STATICA

25/11/19

La statica studia l'equilibrio dei sistemi di corpi, quindi è essenziale precisare cosa si intende per equilibrio.

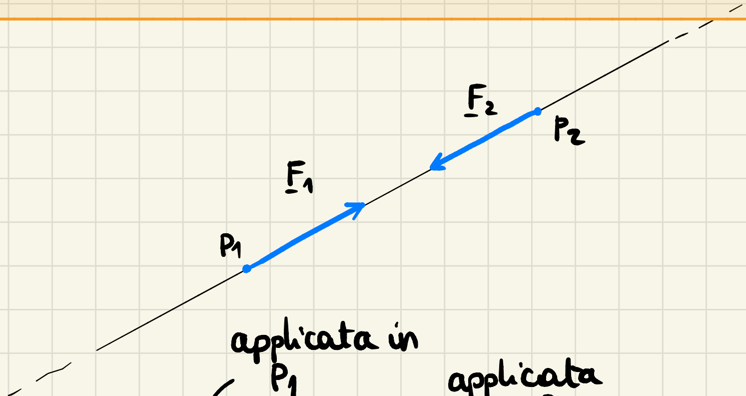
DEFINIZIONE Un sistema di forze si dice equilibrato se la risultante $\underline{R}$ e il momento risultante $\underline{M}_O$ rispetto a un qualsiasi polo O sono entrambi nulli.

Il fatto che basti momento nullo rispetto a un solo polo sembra un po' debole, ma in realtà si può far vedere che anche tutti gli altri momenti sono nulli:

$$\underline{M}_{O'} = \underbrace{\underline{M}_O}_{=0 \text{ per ipotesi}} + (O-O') \wedge \underbrace{\underline{R}}_{=0 \text{ per ipotesi}} = \underline{0} \quad \forall\, O' \neq O.$$

formula di variazione del momento al variare del polo

OSSERVAZIONE 1: Un sistema di due forze è equilibrato se e solo se costituiscono una coppia di braccio nullo.



applicata in P_1

applicata in P_2

Infatti, se $\underline{F}_1$ e $\underline{F}_2$ sono tali forze, da $\underline{R} = \underline{0}$ otteniamo

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{0} \iff \underline{F}_1 = -\underline{F}_2$$

definizione di coppia.

Imponendo il momento nullo rispetto a P_2:

$$\underline{M}_{P_2} = (P_1 - P_2) \wedge \underline{F}_1 + \underbrace{(P_2 - P_2)}_{=0} \wedge \underline{F}_2 = \underline{0},$$

da cui

$$(P_1 - P_2) \wedge \underline{F}_1 = \underline{0},$$

cioè i vettori $\underline{F}_1$ e $P_1 - P_2$ sono paralleli

($\Rightarrow$ $\underline{F}_1$ è diretta come la congiungente di P_1 e P_2).

OSSERVAZIONE 2 : Un sistema costituito da tre forze non parallele è equilibrato se e solo se la risultante è nulla e le rette d'azione si incontrano nello stesso punto.

Proviamo a dimostrarlo: il fatto che $\underline{R}=\underline{0}$ viene immediatamente dalla definizione.
Vediamo che le tre rette d'azione si devono necessariamente incontrare in un punto.
Sia H il punto d'intersezione delle rette di $\underline{F}_1$ e $\underline{F}_2$*. Calcoliamo il momento risultante rispetto a H:

$$\underline{M}_H = \underbrace{(P_1-H)\wedge\underline{F}_1}_{=0} + \underbrace{(P_2-H)\wedge\underline{F}_2}_{=0} + (P_3-H)\wedge\underline{F}_3$$

perché P_1-H e P_2-H sono paralleli risp. a $\underline{F}_1$ e $\underline{F}_2$

* due rette non parallele si intersecano necessariamente in un punto.

$$= (P_3-H)\wedge\underline{F}_3 = \underline{0}$$

per equilibrio

$\Rightarrow$ $\underline{F}_3$ è parallelo a P_3-H
$\Rightarrow$ la retta di $\underline{F}_3$ passa per H.

Le osservazioni precedenti sono alla base dei metodi grafici per la risoluzione dei problemi di statica e calcolo di reazioni vincolari.

Le equazioni cardinali della statica sono equazioni necessarie all'equilibrio di un sistema di forze. Vengono dalla definizione di sistema equilibrato:

$$\begin{cases} \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{M} = \underline{0} \end{cases}$$

non indico il polo perché abbiamo visto che uno qualsiasi va bene.

Nei problemi proposti, solitamente si chiede di calcolare le reazioni vincolari che si sviluppano nelle cerniere fisse di un sistema di corpi rigidi. Dal punto di vista teorico, queste sono forze al pari delle forze note che agiscono sul sistema. Per maggior chiarezza, distinguiamo però la risultante delle forze note $\underline{R}$ dalla risultante delle reazioni vincolari (incognite) $\underline{\Phi}$ PHI, così come il momento risultante delle forze note $\underline{M}$ dal momento risultante delle reazioni vincolari $\underline{\Psi}$ PSI. Le equazioni sono però le stesse:

nota   incognite

$$\boxed{\begin{cases} \underline{R} + \underline{\Phi} = \underline{0} \\ \underline{M} + \underline{\Psi} = \underline{0} \end{cases}}$$

noto   contiene l'incognita

EQUAZIONI VETTORIALI!

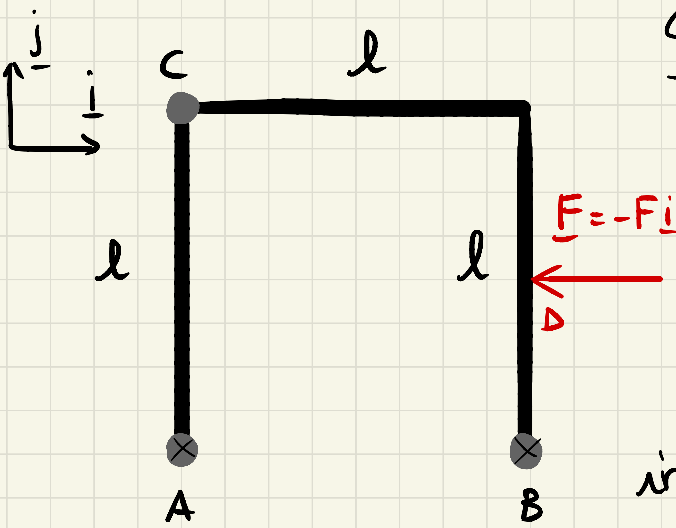
In un sistema piano le equazioni cardinali equivalgono a $\overset{\text{EQ. REAZIONI}}{2} + \underset{\text{EQ. MOMENTI}}{1} = 3$ equazioni scalari.

Poiché ogni reazione vincolare è un vettore con due componenti, allora non appena abbiamo due reazioni vincolari incognite, avremmo $2 \times 2 = 4$

incognite, rendendo così le equazioni cardinali insufficienti. In quel caso ricorriamo a ulteriori equazioni relative a uno o più corpi che costituiscono il sistema totale studiato.

ESERCIZI (archi a tre cerniere)

1. Della struttura in figura, dove tutte le cerniere sono lisce, calcolare le reazioni vincolari nelle cerniere fisse in A e B.



Soluzione

Delle tre cerniere, solo quelle in A e B generano una reazione vincolare in risposta al carico $\underline{F}$, in quanto quella in

C è mobile. Scriviamo le equazioni cardinali per l'intero sistema; sia $\underline{\Phi}_A$ la reazione in A e $\underline{\Phi}_B$ la reazione in B.

Allora:

$$\begin{cases} \underline{F} + \underline{\Phi}_A^{*} + \underline{\Phi}_B = \underline{0} \\ (D-A)\wedge \underline{F} + \underbrace{(A-A)}_{=0}\wedge \underline{\Phi}_A + (B-A)\wedge\underline{\Phi}_B = \underline{0} \end{cases}$$

lungo $\underline{i}$: $-F + \Phi_{A,x} + \Phi_{B,x} = 0$

lungo $\underline{j}$: $\Phi_{A,y} + \Phi_{B,y} = 0$

scelgo come polo A (di solito conviene scegliere un punto in cui c'è una reazione incognita)

$$\left(\ell\underline{i} + \frac{\ell}{2}\underline{j}\right)\wedge(-F\underline{i}) + (\ell\underline{i})\wedge(\Phi_{B,x}\underline{i} + \Phi_{B,y}\underline{j}) = 0$$

$$\frac{\ell}{2}F + \ell\Phi_{B,y} = 0$$

* in coordinate, scriviamo

$\underline{\Phi}_A = \Phi_{A,x}\underline{i} + \Phi_{A,y}\underline{j}$

$\underline{\Phi}_B = \Phi_{B,x}\underline{i} + \Phi_{B,y}\underline{j}$

Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} -F + \Phi_{A,x} + \Phi_{B,x} = 0 \\ \Phi_{A,y} + \Phi_{B,y} = 0 \\ \frac{\ell}{2}F + \Phi_{B,y} = 0 \end{cases}$$

3 equazioni in 4 incognite

Ho bisogno di un'equazione aggiuntiva.
Uso la seguente osservazione di carattere generale:

Se un sistema di corpi è equilibrato, allora ogni corpo che lo costituisce è in equilibrio.

Per la precedente osservazione, l'asta AC è in equilibrio. Posso quindi scrivere la seconda equazione cardinale per AC, che andrà a costituire la quarta equazione mancante.

ATTENZIONE: quando si considera solo l'asta AC, nella cerniera mobile C vi sarà una reazione ignota $\underline{\Phi}_C^{(1)}$ pari alla reazione che la squadra CB esercita su AC. Una simile reazione $\underline{\Phi}_C^{(2)}$ è presente nella cerniera C della sola squadra BC.

Vale $\underline{\phi}_C^{(1)} + \underline{\phi}_C^{(2)} = \underline{0}$ (cioè $\underline{\phi}_C^{(1)} = -\underline{\phi}_C^{(2)}$).

L'equazione del momento per l'asta AC, rispetto al polo C, è:

Scelgo C perché così nell'equazione la reazione $\underline{\phi}_C^{(1)}$ scompare e non introduco nuove incognite nelle equazioni

$$(A-C)\wedge\underline{\phi}_A + (C-C)\wedge\underline{\phi}_C^{(1)} = \underline{0}$$

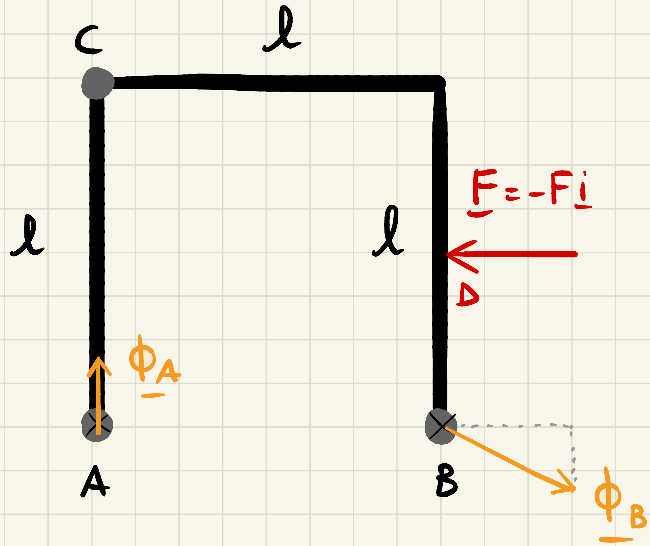
$$\Rightarrow \quad (A-C)\wedge\underline{\phi}_A = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{A,x} = 0$$

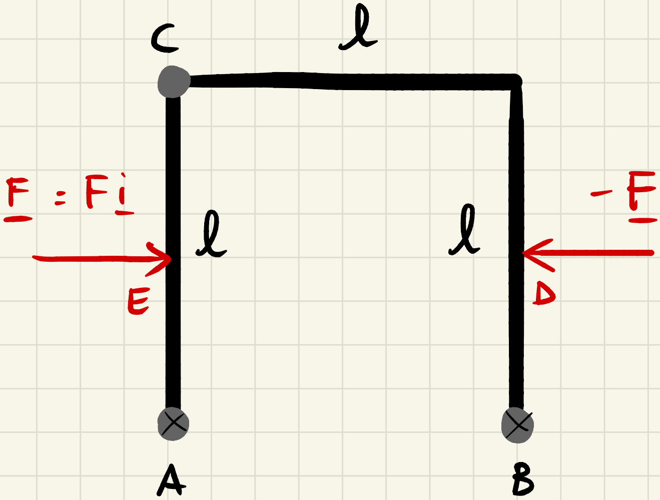
In conclusione, le equazioni da risolvere sono

$$\begin{cases} -F + \phi_{A,x} + \phi_{B,x} = 0 \\ \phi_{A,y} + \phi_{B,y} = 0 \\ \frac{\ell}{2}F + \ell\phi_{B,y} = 0 \\ \phi_{A,x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{B,x} = F \\ \phi_{A,y} = \frac{F}{2} \\ \phi_{B,y} = -\frac{F}{2} \\ \phi_{A,x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\phi}_A = \frac{F}{2}\underline{j} \quad ; \quad \underline{\phi}_B = F\underline{i} - \frac{F}{2}\underline{j}.$$



② Calcolare le reazioni vincolari nelle cerniere fisse (lisce) A e B della seguente struttura:



Risolviamo l'esercizio in due modi:

a) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

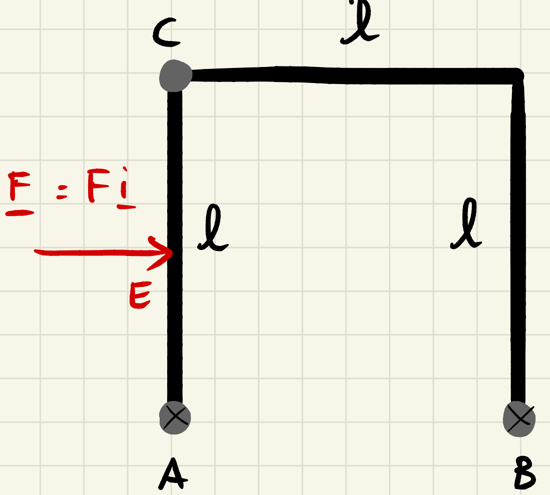
b) CONSIDERAZIONI SULLE EQUAZIONI CARDINALI

a) Il principio di sovrapposizione degli effetti consiste nel risolvere due problemi, uno in cui si considera il solo carico $\underline{F}$ e uno in cui si considera il solo carico $-\underline{F}$, e poi sommare i risultati.

Il problema con il solo carico $-\underline{F}$ è stato già risolto nell'esercizio 1 : le reazioni vincolari in quel caso erano

$$\underline{\phi}_A^{(1)} = \frac{F}{2}\underline{j} \quad e \quad \underline{\phi}_B^{(1)} = F\underline{i} - \frac{F}{2}\underline{j}.$$

Risolviamo il problema con il solo carico $\underline{F}$:



Scrivo le equazioni per l'intero sistema:

$$\begin{cases} \underline{F} + \underline{\phi}_A^{(2)} + \underline{\phi}_B^{(2)} = \underline{0} \\ (E-A) \wedge \underline{F} + (B-A) \wedge \underline{\phi}_B = \underline{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F + \phi_{A,x}^{(2)} + \phi_{B,x}^{(2)} = 0 \\ \phi_{A,y}^{(2)} + \phi_{B,y}^{(2)} = 0 \\ -\frac{\ell}{2}F + \ell\,\phi_{B,y}^{(2)} = 0 . \end{cases}$$

Come prima, abbiamo bisogno di un'equazione aggiuntiva. Scrivo l'equazione del momento per la sola squadra BC (rispetto a C):

$$(B - C) \wedge \underline{\phi}_B = \underline{0} \Rightarrow \phi_{B,x}^{(2)} + \phi_{B,y}^{(2)} = 0$$

Metto insieme le quattro equazioni:

$$\begin{cases} \phi_{A,x}^{(2)} = -\frac{F}{2} \\ \phi_{A,y}^{(2)} = -\frac{F}{2} \\ \phi_{B,y}^{(2)} = \frac{F}{2} \\ \phi_{B,x}^{(2)} = -\frac{F}{2} \end{cases} \qquad \underline{\phi}_A^{(2)} = -\frac{F}{2}\underline{i} - \frac{F}{2}\underline{j} \qquad \underline{\phi}_B^{(2)} = -\frac{F}{2}\underline{i} + \frac{F}{2}\underline{j} .$$

Per trovare le reazioni vincolari $\underline{\phi}_A$ e $\underline{\phi}_B$

del sistema totale, sommo $\underline{\Phi}_A^{(1)}$ e $\underline{\Phi}_A^{(2)}$, e $\underline{\Phi}_B^{(1)}$ e $\underline{\Phi}_B^{(2)}$:

$$\underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_A^{(1)} + \underline{\Phi}_A^{(2)} = -\frac{F}{2}\underline{i};$$

$$\underline{\Phi}_B = \underline{\Phi}_B^{(1)} + \underline{\Phi}_B^{(2)} = \frac{F}{2}\underline{i}.$$

b) Scriviamo le equazioni cardinali per l'intero sistema; la prima è

$$\underline{F} - \underline{F} + \underline{\Phi}_A + \underline{\Phi}_B = \underline{0}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\Phi}_A + \underline{\Phi}_B = \underline{0}$ cioè $\underline{\Phi}_A$ e $\underline{\Phi}_B$ sono una coppia.

Scrivo la seconda rispetto al polo A: poiché $\underline{F}$ e $-\underline{F}$ sono una coppia di braccio nullo, il loro momento è $= \underline{0}$ qualunque sia il polo; dunque l'equazione contiene semplicemente $\underline{\Phi}_A$ e $\underline{\Phi}_B$:

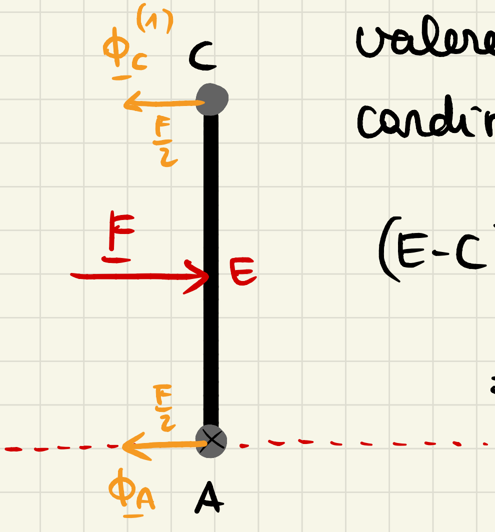
$$(A-A)\wedge \underline{\phi}_A + (B-A)\wedge \underline{\phi}_B = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad (B-A)\wedge \underline{\phi}_B = 0 .$$

Cioé $\underline{\phi}_B$ è parallelo a B-A, vale a dire che $\underline{\phi}_B$ è ORIZZONTALE $\rightarrow \phi_{B,y}=0$. Ma siccome $\underline{\phi}_A = -\underline{\phi}_B$, allora anche $\underline{\phi}_A$ è ORIZZONTALE. $\hookrightarrow \phi_{A,y}=0$

Abbiamo scoperto la direzione di $\underline{\phi}_A$ e $\underline{\phi}_B$, dobbiamo capirne modulo e verso.

Consideriamo solo l'asta AC. Questa deve essere in equilibrio, dunque deve valere la seconda equazione cardinale (rispetto a C):



$$(E-C)\wedge \underline{F} + (A-C)\wedge \underline{\phi}_A = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2}F + l\,\phi_{A,x} = 0$$

$$\Rightarrow \phi_{A,x} = -\frac{F}{2} .$$

Ne segue che $\phi_{B,x} = \frac{F}{2}$, cioè, in definitiva:

$$\underline{\phi}_A = -\frac{F}{2}\underline{i}\ , \quad \underline{\phi}_B = \frac{F}{2}\underline{j}\ .$$

- PER CASA - Provate da sol* a calcolare le reazioni vincolari nelle cerniere fisse (lisce) nei seguenti archi a 3 cerniere: