Conduttori

Definizione

- I conduttori sono materiali che contengono tanti elettroni 'quasi' liberi di muoversi all'interno del materiale, che è circa una buca di potenziale di altezza ~eV da cui gli elettroni non hanno abbastanza energia per uscire
- Applicando un campo elettrico esterno o caricando un conduttore nasce un campo elettrico $\mathbf{E}$ interno: quindi gli elettroni soggetti alla forza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ iniziano a muoversi
- Gli elettroni dissipano energia, fino a raggiungere l'unico stato stabile possibile di equilibrio:
  $$\boldsymbol{E} = 0 \text{ nel conduttore e } \boldsymbol{E}_{\parallel} = 0 \text{ sulla superficie}$$
  - Il campo elettrico può avere una componente perpendicolare alla superficie, in quanto gli elettroni non possono uscire dal conduttore
  - Per Gauss (o Maxwell) si ha
    $$\rho = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0.$$
  - La densità di carica σ sulla superficie di un conduttore è legata a $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$ (in quanto il conduttore è equipotenziale)
    La formula generale per la pressione elettrica su di una superficie diventa, per un conduttore, $p = \sigma E_\perp/2$ in quanto il campo interno vale zero
- CONDUTTORE MESSO A TERRA
  - Si usa per indicare che un conduttore di volume finito è connesso ad un secondo conduttore di dimensione idealmente infinita (in pratica il pianeta Terra), che per convenzione ha potenziale elettrico $\varphi = 0$
  - La carica può fluire su di un conduttore a terra, in maniera da mantenere a zero il suo potenziale
  - Un conduttore infinito (ad esempio un piano) è per definizione "a terra"

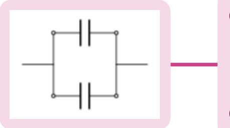
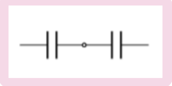
Unicità della soluzione

- Il problema fisico è di trovare lo stato di minima energia di sistemi di conduttori su cui uno opera nei seguenti modi
  - φ data, Q variabile
    - Il problema matematico corrispondente è risolvere l'equazione di Poisson/Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ con condizioni al bordo su φ (di 'Dirichlet')
  - Q data, φ variabile
    - Il problema matematico corrispondente è risolvere l'equazione di Poisson/Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ con condizioni al bordo su $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (di 'Neumann')
  - Non entrambe su di un unico conduttore (di 'Cauchy', il problema matematico non ha soluzione; il problema fisico è impossibile)
    La soluzione è unica

Esempi pratici

- GABBIA DI FARADAY
  - Regioni di spazio separate da conduttori sono schermate. Calcoliamo infatti il campo elettrico in un buco interno ad un conduttore assumendo cariche arbitrarie all'esterno, e che non ci siano cariche nel buco, occorre risolvere $\nabla^2\varphi = 0$ con condizione φ = cte sul bordo ⇒ la soluzione è
    φ = cte nel buco ⇒ $\mathbf{E}$=0
    Misurando che l'effetto di schermo avviene per davvero si deduce che l'esponente nella forza di Coulomb è 2 entro 10^{-15}
- METODO DELLE CARICHE IMMAGINE
  - Alcuni sistemi hanno soluzioni semplici non ovvie. In presenza di cariche elettriche o campi elettrici esterni, le cariche dentro un conduttore si spostano fino a renderlo equipotenziale.
    In alcuni casi simmetrici il sistema si comporta come se ci fossero cariche fittizie, dette 'cariche immagini'.
    Se uno trova una soluzione, allora è unica
- EFFETTO DELLE PUNTE
  - Cariche su di un conduttore si respingono e quindi cercano di allontanarsi il più possibile. Alla fine le cariche si concentrano sulle punte dei conduttori. Per vederlo, consideriamo due sfere conduttrici di raggi R ≫ r a grande distanza d ≫ R, r connesse da un filo conduttore. La sfera piccola schematizza una punta.
    Si determinano le cariche q e Q sulle due sfere imponendo che i potenziali sulle superfici delle due sfere siano uguali, ottenendo Q/R = q/r. Quindi la sfera grossa ha maggiore carica, ma la sfera piccola ha maggiore densità di carica $\sigma = q/4\pi r^2$ e maggiore campo elettrico
    $$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{q/r^2}{Q/R^2} = \frac{R}{r}.$$
  - 

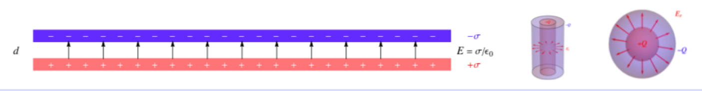
Circuiti

- I circuiti sono sistemi elettromagnetici semplificati, calcolabili approssimando le equazioni di Maxwell con matematica più accessibile
  - Un filo conduttore connette oggetti mettendoli allo stesso potenziale.
  - Una batteria è un oggetto che mantiene ai suoi capi una differenza di potenziale $V = \varphi_+ - \varphi_-$
  - Una capacità è un sistema che, posto a differenza di potenziale V, immagazzina carica Q = CV
    - Capacità in parallelo: $C = \sum C_i$ in quanto $Q_i = C_i V$ e $Q = \sum Q_i$. Infatti per piatti piani $C_{1+2} = \epsilon_0(S_1 + S_2)/d$.
      
    - Capacità in serie: $1/C = \sum 1/C_i$ in quanto $V_i = Q/C_i$ e $V = \sum V_i$. Infatti per piatti piani $C = \epsilon_0 S/(d_1 + d_2)$
      

Energia e forza

- L'energia elettrostatica di un condensatore vale:
  $$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}(Q\varphi_1 - Q\varphi_2) = \frac{1}{2}QV \overset{\text{memo}}{=} \boxed{\frac{Q^2}{2C}} = \frac{CV^2}{2}.$$
- In generale, la forza F su condensatore (sia messo a Q costante o a V costante) vale
  $$F = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{ds}$$
  - Il segno è tale che F cerca di diminuire U, cioè aumentare C

Induzione

- COMPLETA
  - Si dice "condensatore" (o "capacità") un sistema di due conduttori a differenza di potenziale V in cui le linee di campo vanno solo da uno all'altro. In questa maniera si costruiscono oggetti che immagazzinano cariche senza disturbare con campi elettrici la zona esterna. Per ottenere questo risultato devono avere cariche opposti +Q e −Q ed essere uno interno all'altro. Si definisce la capacità C tale che Q = CV .
    - Tre geometrie semplici
      - 1d) Due piani (piatti paralleli di superficie S a distanza $d \ll \sqrt{S}$ per poter trascurare effetti ai bordi): la densità superficiale vale $\sigma = Q/S$, il campo prodotto è costante $E = \sigma/\epsilon_0$, la differenza di potenziale vale $V = dE = Q \cdot d/S\epsilon_0$: quindi $\boxed{C = \epsilon_0 S/d}$.
        

      - 2d) Due cilindri: quello interno genera lo stesso campo elettrico di un filo con densità lineare $\lambda = \frac{Q}{h}$, ovvero $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$. Quindi la differenza di potenziale vale $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$, e la capacità è $\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(r_2/r_1)}}$.
      - 3d) Due sfere: $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$: $\boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$. Nel limite $r_2 \to \infty$ si riduce ad una sfera isolata: $C = 4\pi\epsilon_0 r$.

        La capacità C è misurata in Coulomb/Volt = Farad. Il suo tipico valore numerico è piccolo: $C \approx \epsilon_0 S/d \sim \epsilon_0 \times$ (dimensione dell'oggetto) $\approx 10^{-11}$ F per $S/d \approx$ m. Per questo motivo le unità di uso pratico sono μF, nF, pF.
- PARZIALE
  - Un conduttore 1 da solo con carica Q_1 ha potenziale $\varphi_1 = P_{11}Q_1$; le linee di $\boldsymbol{E}$ vanno all'infinito.
    Con due conduttori, le linee possono andare in parte all'infinito. Per più conduttori con cariche Q_i a potenziali φ_i la linearità delle eq. di Maxwell implica $\boxed{\varphi_i = \sum_j P_{ij}Q_j}$ dove P_{ij} è detta *matrice dei potenziali* e dipende solo dalla geometria del sistema (non dai valori delle cariche).
    Invertendo questa relazione matriciale si ottiene $Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j$ dove la *matrice delle capacità* è l'inversa della matrice dei potenziali: $C_{ij} = (P^{-1})_{ij}$.
  - Verifichiamo come per due condensatori messi a cariche $Q_1 = Q$ e $Q_2 = -Q$ si ri-ottiene la capacità
    $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{(P_{11} - P_{12})Q - (P_{21} - P_{22})Q} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}}.$$
    L'energia di un sistema generico di conduttori vale $U = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}\varphi_i\varphi_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} P_{ij}Q_iQ_j$.
    Si dimostra che le matrici sono simmetriche: $C_{ij} = C_{ji}$. Immaginiamo infatti di calcolare l'energia U mettendo prima il conduttore 1 a potenziale φ_1 ($U_1 = \frac{1}{2}C_{11}\varphi_1^2$) e poi mettendo il conduttore 2 a potenziale φ_2 (serve ulteriore energia $\Delta U = \frac{1}{2}C_{22}\varphi_2^2 + \Delta Q_1\varphi_1$ con $\Delta Q_1 = C_{12}\varphi_2$). Invertendo la procedura si ottiene la stessa espressione con C_{21} invece di C_{12}. Tuttavia lo stato finale è lo stesso, e l'energia deve quindi essere la stessa indipendentemente dalla proceduta seguita per arrivarci.

Scariche nei gas

- Un campo elettrico molto intenso produce scariche nei gas poco densi come l'aria, in cui la distanza fra le molecole è $d \sim 1/\sqrt[3]{n} \gg$ Å
  Un elettrone libero viene accelerato per un tratto d prima di urtare un altro atomo: acquista quindi energia che può essere grande abbastanza da ionizzare l'atomo su cui urta. Si ha quindi una reazione a catena che rende l'aria conduttrice, facendo partire la scarica