $\mathcal{H}^k|_{\mathcal{M}}$  è una misura di Borel

2)  $\mathcal{H}^0(E) = \#E$

3)  $\mathcal{H}^n|_{\mathcal{M}}$  è la misura di Lebesgue

4)  $k > k'$  e  $\mathcal{H}^k(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(E) = +\infty$  ( $\Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(E) < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) = 0$ )

In particolare  $\mathcal{H}^k(E) = 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall k > n$

5)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C$ -lip  $\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(E)) \leq C^k \mathcal{H}^k(E)$

Dim: 1A) Ⓐ monotonia per l'inclusione Ⓑ subaddittività } per essere una misura esterna devono valere entrambe le condizioni Ⓐ, Ⓑ

Ⓐ  $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \mathcal{H}_\delta^k(F) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) \leq \mathcal{H}^k(F)$

↳ perché un ricoprimento  $E_i$  di  $F$  è anche ricoprimento di  $E$

Ⓑ  $F_j \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(\bigcup_j F_j) \leq \sum_j \mathcal{H}_\delta^k(F_j)$

↳ è l'inf

$\{E_{ij}\}$  ricoprimento di  $F_j \Rightarrow \{E_{ij}\}$  ricoprimento di  $\bigcup_j F_j$

1B)  $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  ( $\mathcal{M}$  contiene i Boreliani)

a) addittività su insiemi distanti:

$\text{dist}(E, F) > 0$ ,  $\delta < \frac{1}{2} \text{dist}(E, F) \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^k(E) + \mathcal{H}_\delta^k(F) \Rightarrow \mathcal{H}^k(E \cup F) = \mathcal{H}^k(E) + \mathcal{H}^k(F)$

b) usando questo si può dimostrare che vale Caratheodory per i chiusi (i chiusi sono mis.)

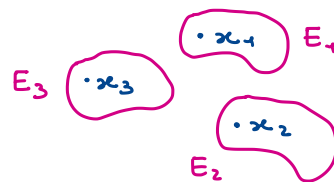
$\mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}^k(E \cap B) + \mathcal{H}^k(E \setminus B) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ chiuso} \Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \{\text{chiusi di } \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

2) È sufficiente verificare, per la monotonia di  $H^0$ , che  $H^0\left(\bigcup_{i=1}^N x_i\right) = N$  se  $\delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$

Sia  $\{E_i\}_{i \in J}$  un ricoprimento:

$$H_\delta^0\left(\bigcup_i x_i\right) = \inf \left\{ \sum_{i \in J} \text{diam}(E_i)^0 : \{E_i\}_{i \in J} \text{ ricoprimento di } \bigcup_i x_i \right\}$$

$$= \inf \#J = N \quad \text{se } \delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x_i - x_j| \quad (\text{se } \delta \text{ è piccolo})$$



3)  $H^n|_M$  è una misura di Borel invariante per traslazione  $\Rightarrow H^n|_{B(\mathbb{R}^n)} = c \cdot \mathcal{L} \rightarrow$  misura di Lebesgue  $\Rightarrow$  uso le sue prop.

Basta verificare che  $H^n(B_1) = |B_1| = \omega_n$  vedi: Lezione 34 - 15/12/2023

4)  $k > k'$   $E \subseteq \mathbb{R}^n$   $\delta > 0$ ,  $\{E_i\}_i$  ricoprimento di  $E$  con  $\text{diam}(E_i) < \delta \quad \forall i$

$$\Rightarrow \text{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \text{diam}(E_i)^{k'} \Rightarrow H_\delta^k(E) < \underbrace{\frac{\omega_n}{2^k} \cdot \frac{2^{k'}}{\omega_{n'}}}_{C_{k,k'} > 0} \cdot \delta^{k-k'} H_{\delta}^{k'}(E)$$

$$\Rightarrow H_\delta^{k'}(E) > \frac{H_\delta^k(E)}{C_{k,k'} \cdot \delta^{k-k'}} \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^{k'}(E) > \frac{H^k(E)}{C_{k,k'}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{k-k'}} = +\infty$$

5)  $f$   $C$ -lip,  $\{E_i\}_i$  ricoprimento di  $E \Rightarrow f(E_i)$  ricoprimento di  $f(E)$  e  $\text{diam}(f(E_i)) \leq C \text{diam}(E_i) \quad \forall i$

$$\Rightarrow H_\delta^k(f(E)) \leq \frac{\omega_n}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(f(E_i))^k : E_i \text{ ricoprimento di } E \right\} \leq$$

$$\leq C^k \frac{\omega_n}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(E_i)^k : E_i \text{ ricoprimento di } E \right\} \xrightarrow[\text{al limite}]{\text{passando}} H_\delta^k(f(E)) \leq C^k H_\delta^k(E)$$

Oss:  $H^k$  non è di Radon se  $k < n$ , cioè non è finita sui compatti, in particolare non è  $\sigma$ -finita.

Poiché non è  $\sigma$ -finita, abbiamo problemi per i teoremi di passaggio al limite.

Tuttavia, passando a sottoinsiemi in cui è  $\sigma$ -finita, cioè restringendola, posso farli valere

Possiamo comunque parlare di integrazione (ma non tutte le proprietà valgono)

### INTEGRAZIONE:

Prendiamo  $E \subseteq B(\mathbb{R}^n)$   $\sigma$ -finita per  $H^k$ , cioè  $H^k|_E$  è  $\sigma$ -finita e  $f$  è  $H^k|_E$  misurabile

(ad esempio  $f$  continua e  $f$  Boreliana va bene) definiamo,  $\int_E f dH^k := \int_{\mathbb{R}^n} f dH^k|_E$

Es:  $H^k(E) = \int_E 1 dH^k$  è una generalizzazione degli integrali di superficie fatti con la parametriz.

$\hookrightarrow$  serve per i teoremi

Teorema:  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  superficie compatta  $C^1$   $k$ -dimensionale ( $0 < k < n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) di passaggi al limite (non per i calcoli)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\Rightarrow \Sigma$  è  $\sigma$ -finita per  $H^k$  e  $\int_\Sigma f = \int_\Sigma f dH^k$

$\hookrightarrow$  def. con le param. di  $\Sigma$

In particolare  $\int_\Sigma 1 = H^k(\Sigma)$

Ricorda: Abbiamo definito una superficie compatta  $C^1$  in 3 modi:

- 1) Se può essere localmente scritta come grafico di una funzione  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
- 2) Se è localmente immagine di una funzione di parametrizzazione con  $\text{rank } J_p = k$
- 3) Se la possiamo scrivere localmente come luogo di zeri di una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  con la condizione che lo Jacobiano abbia rango massimo (Teorema delle funzioni implicite)

#### DIMENSIONE DI HAUSDORFF:

Def:  $E \subseteq \mathbb{R}^n$   $\dim_H(E) = \inf \{k > 0 : \mathcal{H}^k(E) = 0\} \in [0, n]$  dimensione di Hausdorff di E

Oss: Per il Teo precedente, se  $\Sigma$  è  $k$ -imp.  $C^1$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow \dim_H(\Sigma) = k$

Oss:  $\exists$  insiemi  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  t.c.  $\dim_H(E) \notin \mathbb{N}$

Es:  $C \subseteq [0, 1]$  insieme di Cantor,  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  curva di Koch (sono esempi di insiemi frattali)

Vediamo il caso di  $C \subseteq [0, 1]$ . C verifica  $C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(C) = \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) + \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) = \frac{2}{3^k} \mathcal{H}^k(C)$$

$$\text{Se } \mathcal{H}^k(C) \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{2}{3^k} = 1 \Rightarrow k = \frac{\log 2}{\log 3} \in (0, 1)$$

$$\text{Devo verificare } \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) \in (0, +\infty) \Rightarrow \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$$



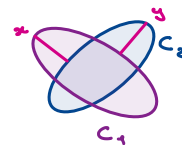
INSIEMI FRATTALI

$K(\mathbb{R}^n) = \{K \subseteq \mathbb{R}^n : K \text{ compatto}, K \neq \emptyset\}$  su cui definiamo una metrica  $d_H$  ("somiaglia" a  $l_\infty$ )

$d_H : K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$  distanza di Hausdorff

$$d_H(C_1, C_2) = \max\left(\max_{x \in C_1} d(x, C_2), \max_{y \in C_2} d(y, C_1)\right) \text{ dove } d(x, C) = \min_{y \in C} |x - y|$$

esempio:



Teo:  $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$  è uno spazio metrico completo

Dimo: 1)  $d_H$  è una distanza

a)  $d_H(C_1, C_2) = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2$  : se  $\max_x d(x, C_2) = 0 \Rightarrow C_1 \subseteq C_2$ , idem per  $\supseteq \Rightarrow C_1 = C_2$

b)  $d_H(C_1, C_2) = d_H(C_2, C_1)$  : ovvio,  $d_H$  è simmetrica

c) disuguaglianza triangolare :  $C_1, C_2, C_3 \in K(\mathbb{R}^n)$

$$\forall x \in C_1 \quad \exists y \in C_2 : |x - y| \leq d_H(C_1, C_2)$$

$$\text{e } \exists z \in C_3 : |y - z| \leq d_H(C_2, C_3)$$

$$\Rightarrow |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3) \Rightarrow \text{possiamo fare il max}$$

$$\Rightarrow \max_{x \in C_1} d(x, C_3) \leq \max(d_H(C_1, C_2) + d_H(C_2, C_3))$$

2) Completezza : sia  $C_k$  successione di Cauchy in  $K(\mathbb{R}^n)$

$$\text{A meno di sottoseq. possiamo supporre } d_H(C_k, C_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow d_H(C_k, C_n) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k} \quad \forall n > k$$

Definiamo  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_k \in C_k \text{ con } x_k \rightarrow x\}$  limite di Kuratowski dei  $C_k$  (limite puntuale)

$\hookrightarrow$  nei compatti  
è lim. uniforme

Dobbiamo verificare  $C \in K(\mathbb{R}^n)$  e  $d_H(C_k, C) \rightarrow 0$

⊙  $C \neq \emptyset$ , infatti  $d_H(C_k, C_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \exists x_k \in C_k : |x_k - x_{k+1}| \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow x_k$  di Cauchy

$$\Rightarrow x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \in C$$

⊙  $\forall x \in C \quad \exists x_k \in C_k \text{ t.c. } |x - x_k| \leq \frac{1}{2^k}$  (sto mostrando che  $d_H(C_k, C) \rightarrow 0$ )

$$\text{Infatti } x = \lim_n x_n, \quad x_n \in C_n, \text{ selgo } n > k : |x - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$d_H(C_k, C_{n-1}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \exists x_{n-1} \in C_{n-1} : |x_{n-1} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\exists x_j \in C_j \quad k \leq j \leq n-1 \quad |x_j - x_{j+1}| \leq \frac{1}{2^j} \Rightarrow |x_k - x| \leq |x_k - x_n| + \sum_{j=k}^{n-1} |x_j - x_{j+1}| \leq \frac{2}{2^k} + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow d(x, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \max_{x \in C} d(x, C_k) \leq \frac{1}{2^k}$$

○ Viceversa, dato  $y_k \in C_k \exists x_k \in C : |y_k - x_k| \leq \frac{1}{2^k}$

Infatti, come sopra  $\exists y_j \in C_j : |y_j - y_{j+1}| \leq \frac{1}{2^j} \Rightarrow y_j \rightarrow x_k \in \mathbb{R}^n$  e  $|x_k - y_k| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |y_j - y_{j+1}| \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \max_{y \in C_k} d(y, C) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow d(C, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

○ Voglio vedere che  $C$  è compatto:

-  $C$  è limitato: fisso  $k$  e considero  $n > k \Rightarrow d_H(C_n, C_k) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \forall x_n \in C_n \quad d(x_n, C_k) \leq \frac{1}{2^k} ; \text{ Se } x \in C \Rightarrow x = \lim_n x_n \text{ con } x_n \in C_n$$

$$\Rightarrow d(x, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow C \subseteq \{x+y : x \in C_k, y \in \overline{B_{\frac{1}{2^k}}}\} = C_k + \overline{B_{\frac{1}{2^k}}} \text{ limitato (è compatto)}$$

-  $C$  è chiuso:  $x_k \in C, x \in \mathbb{R}^n, x = \lim_k x_k$  poiché  $d_H(C, C_k) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow d(x_k, C_k) \leq \frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \exists y_k \in C^k : |x_k - y_k| \leq \frac{1}{2^k}$$

$$|y_k - x| \leq |x_k - x| + |x_k - y_k| \leq |x_k - x| + \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, x = \lim_k y_k, y_k \in C_k \Rightarrow x \in C$$

Oss:  $M$  sp. metrico completo  $\Rightarrow (K(M), d_H)$  è metrico completo

Oss: Se  $T$  è un'isometria (cioè matrice con  $\det M = \pm 1$  composta una traslazione) di  $\mathbb{R}^n$

$$\tilde{T} : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n), \quad \tilde{T}(K) = \bigcup_{x \in K} T(x) \text{ è un'isometria, infatti:}$$

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \quad \forall x \in C_1, y \in C_2 \Rightarrow d_H(\tilde{T}(C_1), \tilde{T}(C_2)) = d_H(C_1, C_2)$$

Teorema:  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $1 \leq i \leq N$ , è una contrazione, cioè:

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \lambda_i |x - y|, \quad \lambda_i \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow \exists! C \in K(\mathbb{R}^n) : C = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C), \text{ dove } \varphi_i(C) = \bigcup_{x \in C} \varphi_i(x)$$

Dim: Osserviamo che  $T(C) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C)$  è una contrazione in  $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$

Infatti, poniamo  $\lambda = \max_i \lambda_i \in (0, 1)$  e consideriamo  $C_1, C_2 \in K(\mathbb{R}^n)$ .

$$\text{Per } x \in T(C_1) = \bigcup_i \varphi_i(C_i) \Rightarrow x \in \varphi_j(C_1) \text{ per un certo } j, \text{ cioè } x = \varphi_j(\bar{x}), \bar{x} \in C_1,$$

$$\exists \bar{y} \in C_2 \text{ con } |\bar{x} - \bar{y}| \leq d_H(C_1, C_2) \text{ pongo } y = \varphi_j(\bar{y}) \in T(C_2)$$

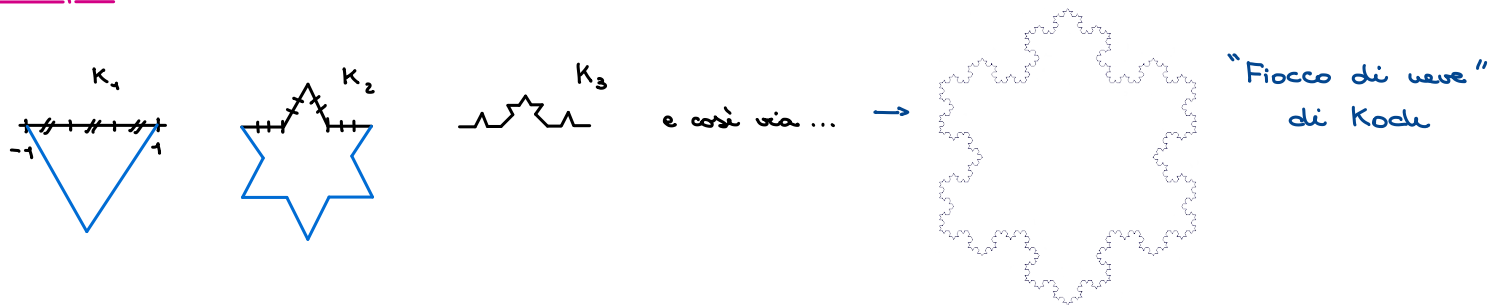
$$|x - y| = |\varphi_j(\bar{x}) - \varphi_j(\bar{y})| \leq \lambda |\bar{x} - \bar{y}| \leq \lambda d_H(C_1, C_2) \Rightarrow d(x, T(C_2)) \leq |x - y| \leq \lambda d_H(C_1, C_2)$$

$$\text{per simmetria } \forall y \in T(C_2) \quad d(y, T(C_1)) \leq \lambda d_H(C_1, C_2) \Rightarrow d_H(T(C_1), T(C_2)) \leq \lambda d_H(C_1, C_2)$$

Per il Teorema delle contrazioni:  $\exists! C \in K(\mathbb{R}^n)$  t.c.  $C = T(C)$

□

## Esempio (curva di Koch):



$$K = \lim_n K_n \text{ curva di Koch, } L(K_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L(K_1) \xrightarrow{n} +\infty$$

$$K_n \in K(\mathbb{R}^n), \quad K_{n+1} = T(K_n) \quad \text{omotetia di } \frac{1}{3} \text{ e lo compongo con 4 isometrie}$$

$$T(C) = \bigcup_{i=1}^4 \varphi_i(C), \quad \varphi_i(x) = T_i\left(\frac{x}{3}\right) \quad T_i \text{ isometria, } \varphi_i \text{ sono contrazioni con } \lambda_i = \frac{1}{3}$$

Per il teorema  $\exists! K : K = T(K)$  e  $\forall K_1 \in K(\mathbb{R}^n), \quad T^{(n)}(K_1) \xrightarrow{n} K$  in  $d_H$

◦ Quanto è  $\dim_H(K)$ ?

$$\text{Calcoliamo } H^j(K) = H^j(T(K)) = H^j\left(\bigcup_i \varphi_i(K)\right) = \sum_i H^j(\varphi_i(K)) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^j H^j(K)$$

$$\text{Se } H^j(K) \in (0, +\infty) \text{ per } j = \dim_H(K) \Rightarrow 1 = \frac{4}{3^j}, \quad j = \dim_H(K) = \frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2)$$

Nota (sulle contrazioni):

Una tipica contrazione è ad es:  $x \mapsto \frac{x}{2}$  ma l'unico pt. fisso è l'origine, dunque non ottengo info interess.

Se ad esempio prendiamo  $x \mapsto \frac{x}{2} + \text{"traslazione"} + \text{"rotazione"}$  mi compatti resterà una contrazione, e come unico punto fisso otterrò un'insieme non banale, dunque genero frattali.

È importante è che ci sia una contrazione (come ad es.  $x \mapsto \frac{x}{n}$ ) composta ad un'isometria.

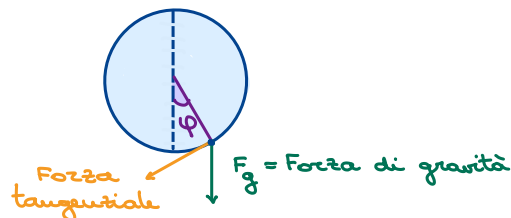
STABILITÀEsempio di sistema Hamiltoniano:

$$\varphi'' = -K \sin \varphi \quad \text{pendolo rigido}$$

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \quad K > 0$$

$$\varphi = q \quad \text{e} \quad \varphi' = p$$

$$(S) \quad \begin{cases} q' = p \\ p' = -K \sin q \end{cases}$$



$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + K(1 - \cos q)$$

a) Verificare che  $H$  è un integrale primo per  $S$

b) Descrivere le curve di livello di  $H$  che corrispondono alle traiettorie di  $(S)$

a) Il sistema rispetta  $\begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow H$  è costante sulle traiettorie

b)  $H(p(t), q(t)) \equiv H_0 \rightarrow$  studio l'intervallo  $[-\pi, \pi]$

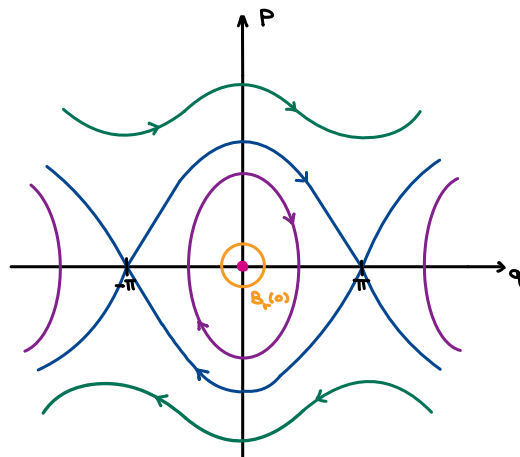
$$\frac{1}{2} p^2 = H_0 - K(1 - \cos q) \Rightarrow p = \pm \sqrt{2(H_0 - K + K \cos q)}$$

Se  $H_0 > 2K \Rightarrow H_0 - K > K$

Se  $H_0 = 2K \Rightarrow p = \pm \sqrt{2K(1 + \cos q)}$

Se  $0 < H_0 < 2K \Rightarrow H_0 - K < K$

Se  $H_0 = 0 \Rightarrow p = \pm \sqrt{2K(\cos q - 1)}$



Oss: Si può dimostrare che la curva in blu è una traiettoria che connette due punti d'equilibrio

!  $q$  rappresenta un angolo, quindi se mi sposto di  $2\pi$  torno al punto iniziale

Oss: Sono curve che si avvolgono

Quando le curve si chiudono ottengo una traiettoria molto simile a quella del pendolo

Cosa succede se perturbiamo il sistema?  $\rightarrow$  aggiungiamo un attrito

$$\varphi'' = -K \sin \varphi - \varepsilon \varphi \rightarrow \text{Se } \varepsilon > 0 \text{ il sistema non è più Hamiltoniano}$$

Si ha, però, che  $H'(p, q) = -\varepsilon p^2 < 0 \rightarrow$  le curve vanno a finire tutte nell'origine

Oss:  $H$  è una funzione di Lyapunov per il sistema perturbato con  $\varepsilon > 0$  (dopo vedremo la def.)

In generale:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Il sistema è autonomo  
(non dipende dal tempo)

$$(S) \begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad \text{la soluzione di (S) la chiamiamo } \varphi_\xi(t)$$

$\xi$  tiene traccia della cond. iniziale  
 $t$  è la variabile temporale

Def:  $\xi_0$  è punto di equilibrio se  $F(\xi_0) = 0$

nell'es. di prima (con  $\varepsilon = 0$ ),  $\xi_0 = 0$  è pt. d'eq. stabile perché  
comunque io finisco un raggio non esco da  $R$ , ma non è as. stab.  
con  $\varepsilon > 0$  si

$\xi_0$  è punto di equilibrio stabile se  $\forall R > 0 \exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0) \forall t > 0 \quad |\varphi_\xi(t) - \xi_0| < R$

$\xi_0$  è punto di equilibrio instabile se non è stabile

$\hookrightarrow \forall R$  se parto vicino  $\xi_0$  per tutti i tempi  
non mi allontanano troppo da  $\xi_0$

$\xi_0$  è pt di equilibrio asintoticamente stabile  $\Leftrightarrow \xi_0$  è stabile e  $\exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0), \varphi_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_0$

Oss: Se  $\xi_0$  è pt d'equilibrio stabile,  $\varphi_\xi(t)$  è definita su  $[0, +\infty) \rightarrow$  deve rimanere su un compatto

Es: Verificare che il sistema con attrito ( $\varepsilon > 0$ ),  $\xi_0$  è asintoticamente stabile  $\rightarrow$  non è immediata  
conseguenza ma si possono usare le idee

Def: Dico che  $\varphi_\xi$  soluzione di (S) è stabile  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall R > 0 \exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0)$  la funzione

$\varphi_\xi(t)$  è definita  $\forall t$  e  $|\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| < R \quad \forall t > 0$

Def:  $\varphi_{\xi_0}$  è asintoticamente stabile  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi_{\xi_0}$  è stabile e  $\exists r > 0 : \forall \xi \in B_r(\xi_0)$  si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| = 0$

$\hookrightarrow$  Cioè, una sol. è as. stab. se tutte le sol. che partono con un dato piccolo sono asint. a questo

**!** Il periodo delle curve nel caso senza attrito cambia se ci spostiamo da una curva all'altra

Quando siamo vicini alla sol. staz. i periodi sono quasi cost. e sono quelli del pendolo linearizzato,  
però quando ci avviciniamo alle sol. in blu che corrispondono due eq. instabili abbiamo periodi sempre  
più grandi: si potrebbe dimostrare che il periodo cresce mano a mano che aumentiamo l'energia.

vuol dire che i punti girano su traiettorie vicine ma tendono a disallinearsi, cioè hanno velocità  
angolari diverse. Questo compromette la stabilità

per come l'orbita è parametrizzata

Oss: le traiettorie periodiche non costanti del pendolo senza attrito non sono stabili

Def: Sia  $\xi_0$  equilibrio asintoticamente stabile,  $\Omega_{\xi_0} \doteq \{ \xi \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_\xi(t) = \xi_0 \}$

$\uparrow$  BACINO DI ATTRAZIONE DI  $\xi_0$

Oss:  $\Omega_{\xi_0}$  è intorno (non vuoto) di  $\xi_0$  (as. stabile  $\Rightarrow \exists r > 0 : \Omega_{\xi_0} \supset B_r(\xi_0)$ )

Oss:  $\Omega_{\xi_0}$  è aperto

Dim. (Oss<sub>1</sub>):  $\xi_1 \in \Omega_{\xi_0}$ ,  $\varphi_{\xi_1}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_0 \Rightarrow \exists t_0 : \varphi_{\xi_1}(t_0) \in B_r(\xi_0)$  e chiamiamo  $\phi(x) := \varphi_x(t_0)$   
 $\hookrightarrow \varphi$  con dato  $x$  val. in  $t_0$

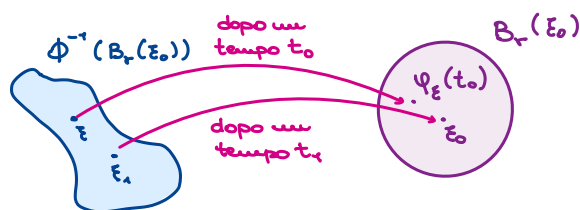
$\phi$  è continua (dip. continua dal dato iniziale)

$\xi_1 \in \phi^{-1}(B_r(\xi_0))$  per definizione  
 $\hookrightarrow$  aperto perché controimmagine di un aperto

Sia  $\xi \in \phi^{-1}(B_r(\xi_0)) \subseteq \Omega_{\xi_0}$ ; osservo che  $\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{\varphi_{\xi}(t_0)}(t - t_0)$   
 $\downarrow$   
 entrambe sono soluzioni di  $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(t_0) = \varphi_{\xi}(t_0) \end{cases}$

Sono soluzioni di Cauchy  $\Rightarrow$  coincidono:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\xi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\varphi_{\xi}(t_0)}(t - t_0) = \xi_0$   
 $\uparrow \varphi_{\xi}(t_0) \in B_r(\xi_0)$

Graficamente:



$\xi_0$  è il punto di equilibrio,  $\xi$  e  $\xi_1$  i punti iniziali

Qualsiasi punto io prenda vado a finire nella palla di centro  $\xi_0$ , cioè "vicino" il punto d'equilibrio

Nello stesso "setting" di sopra,  $\Omega$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $\xi_0 \in \Omega$ ,  $F(\xi_0) = 0$ , (S)  $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases}$

Def:  $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  è funzione di **LYAPUNOV** per (S) se e solo se:

- (i)  $V(\xi_0) = 0$ ;  $V(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$
  - (ii)  $\dot{V}(x) (\doteq \nabla V(x) \cdot F(x)) \leq 0$
- $\left. \begin{array}{l} \text{serve a provare la stabilità di un punto d'equilibrio;} \\ \rightarrow \text{le hp sono globali, ma se mi interessa solo quello che} \\ \text{succede attorno a un pt d'eq. posso restringere la funzione} \end{array} \right\}$

Prop: Se  $\xi_0$  equilibrio ammette una funzione di Lyapunov allora è stabile

Inoltre se  $\xi_0$  soddisfa (ii')  $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \xi_0$ , allora  $\xi_0$  è asintoticamente stabile

Oss: Nell'es. 1 (con o senza attrito) la funzione  $H$  è di Lyapunov (sempre).

Attenzione però: in questo caso non si annulla su un punto, ma su una retta,  $p=0$

In questi casi si possono usare le idee della dim. della prop. ma non direttamente il risultato  
 $\hookrightarrow$  in questi casi non vale

Dim. (Prop): SPG  $F_0 = 0$ ,  $R > 0$ ,  $B_R(0) \subset \Omega$  e prendo  $m = \min_{|x|=R} V(x) = V(x_0) > 0$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$   
 $\hookrightarrow$  a meno di trasl.  $\hookrightarrow$  sottolivello di  $V$

Fisso  $\varepsilon$ :  $0 < \varepsilon < m$ ,  $\exists r > 0$ :  $B_r(0) \subset \{x : V(x) < \varepsilon\}$ . Fisso  $\xi \in B_r(0) \rightarrow$  voglio vedere che non esco dalla palla

Definisco  $\psi(t) := V(\varphi_{\xi}(t)) \Rightarrow \psi'(t) = \nabla V(\varphi_{\xi}(t)) \cdot \varphi'_{\xi}(t) = \nabla V \cdot F = \dot{V}(\varphi_{\xi}(t)) \leq 0$

$\Rightarrow \psi$  è debolmente decrescente,  $\psi(t) < \varepsilon \quad \forall t \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \in \{x : V(x) < \varepsilon\}$

Dunque  $\varphi_{\xi}(t)$  non attraversa mai  $\{|x|=R\} \rightarrow$  qui la funzione vale più di  $m > \varepsilon$

Abbiamo dimostrato la stabilità; vediamo ora la stabilità asintotica: ( $\dot{V} < 0$ )

Scelgo  $\xi \in B_r(0) \subseteq \Omega$ . Definisco  $\Psi(t)$  come sopra:  $\Psi(t) = V(\varphi_\xi(t)) \Rightarrow \Psi' < 0$  e  $\Psi \geq 0$

$c_0 = \inf_{t \geq 0} \Psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t)$ . Allora vedremo che:

A)  $c_0$  non può essere  $> 0$

B) Se  $c_0 = 0 \Rightarrow \varphi_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Dim (A): Se per assurdo  $c_0 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset \{V < c_0\}$

$\uparrow$  aperto contenente l'origine

$\varphi(t) > c_0 \Rightarrow \varphi_\xi(t) \notin B_\delta(0)$ . Chiamo  $\sigma := \max_{\delta \leq |x| \leq r} \dot{V}(x) < 0$

$\uparrow$  per (ii)'

$\Psi'(t) = \dot{V}(\varphi_\xi(t)) < \sigma \Rightarrow \Psi(t) \leq \Psi(0) + \sigma t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty \Rightarrow$  contraddice  $\Psi(t) \geq c_0 \forall t \geq 0$   $\nexists$  (A)  $\square$

(B)  $\forall \delta > 0 \exists c_\delta > 0 : \text{se } \delta \leq |x| \leq r \Rightarrow V(x) \geq c_\delta$

Il fatto che  $\Psi(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists t_0 : \varphi_\xi(t) \in B_\delta(0) \forall t \geq t_0$  (B)  $\square$

Prop:  $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad F(\xi_0) = 0 \rightarrow \xi_0 \text{ pt. d'equilibrio}$

Se  $\exists W \in C^1(\Omega)$  tale che:  $(W1) \quad W(\xi_0) = 0 \text{ e } \xi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_0, W(\xi_k) > 0$   
 $(W2) \quad \dot{W}(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$   $\Rightarrow$  Allora  $\xi_0$  è instabile

Dim: SPG  $\xi_0 = 0$ . Sia  $R > 0$  fissato, mostro che  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi_{\xi_k}(t)$  esce da  $B_R(0)$  per qualche  $t > 0$

$\dot{W} > 0 \Rightarrow W(\varphi_{\xi_k}(t))$  è crescente in  $t$

$W(0) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : W(x) < W(\xi_k) \quad \forall x \in B_\delta(0) \Rightarrow \varphi_{\xi_k}(t) \notin B_\delta(0)$  perché la  $f.$  è sempre crescente

Adesso, chiamo  $\sigma := \min_{\delta \leq |x| \leq R} \dot{W}(x) > 0$  e si ha  $W(\varphi_{\xi_k}(t)) \geq W(\xi_k) + \sigma t$  deve crescere almeno linearmente.  
 $\hookrightarrow$  fin tanto che  $\varphi_{\xi_k}(t) \in B_r(0)$

$\Rightarrow$  non ci sta per sempre perché  $W$  ammette max su  $\overline{B_R(0)}$   $\square$

Es: Sia  $u' = Au$  (\*) con  $A \in M(n \times n)$ ,  $A$  invertibile

a) Quando 0 è equilibrio stabile?

b) Quando 0 è asintoticamente stabile?

Teo:  $u' = F(u)$ ,  $F \in C^1$ ,  $F(\xi_0) = 0$ ,  $DF(\xi_0) = A$ ,  $\lambda_i$  autov. di  $A$

(1) Se  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow 0$  è equilibrio as. stabile

(2) Se  $\exists i_0 : \operatorname{Re}(\lambda_{i_0}) > 0 \Rightarrow 0$  è instabile

l'es. precedente porta a

questa conclusione

lo dimostreremo domani

Riassunto di questo visto ieri:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

$$\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad \text{chiamo } \varphi_{\xi}(t) \text{ la sol. del sistema, } F(\xi_0) = 0 \text{ pt. d'equilibrio}$$

**STABILITÀ** Se  $\exists V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ :

i)  $V(\xi_0) = 0$ ;  $V(x) > 0$  se  $x \neq \xi_0$

ii)  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x$  con  $\dot{V}(x) \doteq \nabla V(x) \cdot F(x)$

Allora  $\xi_0$  è stabile. Se inoltre vale (ii)'  $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \xi_0$  allora  $\xi_0$  è as. stabile

**INSTABILITÀ** Se  $\exists W \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ :

i)  $W(\xi_0) = 0$ ,  $\exists \xi_k \rightarrow \xi_0$ ,  $W(\xi_k) > 0$

ii)  $\dot{W} > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$

Allora  $\xi_0$  non è stabile

**TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE**  $\rightarrow$  forma più debole di Hartman-Grobman (non dim.)

$u' = F(u)$ ,  $F(\xi_0) = 0$ ,  $DF(\xi_0) \doteq A$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  autovalori di  $A$ , allora:

1) Se  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow \xi_0$  è asintoticamente stabile

2) Se  $\exists \lambda_k: \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \Rightarrow \xi_0$  non è stabile

**Esempio (Toruismo al pendolo):** Asintotica stabilità di  $\underline{0}$  per il pendolo con attrito

$$(S_{\varepsilon}) \begin{cases} p' = -\sin q - \varepsilon p \quad \text{con } \varepsilon > 0 \\ q' = p \end{cases}$$

$V(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + (1 - \cos q)$  funzione di Lyapunov per  $S_{\varepsilon}$  se  $\varepsilon > 0$

Possiamo linearizzare:  $\dot{V}(p, q) = -\varepsilon p^2$

$$F(p, q) = \begin{pmatrix} -\sin q - \varepsilon p \\ p \end{pmatrix} \rightarrow DF(p, q) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -\cos q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} -\varepsilon - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon + \lambda)\lambda + 1 = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1$$



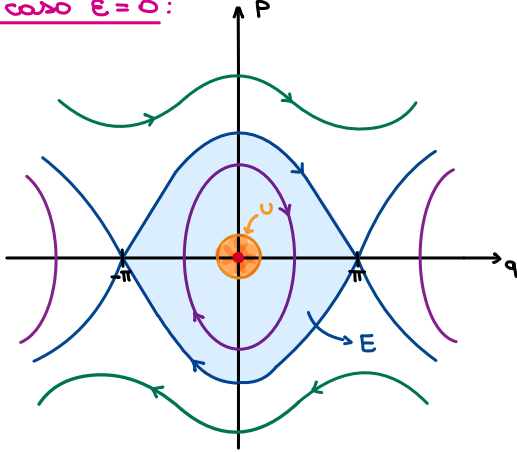
Caso  $\varepsilon=0$ :  $\lambda = \pm i \rightarrow$  per questo non è as. stabile

Caso  $\varepsilon=2$ :  $\lambda_{\pm} = -1$ ,  $\lambda_{\pm} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$  con  $\varepsilon > 0 \rightarrow$  parte reale negativa

Caso  $0 < \varepsilon < 2$ :  $\lambda_{\pm} = \frac{-\varepsilon \pm i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2} \rightarrow$  parte reale negativa:  $\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = -\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0$  è as. stabile

Caso  $\varepsilon > 2$ : ho un blocco reale di Jordan

Nel caso  $\varepsilon=0$ :



di tipo globale

Domanda: Chi è il bacino d'attrazione di 0?

Non può succedere per Poincaré-Bendixon

Teo (P-B):  $K$  compatto invariante, cioè se  
def

$\xi \in K, \varphi_{\xi}(t) \in K \forall t \geq 0$ , e  $K \cap \{F=0\} = \{0\}$   
 $\hookrightarrow$  non cont. punti staz.

$\Rightarrow K$  contiene un'orbita periodica

Se parto dall'intorno  $U$  ci sarà un attrito e finiro nell'origine

Oss: All'interno della regione blu  $E$  non può esistere nessuna orbita periodica a parte il punto stazionario perché un'orbita periodica dovrebbe essere contenuta dove le  $p$  sono nulle

Per quanto detto quindi,  $\{p=0\}$  non può contenere orbite del sistema (a parte le cost.)  
e un'orbita periodica non può entrare nella regione  $\{p \neq 0\}$ .

Dobbiamo cercare un  $K$  compatto invariante e tramite P-B un assurdo:

Prendo  $\xi \in \{V(x) < V(0, \pi)\} = E$ . Per renderlo compatto ne faccio la chiusura:  $\overline{\{\varphi_{\xi}(t) : t \geq 0\}} = K$

la chiusura rimane invariante per la dipendenza continua dal parametro, quindi

$K$  è compatto (chiuso e limitato) ed è invariante (per quanto detto sopra).

Considero  $\xi_n = \varphi_{\xi}(t_n) \rightarrow \bar{\xi}$  con  $t_n \rightarrow \infty$ . Devo verificare che rimane in  $K$ .

Fisso  $t > 0$  e guardo  $\varphi_{\bar{\xi}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\varphi_{\xi}(t_n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\varphi_{\xi}(t + t_n)}_{\in K} \in K$

$\Rightarrow \varphi_{\bar{\xi}}(t) \in K$ . Questo mostra l'invarianza

Alternativamente, ci sono due opzioni:

✓  $0 \in K \Rightarrow \varphi_{\xi}(t)$  entra in  $U \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \rightarrow 0$

⊗  $0 \notin K \Rightarrow \exists$  orbita periodica in  $K$  ( $\Rightarrow$  assurdo!)

lo spazio è spezzato in tanti  
attrattori diversi, può accadere  
che i pt vadano in eq. instabili

Domanda: Posso estendere questo a tutto lo spazio? No: vale solo in  $U$   $\hookrightarrow$

Dim. (Teo. lin.): lo dimostrano in alcuni casi più semplici

SPG fisso  $\xi_0 = 0 \Rightarrow u' = F(u)$  dove  $F(x) = A \cdot x + R(x)$  con  $R(x) = O(x^2)$

[1] Suppongo che  $A$  abbia  $n$  autovalori reali  $\rightarrow$  diagonalizzo  $A$ :

$$BAB^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \doteq J \quad \text{con } \lambda_i < 0 \text{ e chiamo } x(t) \doteq Bu(t)$$

$\hookrightarrow$  invertibile

$$u \text{ è soluzione} \Leftrightarrow x' = Bu' = BAu + BR(u) = BAB^{-1}Bu + BR(B^{-1}u) = Jx + \tilde{R}(x)$$

con  $\tilde{R}(x) = BR(B^{-1}u) = O(|x|^2)$

$O$  è stabile perché  $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$  è una funzione di Lyapunov per il sistema:

$$V(0) = 0; \quad V(x) > 0 \text{ se } |x| \neq 0; \quad \dot{V} < 0 \text{ in un intorno di } 0$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot x = (Jx + \tilde{R}(x)) \cdot x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \tilde{R}(x) \cdot x \leq -\mu |x|^2 + o(|x|^2)$$

con  $\mu = \min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$

$$\leq |x|^2 (-\mu + o(1)) \leq -\frac{\mu}{2} |x|^2$$

$\Rightarrow$  si ha la stab. asintotica

Traccia di come si tratta il caso di un blocco  $A$  di Jordan reale

idea:  $A \rightarrow$  cambio di base  $\rightarrow$  blocco di Jordan  $\rightarrow$  ogni blocco di Jordan mi dà sol. che tendono a 0

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \text{ allora si avrà } (A - \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Posso anche avere  $\varepsilon$  al posto di 1, in questo modo:

Presa la base canonica  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , definisco  $e'_j = \varepsilon^j e_j$ , e quindi:

$$(A - \lambda)e'_j = \varepsilon^j (A - \lambda)e_j = \varepsilon^j e_{j-1} = \varepsilon e'_{j-1} \text{ per } j \geq 2$$

$$\text{Nella base } e'_1, \dots, e'_n \text{ il blocco di Jordan ha la forma } \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ & \lambda & \varepsilon \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Prendendo  $\varepsilon < |\lambda|$  si dimostra che  $\frac{1}{2}|x|^2$  è funzione di Lyapunov (verificare per es.)

[2] (instabilità) considero  $\lambda_i$  reali e non nulli  $\rightarrow$  per semplicità

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \lambda_k & 0 & \lambda_{k+1} \end{array} \quad \curvearrowright$$

SPG  $\xi_0 = 0$  e suppongo  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n$

Sia  $x' = Ax + R(x)$  e definisco  $\mu = \min\{|\lambda_k|, |\lambda_{k+1}|\}$

$\Rightarrow W(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \leq k} x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} x_i^2$  soddisfa le hp del criterio di instabilità:

i)  $W(0) = 0$ ,  $\xi_j \rightarrow 0$   $W(\xi_j) > 0$  ok

ii)  $\dot{W}(x) > 0$  in un intorno bucato di 0

$$\begin{array}{l} \lambda_i > 0 \\ \lambda_i > \mu \end{array}$$

$$\nabla W(x) \cdot (Ax + R(x)) = -\sum_{i \leq k} (-\lambda_i) x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} \lambda_i x_i^2 + o(|x|^2) \stackrel{\uparrow}{\geq} \mu |x|^2 + o(|x|^2) \geq \frac{\mu}{2} |x|^2 \text{ per un intorno di } 0$$

## Esercizi per casa (dimensione di Hausdorff):

1)  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $H^1(E) = 0 \Rightarrow E$  tot. sconnesso (punti distinti stanno in comp. convesse distinte)

1bis) Vale il viceversa? (Sugg. per 1 + 1bis: pensare prima al caso  $n=1$ )

2) Mostrare che se  $\phi$  è una funzione  $\alpha$ -Hölder (cioè  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x-y|^\alpha \forall x, y$ )

allora a)  $H^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} H^s(E)$

b)  $\dim_H(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)$

3) Dimostrare che la scala del diavolo è  $\alpha_0$ -Hölder con  $\alpha_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$

4) Se  $Y$  è soluzione matriciale del sistema  $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = I_d \end{cases}$  con  $A: \mathbb{R} \rightarrow M(n \times n)$  continua e

$Y = (y_1, \dots, y_n)$  con  $\begin{cases} y_i' = A(t)y_i \\ y_i(0) = e_i \end{cases}$

$Y^T Y = I_d$   
↑

Mostrare che se  $A(t) + A^t(t) = 0 \forall t$  (matrice antisimmetrica) allora  $Y$  è ortogonale

Esercizio: Sia  $y' = Ay$  con  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Dire se 0 è stabile / instabile

b) Scrivere la soluzione generale

Oss: Per (a) basta conoscere gli autovalori, per (b) servono gli autovettori

Sol: a)  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= -2-2-\lambda - [(2+\lambda)+2] - \lambda[(2+\lambda)^2 - 4] = -4-\lambda-4-\lambda-\lambda^3-4\lambda^2 =$$

$$= -8-2\lambda-4\lambda^2-\lambda^3 = P(\lambda) \text{ polinomio caratteristico}$$

$$P(\lambda) = (4+\lambda)(-2-\lambda^2) \Rightarrow \text{gli autovalori sono } \{-4, \pm i\sqrt{2}\} \begin{matrix} \text{centro} \end{matrix}$$

Si ha  $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$  e  $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) = 0 \Rightarrow 0$  è stabile ma non asint. stabile

b) Per trovare la sol. generale, calcolo  $e^{tA}$  scrivendo  $A = BNB^{-1}$  dove

$N$  ha forma normale (reale) e  $B$  è il cambio di base (finire per casa)

la matrice  $BNB^{-1}$  sarà tipo  $\begin{pmatrix} \boxed{4} & & \\ & \boxed{i\sqrt{2}} & \\ & & \boxed{-i\sqrt{2}} \end{pmatrix}$   
↳ rotazione

Esercizio di ieri:

Sia  $y' = Ay$  con  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Dire se 0 è stabile / instabile

b) Scrivere la soluzione generale

Sol: a) visto

b) Dobbiamo trovare gli autovettori:

$\lambda = 4$ :  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  verifica  $Aw = 4w$

$\lambda = i\sqrt{2}$ :  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$   $v = \xi + i\eta$  con  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Digressione: Se  $A$  è matrice reale,  $\lambda \in \mathbb{C}$  autovalore, se  $Av = \lambda v$  (con  $v \neq 0$ ) vale anche

per il coniugato:  $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

Sia  $\lambda = a + ib$ ,  $v = \xi + i\eta \Rightarrow \begin{cases} A\xi = A\operatorname{Re}(v) = \operatorname{Re}(Av) = \operatorname{Re}(\lambda v) \\ A\eta = A(\operatorname{Im}v) = \operatorname{Im}(Av) = \operatorname{Im}(\lambda v) \end{cases}$

Dunque  $\lambda v = (a\xi - b\eta) + i(b\xi + a\eta) \rightarrow \begin{cases} A\xi = a\xi - b\eta \\ A\eta = b\xi + a\eta \end{cases}$

Considero  $B = (w, \xi, \eta)$   $B: \begin{cases} e_1 \rightarrow w \\ e_2 \rightarrow \xi \\ e_3 \rightarrow \eta \end{cases}$

$N = B^{-1}AB = B^{-1}(Aw, A\xi, A\eta) = B^{-1}(\lambda w, a\xi - b\eta, b\xi + a\eta) = (\lambda e_1, ae_2 - be_3, be_2 + ae_3)$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A = BNB^{-1}$  e come abbiamo visto a lezione vale  $e^{tA} = B e^{tN} B^{-1}$

$\lambda = 4, a = 0, b = \sqrt{2}$ , quindi nel nostro caso  $e^{tN}$  è a blocchi:  $e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2}t & \sin\sqrt{2}t \\ 0 & -\sin\sqrt{2}t & \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$

Per finire basta trovare  $B^{-1}$  e calcolare  $e^{tA} = B e^{tN} B^{-1}$  (per esercizio)

Possiamo estendere questo ragionamento più in generale.

## In generale:

Possiamo vedere che questo metodo funziona per  $A \in M(n \times n)$  reale:

$A = BNB^{-1}$  con  $N = \text{block}(J_1, \dots, J_e)$  con i blocchi del tipo seguente

## Tabella per determinare l'esponenziale di matrice blocco per blocco:

$J$	$e^{tJ}$
I) $(\lambda)$	$e^{\lambda t}$
II) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\left( \begin{smallmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{smallmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{perché } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{t^k N^k}{k!}$ $N^d = 0$
III) $I_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$	$e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} = R_b(t)$
IV) $\begin{pmatrix} I_{a,b} & I_{1,0} & 0 \\ 0 & I_{1,0} & I_{a,b} \\ 0 & 0 & I_{a,b} \end{pmatrix}$	$e^{at} \begin{pmatrix} R_b(t) & tR_b(t) & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} R_b(t) \\ 0 & tR_b(t) & R_b(t) \\ 0 & 0 & R_b(t) \end{pmatrix}$

Se  $A \in M_{n \times n}$  e  $u' = Au$ , quando 0 è stabile? Quando asintoticamente stabile?

stabile	as. stabile
I) $\lambda \leq 0$	$\times \rightarrow$ solo stabile
II) $\lambda < 0$	$\checkmark \rightarrow$ anche as. stab.
III) $\text{Re}(A) \leq 0$	$\times$
IV) $\text{Re}(A) < 0$	$\checkmark$

Siano  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  gli autovalori di A

Se  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  e non ci sono blocchi di Jordan con  $d > 1$

quando  $\text{Re}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$  l'origine è un eq. stabile

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow$  l'origine è eq. asintoticamente stabile

## Perturbazioni della forma di Jordan:

Possiamo perturbare i blocchi J sostituendo l'1 con  $\varepsilon$  (come accennato ieri):

$J$
I) $(\lambda)$
II) $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
III) $I_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
IV) $\begin{pmatrix} I_{a,b} & \varepsilon I_{1,0} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{1,0} & I_{a,b} \\ 0 & 0 & I_{a,b} \end{pmatrix}$

Sia A matrice con autovalori  $\lambda_i : \text{Re}(\lambda_i) \leq -\mu < 0 \quad \forall i$

$N_\varepsilon$  forma normale di A con  $\varepsilon < \mu$

Se ho  $u' = N_\varepsilon u + R(u)$  (\*) con  $R(u) = o(|u|)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{2} |x|^2$  è f. di Lyapunov per 0 rispetto all'eq. (\*)

in un opportuno intorno di 0, e si avrà che:

$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot (N_\varepsilon(x) + R(x)) \stackrel{\text{termine diag.}}{\leq} -\mu |x|^2 + \varepsilon |x|^2 + o(x^2)$

Es: Se  $Y$  è soluzione matriciale di  $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = Id \end{cases}$  con  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M_{n \times n})$

antisimmetrica

tale che  ${}^T A(t) + A(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow {}^T Y(t) Y(t) = Id$  (cioè  $Y$  è ortogonale)

Sol: 
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}^T Y(t) \cdot Y(t)) &= {}^T (Y'(t)) Y(t) + {}^T Y(t) Y'(t) \\ &= {}^T Y(t) {}^T A(t) Y(t) + {}^T Y(t) A(t) Y(t) \\ &= {}^T Y(t) ({}^T A(t) + A(t)) Y(t) = 0 \end{aligned}$$

Nel caso di  $\mathbb{R}^3$  le matrici antisimmetriche sono generate da:

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sono i gen. delle rotazioni attorno ai 3 assi, oltre ad essere i gen. delle mat. antisimmetriche

Es:  $\begin{cases} x' + 2y = \cos t \\ y' - 2x = \sin t \end{cases} \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} u' = Au + b(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Se  $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} u_0$

Per il metodo di variazione delle costanti, si ha:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds + e^{tA} u_0 \quad u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ e^{tA} &= \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \quad e^{-sA} b(s) = \begin{pmatrix} \cos 2s & -\sin 2s \\ -\sin 2s & \cos 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2s \cdot \cos s + \sin 2s \cdot \sin s \\ -\sin 2s \cdot \cos s + \cos 2s \cdot \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-sA} b(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{sol gen. del sist. dato}$$

Es: 1)  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $H^1(E) = 0 \Rightarrow E$  tot. sconnesso (punti distinti stanno in comp. convesse distinte)

1bis) Vale il viceversa?

caso  $n=1:1$ ) Se una componente convessa contiene  $P_0 < P_1$  con  $P_0 \neq P_1 \Rightarrow E \supset [P_0, P_1] \Rightarrow H^1(E) = 1$

1bis) Non vale il viceversa: basta prendere il complen. dell'ingrossamento di  $\mathbb{Q}$  di  $[0, 1]$

caso  $n > 1$ : Si possono fare due cose: o proiettare, o guardare la funzione distanza

1) Siano  $p_0 \neq p_1 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$

Chiamo  $\phi(x) = d(x, p_0)$  e noto  $\phi(p_0) = 0$ ,  $\phi(p_1) > 0$

$\phi$  è 1-lip.  $\Rightarrow \mathcal{H}^1(\phi(E)) \leq \mathcal{H}^1(E) = 0$

$\phi(E)$  tot scosso  $\Rightarrow \xi \in (0, \phi(p_1)) \setminus \phi(E)$

$$E = \underbrace{\{x \in E : d(x, p_0) < \xi\}}_{P_0} \cup \underbrace{\{x \in E : d(x, p_0) > \xi\}}_{P_1}$$

$E \cap \{x : d(x, p_0) = \xi\} = \emptyset$

$p_0, p_1$  arbitrari appartenono a comp. convesse diverse  $\Rightarrow$  tot. scosse  $\rightarrow$  pt  $\neq$  stanno in comp. convesse  $\neq$

1 bis) No, non vale

Es:  $\phi$  tale che  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$

a)  $\mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E)$

b)  $\dim_{\mathcal{H}}(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(E) \rightarrow \frac{1}{\alpha} S_0$   
 $\hookrightarrow S_1$

Dim: Se  $E_i$  è un ricoprimento di  $E$  con insiemi di diam minore di  $\delta$ , cioè:

$$E \subseteq \bigcup E_i, \text{diam}(E_i) < \delta \Rightarrow \phi(E) \subseteq \bigcup \phi(E_i) \text{ e } \text{diam}(\phi(E_i)) \leq C \text{diam}(E_i)^\alpha$$

$$\Rightarrow \sum_i \text{diam}(\phi(E_i))^{s/\alpha} \leq C^{s/\alpha} \sum_i \text{diam}(E_i)^s$$

Oss:  $\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \{ \sum |E_i|^s : \bigcup E_i \supseteq E, \text{diam}(E_i) < \delta \}$  e  $\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$

Se prendo  $\varepsilon > 0$  arbitrario e scelgo  $E_i : |E_i| < \delta, \bigcup E_i \supseteq E, \sum |E_i|^s < \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon$

$$\mathcal{H}_{C\delta^\alpha}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq \sum |\phi(E_i)|^{s/\alpha} < C^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon$$

$\alpha \delta \downarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E) + \varepsilon$

$$|\phi(E_i)| < \delta^{s/\alpha}, \bigcup \phi(E_i) \supseteq \phi(E)$$

b) Sia  $S_0 := \dim_{\mathcal{H}}(E)$  e  $S_1 = \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E))$

Se  $\underline{S} > S_0 \Rightarrow \mathcal{H}^{\underline{S}}(E) = 0 \xrightarrow{a)} \mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) = 0 \Rightarrow s/\alpha \geq \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E)) \Rightarrow S_0 \geq \alpha S_1$

Quindi  $S \geq \alpha \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E))$  e quindi  $S_0 \geq \alpha \dim_{\mathcal{H}}(\phi(E))$