APPUNTI DEL CORSO DI

FISICA 1

A cura di Chiara Di Sano
c.disano1@studenti.unipi.it

Rielaborazione delle lezioni del prof.
I. Bombaci
A.A. 2019-2020

24/02/2020 Ignazio Bombaci

RUOLO DELLA FISICA: descrivere i fenomeni naturali

GRANDEZZE FISICHE: possono essere FONDAMENTALI (es: lunghezza, massa, tempo) oppure DERIVATE (es: velocità = $\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$).

Misurare una grandezza fisica significa definire un' UNITÀ DI MISURA

SISTEMA INTERNAZIONALE (SI) (MKS)

lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	Kg
tempo	Secondo	s

MULTIPLI DI 10

10	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	etto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	chilo	K	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	esa	E	10^{-18}	atto	a

DIMENSIONI FISICHE di una grandezza fisica

es (1) $[v] = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$ (2) $[F] = [m] \times [a] = \frac{\text{massa} \times \text{lunghezza}}{(\text{tempo})^2}$
$= \frac{Kg \times m}{s^2} = N$ (Newton)

IL METRO è la distanza percorsa dalla luce in 1/299792458 s

Dunque questo definisce $c \equiv 299792458\ m/s$

IL CHILOGRAMMO MASSA è ancora (dal 1901) definito come la massa di un certo campione di platino-iridio

IL SECONDO è definito in modo tale che una certa riga spettrale del ^{133}Cs abbia la frequenza di 9192631770 Hz

GRANDEZZE FISICHE: esistono di due tipi

- Scalare: es temperatura, pressione
- Vettoriale: definita da Modulo (o norma), Direzione, Verso; es $\vec{v}, \vec{s}, \vec{F}$ modulo: $|\vec{v}| = v$
- Tensoriali

Definisco la somma tra due vettori e il prodotto ed ottengo un gruppo abeliano: (1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
(3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
(5) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

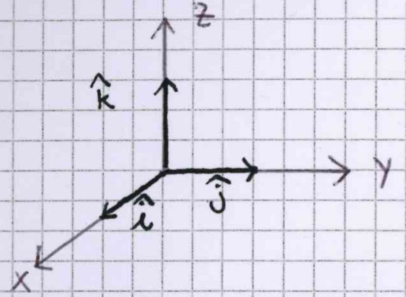
$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = 0 \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Un vettore $\vec{a}$ è definito come il prodotto tra il **modulo a** del vettore e il **versore $\hat{a}$**. Il modulo indica l'**intensità** del vettore mentre il versore indica **direzione** e **verso**.

$|\vec{a}| \equiv a \quad \Rightarrow \vec{a} = a\,\hat{a} \Rightarrow \quad \hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

COORDINATE CARTESIANE



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ versori unitari $\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k} \Rightarrow$ linearmente indipendenti

$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \qquad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \qquad$ ecc.

25/02/2020 Bombaci

Somma fra due vettori:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$ (A)

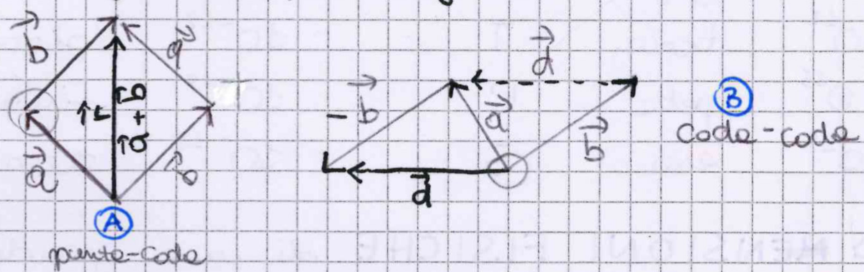
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

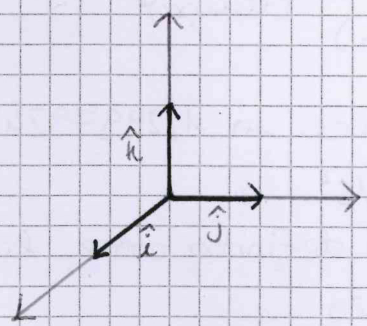
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Differenza fra due vettori:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$ (B)

Regola del parallelogramma



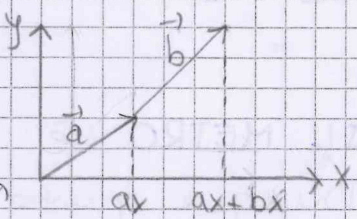


$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$

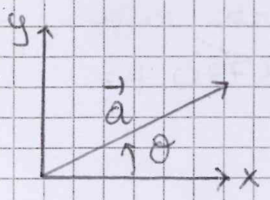
$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$



$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



$\vec{a} \equiv a, \theta$

$a_x = a \cos\theta$

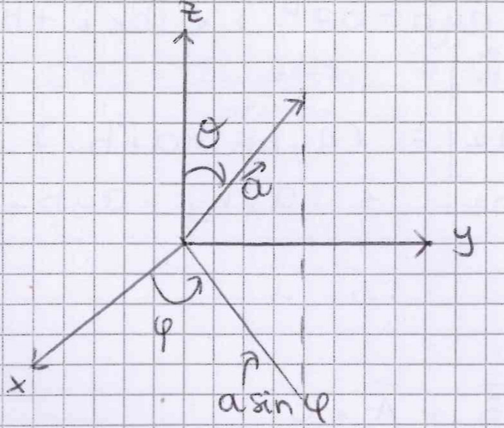
$a_y = a \sin\theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\tan\theta = \dfrac{a_y}{a_x}$

COORDINATE SFERICHE

$a \equiv (a, \theta, \varphi)$



$$\begin{cases} a_x = a \sin\theta \cos\varphi \\ a_y = a \sin\theta \sin\varphi \\ a_z = a \cos\theta \end{cases}$$

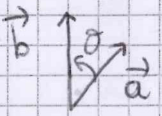
$\vec{b} = k\vec{a}$

$b = |\vec{b}| = |k||\vec{a}| = |k|a$

$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{k}{|k|}\hat{a}$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ab\cos\theta$ $\qquad \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$



- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad \cos 90° = 0$
- $\vec{b} \cdot \vec{a} = ab\cos(2\pi - \theta) = ab\cos\theta = \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$

PRODOTTO SCALARE IN COORDINATE CARTESIANE

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

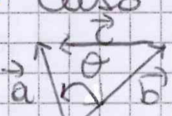
OSS: $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

- Caso $\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

- Caso $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



abbiamo visto che sono uguali

$\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}^2$

$= a^2 - 2ab\cos\theta + b^2$

$\Rightarrow \text{dist}(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|$

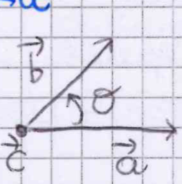
$$\begin{cases} a_x = \vec{a}\cdot\hat{i} \\ a_y = \vec{a}\cdot\hat{j} \\ a_z = \vec{a}\cdot\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\cdot\hat{i} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot\hat{i}$$

Prodotto VETTORIALE

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

- uscente

x entrante

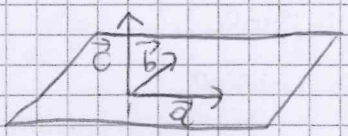


Modulo: $c = ab\sin\theta \geq 0$

Direzione: perpendicolare al piano di $\vec{a}, \vec{b}$

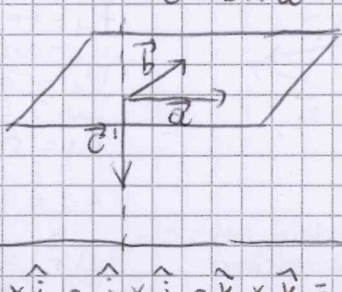
Verso: regola della mano destra

Esempi



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{c}' = \vec{b} \times \vec{a}$



$\Rightarrow \boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})}$

ANTI COMMUTATIVO

$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\theta$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0 \ ; \ \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k} \ ; \ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \ ; \ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \ ; \ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \ ; \ \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Prodotto SCALARE

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B})$$

Prodotto VETTORIALE

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$$

TRIPLO PRODOTTO VETTORE

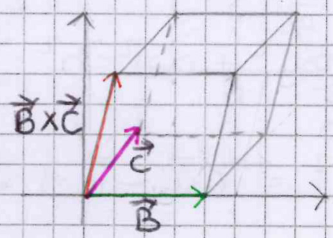
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

TRIPLO PRODOTTO MISTO

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

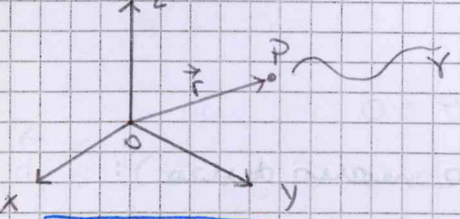


27/02/2020 Bombaci

Cinematica = direzione del moto

Studiamo il moto di un punto materiale = punto matematico dotato di massa

Dipende dal tipo di fenomeno che si vuole studiare per definire se un oggetto può essere puntiforme o meno



$P \equiv (x, y, z)$ punto materiale

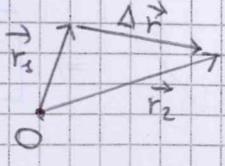
$\vec{r} = \overline{OP}$

$\gamma \equiv$ traiettoria del punto materiale

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)}$ legge oraria

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



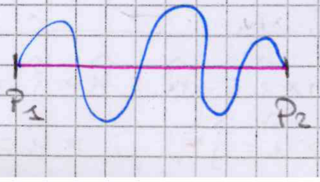
t_1 = tempo iniziale

P_1 = punto iniziale

$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$

$t_2 = t_1 + \Delta t_2 \; P_2 \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vettore spostamento nell'intervallo Δt



lo spostamento è lo stesso

VELOCITÀ MEDIA

$$\vec{v}_m(t, t+\Delta t) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad [v] = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \Rightarrow SI\ (MKS) = \frac{m}{s}$$

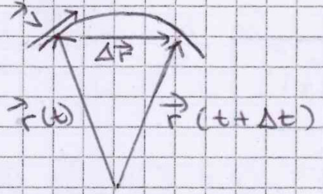
VELOCITÀ ISTANTANEA

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

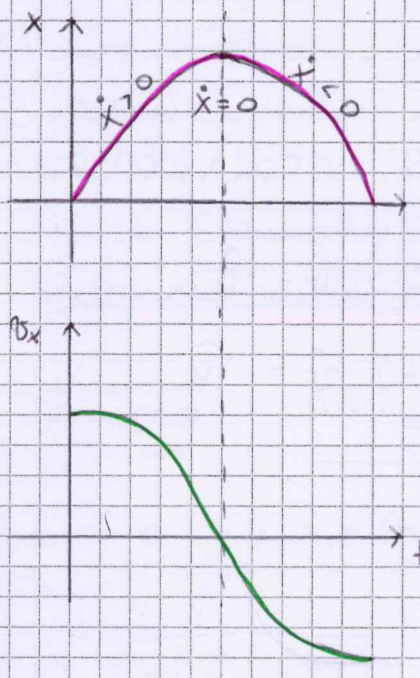
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{ecc.}$$



$\vec{v}(t)$ è sempre tangente alla curva

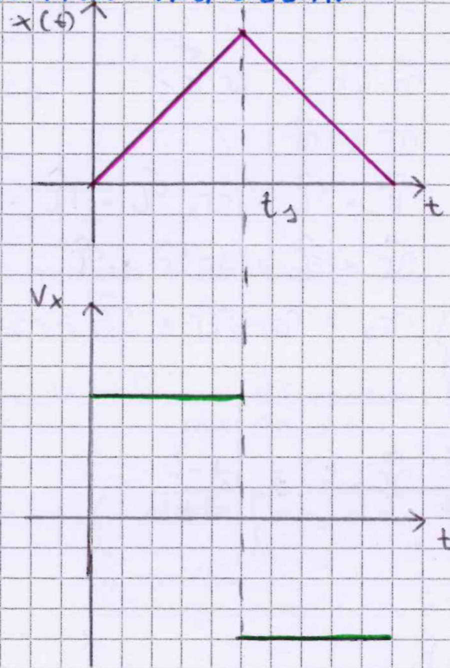
LEGGE ORARIA



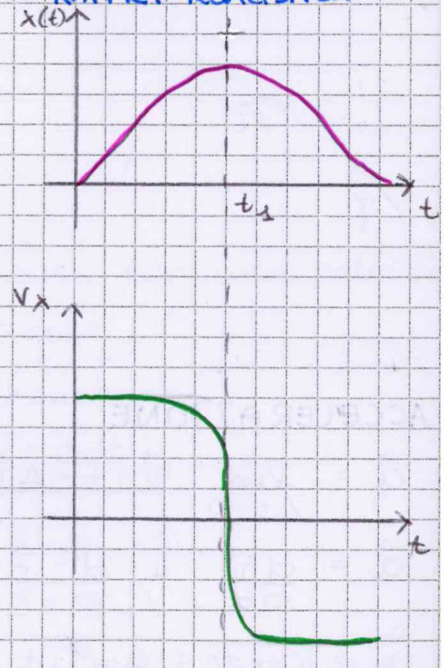
PUNTO CHE URTA UN MURO

Il corpo puntiforme urta un muro, riceve una FORZA IMPULSIVA (tendente a 0), il muro e il punto interagiscono in un tempo (*) e il corpo torna indietro

RAPPR. IDEALIZZATA



RAPPR. REALISTICA

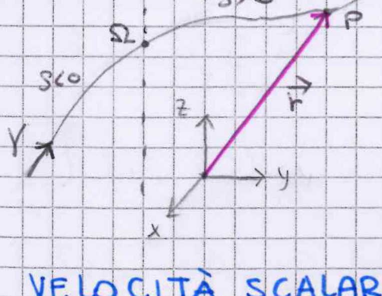


derivata discontinua ⇒ idealizzata

(*) nullo

(*) non nullo e il corpo è puntiforme

TRAIETTORIA DEL PUNTO MATERIALE



$s \equiv$ ascissa curvilinea

Ω : Origine

$\vec{r} = \vec{r}(s)$

$s = s(t)$

$x = x(s)$

$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$ funzione composta

VELOCITÀ SCALARE

$$v_s(t) \overset{def}{\equiv} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \pm \frac{ds}{dt}$$

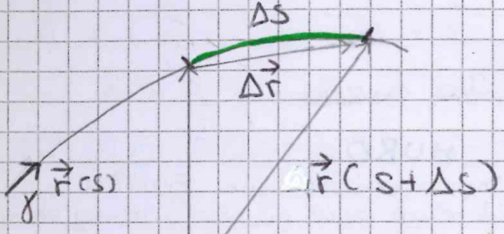
+ se il corpo si muove nel verso concorde dell'orientazione scelta

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$
$$s(t+\Delta t) = s(t) + \Delta s$$
$$\vec{r}(t+\Delta t) \equiv \vec{r}(s(t+\Delta t)) = \vec{r}(s+\Delta s)$$
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} \cdot$$

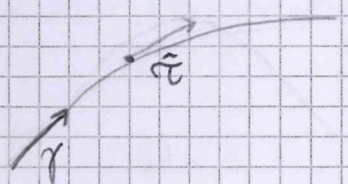
$$\cdot \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \to v_s$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{\tau}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v_s(t)\,\hat{\tau}$$



$$|\hat{\tau}| = 1 \qquad \boxed{\hat{\tau} = \hat{\tau}(s(t))}$$



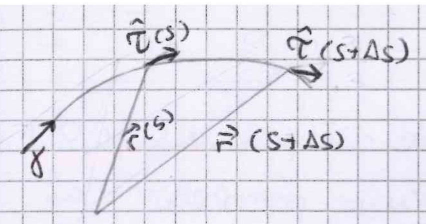
$$\vec{v}(t) = v\,\hat{v}$$
$$v \equiv |\vec{v}|$$
$$\vec{v} \cdot \hat{\tau} = v_s\,\hat{\tau}\cdot\hat{\tau} = v_s$$
$$\vec{v} \cdot \hat{\tau} = v\,\hat{v}\cdot\hat{\tau}$$
$$v_s = v \cdot \hat{v} \cdot \hat{\tau} = \pm v \quad \begin{cases} (+) & \hat{v} = \hat{\tau} \\ (-) & \hat{v} = -\hat{\tau} \end{cases}$$

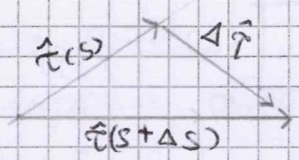
ACCELERAZIONE

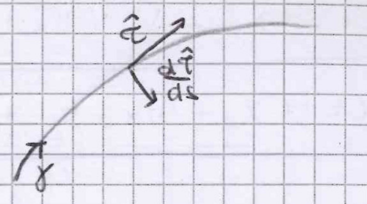
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{etc.}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left[v_s(t)\,\hat{\tau}(t)\right] = \frac{dv_s}{dt}\hat{\tau} + v_s\frac{d\hat{\tau}}{dt} = a_s\hat{\tau} + v_s\frac{d\hat{\tau}}{dt} \circledast$$

ACCELERAZIONE SCALARE

$$a_s \equiv \frac{dv_s}{dt}$$
$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v_s\frac{d\hat{\tau}}{ds}$$
$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} \perp \hat{\tau} \Rightarrow \hat{\tau}\cdot\hat{\tau} = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds}(\hat{\tau}\cdot\hat{\tau}) = 2\frac{d\hat{\tau}}{ds}\cdot\hat{\tau} \Rightarrow \frac{d\hat{\tau}}{ds} = \hat{\tau}$$







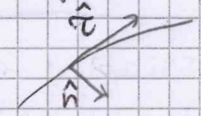
$$\circledast \quad \vec{a}(t) = a_s\,\hat{\tau} + v_s^2 \frac{d\hat{\tau}}{ds} \qquad \left[\frac{d\hat{\tau}}{ds}\right] = \frac{1}{\text{lungh.}}$$

$$SI: \frac{m}{s^2} = \frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{1}{m}$$

$$\left|\frac{d\hat{\tau}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$ = raggio di curvatura della curva in quel punto che localmente approssima la curva nel punto fissato

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n}$$ → misura adimensionale $\quad \hat{n} \perp \hat{\tau}$

$\hat{n}$ ↓ dipendente dal tempo



$$\circledast \quad \vec{a}(t) = a_s\,\hat{\tau} + \frac{\overset{|\vec{v}|^2}{\overset{\shortparallel}{v_s^2}}}{\rho}\,\hat{n}$$ sono tutte funzioni del tempo

Due componenti:

① accelerazione tangenziale

② accelerazione centripeta

02/03/2020 Bombaci

Moto (semplice)

Rettilineo uniforme: Il punto materiale si muove con una velocità

$$\vec{v}(t) = \vec{v} = \overrightarrow{cost}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}$$ componente x → forma differenziale: $dx = v_x\,dt$ $\quad \begin{cases} v_x = cost \\ v_y = cost \\ v_z = cost \end{cases}$

$t_0 = 0$, $x_0 = x(t_0)$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_{t_0=0}^{t} v_x\,dt'$$

↳ variabili di integrazione

$x - x_0 = v_x t$

$x = v_x t + x_0$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v}t} \qquad \boxed{x(t) = x_0 + v_x t}$$ eq di una retta

la velocità cambia nel tempo ma la derivata rimane uguale

Moto uniformemente accelerato

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{cost} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\int dv_x = \int a_x\,dt = v_x(t) - v_{x_0} \Rightarrow \boxed{v_x(t) = v_{x_0} + a_x t} \quad (1)$$

La velocità varia linearmente con il tempo, la pendenza della retta è data dall'accelerazione

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad dx = v_x(t)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_{x_0} + a_x t')\,dt'$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} t^2 a_x} \quad (2)$$

legge oraria della componente x
equazione di una parabola

Ricaviamo a dalla (1)

$a_x = \dfrac{v_x(t) - v_{x_0}}{t}$ acc. media = acc. istantanea

Sostituisco nella (2) e trovo

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2}\,\frac{v_x t - v_{x_0}}{\cancel{t}}\cdot t^{\cancel{2}} = x_0 + v_{x_0} t + \underbrace{\frac{[v_x t - v_{x_0}]t}{2}}_{\text{vel. media}}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{1}{2}[v_{x_0} + v_x(t)]\,t} \quad (3)$$

Possiamo ricavare una 4ª equazione dalla (1)

$\Rightarrow t = \dfrac{v_x(t) - v_{x_0}}{a_x}$ e sostituisco nella (3) e ottengo:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}[v_{x_0} + v_x(t)]\,\frac{v_x(t) - v_{x_0}}{a_x}$$

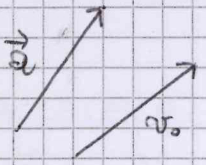
$$\boxed{v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)} \quad (4)$$

Le 4 equazioni valgono anche per le componenti y e z

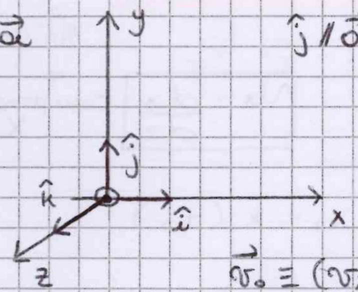
(a) $\boxed{\vec{v}(t) = v_0 + \vec{a}\,t}$ legge oraria: $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2}$ forma vettoriale
(b)

$\vec{v}_0$ e $\vec{a}$ individuano nello spazio un piano che deve contenere il punto individuato dalla legge oraria

$z = z_0$ asse y // all' $\vec{a}$ $\hat{j} \parallel \vec{a}$



il piano x è individuato da $\vec{a}$ o da $\vec{v}$



$\vec{v}_0 \equiv (v_{x_0}, v_{y_0}, 0)$
$\vec{a} \equiv (0, a_y, 0)$

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad x(t) = x_0 + v_{x_0} t \\
&(\mathrm{II}) \quad y(t) = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\
&(\mathrm{III}) \quad z(t) = z_0 \quad (\text{cost})
\end{aligned}\right\}$$

TRAIETTORIA
legge oraria di un corpo puntiforme

da (I) ricaviamo $t = \dfrac{x - x_0}{v_{x_0}}$ trovando

$$\boxed{y = y_0 + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}}(x - x_0) + \frac{a_y}{2 v_{x_0}^2}(x - x_0)^2} \quad \text{parabola}$$

(c) $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}[\vec{v}_0 + \vec{v}(t)]\,t}$

(d) $\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_0^{\,2} + 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$ → tutte e tre le componenti

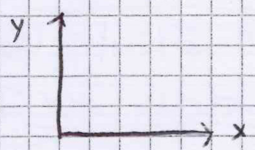
↓ analoga a (4)
↓ modulo quadro del vettore = scalare

$\vec{a} = \vec{g}$ $\quad \vec{g} = \overrightarrow{\cos t}$ $\quad g = 9.81 \, m/s^2$ $\quad$ g varia con la latitudine perché la distanza dal centro della Terra varia

MOTO DI CADUTA LIBERA DI UN CORPO

La velocità iniziale del corpo è parallela a $\vec{g}$

$\vec{v}_0 \parallel \vec{g} \quad \downarrow\vec{g}$



$$\vec{g} = (0, -g, 0)$$
$$a_y = -g$$
$$v_y = v_{y_0} - g t$$
$$y = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

① $y_0 = h \qquad V_{y_0} = 0$

Tempo di caduta libera: τ_{FF} $\qquad y(\tau_{FF}) = 0 = h - \frac{1}{2} g \tau_{FF}^2$

0

$$\tau_{FF} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_y(\tau_{FF}) = -g\tau_{FF} = -\sqrt{2gh}$$
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{2gh}$$

Spariamo verticalmente un proiettile:

② $y_0 = h_0 \qquad v_{y_0} > 0$

Tempo di salita: $\tau_s \qquad v_y(\tau_s) = 0 \qquad v_{y_0} = g\tau_s \qquad \tau_s = \frac{v_0}{g}$

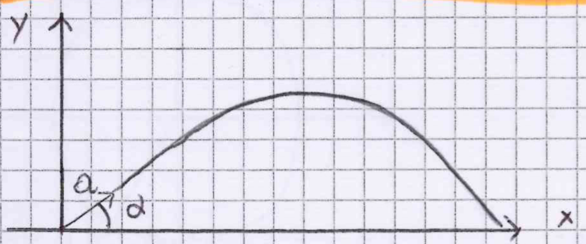
Quota massima: $h_{max} = h_0 + v_{y_0}\tau_s - \frac{1}{2} g \tau_s^2 = h_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2}$

$$\rightarrow h_{max} = h_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

Tempo di volo: $\tau_V = \tau_s + \tau_{FF}$

$$= \frac{2v_0}{g}$$

Moto parabolico di caduta libera



$$\begin{cases} v_{x_0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y_0} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$\downarrow\vec{g}$

$$\vec{g} = (0, -g, 0)$$
$$a_x = 0$$
$$v_x = v_{x_0} = v_0 \cos\alpha$$
$$x(t) = v_{x_0} t = (v\cos\alpha)t$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$
$$y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t \hat{g}$$

$$y = tg\,\alpha\, x - \frac{g}{2(v_0 \cos x)} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha$$

$h_{max} = y(x^*) \qquad h_{max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$

Tempo di salita $\quad v_y(\tau_s) = 0$ $\qquad$ Tempo di volo $\quad \tau_v = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

$\tau_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{...} = \frac{v_{y_0}}{...}$

Gittato (R)

$y(R)=0$

$$R = \frac{2(v_0 \cos\alpha)^2}{g} \, tg\,\alpha$$

$$R = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$$

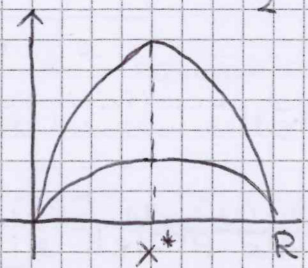
Gittato Massimo $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ $\quad R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

Tempo di volo per R_{max} $\quad \tau_v\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\, v_0}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_v\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Se spariamo un proiettile $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$: $R\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R(\alpha)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$



$\theta = 2x - \alpha$ $\quad x^*\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x^*(\alpha)$

$$h_{max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

$h_{max}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = h_{max}\left(\frac{\pi}{2}\right) - h_{max}(\alpha)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$h_{max}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{v_0^2}{2g} \cos^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}(1 - \sin^2\alpha)$

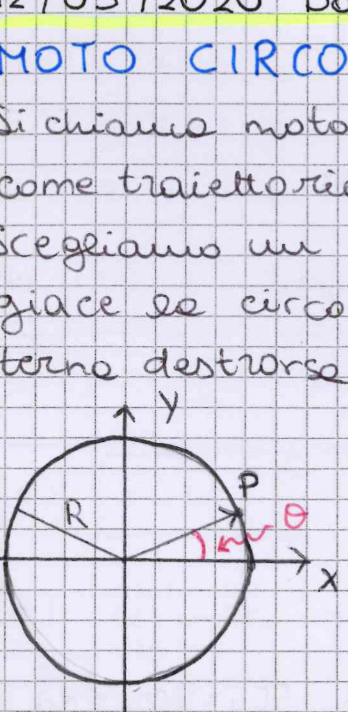
$\tau_v^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tau_v(\alpha) = \tau_v^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

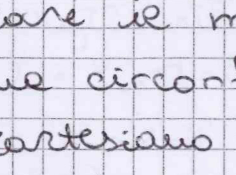
$v^2 = v_0^2 - 2gh$

12/03/2020 Bombaci

MOTO CIRCOLARE

Si chiama moto circolare il moto di un punto materiale che ha come traiettoria γ una circonferenza (o arco di circonferenza). Scegliamo un S.R. cartesiano con assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nel piano su cui giace la circonferenza l'asse $\hat{k}$ in modo da formare una terna destrorsa





Considerato un punto generico P sulla traiettoria γ ($P \in \gamma$) $P \equiv (x, y, z)$ abbiamo:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

(1) Legge oraria

(1) Legge oraria: equazione parametrica della traiettoria γ
Che possiamo scrivere: $\boxed{x^2(t) + y^2(t) = R^2}$ (2)

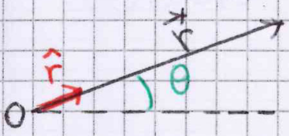
In notazione vettoriale la traiettoria si può scrivere*:

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} = R\,[\cos\theta(t)\,\hat{i} + \sin\theta(t)\,\hat{j}\,] = R\,\hat{r}(t)} \quad (3)$$

(*) poiché $z(t) = 0 \quad \forall t$ ignoriamo la variabile z

Dove abbiamo introdotto il versore:

$$\boxed{\hat{r}(t) = \cos\theta(t)\,\hat{i} + \sin\theta(t)\,\hat{j}} \quad (4)$$



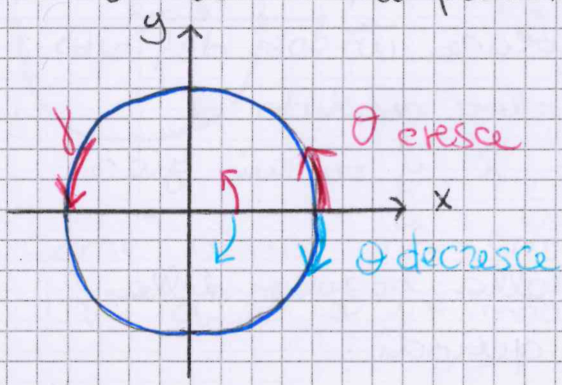
$$\hat{r}^2 = \hat{r}\cdot\hat{r} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Il versore $\hat{r}$ è sempre perpendicolare alla tangente della traiettoria in ogni suo punto

L'angolo θ è detto anomalia

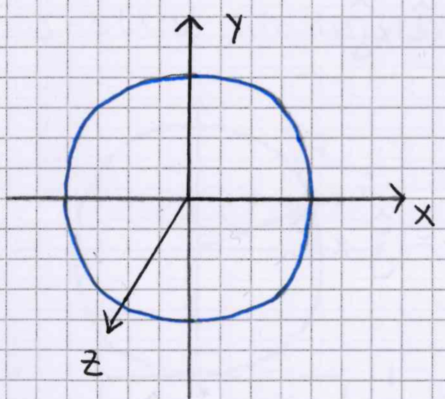
Convenzione sulle misure e segno di θ

θ è misurato a partire dall'asse $\vec{x}$



θ cresce in senso anti-orario (come in trigonometria)

Questo significa che abbiamo orientato la curva γ in senso anti-orario nel sistema destrorso, $\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}$ $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ e abbiamo scelto su γ un'origine $\Omega \equiv (R, 0, 0)$ e quindi abbiamo un'ascissa curvilinea.



$$\boxed{S(t) = R\,\theta(t)} \quad (5)$$

$$S(t) = \frac{2\pi R\,\theta(t)}{2\pi} = R\theta(t)$$

(Geometria: $S : 2\pi R = \theta : 360°$)

VELOCITÀ

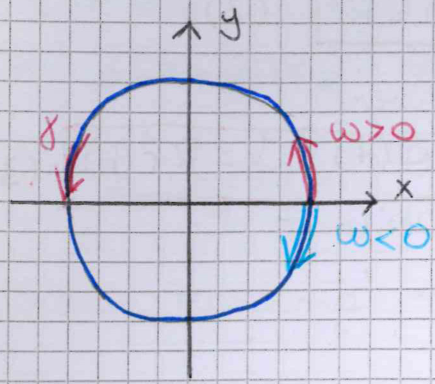
$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = -R\,\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta(t) \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = R\,\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta(t) \end{cases} \quad (6)$$

VELOCITÀ ANGOLARE

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \qquad [\omega] = \frac{rad}{s}$$

cioè $$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}} \quad (7)$$

Con la convenzione introdotta per la misura e il segno di θ si ha:



Inoltre poichè $s(t) = R\,\theta(t)$ derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{ds}{dt} = \frac{R\,d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{v_s(t) = R\,\dot{\theta}(t) = R\,\omega(t)} \quad (8)$$

La velocità del punto P si può quindi scrivere

$$\begin{cases} v_x(t) = -R\,\omega(t)\sin\theta(t) \\ v_y(t) = R\,\omega(t)\cos\theta(t) \end{cases} \quad (9)$$

Possiamo anche scrivere:

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_s(t)\,\hat{\tau}(t) = \omega(t)\,R\,\hat{\tau}(t)} \quad (10)$$

$\hat{\tau}$ versore tangente alla traiettoria γ con verso concorde all'orientamento di γ.

Vettore velocità angolare $\vec{\omega}$

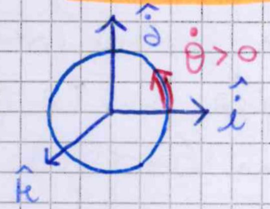
Introduciamo il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ così definito:

(i) modulo: $|\vec{\omega}| = \left|\frac{d\theta}{dt}\right| = |\omega|$ valore assoluto

(ii) direzione: ortogonale al piano $\vec{x}, \vec{y}$ su cui giace la curva γ

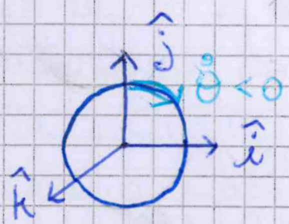
(iii) verso di $\vec{\omega}$: $\hat{\omega}$ determinato dalla regola della vite destrorsa, quindi:

ⓐ



Se: $\boxed{\omega = \dot{\theta} > 0 \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}}$

ⓑ



Se: $\boxed{\omega = \dot{\theta} < 0 \Rightarrow \hat{\omega} = -\hat{k} = \hat{j} \times \hat{i}}$

Quindi ricapitolando possiamo scrivere: $\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{k}}$ (11)

Per evitare confusione o ambiguità si potrebbe scrivere invece di $\omega = \dot{\theta}$, $\omega_s = \dot{\theta}$ per ricordarci che $\omega \neq |\vec{\omega}|$ cioè ω non è il modulo del vettore $\vec{\omega}$ una volta

$$\underset{\text{valore assoluto}}{|\omega|} = \underset{\text{modulo}}{|\vec{\omega}|}$$

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\,\hat{\omega} = |\dot{\theta}|\,\hat{\omega} \Rightarrow \boxed{\hat{\omega} = \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\,\hat{k}} \quad (11')$$

Torniamo all'espressione della velocità che possiamo scrivere come:

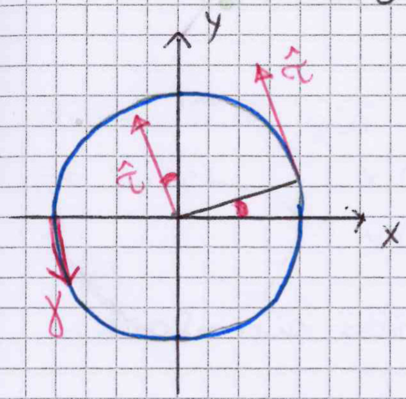
$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\,[-\sin\theta(t)\,\hat{i} + \cos\theta(t)\,\hat{j}\,]$$

Ma $\vec{v} = |\vec{v}|\,\hat{v} = v_s\,\hat{\tau}$ con $v_s = R\dot{\theta} = R\,\omega$

e quindi $\boxed{\hat{\tau}(t) = -\sin\theta(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j}}$ (12)

Come abbiamo già visto $\hat{\tau}$ è sempre tangente alla traiettoria γ e concorde al verso con cui esso è stato orientato (cioè antiorario per le nostre scelte). Quindi per il versore $\hat{v}$ si ha:

$$\dot{\theta} > 0 \Rightarrow \hat{v} = \hat{\tau}$$
$$\dot{\theta} < 0 \Rightarrow \hat{v} = -\hat{\tau}$$

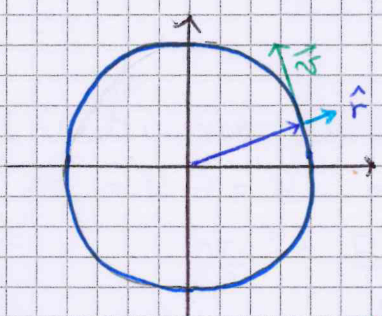


$$\hat{\tau}_x = -\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$
$$\hat{\tau}_y = \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

Come visto: $\vec{v} = v\hat{v} = v_s\hat{\tau} = \omega R\hat{\tau}$ quindi tra il modulo $|\vec{v}|$ di $\vec{v}$ e il modulo $|\vec{\omega}|$ di $\vec{\omega}$ deve aversi

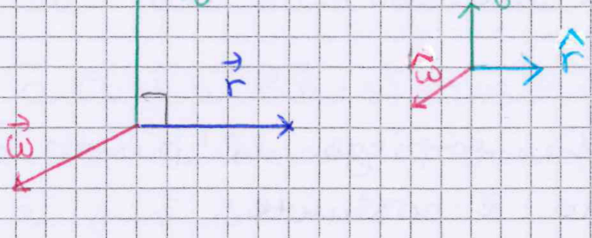
$$|\vec{v}| = R\,|\vec{\omega}|$$

Inoltre dalla definizione per il verso di $\vec{\omega}$ si ha (vedi figura)



$\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ uscente dal piano del foglio

cioè:



$\hat{r}, \hat{v}, \hat{\omega}$ sono fra loro ortogonali e costituiscono in questo ordine (e permutazioni cicliche) una terna destrorsa [come per i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$] e quindi,

$$\boxed{\hat{\omega} \times \hat{r} = \hat{v}}$$

Pertanto si ha:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (13)$$

Accelerazione

Derivando rispetto al tempo le relazioni per $v_x(t)$ si ottiene:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -R\dot{\omega}(t)\sin\theta(t) - R\omega^2(t)\cos\theta(t) =$$
$$= -R\left[\dot{\omega}(t)\sin\theta(t) + \omega^2\cos\theta(t)\right]$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = R\dot{\omega}(t)\cos\theta(t) - R\omega^2(t)\sin\theta(t) = \quad (14)$$
$$= R\left[\dot{\omega}(t)\cos\theta(t) - \omega^2(t)\sin\theta(t)\right]$$

con $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt} \equiv \ddot{\theta}$$

Moto circolare uniforme

Consideriamo il caso particolare del moto circolare uniforme, ovvero:

$$\boxed{v_s = cost} \longleftrightarrow \boxed{\omega = cost}$$

$$v_s = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega = cost \Rightarrow \ddot{s} = 0 \qquad \boxed{\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cost \Rightarrow d\theta = \omega\, dt \rightarrow$$

$$\boxed{\theta(t) = \omega t + \theta_0} \quad (15)$$

con $\theta_0 \equiv \theta(t_0)$ e $t_0 = 0$

Velocità

Inserendo la (15) nella (9) si ottiene

$$\begin{cases} V_x(t) = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0) \\ V_y(t) = R\omega\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases} \quad (16)$$

Periodo

$\omega = cost \Rightarrow$ il tempo che impiega il punto P a compiere una circonferenza completa è costante.

$$|\omega| = \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right| \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{|\omega|}} \quad (17)$$

Frequenza

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{|\omega|}{2\pi}} \qquad \boxed{[\nu] = s^{-1} = Hz}$$

Accelerazione

le equazioni (14) che danno l'accelerazione nel caso generale di moto circolare vario, nel caso di moto circolare uniforme cioè: $\boxed{\omega = cost} \rightarrow \boxed{\dot{\omega} = 0}$ si possono scrivere:

$$\boxed{\begin{aligned} a_x(t) &= -R\omega^2 \cos\theta(t) \\ a_y(t) &= -R\omega^2 \sin\theta(t) \end{aligned}} \quad (18)$$

con $\theta(t) = \omega t + \theta_0$

che possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}(t) &= -R\omega^2 [\cos\theta(t)\hat{i} + \sin\theta(t)\hat{j}] \\ &= -R\omega^2 \hat{r}(t) \end{aligned}}$$

dove $\hat{r}$ è già stato definito nell'equazione (4) $\hat{r} = -\hat{n}$

e poiché
$$x(t) = R\cos\theta(t)$$
$$y(t) = R\sin\theta(t) \quad \rightarrow \vec{r} = R\hat{r}$$

si ha: $\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)}$ (20)

Quindi nel caso di moto circolare uniforme si ha la sola accelerazione centripeta.

ciò è in accordo con la relazione generale che abbiamo trovato in precedenza (caso di γ = curva sghemba)

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_s(t)\hat{\tau}(t) + \frac{v_s^2(t)}{\rho(t)}\hat{n}(t)} \quad (21)$$

Infatti per il moto circolare uniforme

$v_s = R\dot{\theta} = R\omega = cost \Rightarrow a_s = 0$ $\quad \rho = cost \equiv R$ raggio di curvatura

$$\frac{v_s^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = \omega^2 R$$

e quindi la relazione generale (21) per $\vec{a}$ si può scrivere:

$$\vec{a}(t) = \omega^2 R\hat{n}(t) = -\omega^2 R\hat{r}(t) = -\omega^2\vec{r}(t) \quad (20)$$

Ricapitolando. L'accelerazione per il moto circolare uniforme si può scrivere:

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t) = \omega^2 R\hat{n}(t) = \frac{v^2}{R}\hat{n}(t)} \quad (22)$$

dove $v \equiv |\vec{v}| = |\omega| R = |\dot{\theta}| R$

valore assoluto

L'accelerazione per il moto circolare uniforme si può anche ricavare usando la relazione (13)

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

Per il moto circolare uniforme

$$\boxed{\vec{\omega}(t) = cost} \rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{\omega} \times \vec{v}(t)} \qquad (23)$$

Che possiamo anche scrivere

$$\vec{a}(t) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t))$$

Adesso usiamo la relazione per il triplo prodotto vettoriale

$$\boxed{\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}} \qquad (24)$$

Nel nostro caso:

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{\vec{\omega} \perp \vec{r}}\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = 0 - \omega^2 \vec{r}$$

e quindi $\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)}$ (25)

come visto in precedenza.

Torniamo al caso generale del moto circolare vario

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)} = \dot{\theta}(t)\hat{k} = |\dot{\theta}|\hat{\omega}$$

in questo caso $\quad \omega = \omega(t) \equiv \dot{\theta}(t)$

$$\hat{\omega} = \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\hat{k}$$

Se il moto è circolare e quindi giace sempre nel piano $(\vec{x}, \vec{y})$, la direzione del vettore $\vec{\omega}$ è costante (asse $\vec{z}$) ma il verso di $\vec{\omega}$ (cioè il versore $\hat{\omega}$) può cambiare nel tempo.

Accelerazione (moto circolare vario)

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\vec{r} =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \qquad (26)$$

Calcoliamo ora $\dot{\vec{\omega}}$

$$\dot{\vec{\omega}} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \hat{k}) = \dot{\omega}\hat{k}$$

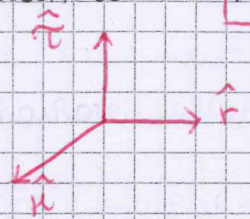
ma $\hat{k} \perp \vec{r} \Rightarrow \sin \widehat{\hat{k}\hat{r}} = 1$ e quindi $\vec{r}(t) = R\hat{r}(t)$

$\vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\omega}\hat{n} \times R\hat{r} = \dot{\omega}R(\hat{n} \times \hat{r})$

$(\hat{n} \times \vec{r}) \perp \hat{n} \Rightarrow$ giace sul piano $\vec{x}, \vec{y}$

$(\hat{n} \times \vec{r}) \perp \hat{r}$

Quindi $\boxed{\hat{n} \times \hat{r} = \hat{\tau}}$ (27)



dove $\hat{\tau}$ è il versore tangente alla traiettoria introdotto precedentemente

Tornando quindi all'equazione (26) per $\vec{a}(t)$ si ha:

$$\vec{a}(t) \equiv \dot{\omega}R\hat{\tau} - \omega^2 R\hat{r} \quad \text{ma} \quad \hat{r} = -\hat{n}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \underbrace{\dot{\omega}(t)R\hat{\tau}(t)}_{\text{acc. tangenziale}} + \underbrace{\omega^2(t)R\hat{n}(t)}_{\text{acc. centripeta}}} \quad (28)$$

La stessa relazione (28) per l'accelerazione per il moto circolare vario può essere ricavata partendo dalle espressioni più le sue componenti a_x e a_y ricavate precedentemente ((14)) che di seguito riscriviamo:

$$\begin{cases} a_x = -R(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta) \\ a_y = R(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta) \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\vec{a} = R\dot{\omega}[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}] - R\omega^2[\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}]$$

Ma come abbiamo visto

$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ (4)

$\hat{r} = -\hat{n}$ $\rightarrow$ e quindi $\vec{a} = \dot{\omega}R\hat{\tau} + \omega^2 R\hat{n}$

$\hat{\tau} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$ (12) così ritroviamo l'eq. (28)

16/03/2020 Bombaci

DINAMICA

La dinamica riguarda lo studio del moto dei corpi a partire dalle cause che lo determinano

Quale è la causa del moto di un corpo?

Prima di porsi questa domanda e poi cercare di darle una risposta bisogna stabilire

Quale è lo "stato naturale di moto" di un corpo.

Stato naturale di moto di un corpo

> Aristotele: quiete

> Galilei, Newton: quiete oppure moto rettilineo uniforme (sr di inerzia)

Cause del moto

Per Aristotele esistono due tipi di moto:

- **Moti violenti**: causati da un'azione esterna
- **Moti naturali**: il corpo tende al suo luogo naturale

Cause della variazione del moto

Per Galilei, Newton, ..., si deve parlare di cause della variazione del moto:

- **Forza**: produce una variazione del moto (accelerazione) nella direzione della forza e ad essa proporzionale

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

Cinematica: $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$

Dinamica:

Nella dinamica entrano in gioco due nuove grandezze fisiche:
la massa e la forza collegate dalla Seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La forza è una grandezza fisica che descrive l'azione reciproca (interazione) tra il corpo considerato e l'ambiente (gli altri corpi circostanti).
La forza è determinata (ovvero misurata oppure prescritta da un modello). La massa è una proprietà intrinseca del corpo.
L'accelerazione è una proprietà cinematica.

Seconda legge di Newton $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$

La forza applicata sul corpo produce una accelerazione (cioè una variazione di moto) che è proporzionale alla forza stessa. La costante di proporzionalità è l'inverso del corpo.

Le interazioni fondamentali

Esistono in natura quattro interazioni fondamentali:

- Gravitazionale
- Elettromagnetica
- Forte
- Debole

L'interazione gravitazionale è descritta dalla teoria della relatività generale, formulata nel 1916 da Albert Einstein.
La relatività generale, nel caso di campi "deboli", si riduce alla teoria di Newton.

L'interazione forte descrive l'interazione tra i quark (che sono i costituenti, ad esempio di protoni e neutroni). Da questa interazione si può derivare (o meglio si dovrebbe essere in grado di derivare) la forza nucleare, ovvero la forza che si ha tra neutroni e protoni in un nucleo atomico.
L'interazione debole è responsabile, ad esempio, del cosiddetto decadimento beta dei nuclei atomici.

Forze (a livello macroscopico):

Nei sistemi fisici descritti dalla meccanica (classica) entrano spesso in gioco le seguenti forze:

- Forze di attrito
- Reazioni vincolari
- Forze elastiche
- Forze nei processi di urto
- Tensioni di fili e cavi

L'origine microscopica di queste forze è l'interazione elettromagnetica

La legge di forza, cioè l'espressione matematica che descrive queste forze, non può essere ricavata a partire dall'interazione elettromagnetica tra i costituenti (molecole / atomi) dei corpi macroscopici che interagiscono, ma viene ricavata empiricamente, ovvero partendo da dati sperimentali si ottengono delle espressioni fenomenologiche delle legge di forza (come vedremo a breve nel caso delle forze elastiche)

PROPRIETÀ DELLE FORZE

(1) L'insieme delle forze che agiscono su un corpo puntiforme (o in uno stesso punto di un corpo esteso) equivalgono ad un'unica forza uguale alla somma vettoriale delle singole forze (risultante delle forze). $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

(2) Interazione. La forza, come detto, nasce dalla azione reciproca tra il corpo considerato e gli altri corpi circostanti (ambiente esterno). Nel caso di due corpi (dei quali il corpo 1 è quello di cui vogliamo studiare il moto) si ha che la forza F che il corpo 1 sente a causa dell'interazione col corpo 2 si può scrivere come:

$$\vec{F} = \vec{F}(\alpha_1, \alpha_2, \vec{r}, \vec{v})$$

Dove α_1, α_2 sono delle proprietà intrinseche dei corpi interagenti (ad esempio le loro masse, o le loro cariche elettriche). Mentre

$\vec{r}, \vec{v}$ sono la distanza relativa e la velocità relativa tra i due corpi. La forza ha quindi un significato intrinseco e quindi non dipende dal sistema di riferimento.

(3) La forza tra i due corpi tende a zero al crescere della loro distanza: $r \to \infty \Rightarrow F \to 0$

Per $r \to \infty$ il corpo diventa **isolato** (non interagisce con nessun altro corpo). Inoltre si assume che $F \to 0$ almeno come $1/r^2$

Assumiamo questo tipo di dipendenza radiale della forza a grandi distanze come un fatto sperimentale: ad esempio per la forza gravitazionale tra due corpi puntiformi oppure per la forza elettrostatica tra due cariche elettriche puntiformi si ha $F \sim \frac{1}{r^2}$ mentre per la forza nucleare si ha $F \sim e^{-r/\lambda}\frac{1}{r}$, con $\lambda \approx 10^{-15}$ m

Unità di misura della forza

$\vec{F} = m\vec{a}$ forza = $\frac{\text{massa} \times \text{lunghezza}}{(\text{tempo})^2}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Newton} \\ 1N = 1Kg \times m \times s^{-2}\end{array}}$

PROPRIETÀ DELLA MASSA

La massa è una proprietà intrinseca del corpo e pertanto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali (SRI). La massa è una grandezza fisica **scalare** positiva: $m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$

Newton definisce la massa come la quantità di materia contenuta nel corpo. La massa è una grandezza fisica additiva. Cioè la massa M di un sistema fisico formato da N costituenti di masse individuali m_i: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Attenzione! La relazione precedente, cioè l'additività delle masse, non è una relazione esatta, ma è per scopi pratici "esatta" per tutti i sistemi macroscopici descritti dalla meccanica classica. In Relatività Speciale $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ dove m_0 = massa a riposo

PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Sistemi di riferimento inerziali

Ci chiediamo: In quali sistemi di riferimento vale $\vec{F} = m\vec{a}$?

- La forza è una grandezza fisica che descrive l'azione reciproca (interazione) corpo-ambiente, quindi non dipende dal SR

- La **massa** è una proprietà intrinseca del corpo in esame e quindi non dipende dal sistema di riferimento ($v << c$)
- L'accelerazione è invece una grandezza che dipende dal SR

Il primo principio della dinamica rappresenta una condizione necessaria per la validità del secondo principio. Affinché il primo principio della dinamica non sia una tautologia (cioè abbia valore informativo) bisogna stabilire un criterio (su base empirica e/o teorica) che ci permetta di dire quando un corpo non è soggetto a forze.

Come abbiamo visto la forza ha origine dalla interazione del corpo (di cui vogliamo studiare il moto) con tutti gli altri corpi dell'ambiente. Inoltre abbiamo visto (basandoci su dati sperimentali) che quando $r \to \infty \Rightarrow F(r) \to 0$ almeno come $1/r^2$

Quindi un corpo isolato, non è soggetto a forze, e quindi è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.

I sistemi di riferimento in cui vale il primo principio della dinamica vengono detti sistemi di riferimento inerziali (SRI)

Newton assume che lo spazio sia assoluto.

Lo spazio assoluto costituisce per Newton un sistema di riferimento privilegiato in cui vale il Principio d'inerzia.

Per Newton il sistema di riferimento solidale con le stelle "fisse" costituisca un'eccellente approssimazione dello spazio assoluto. Oggi sappiamo che le cosiddette stelle "fisse" non sono in effetti fisse ma si muovono rispetto al centro di massa della Galassia.

Per Newton anche il tempo è assoluto.

Esempi di sistemi di riferimento

Sistema di riferimento solidale alla Terra.

Non è un SRI: la Terra ruota attorno al proprio asse e ruota attorno al Sole.

Sistema di riferimento solidale alla nostra galassia con origine nel centro (di massa) della Galassia.

NON è un SRI: la nostra galassia ha un moto rispetto alle galassie "vicine" che costituiscono il cosiddetto Gruppo Locale (un gruppo di ca 70 galassie)

Chiaramente ciascuno di questi sistemi di riferimento costituisce nell'ordine di elencazione una approssimazione sempre migliore di un SRI.

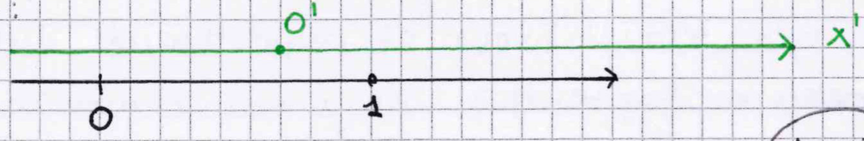
La definizione moderna di sistema di riferimento inerziale è la seguente: si definisce sistema di riferimento inerziale un sistema di riferimento per il quale lo spazio è omogeneo e isotropo ed il

tempo è omogeneo.

Cioè in un SRI tutti i punti dello spazio e tutte le direzioni spaziali sono equivalenti e tutti gli istanti di tempo sono equivalenti

Una volta che è stato individuato un particolare sistema di riferimento inerziale **S** si ha che tutti i sistemi di riferimento **S'** in moto rispetto ad **S** con velocità costante $\vec{V}$ sono inerziali.

Infatti:



$\boxed{t = t'}$

$t = 0 \qquad O \equiv O'$

$x'(t) = x(t) - V$

$v'(t) = v(t) - V$

$a' = a \qquad F = ma$

$\vec{F} = m\vec{a}$ come equazione del moto

Caso unidimensionale

$\vec{F} \equiv (F_x, 0, 0) \qquad F_x \equiv F$

$F = F(x, \dot{x})$

Vogliamo determinare $x = x(t)$ legge oraria

$$\boxed{m\ddot{x} = F(x, \dot{x})}$$ Equazione del moto

$x = x(t)$

$m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t)) \quad \forall t$

$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$t_0 = 0$

$x(t_0) \equiv x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_0(t_0)$

$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \qquad\qquad \dot{x}_0 = \frac{dx}{dt} x_0$

$\Rightarrow c_1, c_2$

$F = cost \qquad \ddot{x} = \frac{F}{m} = cost$

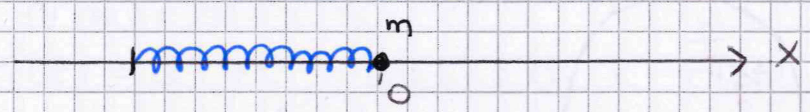
$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + c_1 t + c_2$

$t_0 = 0 \qquad x_0 \equiv x(t_0) \qquad \dot{x}_0 \equiv x(t_0)$

$\Rightarrow c_2 = x_0 \qquad \dot{x}_0 = c_1$

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \qquad t_0 = 0$

Oscillatore armonico



$l_0 \equiv$ lunghezza a riposo della molla

$x \equiv \Delta l = l - l_0$ $\quad \Delta l > 0$ allungata

$\Delta l < 0$ compressa

$|\Delta l| \ll l_0$

$$\boxed{\vec{F} = -kx\hat{i}}$$ legge di Hooke

$k = \text{cost} > 0$

$[k] = \dfrac{\text{forza}}{\text{lunghezza}}$ costante elastica della molla

$[k] = \dfrac{N}{m}$

Molla ideale

$m_{molla} = 0$ $\qquad m_{molla} \ll m$

$l_0 = 0$

$$\boxed{F = -kx}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$

$\dot{x}(t) = v_x(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$

$t_0 = 0 \quad x_0$

$v_0 = \dot{x}_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = x_0 \quad C_2 = \dfrac{v_0}{\omega}}$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

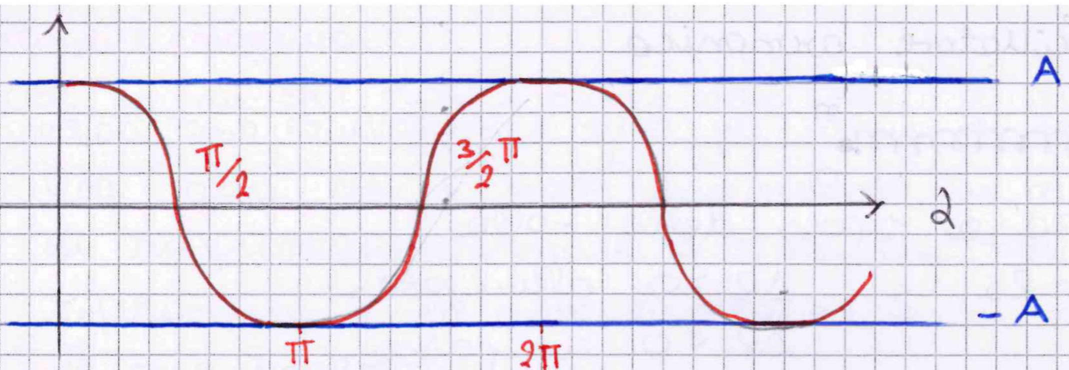
$A \equiv$ ampiezza, $\varphi =$ fase

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$C_1 = A\cos\varphi \quad , \quad C_2 = -A\sin\varphi$

$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{m v_0^2}{k}}$

$\text{tg}\,\varphi = -\dfrac{v_0}{x_0 \omega} = -\dfrac{v_0}{x_0}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ $\qquad v_x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$



$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ Il moto armonico è un moto periodico

$-A \leq x \leq A$ traiettoria segmento di retta

$$a_x(t) = \dot{v}_x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Punti di elongazione massima

$$x = \pm A \Rightarrow v_x = 0$$
$$a_x = \mp \omega^2 A$$
$$|a_x|_{max} = \omega^2 A$$

Punti di elongazione nulla

$$x = 0 \Rightarrow |v_x| = \omega A \equiv |v_x|_{nulla}$$
$$a_x = 0$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME COME COMPOSIZIONE DI DUE MOTI ARMONICI (su $\vec{x}$ e $\vec{y}$)

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

$$\alpha \equiv \omega t + \theta_0$$
$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$y(t) = R\sin\alpha = R\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

17/03/2020 Bombaci

POSIZIONI DI EQUILIBRIO

Una posizione di equilibrio è un punto P dello spazio, individuato dal vettore posizione $\vec{r}_P = \overline{OP}$, tale che un punto materiale di massa m, posto in P con velocità nulla vi permane indefinitivamente.

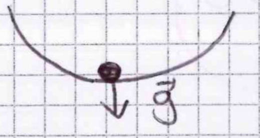
$$\left.\begin{array}{l}\vec r(t_0)=\vec r_P\\ \vec v(t_0)=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec r(t)=\vec r_P \quad \forall t$$

$$\Longrightarrow \vec v(t)=0 \quad \forall t, \quad \vec a(t)=0 \quad e \quad \vec F=0$$

Data una legge di forza $\vec F(\vec r, \dot{\vec r})$ i punti di equilibrio sono i punti P che soddisfano la seguente equazione:

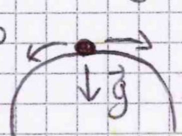
$$\boxed{\vec F(\vec r_P, \vec v_P = 0) = 0}$$

Diremo che un **punto di** equilibrio stabile, se quando si sposta il punto materiale dalla posizione di equilibrio, si genera una forza che tende a riportarlo verso la posizione di equilibrio.



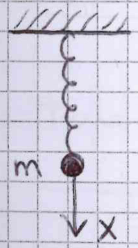
equilibrio stabile

Diremo che un punto di equilibrio è un **punto di** equilibrio instabile, se qualsiasi spostamento (anche "piccolo" e al limite infinitesimo) del punto materiale lo sposta dalla posizione iniziale di equilibrio.



equilibrio instabile

OSCILLATORE ARMONICO SOGGETTO A UNA FORZA COSTANTE F_0



$$\vec F = (-Kx + F_0)\hat i \qquad F_0 \equiv F_{x_0} \gtrless 0$$

$$K > 0$$

$$m\ddot x = -Kx + F_0$$

$$\boxed{\ddot x + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$x(t) = cost \equiv \bar x \qquad \bar x = \frac{F_0}{K}$$

$$x(t) = \bar x + A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$l_0' = l_0 + \bar x$$

$$\ddot x = -\frac{K}{m}x + \frac{F_0}{m} = -\frac{K}{m}\left(x - \frac{F_0}{K}\right)$$

$$\xi \equiv x - \frac{F_0}{K} = x - \bar x$$

$$\bar x = cost \Rightarrow \ddot\xi = \ddot x \qquad \boxed{\ddot\xi = -\frac{K}{m}\xi}$$

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = \bar x + A\cos(\omega t + \varphi)$$

Piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile

$\vec{F} = F(x)$ non dipende da $\dot{x}$

$x_0 \equiv$ punto equilibrio stabile

$F(x_0) = 0$

Sviluppiamo in serie di Taylor attorno al punto x_0

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0)(x - x_0)^2 \dots$$

$|x - x_0| \ll a \equiv$ Raggio di azione della forza

$F(x_0) = 0$

equilibrio stabile $\Rightarrow F'(x_0) \equiv \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} < 0$

$$K \equiv -\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} > 0$$

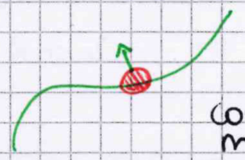
$$\boxed{F(x) \simeq -K(x - x_0)}$$ forza elastica

$$m\ddot{x} = -K(x - x_0)$$

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \varphi)$$

VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI

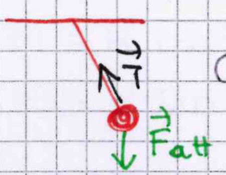
$S(x, y, z) = 0$



corpo vincolato a muoversi su una curva γ (es: perlina in un filo)

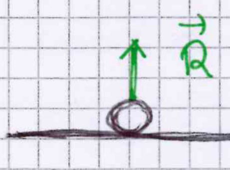
$\vec{R} \equiv$ reazioni vincolari

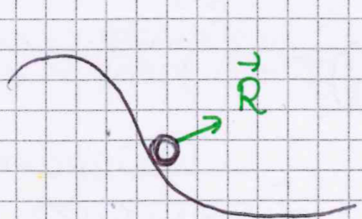
Sono le forze esercitate dal vincolo sul corpo



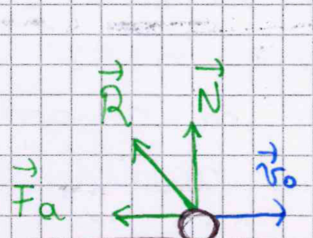
(es: pendolo)

$$\boxed{m\vec{a} = F_{att} + \vec{R}}$$





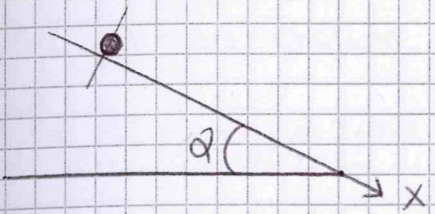
Vincoli lisci (senza attrito)
In questo caso la reazione vincolare è sempre perpendicolare alla superficie nel punto di contatto



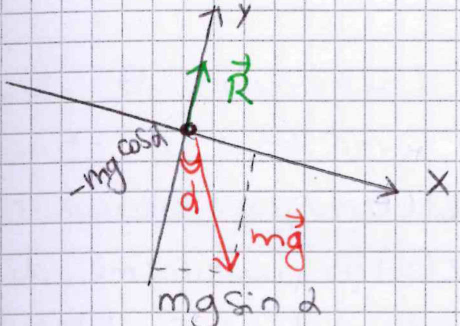
Vincoli scabri (si ha attrito)
In questo caso la reazione vincolare presenta anche una componente tangenziale detta forza di attrito (radente)

Esempi di moto di corpi soggetti a vincoli

PIANO INCLINATO (liscio)



$$\boxed{m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}}$$



$\vec{R} \equiv (0, \vec{R}_y)$

$\vec{g} = (g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha \\ m\ddot{y} = R_y - mg\cos\alpha \end{cases}$$

vincolo $\Rightarrow y(t) = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow \ddot{y}(t) = 0$

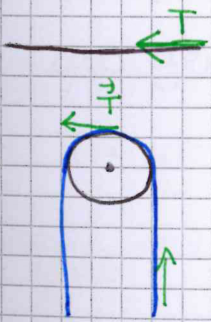
$\Rightarrow \boxed{R_y = mg\cos\alpha} \qquad t_0 = 0$

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2$

FILI E CAVI

Filo ideale $\equiv \begin{cases} m_{filo} = 0 \\ \text{indeformabile} \end{cases}$

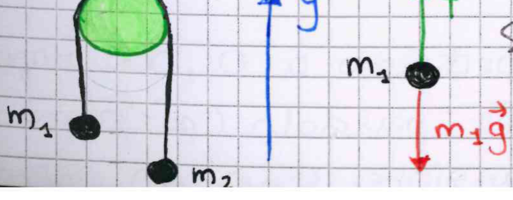
Tensione del filo (cavo) $\vec{T}$



La forza trasmessa dal cavo è detta **tensione** del cavo.
La tensione è sempre tangente al cavo.
Per un cavo (filo) ideale la tensione è sempre la stessa in tutti i suoi punti.
Se il cavo è curvo la proprietà precedente vale se le superfici di contatto tra il cavo e i corpi che lo curvano (puleggia) sono prive di attrito.

Esempio: masse appese ad un cavo ideale passante attraverso una carrucola ideale.

$m_{carr} = 0$



sia $m_1 \ll m_2$

$T \equiv$ tensione filo

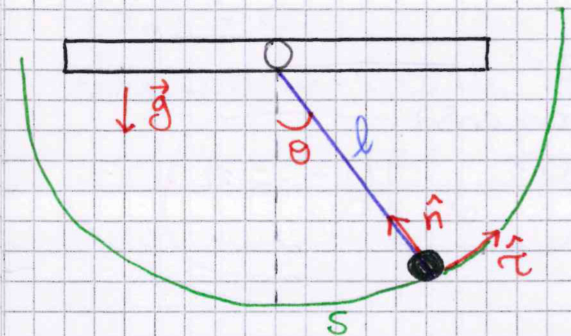
$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 = T - m_1 g \\ m_2\ddot{y}_2 = T - m_2 g \end{cases}$$

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 = 0 \Rightarrow \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1$$

$$\boxed{\ddot{y}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g = cost}$$

$$\boxed{T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

$$m_1 g \leq T \leq m_2 g$$



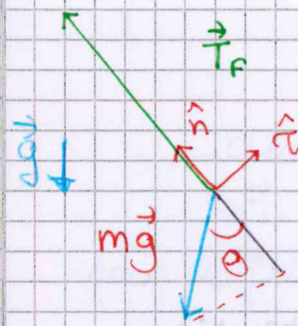
PENDOLO SEMPLICE

Consideriamo un corpo puntiforme di massa **m** attaccato ad una delle estremità di un filo inestensibile di massa nulla e lunghezza l e fissiamo la seconda estremità del filo ad un punto di sospensione **O**.

$v_{z_0} = 0$, avendo definito come x, y quello individuato dalla direzione iniziale del filo e dal vettore g.

$$\boxed{\vec{a}(t) = l\,\ddot{\theta}\,\hat{\tau}(t) + l\,\dot{\theta}(t)\,\hat{n}(t)}$$ accelerazione tangenziale + accelerazione centripeta

$s(t) = l\theta$ (*), $v_s = l\dot{\theta}$, $a_s = l\ddot{\theta}$ (*) $s = \frac{2\pi l}{360°} \cdot \theta = l\theta$



T_F = tensione

$F_\tau = -mg \sin\theta(t)$

$F_n = -mg\cos\theta(t)$

$\vec{T}_F = T_F\,\hat{n}$

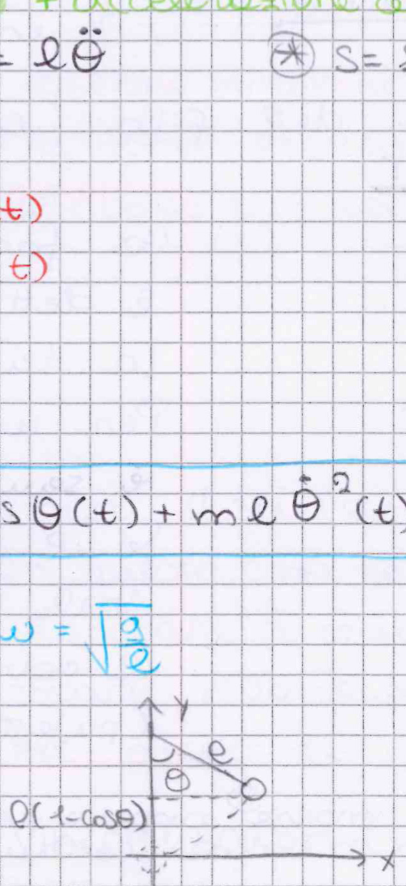
$m\vec{g} + \vec{T}_F = m\vec{a}$

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$
$$ml\dot{\theta}^2 = T_F - mg\cos\theta$$

$$\boxed{T_F = mg\cos\theta(t) + ml\dot{\theta}^2(t)}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0}$$



19/03/2020 Bombaci

PICCOLE OSCILLAZIONI

Per valori piccoli di θ, cioè per θ prossimo a 0, che rappresenta la posizione di equilibrio stabile del pendolo (posizione verticale), possiamo espandere la funzione seno in serie

di Taylor attorno a $\theta = 0$: $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$

Al primo ordine in θ: $\sin\theta \cong \theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0}$$

Che è l'equazione differenziale per un oscillatore armonico, la cui soluzione è:

$$\boxed{\theta(t) = \Theta \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

dove Θ (ampiezza) e φ_0 sono due costanti da determinare usando le condizioni iniziali del moto.

Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{\theta}(t) = \Theta\, \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Queste due funzioni ci permettono quindi di ricavare la tensione del filo per T_F (che avevamo ricavato durante la lezione precedente) in funzione del tempo

$$T_F(t) = mg\cos\theta(t) + m\ell\,\dot{\theta}(t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

(i) isocrone (piccole oscillazioni)

(ii) T non dipende da m

(iii) $T \sim \sqrt{\ell}$ $\quad T \sim \frac{1}{\sqrt{g}}$ (proporzionale)

$$\boxed{g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}}$$

Caso generale: $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$

Termini correttivi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{\Theta}{2} + \dots\right\}$$

Tensione del filo $\rightarrow T_F = mg\cos\theta(t) + m\ell\,\dot{\theta}^2(t)$

piccole oscillazioni $\quad \Theta \ll 1$ rad

$\theta(t) = \Theta\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad \dot{\theta} = \Theta\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$

$t_0 = 0 \qquad \theta(t_0) = \Theta$

$\dot{\theta}(t_0) = 0 \qquad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t) \qquad \omega^2 = \frac{g}{\ell}$

$\dot{\theta}(t) = -\Theta\,\omega\sin(\omega t)$

$$T_F = mg\cos[\Theta\cos(\omega t)] + m\ell\,\Theta^2\omega^2\sin^2(\omega t) =$$
$$= mg\{\cos[\Theta\cos(\omega t)] + \Theta^2\sin^2(\omega t)\}$$

$$-\Theta \le \Theta\cos(\omega t) \le \Theta$$

$\Theta \ll 1$ rad

$$\cos[\Theta \cos \omega t] = 1 - \frac{1}{2}\Theta^2 \cos^2 \omega t + \dots$$

$$T_F \simeq mg\left\{1 - \frac{1}{2}\Theta^2 \cos^2 \omega t + \Theta^2 \sin^2 \omega t\right\} =$$

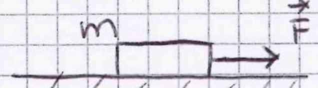
$$= m\left\{1 - \Theta^2\left[\frac{1}{2}\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t\right]\right\}$$

$$\boxed{T_F(t) \simeq mg\left\{1 + \Theta^2\left[1 - \frac{3}{2}\cos^2 \omega t\right]\right\}}$$

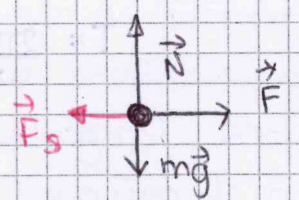
VINCOLI SCABRI

Quando fra le superfici di contatto del vincolo e del corpo di cui si vuole studiare il moto sono presenti delle forze di attrito.

(a) caso di vincolo liscio $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$



(b) vincolo scabro $\boxed{F > F_{min}}$



$F \leq F_{min}$ il corpo resta fermo

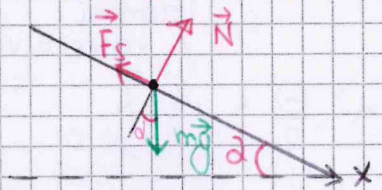
$F_s \equiv$ Forza di attrito statico

$F_s = F \leq F_{min}$ $\quad \vec{F}_s = -\vec{F}$

L'esperienza mostra:

$\boxed{F_s \equiv |\vec{F}_s| \leq \mu_s N \equiv F_s^{max}}$ $\quad \mu_s \equiv$ coeff. di attrito statico

PIANO INCLINATO SCABRO



$\downarrow \vec{g}$

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s = 0$$

$$F_s = mg \sin \alpha$$
$$N = mg \cos \alpha$$
$$\rightarrow F_s = tg\,\alpha \cdot N$$

$$F_s = tg\,\alpha \cdot N \leq \mu_s N \equiv tg\,(\alpha_{min}) \cdot N$$

$$\boxed{tg\,\alpha_{min} = \mu_s} \qquad \alpha > \alpha_{min} = arctg(\mu_s)$$

Esempi:

gomma - asfalto liscio asciutto: $\mu_s = 0,6 - 0,7 \Rightarrow \alpha_{min} = 31° - 35°$

gomma - asfalto liscio bagnato: $\mu_s = 0,45 - 0,55 \Rightarrow \alpha_{min} = 24° - 29°$

VINCOLI SCABRI: attrito dinamico

$F > \mu_s N = F_s^{max}$ $\quad \vec{F}_d \equiv$ forza di attrito dinamico

$|\vec{F}_d| = \mu_d |\vec{N}|$ $\quad \mu_d \equiv$ coeff. di attrito dinamico

$$\boxed{\vec{F}_d = -\mu_d N \hat{v}} \qquad \mu_s \leq \mu_d$$

MOTO DI UN CORPO IN UN MEZZO VISCOSO: forze viscose

Proprietà delle forze viscose:

- $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$
- se il mezzo è omogeneo la forza non dipende da $\vec{r}$ (posiz.) — mantiene le stesse proprietà ovunque es. acqua; non-es: acqua fritt, acqua+olio
- $\hat{F} = -\hat{v}$
- $v << v_{crit} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = -\beta\vec{v}}$ legge di Stokes

$\beta = cost > 0 \qquad [\beta] = \frac{massa}{tempo}$

β dipende da:

(i) dimensioni e forma del corpo

(ii) proprietà del fluido (viscosità del fluido)

Studiamo ora il moto di un corpo di massa m in un fluido viscoso, supponendo per il momento che il corpo sia soggetto solo alla forza viscosa.

$t_0 = 0 \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 \neq 0 \Rightarrow$ moto unidimensionale

$\vec{F} = -\beta\vec{v}$

$m\vec{a} = -\beta\vec{v} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}$

$\Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x \qquad \tau \equiv \frac{m}{\beta} > 0$

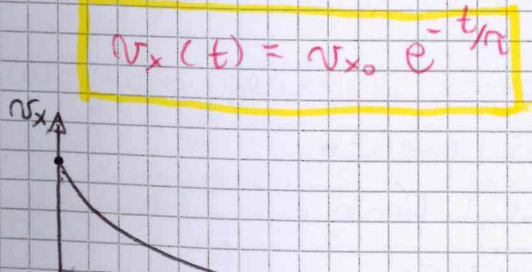
$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x \qquad [\tau] \equiv tempo$

$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{\tau} dt \qquad t_0 = 0$, t generico

$\int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{\tau} t$

$\ln v_x - \ln v_{x_0} = \ln\left(\frac{v_x}{v_{x_0}}\right) = -\frac{1}{\tau} t$

$$\boxed{v_x(t) = v_{x_0} e^{-t/\tau}}$$



$t = \tau$

$v_x(\tau) = \frac{1}{e} v_{x_0} \qquad v_x = \frac{dx}{dt}$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{x_0}\tau(1 - e^{-t/\tau})}$$

$v_x = v_0 - \frac{1}{\tau}(x - x_0)$

$x - x_0 = v_0\tau \equiv X$

$x \leq x_{lim} = x_0 + v_0\tau$

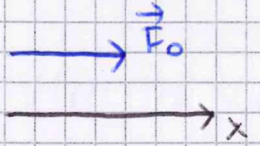
23/03/2020 Bombaci

MOTO DI UN CORPO SOGGETTO AD UNA FORZA COSTANTE IN UN MEZZO VISCOSO

Su un corpo agiscono due forze:

$\vec{F}_v = -\beta\vec{v}$; $\vec{F}_0 = \vec{cost}$ (es. $\vec{F}_0 = m\vec{g}$)

Supponendo di avere una $\vec{F}_0 \parallel \vec{v}_0$, e scegliendo l'asse x lungo la direzione di questo moto abbiamo:



$$\vec{F}_0 = F_0\hat{i}$$

II LEGGE DI NEWTON

$m\vec{a} = \vec{F}_0 - \beta\vec{v}$ $\quad m\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x + F_0$ $\quad$ (RICORDA: $\tau \equiv \frac{m}{\beta} > 0$)

$$\boxed{\frac{dv_x}{dt} + \frac{\beta}{m}v_x = \frac{F_0}{m}}$$

↓

la soluzione di questa eq. differenziale è =

= soluzione dell'eq. omogenea associata + soluzione particolare dell'equazione completa

↓ costante di integraz. $C\,e^{-t/\tau}$

↓ $v_x(t) = \frac{F_0}{\beta}$

$= \frac{F_0}{m}\tau \equiv v_{lim} = cost > 0$

$$v_x(t) = C\,e^{-t/\tau} + \frac{F_0}{\beta}$$

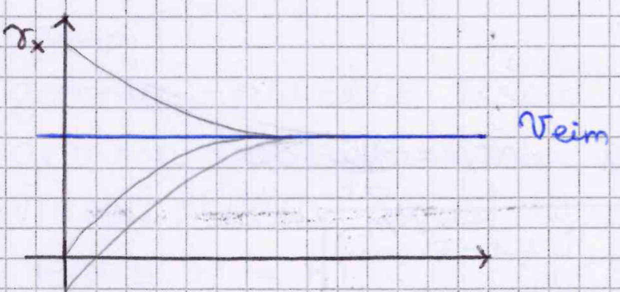
Se $t = t_0 = 0 \Rightarrow v_x(t_0) = v_{x_0} \Rightarrow C = v_{x_0} - v_{lim}$

CASO PARTICOLARE: Se $F_0 = mg \Rightarrow v_{lim} = \frac{mg}{\beta} = \tau g$

$$\boxed{v_x(t) = (v_{x_0} - v_{lim})\,e^{-t/\tau} + v_{lim}}$$

- Quando $t \to \infty$, $t \gg \tau$ $\Rightarrow v_x(t) \to v_{lim}$

$$v_x(t) = v_{x_0}e^{-t/\tau} + (1 - e^{-t/\tau})v_{lim}$$



la velocità cresce (o decresce) fino a raggiungere la velocità limite

- $t \ll \tau = \frac{m}{\beta}$ $\quad |v_{x_0}| \ll v_{lim} = \frac{F_0}{m}\tau$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ (estensione in serie di Taylor)

$$\frac{t}{\tau} \ll 1 \Rightarrow e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau} \Rightarrow v_x(t) \simeq (v_{x_0} - v_{lim})\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + v_{lim}$$

$$= v_{x_0} \cancel{- v_{x_0}\frac{t}{\tau}} + v_{lim}\frac{t}{\tau} - \cancel{v_{lim}} + \cancel{v_{lim}}$$

Poiché $v_{x_0} \ll v_{lim}$, posso trascurarl

$$\Rightarrow v_x(t) \simeq v_{x_0} + v_{lim}\frac{t}{\tau}$$

$$\boxed{v_x(t) \simeq v_{x_0} + \frac{F_0}{m} t}$$

Se $F_0 = mg \Rightarrow v_x(t) \simeq v_{x_0} + gt$ cresce linearmente; da ciò segue che:

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{F_0}{m} = g = \text{costante}$$

CORPO SFERICO DI RAGGIO R:

$\beta = 6\pi R \eta$ $\qquad \eta \equiv$ coefficiente di viscosità

Legge di Stokes: $\vec{F} = -\beta \vec{v}$

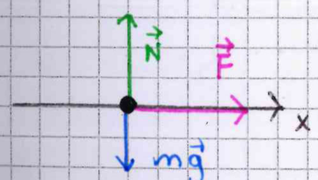
<u>Esempio</u>: $\eta = 0{,}018 \times 10^{-3} \ \frac{Ns}{m^2}$ (Aria)

$\eta = 1{,}005 \times 10^{-3} \ \frac{Ns}{m^2}$ (Acqua)

LAVORO

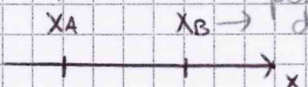
(i) Caso di una Forza costante

$\vec{F} = \vec{F}(x) = \vec{cost}$



piano d'appoggio liscio

pos iniziale



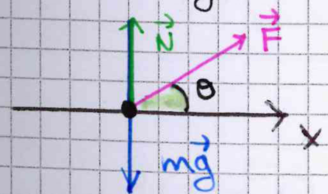
pos raggiunta dopo un tempo t

$\Delta x = x_A - x_B$ $\qquad \Delta x > 0$

$$\boxed{L_{AB} = F \cdot (x_B - x_A)}$$

lavoro compiuto dalla forza per spostare il punto da A a B

(ii) Caso generale lavoro motore

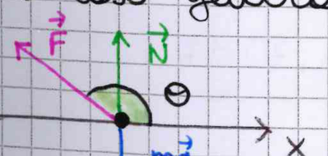


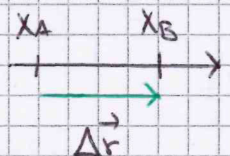
$\Delta\vec{r} \equiv (\Delta x, 0, 0)$ $\qquad \Delta x = x_B - x_A$

$L_{AB} = F\cos\theta \, \Delta x$ $\qquad L_{AB} > 0$

$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ $\qquad$ Lavoro motore

(iii) Caso general lavoro resistente





$\Delta\vec{r}$ è sempre diretto nel verso dell'asse x

$L_{AB} = F\Delta x \cos\Theta$

$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ $\qquad \Rightarrow L_{AB} < 0$ lavoro resistente

Definizione di lavoro: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \rightarrow$ campo di forze

forza definita in una regione di spazio $D \subseteq \mathbb{R}^3$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\vec{r} \equiv (x, y, z)$ $\qquad \vec{F} \equiv (F_x, F_y, F_z) \rightarrow F_x(x, y, z)$ $\qquad$ in generale: $F(x, y, z)$

Derivate parziale: limite del rapporto incrementale

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y, z) - F(x,y,z)}{\Delta x}$$ derivata parziale rispetto a x

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y, z) - F(x,y,z)}{\Delta y}$$ derivata parziale rispetto a y

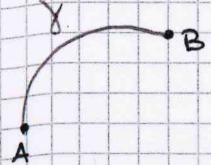
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(x, y, z+\Delta z) - F(x,y,z)}{\Delta z}$$ derivata parziale rispetto a z

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,y,z)$ derivata parziale seconda rispetto a x

e analogamente $\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x,y,z)$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x,y,z)$ rispetto a y e z

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y,z)$ derivata parziale seconda rispetto a x e a y

In generale: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} F$ non commuta



$$L_{\gamma(A,B)} \simeq \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i^*) \cdot \Delta\vec{r}_i \qquad \vec{r}_i^* \in [\vec{r}_i, \vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i]$$

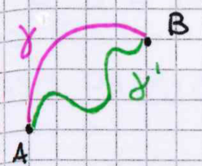
$$\vec{F} \sim cost \qquad \Theta = \vec{F}\,\Delta\vec{r}_i \sim cost$$

Lavoro elementare: $\boxed{\partial L = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$ lavoro infinitesimo che la forza compie per spostare il punto di una quantità infinitesima $d\vec{r}$

Integrale di linea:

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Il lavoro dipende dalla traiettoria



$$L_{\gamma(A,B)} \neq L_{\gamma'(A,B)}$$

Cordinate cartesiane:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}$$

$$d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz$$

$$L_{\gamma(A,B)} = {}_{\gamma}\int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx + {}_{\gamma}\int_{y_A}^{y_B} F_y\,dy + {}_{\gamma}\int_{z_A}^{z_B} F_z\,dz$$

$${}_{\gamma}\int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y(x), z(x))\,dx \qquad x_A \le x \le x_B$$

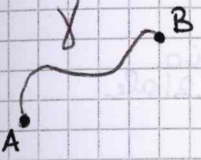
Equazione della curva γ

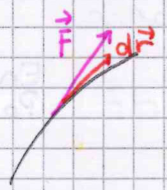
$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \\ x_A \leq x \leq x_B \end{cases}$$

In termini differenziali: Il lavoro dipende dal percorso, cioè dL non è un differenziale esatto (in generale).

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad L_{\gamma(A,B)}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} L_{\gamma(A,B)}(\vec{F}_i) \equiv \sum_{i=1}^{N} L^{(i)}_{\gamma(A,B)}$$

$$= \int_{\gamma(A,B)} \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$





$$\boxed{L_{\gamma(B,A)} = -L_{\gamma(A,B)}}$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE (ENERGIA CINETICA)

$\vec{F} \equiv$ Risultante di tutte le forze che agiscono in un punto

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$dL = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2)\,dt = d\underbrace{\left(\frac{1}{2} m v^2\right)}_{K}$$

$K \equiv$ Energia cinetica del punto materiale

$$\boxed{dL = -dK}$$ Forze vive in forma differenziale

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} dL = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\boxed{L_{\gamma(A,B)} = K_B - K_A}$$

Unità di misura: $[L] \equiv$ forza $\times$ lunghezza $= \text{massa} \dfrac{\text{lunghezza}^2}{\text{tempo}^2} \equiv [K]$

SI (MKS) $= 1\,J = 1\,N \cdot 1\,m = 1\,kg \dfrac{m^2}{s^2}$

CGS $= 1$ erg $= 1$ dyn $\cdot$ cm $= 1\,g \dfrac{cm^2}{s^2}$

TERMODINAMICA: caloria

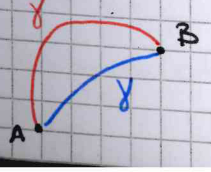
1 cal $= 4{,}186$ J

1 J $= 0{,}2389$ cal

1 J $= 10^7$ erg

24/03/2020 Bombaci

FORZE CONSERVATIVE



$L_{\gamma(A,B)} \neq L_{\gamma'(A,B)} \leftarrow$ In generale

$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \leftarrow$ non dipende da γ

Esistono delle forze che non dipendono da γ ma da A e da B

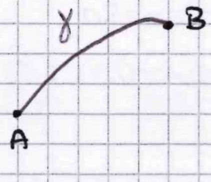
lavoro infinitesimo differenziale esatto

TEOREMA

$\vec{F}(\vec{r})$ è conservativa $\Leftrightarrow \exists\, U(\vec{r}) \equiv U(x, y, z)$ tc $dL = -dU$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad \text{(differenziale esatto)}$$

Definizione della funzione U



$$U_B - U_A = -L_{AB}(\vec{F}) = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$U_B \equiv U(\vec{r}_0)$$

$$U_A \equiv U(\vec{r}_A)$$

la funzione $U(\vec{r})$ che stiamo costruendo è definita a meno di una costante arbitraria

$P \equiv (x, y, z) = \vec{r}$

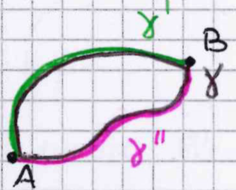
$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) = \vec{r}_0$

$$\Rightarrow \boxed{U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r}} \quad \text{Energia Potenziale}$$

Si può dare un valore qualsiasi a $\vec{r}_0$ ad esempio

Si può scegliere $U(\vec{r}_0) = 0$

COROLLARIO



percorso chiuso

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

integrale di linea

Scegliamo due punti arbitrari A e B, poi pensiamo γ unione di due curve γ'_{AB} e γ''_{BA}

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{\gamma'(A,B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma''(B,A)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

invertiamo il verso

$$= \int_{\gamma'(A,B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma''(A,B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

poiché $\gamma'(A,B) = \gamma''(A,B)$ perché dipende solo da A e B $\Rightarrow \int_{\gamma'} = \int_{\gamma''}$

$dL = -dU$ differenziale esatto ($\exists F$ che gode di questa proprietà)

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$= -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \qquad \forall \vec{r} = \forall (x, y, z)$$

Componenti della forza

$$F_x(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, y, z)$$

$$F_y(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial y}U(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \equiv -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right] = -\vec{\nabla}$$

$$F_z(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial z}U(x, y, z)$$

Introduciamo un operatore differenziale che chiamiamo gradiente (grad oppure $\vec{\nabla}$ (nabla))

Definizione: $\vec{\nabla} \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$

Verificare che una $\vec{F}$ sia conservativa non è semplice in questo modo dunque introduciamo una proprietà locale.

Rotore di un vettore (operatore differenziale)

$\text{rot}\,\vec{F}$ o $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ Def: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

- Caso in cui $\vec{F}$ è una forza conservativa:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}U) = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}U - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}U\right)\hat{i} + \dots\right]$$

Se dU è differenziale esatto $\Rightarrow$ le derivate parziali commutano

Se $\vec{F}$ è conservativa $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow F$ conservativa $\forall\vec{r}$ nel suo dominio

Riepilogo: Una forza è conservativa se:

1) $L_{\gamma(A,B)}$ non dipende da γ;

2) $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ lungo un percorso chiuso;

3) $U(\vec{r})$ $\quad L_{AB} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$ è def a meno di una costante arbitr.

4) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

$\vec{F} = \vec{f} + \vec{F}'$
$\vec{f}$ = forza conservativa

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \gamma_0 - \vec{r} = \vec{r}(t)$

Teorema delle forze vive:

$$L_{\gamma_0(A,B)}(\vec{F}) = K_B - K_A = L_{\gamma_0(A,B)}(\vec{f}) + L_{\gamma_0(A,B)}(\vec{F}')$$

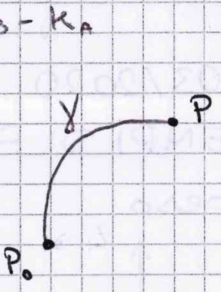
Se $\vec{f}$ = cons $\Rightarrow L_{\gamma_0(A,B)}(\vec{f}) = U_A - U_B \Rightarrow U_A - U_B + L_{\gamma_0(A,B)} = K_B - K_A$

Supponiamo $K_B = K_A \rightarrow \Delta K = K_B - K_A = 0$

$A \equiv P_0$ individuato da $\vec{r}_0$

$B \equiv P$ individuato da $\vec{r}$

$\Rightarrow U_P = U_{P_0} + L_{\gamma_0(P_0,P)}(\vec{F}')$



Poniamo $U_{P_0} = 0 \Rightarrow U_P \equiv U(\vec{r})$

ENERGIA MECCANICA

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ $\quad \vec{F}$ = risultante delle forze che agiscono sul punto

$L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}) = K_P - K_{P_0}$ $\quad \gamma \equiv$ curva definita da $\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv$ traiettoria del punto materiale

Supponiamo tutte le $\vec{F}_i$ conservative:

$$U_P^{(i)} - U_{P_0}^{(i)} = -L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_i)$$

Energia potenziale totale:

$$U_P - U_{P_0} = \sum_i [U_P^{(i)} - U_{P_0}^{(i)}] = -L^{(\vec{F})}_{\gamma(P_0,P)}$$

$$K_P - K_{P_0} = U_{P_0} - U_P$$

$$\boxed{K_P + U_P = K_{P_0} + U_{P_0}} \qquad \forall P_0, P \in \gamma : \{\vec{r} = \vec{r}(t)\}$$

ENERGIA MECCANICA: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$

$P = (x, y, z) = \vec{r} \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(t)$

$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + U(\vec{r}(t)) = cost \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ || Se tutte le forze sono conservative l'energia meccanica è costante

$\vec{F}_i$ cons $\Rightarrow \vec{F}$ cons $\Rightarrow E$ cost

Se il lavoro è nullo $\Rightarrow E$ costante

$\vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \vec{r} \in \gamma \qquad$ Se $\vec{F}_{nc} \perp d\vec{r}$ (l'Energia meccanica è costante)

$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} \rightarrow$ risultante parziale di forze non conservative

($\vec{F}_c$:) risultante parziale di forze conservative

$$L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}) = L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_c) + L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_{nc}) = U_{P_0} - U_P + L^{(nc)}_{\gamma(P_0,P)}$$

$K_P - K_{P_0} = U_{P_0} - U_P + L^{(nc)}_{\gamma(P_0,P)} \Rightarrow E = K_P + U_P$ || energia meccanica associata alle forze

$$\Delta E = E_P - E_{P_0} = L^{(nc)}_{\gamma(P_0,P)}$$

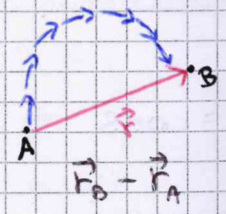
Esempi di campi di forze non conservativi

- Campo di forze uniforme:

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = cost \quad \forall \vec{r} \subset D \qquad$ (es: $\vec{F} = m\vec{g}$ D: dove g è cost)

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \int_{\gamma(A,B)} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \Rightarrow \vec{F} \text{ è conservativa}$$

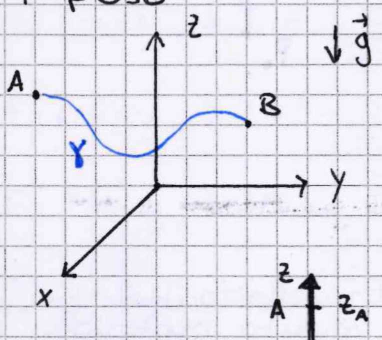
$$\int_{\gamma(A,B)} d\vec{r} \simeq \sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{r}_0 \qquad N \to \infty$$



26/03/2020 Bombaci

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE ($\vec{F}$ COSTANTE)

$\vec{F}$ peso



$\vec{F} = m\vec{g} = \vec{cost}$

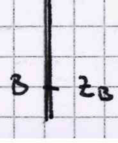
$\vec{F} = (0, 0, -mg)$

$\vec{r}_A \equiv (x_A, y_A, z_A)$

$\vec{r}_B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

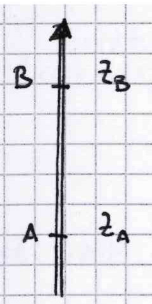
$$L_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg_z \int_{z_A}^{z_B} dz = mg_z(z_B - z_A) = -mg(z_B - z_A)$$

CASO 1:



$L_{AB} = mg(z_A - z_B) > 0$

CASO 2:



$L_{AB} = -mg(z_B - z_A) < 0$

$\vec{F}_{est} \equiv$ forza esterna tale da far salire il corpo

$v_A = v_B = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \equiv$ variazione energia cinetica

$L_{AB}(\vec{F} + \vec{F}_{est}) = L_{AB}(\vec{F}) + L_{AB}(\vec{F}_{est}) = 0$

poiché $L_{AB}(\vec{F}) = -L_{AB}(\vec{F}_{est})$

Energia potenziale della forza peso

$U_B - U_A = -L_{AB} = -mg_z(z_B - z_A)$

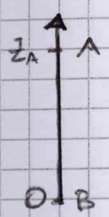
$U_B - U_A = mg_z(z_B - z_A)$

$\boxed{U = U(z) = mgz}$ ↳ altezza h

COSTANTI ARBITRARIE

$z_A = 0 \qquad U(z_A) = 0$

CADUTA LIBERA DI UN CORPO



$z_0 = z(t_0) = z_A = h \qquad t_0 = 0$

$z_0 = 0 \qquad v_A = v_{z0} = 0$

$z_B = z(\tau) = 0 \qquad v_B = v_z(\tau)$

$\tau \equiv$ tempo di caduta libera

$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad z(\tau) = 0$

$v_z(t) = -gt \qquad v_0 = \sqrt{2gh}$

$z_0 = h \qquad \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Energia meccanica (forza peso)

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{cost}$

$t_0 = 0 \Rightarrow E_0 = E(t_0) = mgh$

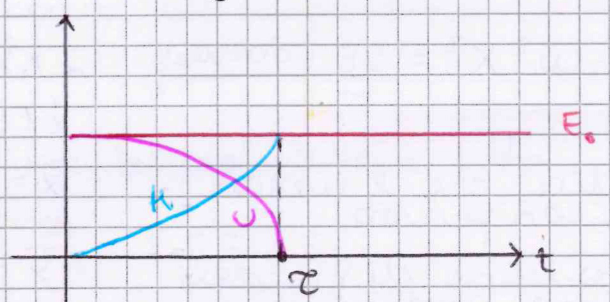
$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = E_0 = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$

Come variano energia potenziale ed energia cinetica

$K(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2$

$U(t) = mg(h - \frac{1}{2}gt^2)$

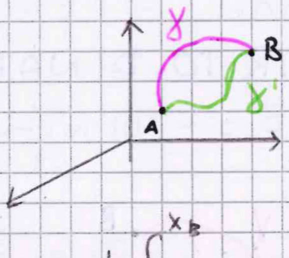
$E(t) = K(t) + U(t) = mgh = E_0 = \text{cost}$



$t_0 = 0 \qquad K = K_0 = 0 \qquad U = U_0 = mgh$

$t = \tau \qquad K(\tau) = mgh = E_0 \qquad U(\tau) = 0$

FORZA ELASTICA



$\vec{F} = -k\vec{r}$

$\vec{F} = -k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k\int_{x_A}^{x_B} x\,dx - k\int_{x_A}^{x_B} y\,dy - k\int_{x_A}^{x_B} z\,dz = \longrightarrow$

$$= -\frac{1}{2}k\left[(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2) + (z_B^2 - z_A^2)\right]$$

$$\vec{F} = -k x_i$$

$$L_{AB} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$U_B - U_A = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

$$x_A = 0$$

$$U_A = U(x_A) = 0$$

OSCILLATORE ARMONICO ED ENERGIA MECCANICA

II LEGGE DI NEWTON

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$t = t_0 = 0$$

$$x(t_0) = A$$

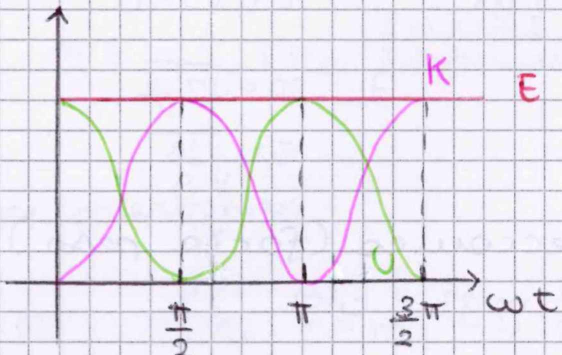
$$\dot{x}(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \varphi = 0$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$K(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \text{cost}$$



CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$K + U = E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$\boxed{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \frac{2E}{m}} \xrightarrow{\text{derivando}} 2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x} = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ci dice che l'energia si conserva

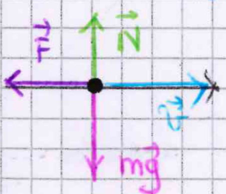
equazione diff del primo ordine ma non è lineare

$$\dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$$

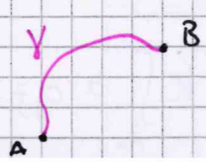
$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$ eq dell'oscillatore armonico

FORZA DI ATTRITO DINAMICO (forza non conservativa)



$$\vec{F} = -\mu_d N\hat{v} \qquad \hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad N = \text{cost}$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$L_{\gamma(A,B)} = -\mu_d N\int_{\gamma(A,B)} \hat{v}\cdot d\vec{r} = -\mu_d N\int_{\gamma(A,B)} \hat{v}\cdot\vec{v}\,dt =$$

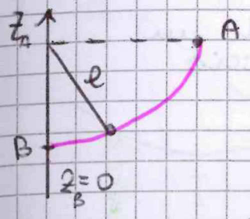
$= -\mu_d N \int_{\gamma(A,B)} v\,dt = -\mu_d N \, \ell_{\gamma(A,B)} \rightarrow$ il lavoro dipende dal percorso $\Downarrow$ f non è conservativa

$v = |v_s|$, $v_s = \frac{ds}{dt}$

$\int_{\gamma(A,B)} v\,dt = \int_{\gamma(A,B)} |ds| = \ell_{\gamma(A,B)} > 0$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Pendolo



$z_B = 0$

$z_A = \ell$

$v_A = 0$

i) Calcolare la velocità quando passa per B

ii) Tensione del filo in B

i) $z_B = 0 \quad U_B = 0 \Rightarrow U(z) = mgz$

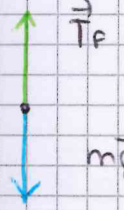
$E = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$

A) $E_A = mg z_A = mgh$

B) $E_B = \frac{1}{2} m v_B^2$

$E_A = E_B \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$

ii)



$$\begin{cases} \vec{T}_F - m\vec{g} = m\vec{a} \\ a = a_c = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{N_B^2}{\ell} \end{cases}$$

$$\boxed{T_F = mg + \frac{m v_B^2}{\ell} = 3mg}$$

piccole oscillazioni $\downarrow$ $= mg \{ 1 + \theta^2 [\dots] \}$

30/03/2020 Bombaci

TERZA LEGGE DI NEWTON

Una forza nasce dall'interazione tra più corpi

$\vec{F}_{12} \equiv$ forza che sente il corpo 1 a causa dell'interazione con un secondo corpo

$\vec{F}_{21} \equiv$ forza che sente il corpo 2 a causa del corpo 1

1) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2) $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ sono dirette lungo la congiungente tra i due corpi

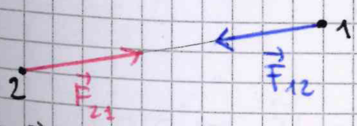
$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$F \equiv |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$

$\vec{F}_{12} = \pm F \hat{r}$

$\vec{F}_{21} = \mp F \hat{r}$

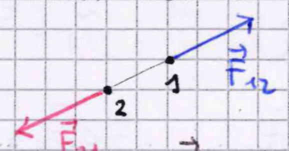
FORZA ATTRATTIVA



$\vec{F}_{12} = +F\hat{r}$

$\vec{F}_{21} = -F\hat{r}$

FORZA REPULSIVA



$\vec{F}_{12} = -F\hat{r}$

$\vec{F}_{21} = +F\hat{r}$

QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{P} = m\vec{v}$

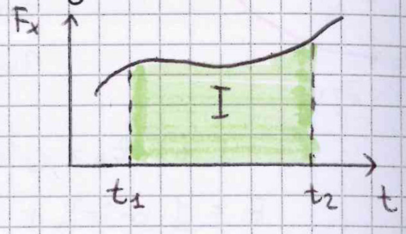
2^a legge di Newton $\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}}$

Alcune masse dipendono dal tempo

$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$ ← Esempio di moto di un blocco di ghiaccio

IMPULSO DI UNA FORZA



$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$

$I = \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ forza risultante

$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} F_i dt = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i(t_1, t_2)$

$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P}$

TEOREMA DELL'IMPULSO O DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{I}(t_1, t_2) = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$

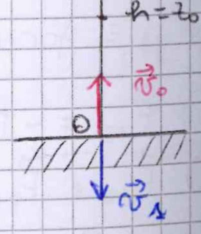
Esempio: Consideriamo una pallina di massa $m = 50\,g$. Immaginiamo di lasciarla cadere da un $h = 1\,m$ con $v_i = 0$. Arrivata al suolo rimbalza con un urto elastico.

i) Calcolare l'impulso nell'interazione col suolo in un tempo $\Delta t = 0{,}01\,s$.

$\vec{v}_1 = -v_f\hat{k}$ $m \equiv$ massa della pallina

$\vec{v}_2 = v_f\hat{k}$ $M \equiv$ massa del suolo

$v_f = \sqrt{2gh}$ $M \gg m$



$\vec{F}_s$ → forza del suolo

$\vec{F}_s + mg$ $\vec{I}(\Delta t) = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = 2m\vec{v}_2 = 2m v_f\hat{k} = (0{,}443\,N\cdot s)\hat{k}$

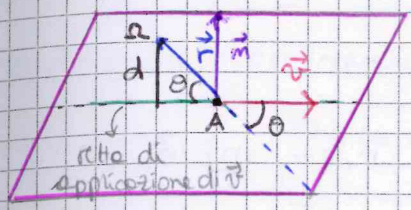
$F_s \neq 0$ solo per $t \in (t_1, t_2)$ $\vec{I}_g = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t}(-mg\hat{k})dt = -mg\Delta t\hat{k} \simeq$

$\simeq (5 \times 10^{-3}\,N\cdot s)\hat{k}$

$\vec{I}_s = \vec{I} + \vec{I}_g = (0{,}448\,Ns)\hat{k}$

$= \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \vec{F}_s \Delta t = \underbrace{\langle \vec{F}_s \rangle}_{\text{valore medio}} \Delta t$ $\langle \vec{F}_s \rangle = \frac{I_s}{\Delta t} = 44{,}8\,N$ $|\vec{F}_g| \simeq 0{,}5\,N$

MOMENTO DI UN VETTORE

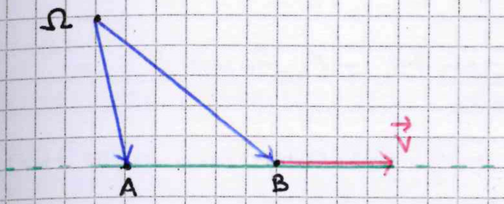


$m \equiv$ momento (uscente dal piano) $\quad \Omega \equiv$ polo

$\vec{r} = \overline{\Omega A}$

$$\boxed{\vec{m} = \vec{r} \times \vec{v}} \qquad |\vec{m}| = rv\,\text{sen}\,\theta = vd$$

$d = r\,\text{sen}\,\theta$

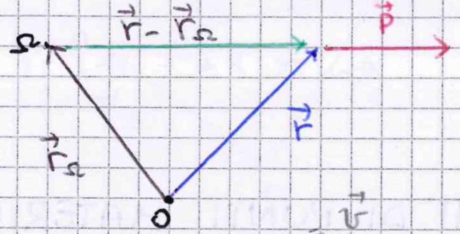


$$\vec{m} \equiv \overline{\Omega B} \times \vec{v} = (\overline{\Omega A} + \overline{AB}) \times \vec{v}$$
$$= \overline{\Omega A} \times \vec{v} + \cancel{\overline{AB} \times \vec{v}}^{\,0} \quad AB \parallel \vec{v}$$
$$= \overline{\Omega A} \times \vec{v}$$

MOMENTO ANGOLARE (o delle quantità di moto)

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{\ell}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}$



$r \equiv$ posizione del punto di applicazione del vettore rispetto al piano

$\ell \perp$ al piano

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell}_\Omega = \frac{d}{dt}[(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}] = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$= (\vec{v} - \vec{v}_\Omega) \times \vec{p} + \underbrace{(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}}_{\tau_\Omega}$$
$$\Rightarrow \vec{\tau}_\Omega \equiv (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times \vec{p} + \vec{\tau}_\Omega}$$ se $v_\Omega = 0 \Rightarrow$ Polo Ω fisso nel SRI

$$\boxed{\tau_\Omega = \frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt}}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F} =$$
$$= (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \sum \vec{F}_i =$$
$$= \sum (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}_{\Omega(i)}$$

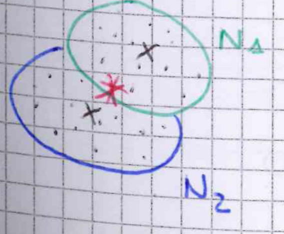
$$\vec{\tau}_\Omega = \frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega\,dt = d\vec{\ell}_\Omega$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_\Omega\,dt = \vec{\ell}_\Omega(t_2) - \vec{\ell}_\Omega(t_1)}$$ = impulso angolare o momento dell'impulso

Teorema del momento dell'impulso

CENTRO DI MASSA

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$



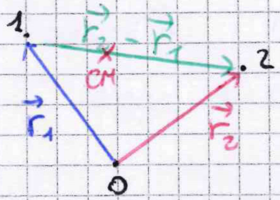
$N = N_1 + N_2$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{N_1} m_i \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{N_2} m_i = \sum_{i=N_1+1}^{N} m_i$$

$$\vec{R}_{CM_1} = \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_i \qquad \vec{R}_{CM_2} = \frac{1}{M_2} \sum_{i=N_1+1}^{N_2} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R}_{CM} = (M_1 \vec{R}_{CM_1} + M_2 + \vec{R}_{CM_2}) / (M_1 + M_2)$$

CENTRO DI MASSA PER UN SISTEMA DI DUE CORPI



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 = \frac{M - m_2}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2$$

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

$$x_{CM} = x_1 + \frac{m_2}{M}(x_2 - x_1)$$

Se $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$

Se $m_1 \gg m_2$

$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \simeq \frac{m_2}{m_1} \ll 1 \qquad x_{CM} \simeq x_1 + \frac{m_2}{m_1}(x_2 - x_1)$

31/03/2020 Bombeci

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Scegliamo un sistema di riferimento inerziale $S(O)$

$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \sum m_i \vec{v}_i$

$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$ Assumendo che le masse m_i siano costanti $(i=1,\dots,N)$ $\Rightarrow M = \sum m_i = \text{cost}$

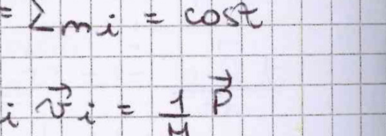
$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt}$ = velocità con cui si muove il centro di massa in $S(O)$ $= \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\vec{P}$

$\boxed{\vec{P} = M \times \vec{v}_{CM}}$ Primo teorema del centro di massa

$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ $\quad \vec{F}_i \equiv$ risultante delle forze che agiscono sul punto i-esimo

$\vec{F} \equiv$ risultante di tutte le forze che agiscono sul sistema di N corpi

Se consideriamo la particella i-esima:



$\vec{F}_i^{(int)} \equiv$ forze interne che agiscono su esso

$\vec{F}_i^{(est)} \equiv$ forze esterne che agiscono su esso

$\vec{F}_i^{(int)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{(int)} \quad i \neq j \qquad \vec{F}^{(est)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(est)}$

$\vec{F}^{(int)} = \sum_i \vec{F}_i^{(int)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{(int)}$

III legge di Newton o Principio di azione e reazione

$\vec{F}_{ij}^{(int)} = -\vec{F}_{ji}^{(int)} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \text{ e } i \neq j \Rightarrow \vec{F}^{(int)} = 0$

$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)}}$ 1ª equazione della dinamica dei sistemi di punti materiali $\rightarrow$ Estensione della II legge di Newton $\left(\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right)$

$N=1 \quad \frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F} \qquad \vec{F}^{(est)}dt = d\vec{P}$

TEOREMA DELL'IMPULSO per un sistema di N corpi

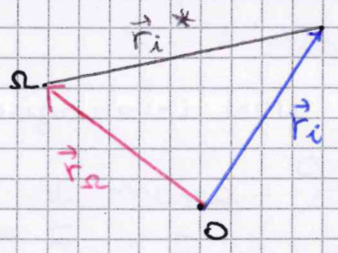
$$\boxed{\vec{I}(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{(est)}dt=\vec{P}(t_2)-\vec{P}(t_1)}$$

$\vec{P}=M\vec{v}_{CM}$

$\vec{F}^{(est)}=\frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM})=M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F}^{(est)}=M\vec{a}_{CM}}$ 2° teorema del centro di massa

MOMENTO ANGOLARE per N punti materiali

$$\boxed{\vec{L}_\Omega=\sum_{i=1}^{N} l_{i\Omega}}$$



$\vec{l}_{i\Omega}=\vec{r}_i^{\,*}\times\vec{r}_i$

$\vec{r}_i^{\,*}=\vec{r}_i-\vec{r}_\Omega$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{l}_{i\Omega}=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}[(\vec{r}_i-\vec{r}_\Omega)\times\vec{P}_i]=\sum_{i=1}^{N}\{(\vec{v}_i-\vec{v}_\Omega)\times\vec{P}_i+(\vec{r}_i-\vec{r}_\Omega)\times\vec{F}_i\}$$

$\vec{\tau}_{i\Omega}=(\vec{r}_i-\vec{r}_\Omega)\times\vec{F}_i \Rightarrow \sum_i\vec{\tau}_{i\Omega}=\vec{\tau}_\Omega \equiv$ risultante di tutti i momenti delle forze applicate alle particelle

$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}=-\vec{v}_\Omega\times\vec{P}+\vec{\tau}_\Omega \qquad \vec{P}=M\vec{V}_{CM}$

$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}=-\vec{v}_\Omega\times M\vec{V}_{CM}+\vec{\tau}_\Omega^{(int)}+\vec{\tau}_\Omega^{(est)}$

$\vec{\tau}_\Omega^{(int)}=\sum_i\vec{r}_i^{\,*}\times\vec{F}_i^{(int)}=\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{r}_i^{\,*}\times\vec{F}_{ij}^{(int)} \qquad \vec{r}_i^{\,*}\equiv(\vec{r}_i-\vec{r}_\Omega)$

$\vec{\tau}_\Omega^{(est)}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(est)}$

$\vec{\tau}_{(i,j)}=\vec{r}_i^{\,*}\times\vec{F}_{ij}^{(int)}+\vec{r}_j^{\,*}\times\vec{F}_{ji}^{(int)}$

$\vec{\tau}_\Omega^{(int)}=(\vec{r}_i-\vec{r}_\Omega)\times\vec{F}_{ij}^{(int)}-(\vec{r}_j-\vec{r}_\Omega)\times\vec{F}_{ji}^{(int)}=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}^{(int)}=0$

Per la 2ª legge di Newton le forze sono sulla congiungente tra i due corpi.

$(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\,//\,\vec{F}_{ij} \Rightarrow$ il centro di massa coincide con O

Come conseguenza del principio di azione e reazione abbiamo: $\vec{\tau}_\Omega^{(int)}=0$

$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}=\vec{\tau}_\Omega^{(est)}-\vec{v}_\Omega\times M\vec{v}_{CM}$

Se in particolare Ω punto fisso: (i) $v_\Omega=0$; (ii) $\Omega\equiv\Omega_{CM}$:

$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}=\vec{\tau}_\Omega^{(est)}}$ 2ª equazione della dinamica dei sistemi dei punti materiali

$O\equiv\Omega \quad \vec{L}_O \quad \vec{L}_{\Omega CM} \equiv$ caso in cui scelgo Ω coincidente al centro di massa

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum [(\vec{r}_i{}' + \vec{R}_{CM}) \times \vec{P}_i]$$

$$\vec{L}_{\Omega_{CM}} = \sum_i \vec{r}_i$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P} = \boxed{\vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}}$$ 3° teorema del centro di massa

Ricapitolando:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F}^{(est)} \\ \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} &= \vec{\tau}_\Omega^{(est)} \end{aligned}\right\}$$ equazioni cardinali della meccanica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di N punti materiali:

SISTEMA ISOLATO

Il sistema è isolato se NON interagisce con l'ambiente

$$\vec{F}_1^{(est)} = \vec{F}_2^{(est)} = \dots = \vec{F}_N^{(est)} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}^{(est)} = 0 \qquad \vec{\tau}_{i\Omega}^{(est)} = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i^{(est)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}(t) = \vec{P}_0 = cost \quad \forall t$$ la quantità di moto si conserva

$$\vec{L}_\Omega(t) = \vec{L}_\Omega(t_0)$$ Il momento angolare si conserva

Relazione tra la conservazione della quantità di moto e il momento angolare

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)}$$

IPOTESI 1

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)} + \vec{F}^{(int)} \Rightarrow \text{Siccome } \vec{F}^{(est)} = 0$$ poiché siamo in un sistema isolato

$$\Rightarrow \vec{F}^{(int)} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(int)} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ij}^{(int)} + \vec{F}_{ji}^{(int)} = 0 \quad \forall i, j$$

Dall'OMOGENEITÀ dello spazio, segue la conservazione di $\vec{P}$

IPOTESI 2

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} + \vec{\tau}_\Omega^{(int)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega^{(int)} = 0$$

$N=2$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_\Omega^{(int)} &= \vec{r}_1^{\,*} \times \vec{F}_{12}^{(int)} + \vec{r}_2^{\,*} \times \vec{F}_{21}^{(int)} \\ &= (\vec{r}_1^{\,*} - \vec{r}_2^{\,*}) \times \vec{F}_{12} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0 \rightarrow \vec{F}_{12} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$$\vec{r}_1^{\,*} = \vec{r}_1 - \vec{r}_\Omega$$

Dall'ISOTROPIA dello spazio segue la conservazione del momento angolare $\vec{L}$

02/04/2020 Bombaci

Corpi macroscopici come sistemi di punti materiali

LIMITE DEL CONTINUO

Problemi di approccio microscopico:

1) $N >> 1 \qquad N \gtrsim N_A \sim 10^{23}$ dove $N \equiv$ numero di ... $N_A \equiv$ numero di Avogadro

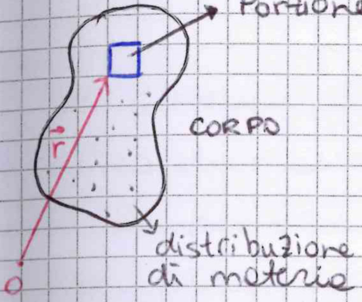
2) Non valgono le leggi della meccanica classica

(1) ⇒ t_0 $\vec{r}_i(t_0)$, $\vec{v}_i(t_0)$ $i = 1, \dots, N$

Non è possibile risolvere le equazioni del moto per $N \gtrsim 10^{23}$

⇒ Descrizione statistica ⇒ Meccanica Statistica (es: Teoria cinetica dei gas) ⇒ Termodinamica

(2) ⇒ Meccanica quantistica



$\Delta V \equiv$ volume della porzione

$\Delta V << V$

$V \equiv$ volume del corpo

$\Delta m_i \equiv$ massa che varia da luogo a luogo

Densità volumetrica di massa: $\rho_m = \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$ $\quad M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i$

limite del continuo: $N \to \infty$ $\quad \Delta V \to 0$ $\quad \Delta m_i \to 0$ $\quad \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V} = \rho$

Se scegliamo un sistema di riferimento ⇒ $\rho = \rho(\vec{r})$: $dm = \rho(\vec{r})dV$

In coordinate cartesiane $\rho(x,y,z)$ $\quad dV = dx\,dy\,dz$

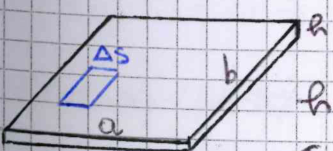
CORPO ISOTROPO: Se ∃ un'origine rispetto alla quale posso scrivere ρ come funzione del modulo di $\vec{r}$.

$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ $\quad r \equiv |\vec{r}|$ ⇒ siamo in presenza di una simmetria sferica

CORPO OMOGENEO: Se $\rho(\vec{r})$ è lo stesso in tutte le direzioni e non dipende dalla posizione.

$\rho(\vec{r}) = \rho_0 = cost$

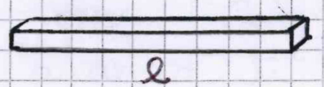
DENSITÀ SUPERFICIALE:



$h << a, b$

$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}$

DENSITÀ LINEARE:



$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}$

DENSITÀ TRIDIMENSIONALE:

$\rho = \frac{dm}{dV}$ $\quad M = \int dm = \int \rho(x,y,z)\,dV$

UNITÀ DI MISURA DELLA DENSITÀ:

$[\rho] = \frac{Kg}{m^3}$ (SI) $\quad [\rho] = \frac{g}{cm^3}$ (CGS)

$[\sigma] = \frac{Kg}{m^2}$ (SI) $\quad [\sigma] = \frac{g}{cm^2}$ (CGS)

$[\lambda] = \frac{Kg}{m}$ (SI) $\quad [\lambda] = \frac{g}{cm}$ (CGS)

DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MATERIA (centro di massa)

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{r}_i \Delta m_i$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int \vec{r} \rho(\vec{r})\, dV$$

ENERGIA CINETICA

$$K = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2}\int v^2 \rho(\vec{r})\, dV$$

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

$$\vec{P} = \int \vec{v}\, dm = \int \vec{v} \rho(\vec{r})\, dV$$

MOMENTO ANGOLARE TOTALE

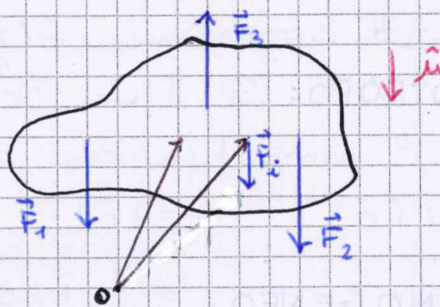
$$\vec{L}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times d\vec{P} = \int (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{v} \rho(\vec{r})\, dV$$

SISTEMA MATERIALE SOGGETTO A FORZE ESTERNE

$\vec{F}_i = \pm F_i \hat{u}$ $\quad F_i \equiv$ componente lungo $\hat{u}$; NON è il modulo di $\vec{F}_i$

$\vec{r}_i = \overline{OP}_i$ $\quad P_i \equiv$ punto di applicazione della forza $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} F_i \hat{u} \qquad \vec{R}_F = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$$



$\vec{F}_i = F_i \hat{u}$

$\vec{F} = \sum F_i \hat{u}$

$$\Omega \equiv O \quad \vec{\tau} = \sum_i (\vec{r}_i \times F_i \hat{u}) = \left(\sum_i F_i \vec{r}_i\right) \times \hat{u} = \left(\sum_i F_i\right) \vec{R}_F \times \hat{u} =$$

$$= \vec{R}_F \times \left(\sum_i F_i \hat{u}\right) = \vec{R}_F \times \vec{F}$$

$\vec{a} \times k\vec{b} = k\vec{a} \times \vec{b}$

Applichiamo il teorema precedente al caso della forza-peso

$$\uparrow z \ \downarrow \vec{g} \qquad \vec{F}_i = -m_i g \hat{k} \qquad \vec{F} = \sum_i m_i \vec{g} = M\vec{g} \ \text{(FORZA PESO TOTALE)}$$

$$F_i = -m_i g$$

possiamo semplificarlo perché è costante

$$\vec{R}_F = \frac{\sum_i (-m_i \cancel{g} \vec{r}_i)}{\sum (-m_i g)} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

BARICENTRO: $\vec{R}_F \equiv \vec{R}_G$ $\qquad \vec{R}_G \equiv \vec{R}_{CM}$ la posizione del punto coincide col centro di massa

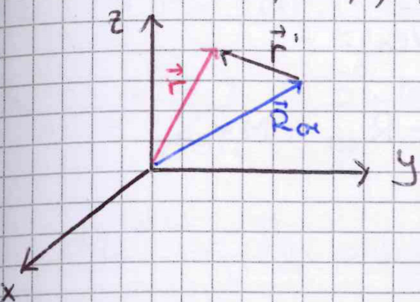
$g(z) = g = cost$ cioè g non dipende dall'altezza

Se dovesse dipendere dall'altezza $\Rightarrow \vec{R}_G \neq \vec{R}_{CM}$

Sistema di riferimento del centro di massa

1) SRI $S(O, x, y, z)$

2) SR $S'(O', x', y', z')$ $O' \equiv CM$



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_{CM}$$

In generale il sistema S' non è detto che sia inerziale perché il moto del centro di massa può essere accelerato cioè è possibile: $\vec{F}^{(est)} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} \neq 0$

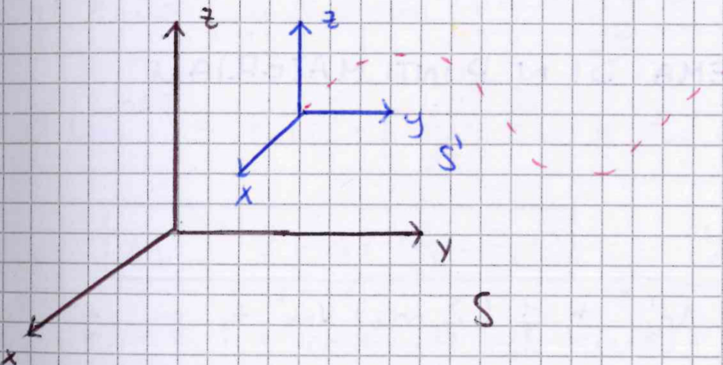
Nel sistema S la definizione di centro di massa è la solita. Nel S' la posizione del centro di massa $\vec{R}'_{CM} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{R}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{M} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

Derivando rispetto al tempo abbiamo:

$\sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i' = \sum_i m_i \vec{v}_i' = \sum_i \vec{P}_i'$ ovvero $\boxed{\vec{P}' = \sum_i \vec{P}_i' = 0}$



S' è in moto traslatorio rispetto a S e durante questo moto, il centro di massa descrive una traiettoria.

In generale $\vec{v}_{CM}(t)$ può dipendere dal tempo.

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_{CM}$ e derivando rispetto al tempo: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{CM}$

Se $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_{CM}$

⚠ In generale si ha

$$\vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\vec{R}}{dt} + \omega \times (\vec{r} - \vec{R})$$

$\vec{R} \equiv \overline{OO'}$

$\vec{\omega} \equiv$ velocità angolare di S'

06/04/2020 Bombaci

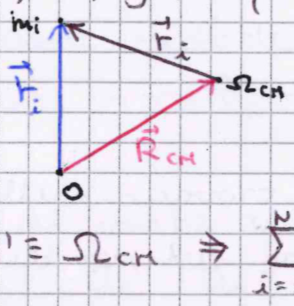
TEOREMA DI KÖNIG PER IL MOMENTO ANGOLARE

Considero un sistema di N punti materiali

SRI $S \equiv \{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

SR $S' \equiv \{O' \equiv \Omega_{CM}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ in moto traslatorio rispetto al SRI

$$\boxed{\vec{L}'_{\Omega_{CM}} = \vec{L}_{\Omega_{CM}}}$$



$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_{CM}$

Derivando rispetto a t:

$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM}$

$\vec{R}'_{CM} = 0'$ poiché $O' \equiv \Omega_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = 0$

$\longrightarrow$

$$\vec{L}'_{\Omega CM} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') = \sum_i [\vec{r}_i' \times m_i(\vec{v}_i - \vec{V}_{CM})] =$$

$$= \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i) - \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{V}_{CM}) =$$

$$= \sum_i [(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i] - [\cancelto{0}{\sum m_i \vec{r}_i'}] \times \vec{V}_{CM} =$$

$$= \underbrace{\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)}_{\text{somma di tutti i momenti angolari delle particelle}} - \vec{R}_{CM} \times \sum m_i \vec{v}_i = \vec{L}_0 - \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM}$$

3° TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

TEOREMA DI KÖNING

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{L}'_{\Omega CM} &= \vec{L}_{\Omega CM} \\ \vec{L}_0 &= \vec{L}_{\Omega CM} + \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} \end{aligned}}$$

legato al moto del centro di massa

Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}'_{\Omega CM} = \frac{d}{dt} \vec{L}_{\Omega CM}$$

$\vec{v}_{\Omega CM} \parallel \vec{V}_{CM}$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\Omega CM} = \underbrace{\vec{\tau}^{(est)}_{\Omega CM}}_{\text{risultante di tutti i momenti delle forze esterne}} - \cancelto{0}{\vec{v}_{\Omega CM} \times M \vec{V}_{CM}} \Rightarrow \vec{\tau}^{(est)}_{\Omega CM} = \vec{\tau}'^{(est)}_{\Omega CM}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{L}'_{\Omega CM} = \vec{\tau}'^{(est)}_{\Omega CM}}$$

la II eq cardinale della meccanica vale anche per S'

ENERGIA CINETICA PER UN SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})^2 = \overbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2}^{K'} + \frac{1}{2} \overbrace{(\sum m_i)}^{M} V_{CM}^2 +$$

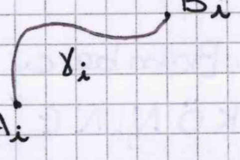
$$+ \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}} \sum m_i \cancel{2} \vec{v}_i' \cdot \vec{V}_{CM}}_{\vec{V}'_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{M} = 0} = K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$\boxed{K = K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2}$$

TEOREMA DI KÖNING PER L'ENERGIA CINETICA

LAVORO ED ENERGIA PER UN SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI

$dL_i = dK_i$ Teorema delle forze vive



$dL = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$ Per $N = 1 \Rightarrow dL = dK$

$$dL = \sum_{i=1}^{N} dL_i = \sum_i dL_i^{(est)} + \sum_i dL_i^{(int)} =$$

$$= \sum_i dK_i = dK.$$

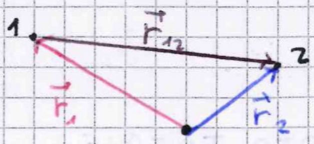
$$L = \sum_i \int_{\gamma_i(A_i, B_i)} dL_i$$

$$L_{\{A\}\{B\}} = K_{\{B\}} - K_{\{A\}}$$

Ad un tempo t_A le particelle si trovano nelle posizioni:
$\{A\} = \{\vec{r}_1(t_A), \ldots, \vec{r}_N(t_A)\}$; mentre ad un tempo t_B:
$\{B\} = \{\vec{r}_1(t_B), \ldots, \vec{r}_N(t_B)\}$.

LAVORO DELLE FORZE INTERNE (per un sistema di N punti materiali)

$$\vec{F}^{(int)} = 0 \not\Rightarrow L^{(int)} = 0$$

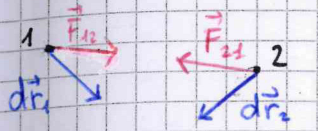


$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\vec{r}_{12} = r_{12}\,\hat{r}_{12}$

$r_{12} \equiv |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$$dL^{(int)} = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$



3ª legge di Newton:

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \parallel \vec{r}_{12}$

$\vec{F}_{21} \equiv F \cdot \hat{r}_{12}$

$\vec{F}_{12} \equiv -F \cdot \hat{r}_{12}$

$$dL^{(int)} = \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{dL^{(int)} = F\,\hat{r}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}}$$

Deriviamo rispetto al tempo $\vec{r}_{12}$ e otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{12} = \frac{d}{dt}(r_{12}\,\hat{r}_{12}) = \left(\frac{d}{dt} r_{12}\right)\hat{r}_{12} + r_{12}\left(\frac{d}{dt}\hat{r}_{12}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{r}_{12} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\tau} \qquad \hat{\tau} \perp \hat{r}_{12} \qquad |\hat{\tau}| = 1 \qquad \omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{12} = \left(\frac{d}{dt} r_{12}\right)\hat{r}_{12} + r_{12}\frac{d\theta}{dt}\hat{\tau}$$

$$dL^{(int)} = F\,\hat{r}_{12} \cdot \Big[\underbrace{\frac{dr_{12}}{dt}\hat{r}_{12}}_{1} + \underbrace{r_{12}\frac{d\theta}{dt}\hat{\tau}}_{0}\Big] = F\frac{dr_{12}}{dt}\,dt = F\,dr_{12}$$

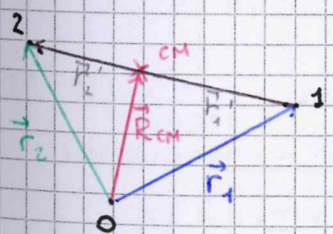
$$\boxed{dL^{(int)} = F\,d(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)}$$

Se si ha:

$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ = costante nel tempo $\Rightarrow dL^{int} = 0$

$|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ = costante $\quad i, j = 1, \dots, N$

Per un sistema di due corpi:



$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ R_{CM} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R}_{CM} \\ \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R}_{CM} \end{cases}$$

$$S' \equiv \{ O' \equiv CM \} \qquad \vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_1' = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{r} = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} = \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

Dove μ è la massa ridotta dei corpi: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \qquad \vec{R}'_{CM} = 0$$

Se S' si muove di moto traslatorio rispetto ad S:

$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} \qquad \vec{a}_1' = \vec{a}_1 - \vec{a}_{CM}$

$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} \qquad \vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \vec{a}_{CM}$

$\Rightarrow$ la velocità relativa è la stessa nei due sistemi di riferimento

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' \qquad \vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2' - \vec{a}_1'$$

$$\vec{v}_1' = -\frac{\mu}{m_1}\vec{v} \qquad \vec{v}_2' = \frac{\mu}{m_2}\vec{v}$$

MODULI

$$\frac{v_2'}{v_1'} = \frac{a_2'}{a_1'} = \frac{m_1}{m_2}$$

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

$$\vec{P}_1' = m_1 \vec{v}_1' = -\mu \vec{v}$$

$$\vec{P}_2' = m_2 \vec{v}_2' = \mu \vec{v}$$

$$\vec{P}' = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' = 0$$

ENERGIA CINETICA

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \cancel{m_1} \frac{\mu^2}{m_1^{\cancel{2}}} v^2 + \frac{1}{2} \cancel{m_2} \frac{\mu^2}{m_2^{\cancel{2}}} v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \mu^{\cancel{2}} v^2 \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{1/\mu} = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$K' = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$K = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

07/04/2020 Bombaci

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$\vec{v}_1' = -\frac{\mu}{m_1}\vec{v} \qquad \vec{v}_2' = \frac{\mu}{m_2}\vec{v}$$

$$\frac{K_1'}{K'} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \qquad \frac{K_2'}{K'} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \qquad \frac{K_2'}{K_1'} = \frac{m_1}{m_2}$$

SITUAZIONE LIMITE: $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \ll 1$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \simeq \frac{\cancel{m_1} m_2}{\cancel{m_1}} \simeq m_2$$

ESPANSIONE DI TAYLOR — TERMINI TRASCURABILI

$$\mu = \frac{\frac{m_1 m_2}{m_1}}{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = m_2\Big(1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{\ll 1}\Big)^{-1} = m_2\left(1 - \frac{m_2}{m_1} + \dots\right) =$$

$$= m_2\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$$

$X_{CM} = X_1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}}_{\ll 1}(X_2 - X_1) \Rightarrow X_{CM}$ è molto vicino alla posizione X_1

MODULO DELLA VELOCITÀ RELATIVA

$$v_1' = \frac{\mu}{m_1} v = \frac{1}{\cancel{m_1}} \cdot \frac{\cancel{m_1} m_2}{m_1 + m_2} v \simeq \frac{m_2}{m_1} v$$

$v_2' \simeq \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v \Rightarrow v_2'$ è prossima a v relativa

$$\frac{K_1'}{K'} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \simeq \frac{m_2}{m_1} \qquad K_1' << K' \qquad \frac{K_1'}{K_2'} = \frac{m_2}{m_1} << 1 \text{ relazione esatta}$$

MOMENTO ANGOLARE

$\vec{L}_0 \equiv$ momento angolare del sistema che ha origine $O \equiv \Omega$

$\vec{L}_0 = \vec{L}'_{\Omega_{CM}} - \vec{R}_{CM} \times (m_1+m_2) V_{CM}^2$ per Köning

Nel sistema del centro di massa: $\vec{L}'_{\Omega_{CM}} = \vec{r}_1' \times \vec{P}_1' + \vec{r}_2' \times \vec{P}_2'$

$\vec{L}'_{\Omega_{CM}} = \vec{r} \times \mu \vec{v}$

$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \mu \vec{v} + \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} M$

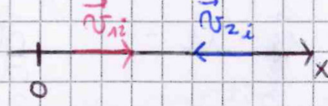
URTO TRA DUE CORPI PUNTIFORMI ISOLATI ($\vec{P}(t) = cost$)

$m_1, m_2 \quad \vec{F}_1^{\,est} = 0, \quad \vec{F}_2^{\,est} = 0$

Forze interne $\vec{F}_{12}^{\,int} = -\vec{F}_{21}^{\,int} \parallel \vec{r}_{21}$ (distanza relativa fra i due)

CASO DI UN URTO ELASTICO

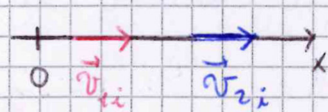
$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ = costante



DISCORDI

$\vec{v}_{1i} > \vec{v}_{2i}$

CONCORDI



$\vec{v}_{1i} = v_{1i}\,\hat{i} \qquad \vec{v}_{2i} = v_{2i}\,\hat{i}$

$\vec{v}_{1F} = v_{1F}\,\hat{i} \qquad \vec{v}_{2F} = v_{2F}\,\hat{i}$

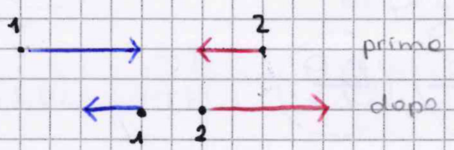
$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1F} + m_2 v_{2F} \\ m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1F}^2 + m_2 v_{2F}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1F} = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_{1i} + \frac{2 m_2}{m_1+m_2} v_{2i} \\ v_{2F} = \frac{2 m_1}{m_1+m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2} v_{2i} \end{cases}$$

CASI:

(1) $m_1 = m_2$

$v_{1F} = v_{2i}$

$v_{2F} = v_{1i}$



(3) $v_{2i} = 0 \quad m_2 >> m_1$

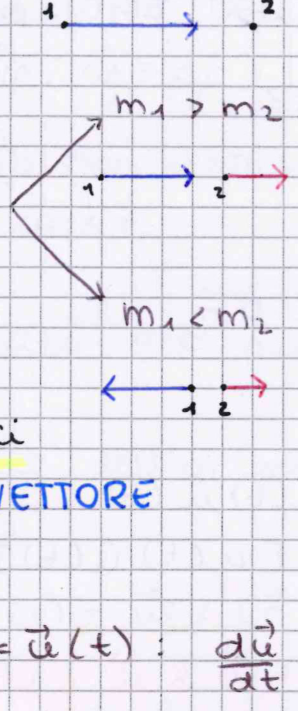
$v_{1F} \simeq -v_{1i}$

$v_{2F} \simeq 0$

(2) $v_{2i} = 0 \quad m_1 \neq m_2$

$v_{1F} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$

$v_{2F} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$



(4) $v_{2i} = 0 \quad m_1 >> m_2$

$v_{1F} \simeq v_{1i}$

$v_{2F} \simeq v_{1i}$

21/04/2020 Bombaci

DERIVATA DI UN VETTORE

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$

Vettore generico $\vec{u} = \vec{u}(t)$: $\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$

Coordinate cartesiane: $\vec{u}(t) = u_x(t)\,\hat{i} + u_y(t)\,\hat{j} + u_z(t)\,\hat{k}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du_x}{dt}\hat{i} + \frac{du_y}{dt}\hat{j} + \frac{du_z}{dt}\hat{k}$$

ALTRE PROPRIETÀ:

- $\sigma(t)$ scalare che dipende da t

$$\frac{d}{dt}(\sigma\vec{u}) = \frac{d\sigma}{dt}\vec{u} + \sigma\frac{d\vec{u}}{dt}$$

- $$\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$
- $$\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v} + \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

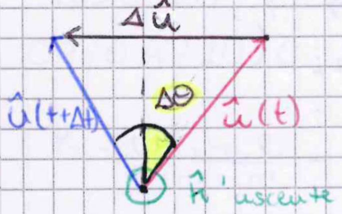
Consideriamo un versore $\hat{u}$:

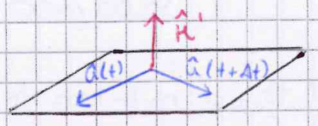
DERIVATA DI UN VERSORE

$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ $\quad |\hat{u}| = 1$ $\qquad \frac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$ è un vettore sempre perpendicolare a $\hat{u}$

$$\hat{u}^2 = 1 = \hat{u}\cdot\hat{u} \qquad \frac{d}{dt}(\hat{u}\cdot\hat{u}) = 2\hat{u}\frac{d\hat{u}}{dt} = 0$$

Considero il versore $\hat{u}$ al tempo t e lo considero al tempo t+Δt





$$\Delta u \equiv \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$$

(TRIANGOLO ISOSCELE)

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{2} = |\hat{u}|\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

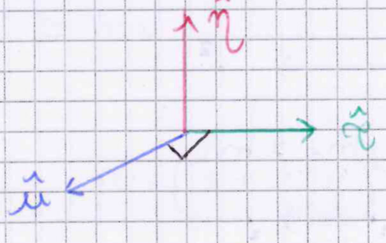
$$\Delta\hat{u} = |\Delta\hat{u}|\frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|} \Rightarrow \frac{\Delta\hat{u}}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t}\frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|} \equiv \hat{\tau}_\Delta \qquad t\to 0 \to \Delta\theta \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\tau}_\Delta \perp \hat{u}$$

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta/2}}_{1}\;\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \to \frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\tau}} \quad (1)$$



$\hat{u}, \hat{\tau}, \hat{\eta}$

$\hat{\eta} = \hat{u}\times\hat{\tau}$

$\hat{u} = \hat{\tau}\times\hat{\eta}$

$\hat{\tau} = \hat{\eta}\times\hat{u}$

$$\parallel$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\hat{\eta}\times\hat{u})$$

$$\vec{\omega}(t) \equiv \frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} = \dot{\theta}\hat{\eta}$$

$$\parallel$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega}(t)\times\hat{u}(t)} \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \hat{u}\times\frac{d\hat{u}}{dt}} \quad (3)$$

$$\vec{u}(t) = u(t)\,\hat{u}(t)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}[u(t)\,\hat{u}(t)]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\hat{u} + \vec{\omega}\times\vec{u}} \quad (4)$$

VELOCITÀ E ACCELERAZIONE NEI MOTI RELATIVI

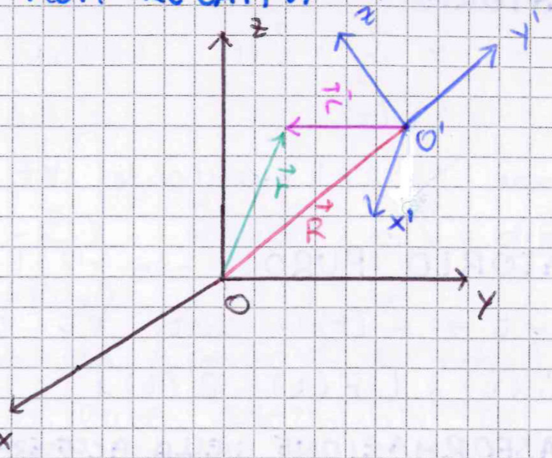
Consideriamo due SR:

SRI = $S \equiv \{O, x, y, z\}$

SR = $S' \equiv \{O', x', y', z'\}$

$\vec{R} = \overline{OO'}$

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}$



Relazione tra le derivate rispetto al tempo di un vettore in due sistemi di riferimento in moto relativo:

$\vec{u} = \vec{u}(t)$ $\qquad \vec{u}(t) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k} =$
$$= u'_x \hat{i}' + u'_y \hat{j}' + u_z' \hat{k}'$$

Vogliamo calcolare le derivate in S ma a partire dall'espr. in S'

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_S = \left.\frac{du_x'}{dt}\right)_S \hat{i}' + \left.\frac{du_y'}{dt}\right)_S \hat{j} + \left.\frac{du_z'}{dt}\right)_S \hat{k}' + u_x' \left.\frac{d\hat{i}'}{dt}\right)_S + u_y' \left.\frac{d\hat{j}'}{dt}\right)_S + u_z' \left.\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)_S$$

Poiché il tempo è assoluto : $\left.\frac{du_x'}{dt}\right)_S = \left.\frac{du_x}{dt}\right)_{S'}$ etc

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right)_S \overset{(2)}{=} \vec{u}(t) \times \hat{i}'(t)$$

si può dimostrare che esiste un unico valore di ω

$$\left.\frac{d\hat{j}}{dt}\right)_S = \vec{\omega}(t) \times \hat{j}'(t)$$

$$\left.\frac{d\hat{k}}{dt}\right)_S = \vec{u}(t) \times \hat{k}'(t)$$

RELAZIONE DI POISSON

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_S = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{u}} \quad (4)$$

LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLA VELOCITÀ

$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} \qquad \vec{R} = \overline{OO'} \qquad \vec{v} \equiv \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S + \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S$

Dalle formule di Poisson abbiamo:

$$\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S = \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Ma $\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'} \equiv \vec{v}$ velocità del punto materiale misurata in S

$\vec{V}(t) \equiv \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S$ velocità dell'origine O' misurata in S

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})} \quad (5)$$

$\boxed{\vec{v}_T(t) \equiv \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})}$ (6) velocità di trascinamento

tutti i punti solidali ad S' sono in quiete rispetto ad S'

MOTO TRASLATORIO

$\vec{\omega}(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \vec{v}_\tau = \vec{V}(t)$ velocità di O' rispetto ad S

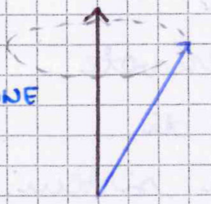
In generale: $\vec{V} = \vec{V}(t)$

In particolare: $\vec{V}(t) = $ costante $\forall t \Rightarrow$ S' si muove con moto rettilineo uniforme rispetto a S $\Rightarrow$ S' = SRI

MOTO ROTATORIO PURO (non c'è traslatorio)

$\vec{V}(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \vec{R}(t) = \text{cost} \quad \forall t$ cioè O' è un punto fisso per S

$\Rightarrow \vec{v}_\tau(t) = \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}(t) - \vec{R}(t)]$



ASSE DI INSTANTANEA ROTAZIONE

LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLA ACCELERAZIONE

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co}} \quad (7)$$

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S \qquad \vec{a}\,' = \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right)_{S'}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$$

$$\vec{A} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_S = \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_S \qquad \vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S$$

$$\boxed{\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'} \quad (8)$$ Accelerazione di Coriolis

CORPO RIGIDO

$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = $ costante nel tempo $\forall i, j$

esempio: palla di gomma piena

Un corpo rigido possiede 6 gradi di libertà

Esempio: $\underbrace{(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})}_{3 \text{ coordinate}}$ + 3 angoli

CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI

S' collegato al corpo rigido $\Rightarrow \vec{v}_i\,' = 0$ per tutti i punti del corpo rigido

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_\tau = \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})} \; ⊛ \qquad \vec{V} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S$$

Siano A, B due punti del corpo rigido

$$⊛ \; \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)}$$

Se $A = \Omega_{CM}$ (centro di massa)

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{V}_{CM}(t) + \vec{\omega}(t) \times (r(t) - R_{CM}(t))}$$

$\vec{R}_{CM}(t)$ e $\vec{\omega}(t)$ bisogna conoscere 6 grandezze scalari

23/04/2020 Bombaci

CORPO RIGIDO

Il corpo è solidale rispetto ad S'

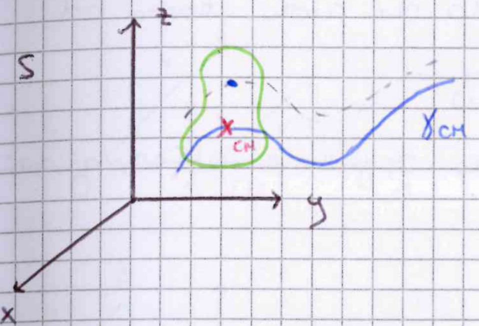
Se $\vec{v}_i\,' = 0 \Rightarrow \vec{v}$ in S

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \qquad \vec{R} = \overline{OO'} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$$

CASO PARTICOLARE: Corpo rigido che si muove di moto traslatorio puro

$\vec{\omega}(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} \Rightarrow$ ci basta determinare la traiettoria del centro di massa



Se non c'è rotazione ω, istante per istante, tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità del centro di massa

$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} \qquad \vec{F}^{(est)} = M\vec{a}_{CM}$

MOMENTO ANGOLARE TOTALE

$\Omega \equiv \Omega_{CM} \Rightarrow \vec{L}_{CM} = 0$

In S' la velocità di tutti i punti è nulla: $\vec{v}_i\,' = 0 \Rightarrow \vec{L}'_{\Omega_{CM}} = 0$

S' è in moto traslatorio rispetto ad S

TEOREMA DI KÖNIG

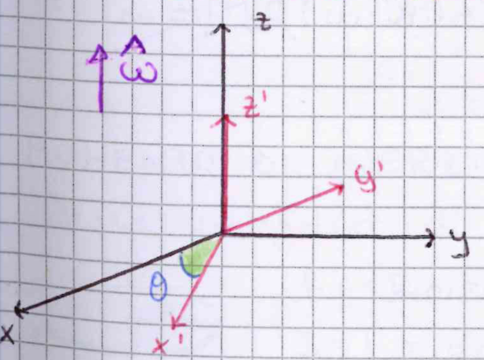
$\vec{L}_{\Omega_{CM}} = \vec{L}'_{\Omega_{CM}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\Omega_{CM}} = 0$

$\vec{L}_{\Omega_{CM}} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i$

3° TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

$\vec{L}_{\Omega} = \cancel{\vec{L}_{\Omega_{CM}}}^{\,0} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \Rightarrow \vec{L}_{\Omega} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$

MOTO ROTATORIO CON ASSE FISSO

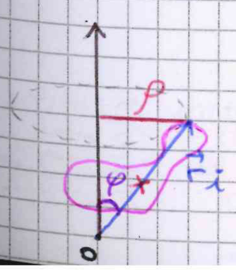


$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{\omega}$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \hat{\omega} = \text{cost}$

$S' \equiv \{O' \equiv O, x', y', z'\} \qquad \hat{z}' \equiv \hat{z} \equiv \hat{k} \equiv \hat{k}' \equiv \hat{\omega}$

$\bar{O} \equiv \bar{O}' \Rightarrow \vec{R} = \overline{OO'} \Rightarrow \vec{V} = 0 \quad \forall t$



$\rho = |\vec{r}_i| \sin\varphi$

$\vec{v}_i = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t)$

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

$\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$

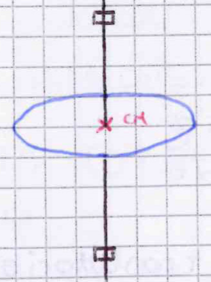
$= \vec{\omega} \times \sum m_i \vec{r}_i =$

$= \vec{\omega} \times M\vec{R}_{CM}$

$\Rightarrow \vec{P} = M(\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}) = M\vec{v}_{CM}$

CASO PARTICOLARE: Se l'asse passa per il CM $\rightarrow \omega \parallel R_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = 0$ e $\vec{P} = 0$

A)

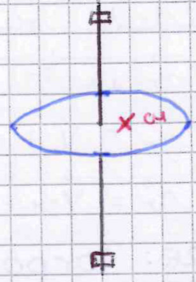


$\vec{P} = 0$

$\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM}$

$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{F}^{(est)} = 0$

B)



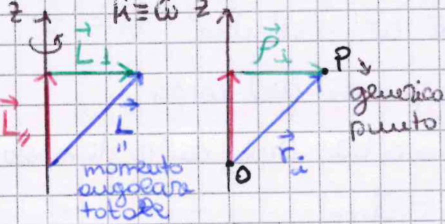
$\vec{P} \neq 0$

$\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM}$

$\downarrow$

agiscono sui cuscinetti ed equilibrano l'asse

MOMENTO ANGOLARE TOTALE di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso



$\vec{r}_i = z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i \qquad \vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$

Vogliamo dimostrare la seguente affermazione:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel \\ \vec{L}_\perp &= -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i \\ \vec{L}_\parallel &= \left[\sum_i m_i \rho_i^2\right]\vec{\omega} \end{aligned}}$$

$\vec{L}$ non è sempre $\parallel$ ad $\vec{\omega}$

$\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$\vec{\omega} \times \hat{k} = 0$

def di momento angolare

$\underline{S}$ $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i[\underline{\vec{\omega}} \times (z_i\underline{\hat{k}} +$

$+ \vec{\rho}_i)] = \sum_i (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) =$

$= \underbrace{\sum_i m_i z_i \hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)}_{\mathrm{II}}$

TRIPLO PRODOTTO VETTORIALE: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

II) $\sum_i m_i [\vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)] = \sum_i m_i [\rho_i^2 \vec{\omega} - \underbrace{\cancel{(\vec{\rho}_i \cdot \vec{\omega})}}_{\vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}}^{0} \vec{\rho}_i] =$

$= \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2\right] \vec{\omega} = \vec{L}_\parallel$

I) $\sum_i m_i z_i \hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \sum_i m_i z_i [\overbrace{\cancel{(\hat{k} \cdot \vec{\rho}_i)}}^{\hat{k} \perp \vec{\rho}_i \;\; 0} \vec{\omega} - (\hat{k} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho}_i] =$

$= -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i = \vec{L}_\perp$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel}$

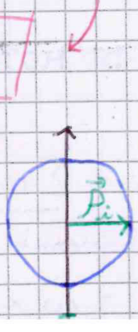
MOMENTO DI INERZIA rispetto all'asse fisso di rotazione

$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2$

$\boxed{\vec{L}_\parallel = I\vec{\omega}}$

$\vec{L}_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i = 0 \Leftarrow$ l'asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo

Esempio



$m_i z_i \vec{\rho}_i + m'_i z'_i \vec{\rho}'_i$ ma se c'è simmetria $m_i = m'_i$

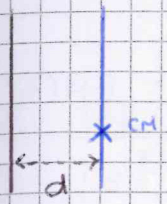
$z_i = z'_i$

$m_i z_i \vec{\rho}_i + m'_i z'_i \vec{\rho}'_i = 0 \Leftarrow \vec{\rho}_i = -\vec{\rho}'_i$

In generale: $\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp$

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

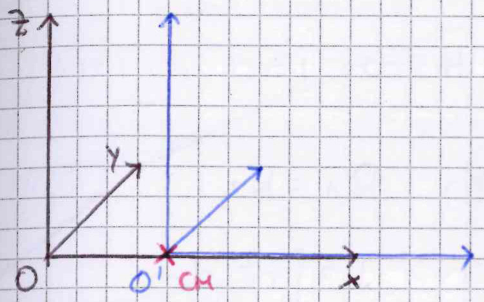
$I_{CM} \equiv$ momento di inerzia rispetto ad un asse che passa per il CM



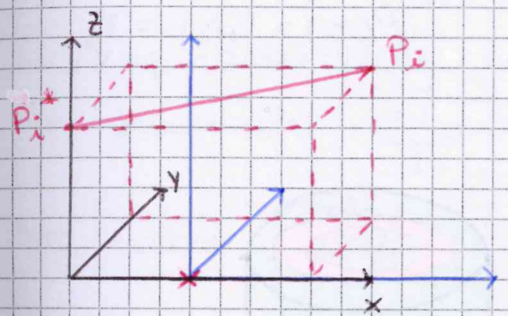
$$\boxed{I = I_{CM} + Md^2}$$

$[I] =$ massa $\times$ lunghezza^2

SI: $kg \cdot m^2$



$$\begin{cases} x_{CM} = d \\ y_{CM} = 0 \\ z_{CM} = 0 \end{cases}$$



$P_i \equiv x_i, y_i, z_i$

$P_i^* \equiv (0, 0, z_i)$

$(\overline{P_i^* P_i})^2 = x_i^2 + y_i^2$

MOMENTO DI INERZIA (corpo rigido)

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\begin{cases} x_i = x_i' + d \\ y_i = y_i' \\ z_i = z_i' \end{cases}$$

$$I = \sum_i m_i [(x_i' + d)^2 + y_i'^2] =$$

$$= \sum_i m_i [x_i'^2 + d^2 + 2x_i'd + y_i'] =$$

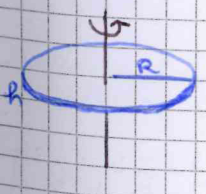
$$= \sum_i m_i [x_i'^2 + y_i'^2] + \sum m_i d^2 + 2(\sum m_i x_i')d =$$

$$= I_{CM} + Md^2 + 2M \cancel{x_{CM}}^{\,0} d = I_{CM} + Md^2$$

Per costruzione $O' \equiv CM$

MOMENTO DI INERZIA (corpo omogeneo)

Disco omogeneo di massa M e raggio R



$h << R$

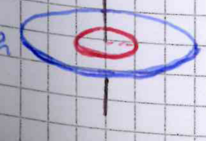
$$I = \int_M r^2 dm$$

$\sigma = \frac{dm}{ds} = cost \equiv$ densità superficiale

$dm = \sigma\, ds$

$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

$r \equiv$ distanza del punto considerato rispetto all'asse di rotazione



$dr \equiv$ spessore dell'anellino infinitesimo

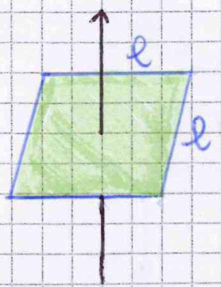
$dm = \sigma 2\pi r\, dr$

$$I = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r\, dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4}$$

$\Rightarrow I = 1/2\, MR^2$

CASO 1

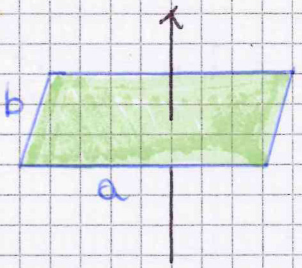
Lamina sottile quadrata



$$I = \frac{1}{6} M l^2$$

CASO 2

Lamina sottile rettangolare



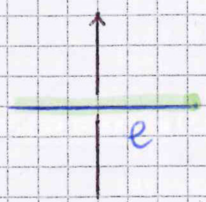
$$I = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$$

Se $a = b$

$$I = \frac{1}{6} M l^2$$

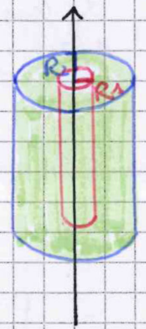
CASO 3

Barretta sottile



$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

CASO 4



$R_1 < R_2$

$$I = \int r^2 \, dm$$

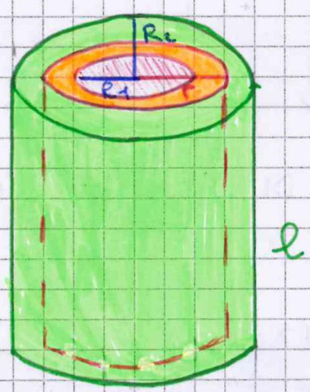
$\rho(r) = cost = \frac{M}{V}$ (M = massa, V = volume)

ρ = densità

27/04/2020 Bombaci

In generale: $dm = \rho \, dV$ (dm = massa, dV = volume, ρ = densità)

Nel caso di un cilindro cavo (all'interno di un cilindro)



raggio $= (r, r + dr)$ → dr = spessore

$$dm = \rho 2\pi r \, dr \, l$$

$$I = \int r^2 \, dm = 2\pi \rho l \int r^3 dr =$$

$$= 2\pi \rho l \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) \qquad V = \pi l (R_2^2 - R_1^2)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2} \cancel{\pi} \frac{M}{\cancel{\pi l (R_2^2 - R_1^2)}} \cancel{l (R_2^2 - R_1^2)} (R_2^2 + R_1^2)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$$

In particolare se $R_1 = 0$ ($\Rightarrow R_2 \equiv R$) otteniamo un cilindro pieno

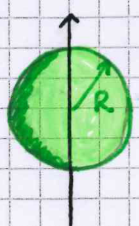
Cilindro pieno: $I = \frac{1}{2} M R^2$

Se $R_1 \to R_2 \equiv R \Rightarrow I = MR^2$ ⇒ cilindretto di spessore trascurabile

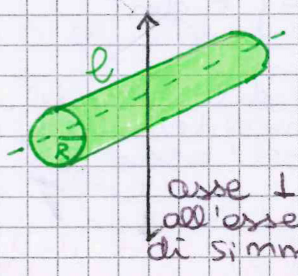
⇒ I non dipende dalla lunghezza ma la ρ cambia

o di un anello

MOMENTO DI INERZIA DI UNA SFERA E DI UN CILINDRO

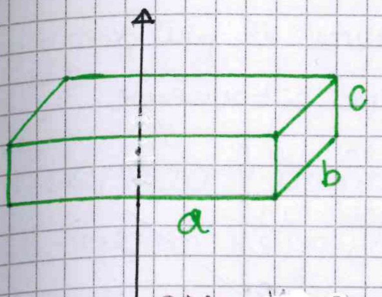


$$I = \frac{2}{5} M R^2$$



$$I = M \left[\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right]$$

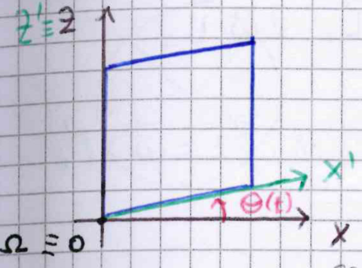
MOMENTO DI INERZIA DI UN PARALLELEPIPEDO



$$I = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$$

asse che passa per il CM
⊥ al lato ab

DINAMICA DEI CORPI RIGIDI CON ASSE FISSO



S' sistema solidale ad S

Es: porta che ruota attorno i suoi cardini

legge oraria $\theta = \theta(t)$

Per determinarlo dobbiamo risolvere l'equazione del moto per questo sistema

Usiamo 2ª equazione cardinale della meccanica

In generale: $\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{\,est} - \vec{v}_\Omega \times M\vec{V}_{CM}$

Nel nostro caso: $\Omega \equiv O$ $\quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{\,est}$

$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\hat{\omega}$ $\qquad \hat{\omega} \equiv \hat{k} = \hat{k}' = cost$ (asse fisso)

$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\hat{k}$ $\qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

Momento assiale delle forze esterne

$\tau_z^{(est)} = \vec{\tau}^{(est)} \cdot \hat{k}$ vettore τ proiettato su z

$$\tau_z^{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{k} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L} \cdot \hat{k}\right) = \frac{d}{dt} L_z$$

In generale si ha: $\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp$

Momento (angolare) assiale: $L_z = \vec{L} \cdot \hat{k} = I\omega \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_{1} + \underbrace{\vec{L}_\perp \cdot \hat{k}}_{0} \Rightarrow \boxed{L_z = I\omega}$

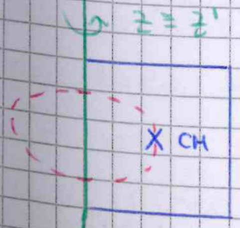
$\tau_z^{(est)} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$ stiamo considerando un corpo rigido $\frac{dI}{dt} = 0$ corpo rigido
dunque I non dipende dal tempo

$\tau_z^{(est)} = I \frac{d\omega}{dt} = \alpha$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_z^{(est)} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}}$ equazione del moto

$\Rightarrow \theta = \theta(t)$

Consideriamo un corpo rigido fissato su un asse che non coincide con l'asse del centro di massa del corpo



Il CM avrà un'accelerazione centripeta determinata dalle forze esterne che agiscono sul sistema

$\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM}$

$\vec{\tau}^{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\qquad \vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp$ $\qquad \frac{dI}{dt} = 0$

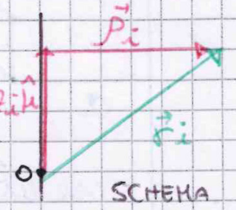
$$\vec{\tau}^{est} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{\tau}_{\parallel}^{\,est} + \vec{\tau}_\perp^{\,est}$$

$\vec{\tau}_{\parallel}^{est} = \tau_z \hat{k}$ $\qquad$ $\vec{\tau}_{\perp}^{est} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$

Per ridurre l'usura dei vincoli τ^{est} deve essere il più piccolo possib

Questo si può avere per $\vec{L}_{\perp} \to 0$; Calcoliamo esplicitamente $\vec{\tau}_{\perp}^{est}$:

$$\vec{\tau}_{\perp}^{est} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\sum_{i=1}^{N} m_i t_i \omega \vec{\rho}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(-\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i\right) =$$



$$= \frac{d\omega}{dt}\underbrace{\left[-\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i\right]}_{\vec{L}_{\perp}}\frac{1}{\omega} + \left[-\omega \sum_i m_i z_i \frac{d}{dt}\vec{\rho}_i\right]$$

corpo rigido $\frac{dz_i}{dt} = 0$; non dipende da i

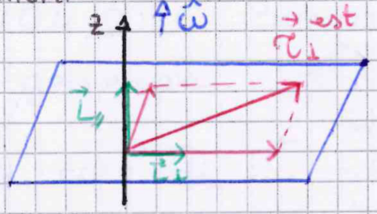
(*) $$= \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_{\perp} + \left[-\omega \sum_i m_i z_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)\right]$$

$$= \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_{\perp} + \left[\vec{\omega} \times \underbrace{\left(-\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i\right)}_{\vec{L}_{\perp}}\right] = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_{\perp} \times \vec{\omega}\vec{L}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{\perp}^{est} = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_{\perp} + \vec{\omega} \times \vec{L}_{\perp}}$$

(*) $z = z_i$ $\quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

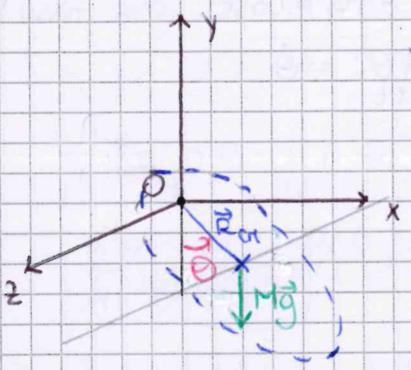
SCHEMA:



Se $\vec{L}_{\perp} = 0 \ \forall t \Rightarrow \vec{\tau}_{\perp}^{est} = 0$

Si verifica se il corpo possiede un asse di simmetria.

PENDOLO FISICO (o pendolo composto)



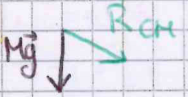
$\downarrow g$ $\quad \vec{g} = -g\hat{j}$ $\quad$ Scelgo O t.c. $z_{CM} = 0$

$CM \equiv \{x_{CM}, y_{CM}, 0\}$

$|\vec{R}_{CM}| = d$

$$\vec{\tau}^{est} = \sum_i r_i \times m_i \vec{g} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = MR_{CM} \times \vec{g}$$
$$= \vec{R}_{CM} \times M\vec{g}$$

$$|\vec{\tau}^{est}| = |\vec{R}_{CM}| Mg \sin\theta = mgd\sin\theta$$



$$\vec{\tau}^{est} = -Mgd\sin\theta\,\hat{k}$$

$$\tau_z = -Mgd\sin\theta \Rightarrow \tau_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgd\sin\theta \qquad \ddot{\theta} \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\frac{Mdg}{I} > 0$ $\qquad \ddot{\theta} + \frac{Md}{I}g\sin\theta = 0$ $\quad$ eq differenziale

$\omega \equiv \sqrt{\frac{Mdg}{I}}$ $\qquad \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0}$ $\quad$ Pendolo semplice = pendolo fisico

Caso: piccole oscillazioni $\theta \ll 1$ rad $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \qquad \boxed{\theta(t) = \Theta\sin(\omega t + \varphi_0)}$$

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^*}{g}} \Rightarrow \ell^* = \frac{I}{Md}$ lunghezza ridotta del pendolo fisico

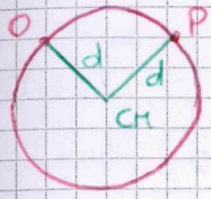
Per il teorema di H-S: $I = I_{CM} + Md^2$

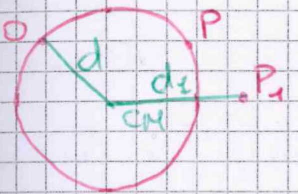
$$\boxed{\ell^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d}$$

Per un asse $\parallel \vec{z}$ che passa per il CM

28/04/2020 Bombaci

Il pendolo fisico ha lo stesso periodo di un pendolo semplice di lunghezza ℓ^* e massa uguale alla massa totale M del corpo rigido concentrata in un punto.

1) 

2) 

Il punto O è lo stesso della figura precedente, attraverso il quale passa l'asse di rotazione z. Dalla relazione precedente segue immediatamente che se si prende un altro asse qualsiasi (ad es. un asse uscente da punto P) parallelo all'asse z (uscente dal punto O) la lunghezza ridotta ℓ^* non cambia e di conseguenza il pendolo fisico oscilla con lo stesso periodo.

Più in generale, se si prende un altro asse di sospensione parallelo all'asse z e passante per un punto P_1 del corpo che dista d_1 dal CM ($\overline{\Omega_{CM} P_1} = d_1$) il periodo di oscillazione non cambia se è soddisfatta la seguente relazione:

$$\ell^* \equiv \ell^*(P) = \ell^*(P_1) \equiv \ell_1^* \quad \text{cioè} \quad \frac{I_{CM}}{M} + d = \frac{I_{CM}}{Md_1} + d_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d_1 - d) I_{CM} = M d_1 d (d_1 - d)$$

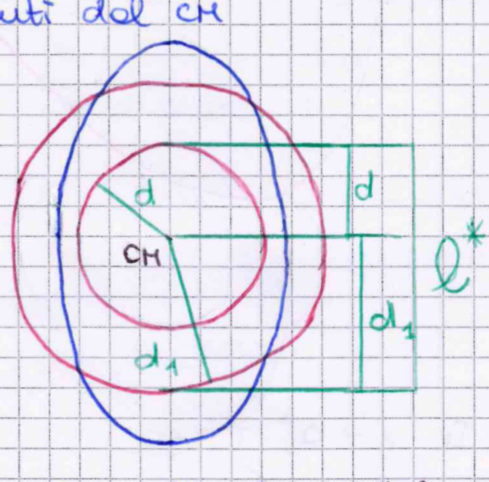
soluzioni:

(1) $d_1 = d \Rightarrow$ caso precedente: assi equidistanti dal CM

(2) $d_1 \neq d \Rightarrow I_{CM} = M d_1 d$ cioè

$$\boxed{d_1 = \frac{I_{CM}}{Md} = \ell^* - d} \quad (*)$$

$$\boxed{d + d_1 = \ell^*}$$



Tutti gli assi di sospensione tra loro paralleli che soddisfano l'equazione (*) danno (per costruzione) lo stesso periodo T di oscillazione del pendolo fisico. Tali assi costituiscono due cilindri, detti cilindri coniugati, di raggi d e d_1 e aventi come asse una linea retta passante per il centro di massa del corpo.

$$\ell^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^*}{g}}$$

Calcoliamo il periodo minimo T_{min}

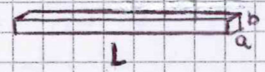
$\ell^*_{min} \Rightarrow$ basta fare la derivata (che indicheremo δ) rispetto a d

$$\frac{\delta \ell^*}{\delta d} = -\frac{I_{CM}}{M}\cdot\frac{1}{d^2}+1=0 \qquad d=\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} \Rightarrow \ell^*_{min}=2\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}$$

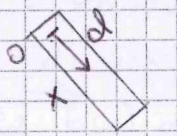
$$\Rightarrow \boxed{T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}}}$$

Considieriamo il caso di una barra omogenea sottile e rigida

$L \equiv$ lunghezza $\quad M \equiv$ massa



$a, b << L$



$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2 \qquad d(\ell^*_{min}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} L = \sqrt{\frac{1}{12}}\, L \simeq 0{,}2887\, L$$

$$\ell^* = \frac{1}{12}\frac{L^2}{d} + d \qquad \ell^*_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}} L \simeq 0{,}577\, L$$

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L}{g}}$$

In generale:

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{12}\frac{L^2}{d}+d\right)g} \Rightarrow T\Big/\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{g}}{L}}\sqrt{\left(\frac{1}{12}\frac{L^2}{d}+d\right)\frac{1}{\cancel{g}}}$$

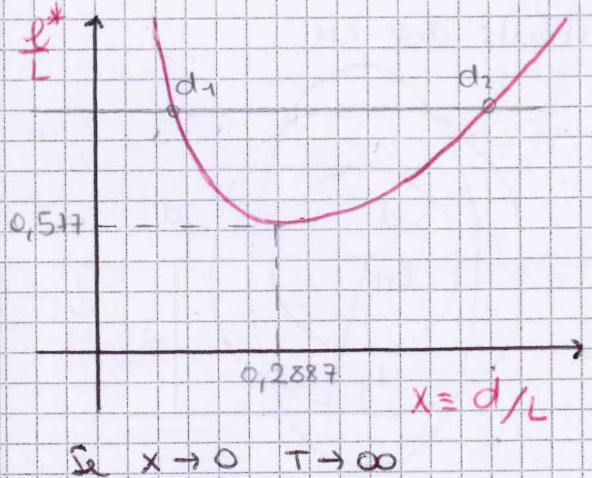
$$\Rightarrow \frac{T}{2\pi\sqrt{L/g}} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{12}\frac{L}{d}+\frac{d}{L}\right)}_{\frac{\ell^*}{L} = \frac{1}{12}\frac{L}{d}+\frac{d}{L}}} \equiv \tau \Rightarrow T_0 \equiv 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad [T_0] = \text{tempo}$$

$$x \equiv \frac{d}{L}$$

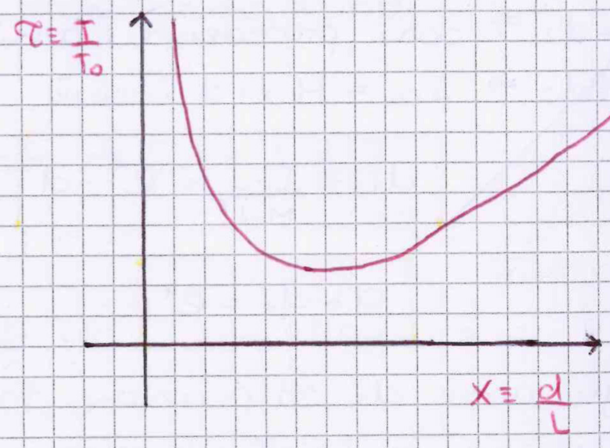
$\tau =$ periodo di oscillazione di un pendolo fisico adimensionale con tempo T_0

$$\frac{\ell^*}{L} = \frac{1}{12}\frac{1}{x} + x \qquad \tau = \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{12}\frac{1}{x}+x}$$

PLOT 1



PLOT 2



Se $x \to 0 \quad T \to \infty$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE ASSIALE

$$\tau_z^{est} = \frac{d}{dt} L_z$$

$$\tau_z^{est} = 0 \Rightarrow L_z(t) = \text{costante nel tempo}$$

ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO

Sistema di N punti materiali

S (Teorema di Köenig) $K = K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$

In generale: $K' \Rightarrow S'$ del CM

S' moto traslatorio rispetto ad S

$\vec{\omega}(t) = 0 \rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_{CM}$

Corpo rigido:

$S' \equiv \{ O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z' \}$ è solidale al corpo $\Rightarrow \vec{v}_i' = 0 \quad i = 1, \dots, N$

S $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$

$$K = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\{ V_{CM}^2 + \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 + 2 \vec{V}_{CM} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - R_{CM}) \right\}$$

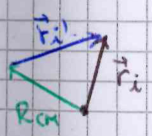
3° termine:

$$\sum_i m_i \vec{V}_{CM} \cdot \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right] = \vec{V}_{CM} \cdot \sum_i \left[m_i \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right] =$$

$$= \vec{V}_{CM} \cdot \vec{\omega} \times \left[\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right] = \vec{V}_{CM} \cdot \vec{\omega} \times \left[\cancel{\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{M \vec{R}_{CM}} - M \vec{R}_{CM}} \right] = 0$$

2° termine:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 = (*)$$



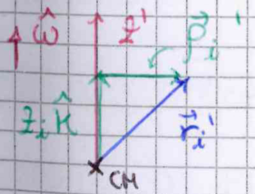
$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$

$\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i' =$

$= \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i' + \cancel{z_i' \vec{\omega} \times \hat{k}'} =$ ($\vec{\omega} \parallel \hat{k}'$)

$= |\vec{\omega}| |\vec{\rho}_i'| \frac{\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i}{|\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i|}$

$\omega(t) = \omega \hat{k}'$



$\vec{r}_i' = \vec{\rho}_i' + z_i' \hat{k}'$

$\vec{\rho}_i' \perp \hat{k}'$

$\Rightarrow \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 = \omega^2 \rho_i'^2$

$$(*) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i'^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \Big[\underbrace{\sum_i m_i \rho_i'^2}_{I_{CM}} \Big] \omega^2$$

non dipende da i

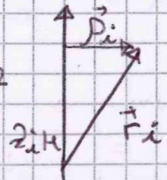
1° termine:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 = \frac{1}{2} V_{CM}^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} V_{CM}^2 M$$

$$\rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$



$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i + z_i \hat{k}$

$(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \rho_i^2 \omega^2$

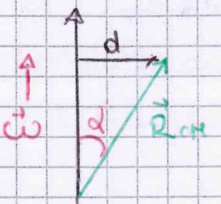
$$K = \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i \rho_i^2\right]\omega^2 \qquad I = \sum_i m_i \rho_i^2 \qquad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Usiamo il teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_{CM} + M d^2 .$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M d^2 \omega^2$$

È immediato vedere che: $[\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}] = [\omega R_{CM} \sin\alpha]^2 = \omega^2 d^2$



$$d = R_{CM} \sin\alpha \qquad \vec{\omega} \times \vec{R}_{CM} = \vec{V}_{CM}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M [\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}]^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

05/05/2020 Bombaci

Consideriamo un sistema di N punti materiali.

Presi due punti materiali i e j

$$d\mathcal{L}^{(int)} = F\, dr_{ij} = F\, d|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$$

•j

$$f = |\vec{F}_{ij}| = |\vec{F}_{ji}| \qquad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

i

$\mathcal{L}$ = lavoro

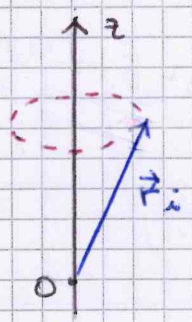
L = momento angolare

CORPO RIGIDO $\quad \frac{d}{dt}|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = 0 \qquad d\mathcal{L}^{(int)} = 0$

LAVORO DELLE FORZE ESTERNE SU UN CORPO RIGIDO

(a) Rotazione attorno a un asse fisso

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(est)} \cdot d\vec{r}_i$$



$$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega \hat{k} \times \vec{r}_i$$

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i\, dt = (\omega \hat{k} \times \vec{r}_i)\, dt$$

$$d\mathcal{L} = \sum_i \vec{F}_i^{est} \cdot (\omega \hat{k} \times \vec{r}_i)\, dt$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\boxed{\vec{F}_i^{est} \cdot (\hat{k} \times \vec{r}_i) = \hat{k} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{est})}$$

$$d\mathcal{L} = \hat{k} \cdot \underbrace{\left[\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{est})\right]}_{\text{momento risultante delle forze} = \vec{\tau}_\Omega^{est}} \omega\, dt = d\theta$$

$\circledast$ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\qquad \hat{k} \cdot \vec{\tau}_\Omega^{est} = \tau_z^{est}$ momento assiale delle forze esterne

$$\boxed{d\mathcal{L} = \tau_z^{est}\, d\theta}$$

(b) Moto Rototraslatorio (rispetto a un certo SR S)

SRI $S \equiv \{O, x, y, z\}$

$S' \equiv$ solidale al corpo (per l'oss. in S' tutti i punti sono fermi)

$\Rightarrow v_i' = 0 \quad i = 1, \dots, N \qquad O' \equiv CM$

$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \qquad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ velocità di trascinamento

$$d\mathcal{L} = \sum_i \vec{F}_i^{est} \cdot [\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})]\, dt =$$

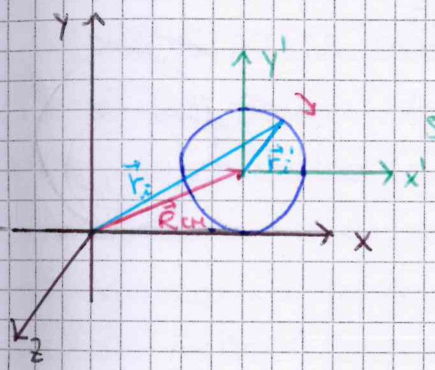
$$= [\sum_i \vec{F}_i^{est}] \cdot \vec{V}_{CM}\, dt + \sum \vec{F}_i^{est} \cdot [\omega \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})]\, dt =$$

$$= \vec{F}^{est} \cdot d\vec{R}_{CM} + [\sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_i^{est}] \cdot \vec{\omega}\, dt =$$

$$= \vec{F}^{est} \cdot d\vec{R}_{CM} + \vec{\tau}^{est}_{\Omega CM} \cdot \vec{\omega}\, dt$$

$$\boxed{d\mathcal{L} = \vec{F}^{est} \cdot d\vec{R}_{CM} + \vec{\tau}^{est}_{\Omega CM} \cdot \vec{\omega}\, dt}$$

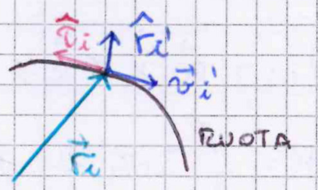
ROTOLAMENTO DI UNA RUOTA



$O' \equiv \Omega_{CM}$

$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$

$\vec{r}_i' = \vec{r} - \vec{R}_{CM}$



$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$\vec{r}_i' = R \hat{r}_i$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} < 0$

$\vec{\omega} \times \vec{r}_i' = \omega R (\hat{k}' \times \hat{r}_i)$

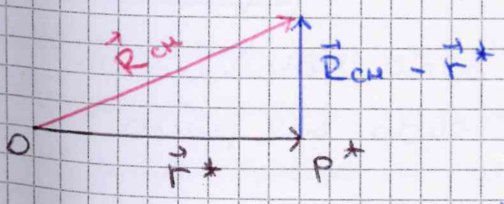
$\hat{k}' \times \hat{r}_i = \hat{\tau}_i$

$\vec{v}_i' = \omega R \hat{\tau}_i$

S $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Se $\vec{v}^* = \vec{v}_{P^*} = 0 \quad \forall t$

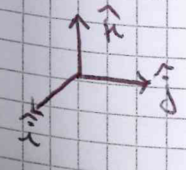


$|\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*| = R$

$\vec{v}^* = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}^* - \vec{R}_{CM}) = 0$

$\Rightarrow \vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*)$

$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad \vec{R}_{CM} - \vec{r}^* = R\hat{j}$



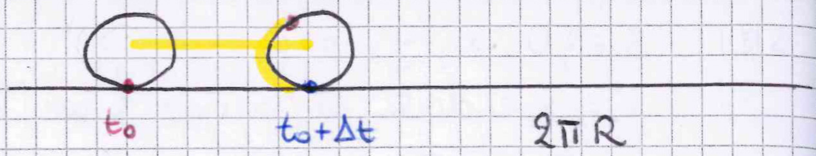
$\vec{V}_{CM} = \omega R (\hat{k} \times \hat{j}) = -\omega R \hat{i}$

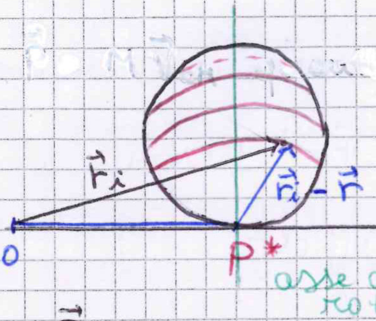
$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$

$\boxed{\vec{V}_{CM} = -\omega R \hat{i}}$ puro rotolamento

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} R\hat{i}$$

$$\boxed{d\vec{R}_{CM} = -R\,d\theta\,\hat{i}}$$





Rotolamento puro

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$$

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}^*)}$$

$\vec{P} = M V_{CM}$ quantità di moto totale

$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} = I^* \vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$ momento angolare

I^* = momento di inerzia rispetto all'asse di istantanea rotazione

Energia cinetica (Ruota)

SI $\quad K = \frac{1}{2} I^* \omega^2 \qquad I^* = I_{CM} + MR^2 \qquad d = R$

$K = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \qquad I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$

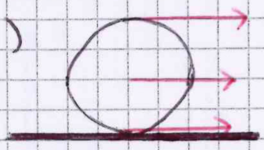
Puro rotol. $\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*) = -\omega R \hat{i}$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$\boxed{K = \frac{3}{4} MR^2 \omega^2}$$

RUOLO DELLE FORZE DI ATTRITO SUL ROTOLAMENTO

(a)

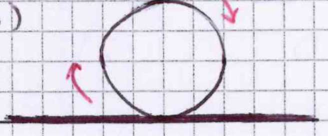


piano liscio

$\omega = 0$

L'attrito ha un ruolo importante nel moto

(b)



piano liscio

$\vec{V}_{CM} = 0$

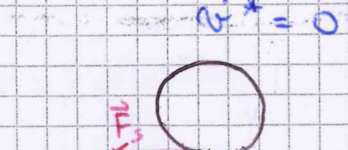
$\omega \neq 0$

(c) attrito dinamico $\quad \vec{v}_{P^*} \neq 0$

non si ha puro rotolamento (la ruota slitta sul piano)

(d) puro rotolamento $\quad \vec{v}^* = 0$

Si ha una forza di attrito radente che è una forza di attrito statico



$$\vec{F}_s \cdot d\vec{r}^* = \vec{F}_s \cdot \vec{v}^* dt = 0$$

11/05/2020 Bombaci

STATICA DEI CORPI RIGIDI

Consideriamo un sistema di riferimento S, la configurazione di un corpo rigido si dice statica quando il corpo è fermo, cioè quando la velocità di tutti i suoi punti sono nulle ad ogni istante di tempo. La configurazione statica rappresenta una configurazione di equilibrio del sistema.

$$\vec{P}(t) = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0 \qquad \vec{L}(t) = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times m_i \vec{v}_i = 0$$

Quindi la quantità di moto totale e il momento angolare totale del corpo sono costanti nel tempo e uguali a zero. Pertanto dalle equazioni cardinali della dinamica dei sistemi si ottengono le due seguenti equazioni dette

EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA STATICA DEI CORPI RIGIDI

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}^{\,est} &= 0 \\ \vec{\tau}^{\,est} &= 0 \end{aligned}}$$

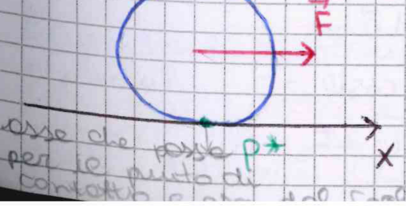
Dove il valore del momento delle forze esterne non dipende dal polo rispetto a cui è calcolato. Infatti si può facilmente dimostrare che per un sistema di vettori generici (cioè non necessariamente forze) $\vec{f}_i$ a risultante nullo, il momento totale di tali vettori non dipende dalla scelta del polo rispetto cui è calcolato.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = 0 \longrightarrow \vec{\tau}_\Omega = \vec{\tau}_{\Omega'}$$

Pertanto nella risoluzione dei problemi di statica dei corpi rigidi per calcolare il momento delle forze si può scegliere un polo qualsiasi. In generale conviene scegliere un polo rispetto al quale si annulla il contributo di una reazione vincolare.

ESERCIZIO 1

Consideriamo un cilindro omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro ed è soggetto ad una forza costante F applicata sull'asse del cilindro perpendicolare ad esso. Determinare l'accelerazione del centro di massa del cilindro.



$\vec{F} = F\hat{i}$

$\vec{v}^{\,*}(t) = 0 \quad \forall t$ (puro rotolamento)

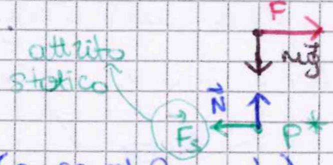


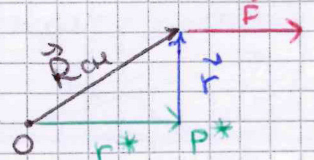
DIAGRAMMA DELLE FORZE

2ª EQ. CARDINALE DEI SISTEMI:

(*) $\tau_z^{est} = I^* \frac{d\omega}{dt}$ $\quad$ I^* ≡ momento di inerzia rispetto all'asse di instantanea rotazione

Polo $\Omega \equiv P^*$ $\quad$ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ (in generale)

$\vec{\tau}^{\,est} = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*) \times \vec{F} = -\underset{\substack{\downarrow \\ \text{modulo di } \vec{F}}}{RF}\hat{k}$ (entrante nello schermo)



$\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ $\quad$ $\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}$

REGOLA DELLA MANO DESTRA:

INDICE: $\vec{r}$

MEDIO: $\vec{F}$

POLLICE: verso (entrante)

TEOREMA DI H.-S.:

$I^* = I_{CM} + MR^2 \overset{(*)}{=} \frac{3}{2}MR^2$

(*) $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ (vedi lezione 27/04)

Per (*) $I^* = \tau_z^{est}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^{-1} \Rightarrow I^* = -RF\hat{k}\,\alpha^{-1}$

$\Rightarrow -RF = \frac{3}{2}MR^2\alpha$ (*)

PURO ROTOLAMENTO:

$v_{P^*} = 0 \;\forall t \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*)$

$\vec{V}_{CM} = -\omega R\hat{i}$

$\omega < 0$ → ruota in senso orario $\vec{V}_{CM} > 0$ $\omega > 0$ → ruota in senso antiorario $\vec{V}_{CM} < 0$

$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = -\alpha R\hat{i}$

$\Rightarrow a_{CM} = -\alpha R$ ≡ componente (o accelerazione scalare)

(*) $-\cancel{R}F = \frac{3}{2}M\underbrace{\alpha R}_{-a_{CM}}\cancel{^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{a_{CM} = \frac{2}{3}\frac{F}{M}}$

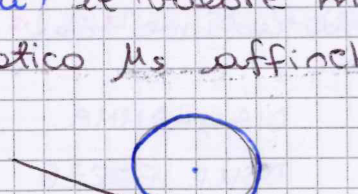
ESERCIZIO 2

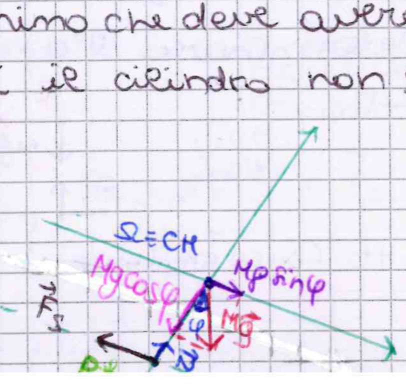
Un cilindro omogeneo di massa M e raggio R viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla su un piano inclinato scabro. Il cilindro scende rotolando senza strisciare. Calcolare:

(i) l'accelerazione scalare del centro di massa del cilindro;

(ii) la forza d'attrito esercitata dal piano inclinato;

(iii) il valore minimo che deve avere il coefficiente di attrito statico μ_s affinché il cilindro non scivoli sul piano.





1ª EQ. CARDINALE

$\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM}$

$\begin{cases} N - Mg\cos\varphi = 0 & \text{(asse y)} \\ Mg\sin\varphi - F_s = Ma_{CM} & \text{(asse x)} \end{cases}$

$N = Mg\cos\varphi$

2ª EQ. CARDINALE

Polo $\Omega \equiv CM$

$$\vec{\tau}^{\,est} = -RF_s\hat{k} \qquad \tau^{est} = I_{CM}\frac{d\omega}{dt} \qquad I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

Puro rotolamento: $V_{CM} = -\omega R\hat{i} \qquad a_{CM} = -\alpha R$

$$-F_s R = -I_{CM}\frac{a_{CM}}{R} = -\frac{1}{2}MR^2\frac{a_{CM}}{R}$$

$$\begin{cases} F_s = \frac{1}{2}Ma_{CM} \\ Mg\sin\varphi - F_s = Ma_{CM} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} (i) & a_{CM} = \frac{2}{3}g\sin\varphi \\ (ii) & F_s = \frac{1}{3}Mg\sin\varphi \end{array}} \Rightarrow a_{CM} = cost$$

Moto uniformemente accelerato

(iii)

$$\boxed{|\vec{F}_s| \leq \mu_s|\vec{N}|} \Rightarrow F_s \leq \mu_s N = \mu_s Mg\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \mu_s \geq \frac{F_s}{Mg\cos\varphi} = \frac{1}{3}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow \boxed{\mu_s \geq \frac{1}{3}\tan\varphi}$$

GRAVITAZIONE

Il moto apparente dei pianeti sulla sfera celeste

Uno dei problemi che ha impegnato il genere umano per vari millenni (a partire dall'antica civiltà babilonese (1800 AC) e a seguire assira e greca, fino al XVII secolo) è stato quello di descrivere e spiegare il moto apparente dei pianeti (e in particolare il moto retrogrado) sulla sfera celeste

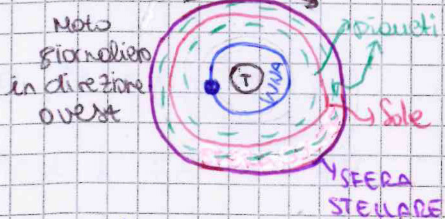
Il moto retrogrado apparente di questi corpi celesti sconcertò gli astronomi greci e fu una delle ragioni per cui essi chiamarono questi oggetti pianeti, che in greco significa erranti, vagabondi.

Il moto retrogrado, che si verifica circa ogni due anni fu il principale dato astronomico che ispirò la teoria geocentrica degli epicicli.

Il sistema geocentrico (sistema tolemaico)

Il sistema geocentrico è un modello astronomico che pone la Terra al centro dell'Universo mentre tutti gli altri corpi celesti (pianeti e stelle fisse) ruotano attorno ad essa.
Questo modello fu alla base dell'astronomia di tutte le civiltà antiche ed ha ricevuto contributi (documentati) da parte di vari astronomi, matematici e filosofi. Tra questi ricordiamo:

Eudosso di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)
Calippo di Cizico (370 a.C. circa - 300 a.C. circa)
Aristotele (384 a.C. - 322 a.C.)
Ipparco di Nicea (200 a.C. - 120 a.C.)
Claudio Tolomeo (100 circa - 175 circa D.C.)



Visione aristotelica del mondo

Mondo sublunare: «corruttibile» → Moto dei corpi verso il luogo naturale

Mondo sovralunare: «perfetto» e «incorruttibile» → Moto circolare dei pianeti e delle stelle

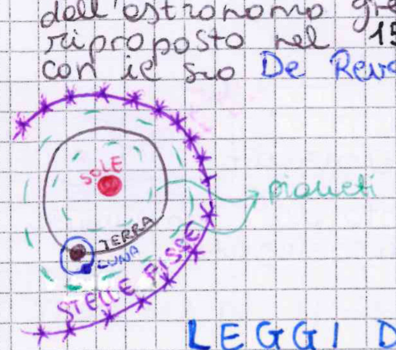
Epicicli e deferenti

Per interpretare il moto retrogrado dei pianeti le loro orbite attorno alla Terra furono descritte come combinazioni di moti circolari (a volte eccentrici) [Ipparco, Tolomeo]

Il sistema eliocentrico (Sistema Copernicano)

Il sistema eliocentrico è un modello astronomico che pone il Sole al centro dell'Universo mentre tutti gli altri corpi celesti, cioè i pianeti (inclusa la Terra) e stelle fisse ruotano attorno ad esso.

L'eliocentrismo fu introdotto nella prima metà del III secolo a.C. dall'astronomo greco **Aristarco di Samo** (310 a.C. circa - 230 a.C. circa) e riproposto nel **1543** dall'astronomo polacco **Niccolò Copernico** (1473-1543), con il suo *De Revolutionibus orbium coelestium* (Le rivoluzioni dei mondi celesti)



Tycho Brahe (1546 - 1601)

Astronomo che raccolse molti dati sui corpi celesti. Osservò una nuova stella nella Costellazione di **Cassiopea** nel **1572**, una supernova. Raccolse dati sull'orbita di Marte ($e = 0{,}09339$, 2ª orbita più eccentrica)

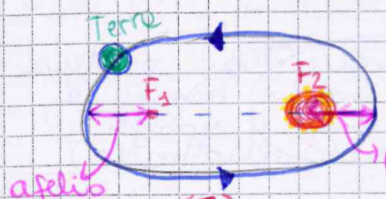
LEGGI DI KEPLERO (1571-1630)

Prima legge: le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono delle ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

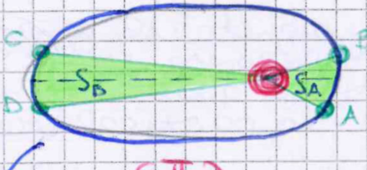
Seconda legge: Il raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

Terza legge: I quadrati del periodo di rivoluzione (T) sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori (a) delle orbite ellittiche.

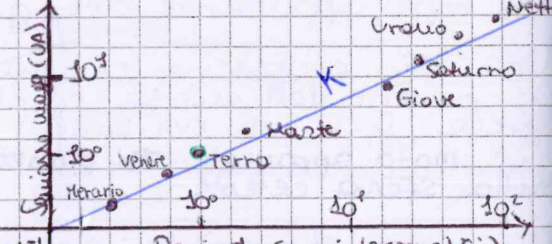
$$T^2 = K a^3$$ dove K è una costante



(I)



(II)



(III)

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \qquad S = K_0 \Delta t$$

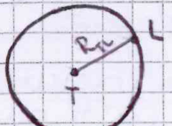
$$\Rightarrow \frac{S}{\Delta t} = K_0 = \text{cost} = \text{velocità areolare} \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = \text{cost}}$$

Terra = 1

Dal grafico vediamo la costante

LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON (1642-1726)

Newton intuì che la forza che provoca la caduta dei corpi sulla Terra è la stessa che governa il moto dei pianeti attorno al Sole.



$M_T \gg M_L \qquad R_{TL} \simeq 3{,}84 \times 10^8\ m$

$T = 2{,}36 \times 10^6\ s$

$v = \text{cost} \Rightarrow v = \frac{2\pi R_{TL}}{T}$ accelerazione centripeta che subisce la Luna $= a_L = \frac{v^2}{R_{TL}} = \frac{4\pi^2 R_{TL}}{T^2}$

$$\Rightarrow g = 9{,}807\ m/s^2 \Rightarrow \frac{g}{a_L} = 3603$$

molto vicini

$$R_T = 6{,}37 \times 10^6\ m \Rightarrow \left(\frac{R_{TL}}{R_T}\right)^2 \simeq 3634$$

$$\Rightarrow \frac{g}{a_L} \simeq \left(\frac{R_{TL}}{R_T}\right)^2 \Rightarrow \boxed{a \simeq \frac{1}{r^2}} \qquad F \propto m \frac{1}{r^2}$$

$F_{L(T)}$ = forza che la Terra esercita sulla Luna

$$F_{L(T)} \propto \frac{M_L}{R_{TL}^2} \qquad F_{T(L)} \propto \frac{M_T}{R_{TL}^2}$$

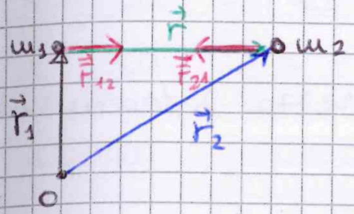
3^a LEGGE DI NEWTON (azione - reazione)

$$F_{T(L)} = F_{L(T)} \propto \frac{M_T M_L}{R_{TL}^2}$$

$$\boxed{F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

$G \equiv$ costante di gravitazione universale

$$G = (6{,}67428 \pm 0{,}00067) \times 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$



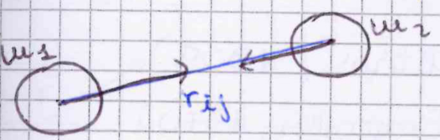
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}} = -\vec{F}_{12}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}$$

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \simeq \frac{1}{r^2}$$

CORPI ESTESI (non più puntiformi)



$$\vec{F}_{21} = -G \frac{\sum_{ij} \Delta m_{1i} \Delta m_{2j}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_{2j} - \vec{r}_{1i})$$

$$\vec{F}_{21} = -G \int_{m_1} \int_{m_2} \frac{dm_1 \, dm_2}{r^3} \vec{r}$$

$dm_1 = \rho_1 (\vec{r}_1) \, d^3\vec{r}$ volume infinitesimo

$dm_2 = \rho_2 (\vec{r}_2) \, d^3\vec{r}$

12/05/2020 Bombeci

2^a LEGGE DI NEWTON:

$\vec{F} = m\vec{a}$ → massa inerziale $\equiv m_I$

LEGGE DI GRAVITAZIONE:

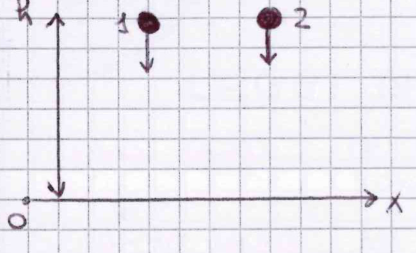
$\vec{F}_G = -G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{r}$ → massa gravitazionale $\equiv M_G m_G$

(FORZA DI COULOMB (forza elettrostatica tra due cariche elettriche puntiformi)

$$F_C = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$ ANALOGA ALLA LEGGE GRAVITAZIONALE)

Partiamo da un esperimento:

Consideriamo due corpi che lascio cadere da un'altezza h, trascurando la resistenza dell'aria (esperimento di Galileo)



$a_1 = a_2 = g \qquad F = F_G$

$$a = \frac{F}{m_I} = \frac{GM_T m_G}{R_T^2}\frac{1}{m_I}$$ → massa inerziale

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_1 = \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_2 = K$$

$\dfrac{m_G}{m_I} = K = cost$ Principio di equivalenza

$$R = \frac{\left(\frac{m_G}{m_I}\right)_1 - \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_2}{\left(\left(\frac{m_G}{m_I}\right)_1 + \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_2\right)/2}$$

valore medio

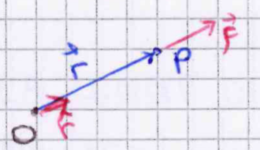
$R < 3\times10^{-9}$ (Eötvös, 1909)

$R < 3\times10^{-11}$ (Braginsky, 1970)

$\dfrac{m_G}{m_I} = K = cost$ In generale assumiamo $K = 1$

Consideriamo un campo di forze: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

FORZE CENTRALI: $\boxed{\vec{F} = f(\vec{r})\hat{r}}$ definizione



$\vec{r} = \overline{OP} \qquad \hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

Se inoltre si ha che la funzione $f(\vec{r}) = f(r)$ dipende dal modulo si dice forza centrale a simmetria sferica

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

- forza centrale a simmetria sferica
- $f(r)$ funzione integrabile

$\Rightarrow \vec{f}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ è conservativa

$$d\mathcal{L} = \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}dt \Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\eta}$$

$\hat{\eta} \perp \hat{r}$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} = \underset{(*)}{\vec{\omega}}\times\hat{r} \qquad \frac{d\hat{r}}{dt}\perp\hat{r} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\mathcal{L} = f(r)\hat{r}\cdot\left(dr\,\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}dt\right) \overset{(*)}{=} f(r)\,dr$$

$d\mathcal{L} = f(r)\,dr = -dU$ funzione primitiva $\Rightarrow$ differenziale esatto

$\Rightarrow \boxed{f(r) = -\dfrac{dU}{dr}}$ $\vec{F}$ è conservativa

$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B f(r)\,dr \rightarrow U_A - U_B = \int_A^B f(r)\,dr$

Per la forza gravitazionale

$U_A - U_B = -G m_1 m_2 \int_A^B \frac{1}{r^2}\,dr = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$

$r_B \rightarrow \infty$ poniamo $U_B = U(r_B) = 0$

$$\boxed{U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

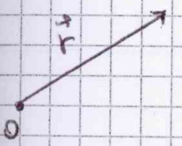
Ricaviamo le leggi di Keplero dalla legge di gravitazione universale di Newt

$M = M_\odot = 2 \times 10^{33}\,g \equiv$ massa del Sole $\quad m \equiv$ massa pianeta

Terra: $m = 6 \times 10^{27}\,g \quad m \equiv m_T \quad m_T \sim 3 \times 10^{-6} M_\odot$

$m << M \quad M_{tot} = M + m \simeq M$

$\mu = \frac{Mm}{M+m} \simeq m$ massa ridotta

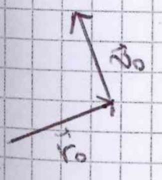


$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v}$ momento angolare

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times f(r)\hat{r} = 0$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\ell}(t) = cost$

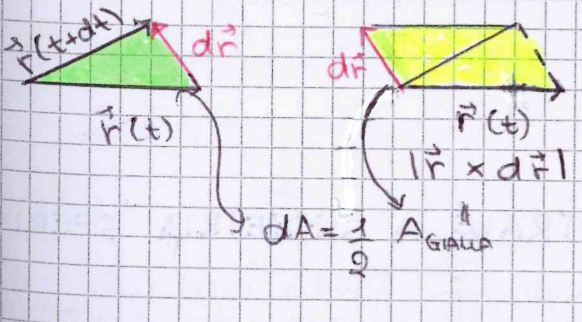
$t_0 \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$



$z = 0 \quad \Sigma(x, y)$

$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{\ell}_0 = cost \rightarrow$ moto piano

$\vec{\ell} = \ell\hat{n} \quad \ell = |\vec{\ell}|$



$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$

$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})\,dt$

$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})$ velocità areolare

$\vec{\sigma} = \frac{\vec{\ell}}{2m} = cost \Rightarrow$ 2ª legge di Keplero

$a \equiv$ acc. del pianeta

$\frac{m_G}{m_I} = 1$

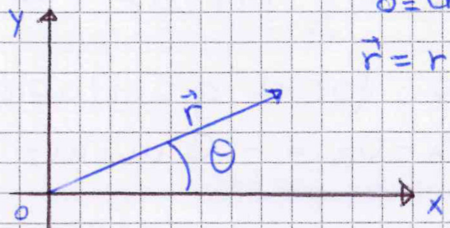
$a = \frac{|f(r)|}{m} = \frac{GM}{r^2}$

orbita circolare: $r(t) = d$ raggio dell'orbita

acc. centripeto: $a = \frac{v^2}{d} = \omega^2 d = \frac{(2\pi)^2}{T^2} d$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad T \equiv$ periodo orbitale $\qquad \frac{GM}{d^2} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} d$

$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} d^3 \Rightarrow$ 3ª legge di Keplero



$O \equiv CM$

$\vec{r} = r\hat{u}_r$

$\vec{F} = f(r)\hat{u}_r \qquad \hat{u}_r = \hat{r}$

$\vec{\ell} = cost \Rightarrow$ moto piano $\quad z = 0$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\frac{d}{dt}\hat{u}_r$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{u}_r = \dot{\theta}\hat{u}_\theta \qquad \dot{\hat{u}}_\theta = \frac{d}{dt}\hat{u}_\theta = -\dot{\theta}\hat{u}_r}$$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta} r\hat{u}_\theta$

$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{u}_r \times m(\dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta} r\hat{u}_\theta) = mr^2\theta(\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$

$$\boxed{\ell = |\vec{\ell}| = mr^2\dot{\theta} = cost}$$

ENERGIA MECCANICA $\quad E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \qquad U(r) = -G\frac{Mm}{r}$

$v^2 = (\dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta} r\hat{u}_\theta)^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$

$\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r = \hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_\theta = 1$

$\dot{\theta} r \cdot \dot{r} = 0$

$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2 + U(r)$

Consideriamo:

$\frac{m\dot{\theta}^2 r^2}{2} = \frac{m^2\dot{\theta}^2 r^4}{2mr^2} = \frac{\ell^2}{2mr^2} \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ legge oraria

ENERGIA POTENZIALE EFFICACE

$U_{eff} = -\frac{GMm}{r} + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\text{energia potenziale centrifuga}}$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r} + U_{eff}(r)}$$

19/05/2020 Bombaci

MOTO DI UN CORPO IN UN CAMPO CENTRALE A SIMMETRIA SFERICA

Se un corpo si muove in un campo di forze centrale e a simmetria sferica si conservano il momento angolare e l'energia meccanica

$\vec{F} = f(r)\hat{u}_r \qquad \vec{\ell} = mr^2(t)\dot{\theta}(t)\hat{K} = \vec{cost}$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = cost$

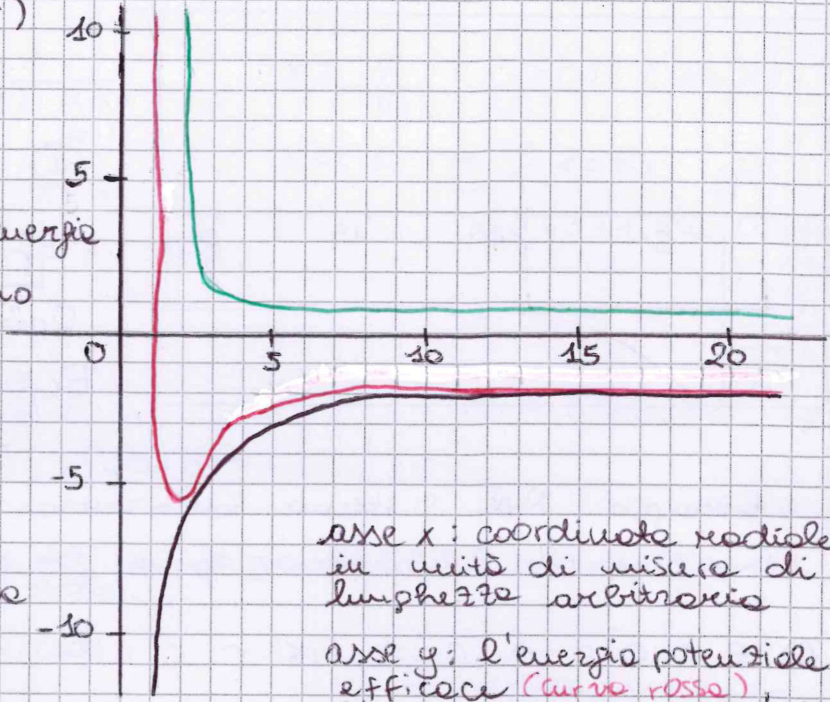
Per la legge di gravità di Newton: $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r \qquad U(r) = -\frac{GMm}{r}$

L'Energia in coordinate polari si scrive: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$

$U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ $\qquad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0 \Rightarrow E \geq U_{eff}(r)$

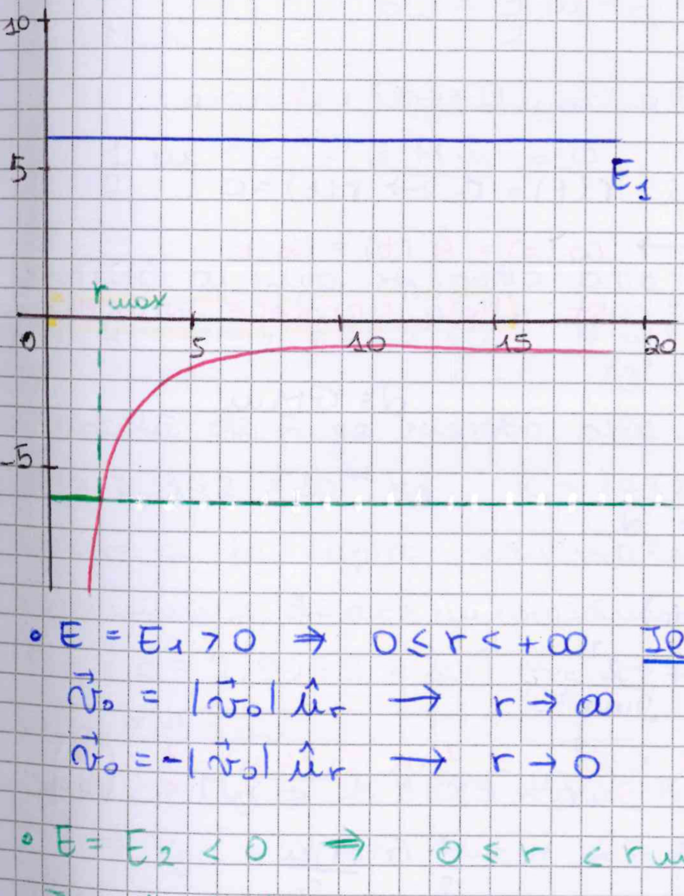
$U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$



Studiando il grafico dell'energia potenziale efficace possiamo fare delle interessanti considerazioni sul tipo di moto del corpo in base ai valori del momento angolare ℓ e dell'energia meccanica **E** che sono delle costanti del moto

asse x: coordinata radiale r in unità di misura di lunghezza arbitraria

asse y: l'energia potenziale efficace (curva rossa), l'energia potenziale gravitazionale (curva nera) e l'energia potenziale centrifuga (curva verde) in unità di energia arbitr.



$\boxed{\ell = 0}$

$\ell = m r^2(t) \dot{\theta}(t)$

1) $r(t) = 0 \quad \forall t$

2) $\dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = cost$

moto unidimensionale puramente radiale

$U_{eff}(r) = -G\frac{Mm}{r}$

- $E = E_1 > 0 \Rightarrow 0 \leq r < +\infty$ Il moto non è limitato

$\vec{v}_0 = |\vec{v}_0| \hat{u}_r \longrightarrow r \to \infty$

$\vec{v}_0 = -|\vec{v}_0| \hat{u}_r \longrightarrow r \to 0$ $\qquad$ Il corpo di massa M cade su M $(M \gg m)$

- $E = E_2 < 0 \Rightarrow 0 \leq r < r_{max}$

In definitiva il corpo cadrà sul centro di forze perché se inizialmente si muove con una velocità verso l'esterno arriverà a $r = r_{max}$ dove la sua velocità ~~la sua velocità~~ è nulla, inverte il moto e andrà a cadere sul centro di forze.

$\boxed{\ell \neq 0}$

$E \geq U_{eff}(r_c)$

a) $E = U_{eff}(r_c)$

$$\boxed{\dot{r}(t) = 0 \quad r(t) = r_c \quad \forall t}$$

Orbita circolare con raggio r_c

$$E_c \equiv U_{eff}(r_c) = -G\frac{Mm}{r_c} + \frac{\ell^2}{2mr_c^2}$$

$E_c < E < 0 \Rightarrow r_{min} \leq r \leq r_{max}$

Esempio: Nel sistema Sole-Terra sono perielio e afelio

Orbita: ellisse

- $E \geq 0 \rightarrow r_{min} \leq r < +\infty$ r limitato inferiormente

(1) $E = 0 \rightarrow$ parabola

(2) $E > 0 \rightarrow$ iperbole

Moto di un corpo in un campo centrale a simmetria sferica:

ORBITE CIRCOLARI

Torniamo al caso di orbite circolari: $r(t) = r_c \rightarrow \dot{r}(t) = 0$

$\ell = mr^2(t)\dot{\theta}(t) = m r_c^2 \dot{\theta}(t) = cost \longrightarrow \omega(t) \equiv \dot{\theta}(t) = cost$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta} r \hat{u}_\theta \longrightarrow v = \omega r_c = cost$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{\ell^2}{GMm^2} = \frac{\ell^2}{\alpha m} \qquad \alpha \equiv GMm$$

$$U(r_c) = -\frac{GMm}{r_c} \qquad v = \frac{GMm}{\ell} = \frac{\alpha}{\ell}$$

ENERGIA CINETICA (orbite circolari)

In generale: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}$

Orbita circolare: $\dot{r} = 0 \quad r = r_c \qquad K = \frac{\ell^2}{2mr_c^2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{GMm}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\alpha}{\ell}\right)^2$

$$U(r_c) = -\frac{GMm}{r_c} = -\frac{\ell^2}{mr_c^2} = -2K \Rightarrow K = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_c}$$

ENERGIA MECCANICA (orbita circolare)

$$E = K + U = K - 2K = -K = \frac{U}{2}$$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_c} = -\frac{\ell^2}{2mr_c^2}$$

VARIAZIONE DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ g CON L'ALTEZZA

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = ma$$

$\Rightarrow a = g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$ accelerazione di gravità sulla superficie della terra $\Rightarrow h = 0$

$g_0 \simeq 9,80665 \ m/s^2$

$g(h) = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{G M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$ $\quad x \equiv \frac{h}{R_T}$ $\quad F(x) = (1 + x)^{-2}$

Espansione in serie di Taylor $\quad x << 1 \Rightarrow h << R_T$

$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2} F''(0)x^2 + \dots$

$F'(x) = -2(1+x)^{-3}, \quad F''(x) = 6(1+x)^{-4}, \dots$

$F(x) \simeq 1 - 2x + 3x^2 + \dots$

$g(h) = g_0 \left[1 - 2\frac{h}{R_T} + 3\left(\frac{h}{R_T}\right)^2 + \dots \right]$

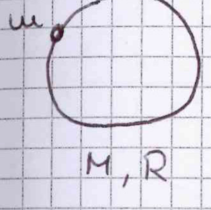
$R_T = 6371 \ Km$ (raggio medio)

$h = 8850 \ m$ (vetta dell'Everest)

$M_T = 5,972 \times 10^{24} \ Kg$

$\Rightarrow x = \frac{h}{R_T} = \frac{8,85 \ Km}{6,371 \times 10^3 \ Km} \simeq 1,39 \times 10^{-3}$

VELOCITÀ DI FUGA di un corpo dal campo gravitazionale di un pianeta o di una stella.



a simmetria sferica, non ruota. Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica

$E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R}$

$v_{Fin} = 0 \qquad U_\infty = 0 \sim \frac{1}{r} \qquad E_{Fin} = 0$

$\frac{1}{2} m v_{Fu}^2 - \frac{GMm}{R} = 0$

$$\boxed{v_{Fu} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

Velocità di fuga rispetto alla <u>Terra</u>:

$M_T, R_T, G = 6,674 \times 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \longrightarrow v_{Fu} = 11,2 \ Km/s \simeq 40320 \ Km/h$

Velocità di fuga rispetto alla <u>Luna</u>:

$M_L = 7,342 \times 10^{22} \ Kg, \ R_L = 1738 \ Km \longrightarrow v_{Fu} = 2,38 \ Km/s \simeq 8568 \ Km/h$

Questo ci fa capire perché la Terra ha un'atmosfera e la luna no

Supponiamo di avere un corpo di massa M_T, e voler calcolare il raggio tale che

$v_{Fu} = c = 2,9979 \times 10^8 \ m/s \rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \equiv R_g$ raggio di Schwarz-Schield

$R_{gT} \simeq 9 \ mm$

<u>Sole</u> $\quad M_\odot = 1,9889 \times 10^{30} \ Kg, \ R_\odot = 6,955 \times 10^5 \ Km$

$\Rightarrow R_{g\odot} = 2,95 \ Km$ (se dovesse diventare un buco nero)

<u>21/05/2020 Bombaci</u>

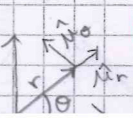
Moto di un corpo centrale a simmetria sferica. Il problema di Keplero:
CALCOLO DELLE ORBITE

Vogliamo ricavare quali sono le traiettorie di un corpo che si muove in un campo di forza centrale e vogliamo classificare i vari tipi di orbite e la 1ª legge di Keplero.

$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{u}_r \qquad \alpha \equiv GMm$

$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$

In coordinate polari: $\vec{l} = m r^2(t)\dot{\theta}(t)\hat{k}$



$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta}r\hat{u}_\theta$

$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{u}_r$

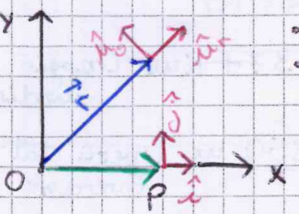
$\boxed{\ell \neq 0} \to r \geq r_{min}$ • $r = r_{min} \to \dot r = 0$, $E = \frac{\ell^2}{2mr_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}}$

$\vec v(r_{min}) = \dot\theta(r_{min})\, r_{min}\, \hat u_\theta$

SCELTA DELL'ASSE X

Nel piano del moto fissiamo l'asse x in modo che il perielio (P) sia su di esso

$\vec r_{min} = r_{min}\hat\imath \equiv (r_{min}, \theta=0)$ $\hat u_r(\theta=0)=\hat\imath$ $\hat u_\theta(\theta=0)=\hat\jmath$



- O ≡ centro di massa del sistema
- Momento angolare è uscente dallo schermo

Per ricavare la traiettoria del corpo partiamo dalla 2ª legge della dinamica di Newton

$$m\frac{d\vec v}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat u_r = -\frac{\alpha}{r^2}\hat u_r$$

$\hat u_r = -\frac{1}{\dot\theta}\frac{d\hat u_\theta}{dt}$ $m\frac{d\vec v}{dt} = \frac{\alpha}{\dot\theta r^2}\frac{d\hat u_\theta}{dt}$ $\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2}$

$m\frac{d\vec v}{dt} - \frac{\alpha}{\cancel{r^2}}\frac{m\cancel{r^2}}{\ell}\frac{d\hat u_\theta}{dt} = 0$ $\frac{\alpha m}{\ell} = cost$

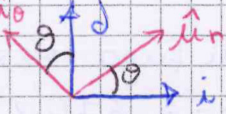
$$\frac{d}{dt}\left(m\vec v - \frac{\alpha m}{\ell}\hat u_\theta\right) = 0 \Rightarrow m\vec v - \frac{\alpha m}{\ell}\hat u_\theta = cost$$

$\vec e \equiv \frac{\ell}{\alpha}\vec v - \hat u_\theta = cost$ $\vec e = \frac{\ell}{\alpha}\dot r\,\hat u_r + \left(\frac{\ell}{\alpha}\dot\theta r - 1\right)\hat u_\theta = \vec{cost}$

Per $\vec r = \vec r_{min}$ (perielio) $\dot r = 0$ $\hat u_\theta(\theta=0)=\hat\jmath$ $\vec e(t) = e\hat\jmath$

$$\boxed{e = \frac{\ell}{\alpha}\dot\theta(r_{min})\,r_{min} - 1 = \frac{\ell^2}{m\alpha r_{min}} - 1}$$

$\frac{\ell}{\alpha}\dot r\, \underbrace{\hat u_r\cdot\hat u_\theta}_{0} + \left(\frac{\ell}{\alpha}\dot\theta r - 1\right)\underbrace{\hat u_\theta\cdot\hat u_\theta}_{1} = e\,\hat\jmath\cdot\hat u_\theta$



$\frac{\ell}{\alpha}\dot\theta r - 1 = e\cos\theta$ $\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2} \Rightarrow \frac{\ell}{\alpha}\frac{\ell}{mr^{\cancel{2}}}\cancel{r} - 1 = e\cos\theta \Rightarrow \frac{\ell^2}{\alpha m}\frac{1}{r} - 1 = e\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{r = \frac{\ell^2}{m\alpha}\frac{1}{1+e\cos\theta}}$ equazione della traiettoria

$\theta=0 \Rightarrow r_{min} = \frac{\ell^2}{m\alpha}\frac{1}{1+e}$ $p \equiv \frac{\ell^2}{m\alpha} > 0$ $r \geq r_{min} \to \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_{min}}$

$1+e\cos\theta \leq 1+e \to e\cos\theta \leq e$ vero solo se $e \geq 0$

Se $e>0 \to \cos\theta < 1$ vero ; se $e<0 \to \cos\theta > 1$ falso

L'equazione della traiettoria è una conica

$0 \leq e < 1$: ellisse ($e=0$: circonferenza)

$e = 1$: parabola

$e > 1$: iperbole

$\vec r = \vec r_{min}$ (perielio) $\to \dot r = 0 \to E = \frac{\ell^2}{2mr_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}}$ $r_{min} = \frac{\ell^2}{m\alpha}\frac{1}{1+e} \Rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \dots$

$\Rightarrow E = \frac{m\alpha^2}{2\ell^2}(e^2-1) \Rightarrow \boxed{e = \sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{m\alpha^2}}}$ eccentricità

$\ell\neq0 \Rightarrow E \geq U_{eff}(r_c) \equiv E_c = -\frac{1}{2}m\frac{\alpha^2}{\ell^2}$ $e \geq \sqrt{1+\frac{2\ell^2}{m\alpha^2}\left(-\frac{1}{2}m\frac{\alpha^2}{\ell^2}\right)} = 0 \Rightarrow e \geq 0$

- $\ell\neq0 \Rightarrow E \geq E_c \equiv -\frac{1}{2}m\frac{\alpha^2}{\ell^2}$ • $E = E_c \Rightarrow e = 0$ (circonferenza)

• $E_c < E < 0 \Rightarrow e < 1$ ellisse (1ª legge di Keplero)

• $E = 0 \Rightarrow e = 1$ parabola • $E > 0 \Rightarrow e > 1$ iperbole (non legato)

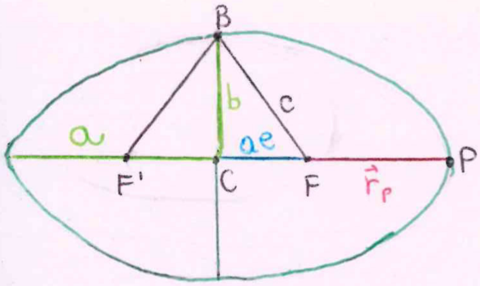
Orbite ellittiche

$\theta = 0$ $r_p \equiv r_{min} = \frac{\ell^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{1+e}$ (perielio)

$\theta = \pi$ $r_a \equiv r_{max} = \frac{\ell^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{1-e}$ (afelio)

$$2a = r_p + r_a \Rightarrow a = \frac{\ell^2}{m\alpha}\frac{1}{1-e^2}$$ (semiasse)

$r_p = a(1-e)$; $r_a = a(1+e) \Rightarrow e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$ distanza relativa tra r_a e r_p



$\overline{CF} = a - r_p = ae$

$\overline{F'B} + \overline{FB} = \overline{FP} + \overline{F'P}$ $\overline{F'B} = \overline{FB} = c \Rightarrow c = a$

$b = a\sqrt{1-e^2}$ $b = \frac{\ell^2}{m\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ $E = \frac{m\alpha^2}{2\ell^2}(e^2-1)$

$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{E}}$ (poiché $E < 0$, $a > 0$)

3ª legge di Keplero

Dimostriamo la 3ª legge di Keplero nel caso di orbite ellittiche

$\vec{\sigma} \equiv \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{\ell}}{2m} = \text{cost}$ velocità areolare $\Delta t = T \Rightarrow A = \pi ab$ $b = a\sqrt{1-e^2}$

$$\sigma = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e}}{T} = \frac{\ell}{2m} \Rightarrow \frac{A^2}{T^2} = \frac{\pi^2 a^4 (1-e^2)}{T^2} = \frac{\ell^2}{4m^2}$$

$a = \frac{\ell^2}{m\alpha}\frac{1}{1-e^2}$ $\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1-e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\ell^2}{4m^2}$ ($\alpha \equiv GMm$) $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2}$ 3ª legge di Keplero