



Introduzione al Controllo Stocastico: l'equazione SHJB

SEMINARIO DI
TEORIA DEI CONTROLLI

DOCENTE: PROF. P.ACQUISTAPACE

A.A. 2015-2016

CARMINE FRASCELLA

16 GIUGNO 2016

Indice

1	Nozioni Preliminari	5
1.1	Spazi di probabilità, variabili aleatorie	5
1.2	Processi stocastici, filtrazioni, moto Browniano	7
1.3	Integrale stocastico	9
1.4	Formula di Itô	12
1.5	Equazioni differenziali stocastiche	14
2	Problemi di controllo ottimale stocastico	17
2.1	Il caso deterministico	17
2.2	Formulazione del problema di controllo ottimale stocastico	19
2.2.1	Formulazione forte	19
2.2.2	Formulazione debole	20
3	L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman: la versione stocastica	23
3.1	Descrizione del problema e primi risultati	24
3.2	Il principio di ottimalità di Bellman	27
3.3	L'equazione SHJB	30
	Bibliografia	33

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

In questo primo capitolo richiameremo alcune nozioni abbastanza basilari nell'ambito della probabilità: esse dovrebbero essere in gran parte note. Per approfondimenti, si veda [2].

1.1 Spazi di probabilità, variabili aleatorie

Sia Ω un insieme non vuoto, e sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ un sottoinsieme delle parti. Tale sottoinsieme è detto **σ -algebra** se:

- $\Omega \in \mathcal{F}, \emptyset \in \mathcal{F}$;
- Se $A \in \mathcal{F}$, allora $A^c \in \mathcal{F}$;
- Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, allora:

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F} .$$

Una coppia (Ω, \mathcal{F}) , ove Ω è un insieme non vuoto e \mathcal{F} è una σ -algebra di parti di Ω , è detto **spazio misurabile**. In esso, ogni $A \in \mathcal{F}$ è detto **evento**.

Dato uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) , una funzione $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ è detta **probabilità** se:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ è composta da eventi a due a due disgiunti, allora:

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) .$$

L'ultima delle due proprietà è detta **σ -additività**.

Una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ove (Ω, \mathcal{F}) è uno spazio misurabile e \mathbb{P} è una probabilità definita su di esso, è detto **spazio di probabilità**.

Un evento $A \in \mathcal{F}$ è detto **\mathbb{P} -trascurabile**, o semplicemente trascurabile se non ci sono ambiguità, se $\mathbb{P}(A) = 0$, mentre si dice che esso accade **\mathbb{P} -quasi certamente**, o quasi certamente se non ci sono ambiguità, se $\mathbb{P}(A) = 1$.

Infine, uno spazio di probabilità è detto **completo** se la sua σ -algebra lo è, ossia se per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) = 0$, e per ogni $B \subseteq A$, vale $B \in \mathcal{F}$ (con $\mathbb{P}(B) = 0$, chiaramente).

Siano ora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e (E, \mathcal{E}) uno spazio misurabile. Un'applicazione:

$$X : \Omega \rightarrow E$$

è detta **variabile aleatoria** se è $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -misurabile, ossia se per ogni $A \in \mathcal{E}$ vale $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. In tal caso, essa definisce automaticamente una probabilità $\mathbb{P}_X = X(\mathbb{P})$ su (E, \mathcal{E}) , detta **misura immagine**, definita nel modo ovvio:

$$\mathbb{P}_X(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X^{-1}(A)) ,$$

per $A \in \mathcal{E}$. Essa è anche detta **legge** o **distribuzione** di X , e si scrive $X \sim \mathbb{P}_X$.

Si definisce poi **σ -algebra generata** da X (e si indica con $\sigma(X)$) la più piccola σ -algebra di parti di Ω che rende X una variabile aleatoria. Dunque X è una variabile aleatoria da (Ω, \mathcal{F}) in (E, \mathcal{E}) se e solo se $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$. Vale inoltre il seguente risultato, che enunciamo solamente.

Teorema 1.1.1 (di misurabilità, di Doob). Siano (Ω, \mathcal{F}) e (Ω', \mathcal{G}) due spazi misurabili. Siano poi $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$. Allora X è $\sigma(Y)$ misurabile se e solo se $X = \xi(Y)$, con $\xi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile.

Due variabili aleatorie X, Y definite sugli stessi spazi si dicono **indipendenti** se per ogni $A, B \in \mathcal{E}$ vale:

$$\mathbb{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))\mathbb{P}(Y^{-1}(B))$$

In tal caso, si dice che le σ -algebre $\sigma(X), \sigma(Y)$ sono indipendenti. Una variabile aleatoria X è indipendente da una σ -algebra \mathcal{F} se per ogni insieme $A \in \mathcal{F}$, X e \mathbb{I}_A risultano indipendenti. Analogamente, per un numero finito di variabili aleatorie X_1, \dots, X_n , vi è indipendenza se per ogni $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n X_k^{-1}(A_k) \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k^{-1}(A_k))$$

Infine, una successione $(X_n)_{n \geq 0}$ è formata da variabili indipendenti se, preso un sottoinsieme qualsiasi di esse di cardinalità finita, le variabili selezionate risultano tra loro indipendenti.

Si possono poi dare nozioni di indipendenza per famiglie di cardinalità più che numerabile, ma non è interessante per i nostri scopi.

Per una variabile aleatoria reale (cioè a valori in \mathbb{R}), per $p \in [1, +\infty[$, si chiama **momento assoluto p -esimo** (se questo è finito):

$$\mathbb{E}[|X|^p] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega)$$

Se X ammette momento assoluto p -esimo, si chiama **momento p -esimo**:

$$\mathbb{E}[X^p] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} x^p d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\Omega} X(\omega)^p d\mathbb{P}(\omega)$$

In particolare:

- $\mathbb{E}[X]$, se ben definito, è detto **valore atteso**;
- $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$, se ben definita, è detta **varianza** (ed è sempre non negativa, e nulla se e solo se la variabile aleatoria è \mathbb{P} -quasi certamente uguale a una certa costante, che poi è la costante $\mathbb{E}[X]$).

1.2 Processi stocastici, filtrazioni, moto Browniano

Nel seguito, daremo delle definizioni non generali, che potrebbero essere generalizzate: dato che nel seguito le definizioni generali non serviranno, è utile cercare di facilitare la comprensione.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Si definisce **processo stocastico** reale una famiglia $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ (oppure $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in [0, T]}$, con $T > 0$) di variabili aleatorie a valori in \mathbb{R}^k , con $k \geq 1$ (laddove non specificato, è prassi munire \mathbb{R}^k della σ -algebra dei Boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$).

Fissato $t \geq 0$, dunque, X_t è una variabile aleatoria vettoriale. Se invece si fissa $\omega \in \Omega$, e si fa variare $t \geq 0$ (potremmo dire che si fa scorrere il tempo), l'applicazione ottenuta:

$$X^\omega : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^k$$

è detta **traiettoria**.

Un processo si dice allora **continuo** se le sue traiettorie lo sono (chiaramente, tale definizione presuppone che gli spazi in gioco siano dotati di una topologia), **crescente** se le sue traiettorie lo sono (qui si presuppone chiaramente che l'insieme di arrivo sia ordinato, dunque $k = 1$), e similmente nel caso di altre proprietà.

Si supporrà sempre che i processi stocastici trattati siano misurabili, ossia variabili aleatorie da $\Omega \times [0, \infty[$ in \mathbb{R}^k .

Dato un processo stocastico $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$, e fissati $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, con $n \in \mathbb{N}$, la legge del vettore $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (ben definita, tralascio i dettagli) è detta **distribuzione finito-dimensionale** del processo.

Due processi $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ e $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t \geq 0}$ sono detti:

- **Indistinguibili**, se per quasi ogni $\omega \in \Omega$ vale $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ per ogni $t \geq 0$;
- **Uno versione dell'altro**, se per ogni $t \geq 0$ $X_t = Y_t$ quasi certamente;
- **Equivalenti**, se possiedono le stesse distribuzioni finito-dimensionali.

Ciascuna definizione implica le successive, mentre le implicazioni opposte sono tutte false, a priori.

Sia ora, di nuovo, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato. Una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ è detta **filtrazione** se:

- Per ogni $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$;
- Per ogni $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Se denotiamo con \mathcal{N} il sottoinsieme delle parti di Ω dato da tutti gli eventi $A \in \mathcal{F}$ trascurabili e da tutti i loro sottoinsiemi, una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ è detta **completa** se per ogni $t \geq 0$ vale $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}_t$. Una filtrazione è invece detta **continua a destra** se per ogni $t \geq 0$ vale:

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

Data una filtrazione, c'è un metodo canonico per generare a partire da essa una filtrazione completa e continua a destra: non diamo i dettagli di tale metodo.

Piuttosto, diamo una definizione che risulterà fondamentale nel seguito. Dato uno spazio di probabilità munito di una filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ (d'ora in poi sarà chiamato spazio filtrato), un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ è detto **adattato** se per ogni $t \geq 0$ X_t risulta \mathcal{F}_t -misurabile.

Si dice invece che il processo è **progressivamente misurabile** se per ogni $T > 0$ fissato l'applicazione:

$$\mathbf{X}|_{[0, T]} : (\Omega \times [0, T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$$

è misurabile.

Chiaramente un processo progressivamente misurabile è adattato e misurabile, mentre il contrario è vero sotto ipotesi aggiuntive (ad esempio, se si assume che il processo sia continuo a destra o a sinistra). Vale però il seguente risultato, che enunciamo solamente e che useremo in futuro.

Proposizione 1.2.1. Dato uno spazio filtrato e un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ misurabile e adattato rispetto alla filtrazione, esiste una versione $(X'_t)_{t \geq 0}$ che risulta progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione data.

Prima di concludere, diamo un'ulteriore definizione, che servirà nel seguito. Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, un'applicazione $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ è detta **tempo d'arresto** se per ogni $t \geq 0$ si ha:

$$\{ \tau \leq t \} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t \} \in \mathcal{F}_t$$

Diamo ora un'altra definizione fondamentale. Un processo stocastico reale $(B_t)_{t \geq 0}$ è detto **moto Browniano standard** se:

- $B_0 \equiv 0$ quasi certamente;
- Per ogni $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s \sim N(0, t - s)$ ha legge gaussiana;
- Per ogni $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, le variabili $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono indipendenti;
- $(B_t)_{t \geq 0}$ è quasi certamente continuo.

Dato uno spazio filtrato, un processo stocastico reale $(B_t)_{t \geq 0}$ è detto **moto Browniano standard** rispetto alla filtrazione data se:

- $B_0 \equiv 0$ quasi certamente;
- Per ogni $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s \sim N(0, t - s)$ ha legge gaussiana;
- Per ogni $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ è \mathcal{F}_s -indipendente;
- $(B_t)_{t \geq 0}$ è adattato;
- $(B_t)_{t \geq 0}$ è quasi certamente continuo.

Se la filtrazione soddisfa delle particolari ipotesi, le due definizioni sono equivalenti. A priori, la seconda implica la prima, ma non vale il viceversa.

Concludiamo allora enunciando una proposizione, che in qualche senso generalizza il criterio di misurabilità di Doob, che ci servirà nel seguito.

Proposizione 1.2.2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità completo, e sia (U, d) uno spazio polacco. Sia:

$$\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un processo stocastico continuo, e sia $(\mathcal{F}_t^\xi)_{t \geq 0}$ la filtrazione generata dal processo:

$$\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\xi_r \mid r \in [0, t])$$

Allora un processo $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow U$ è adattato rispetto a tale filtrazione se e solo se esiste un processo:

$$\eta : [0, T] \times C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow U ,$$

progressivamente misurabile rispetto a una ben precisa filtrazione (che non specifichiamo per non entrare troppo in dettagli tecnici per noi poco interessanti) tale che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ rispetto a \mathbb{P} valga, per ogni $t \in [0, T]$:

$$\varphi(t, \omega) = \eta(t, \xi(\cdot \wedge t, \omega))$$

1.3 Integrale stocastico

L'obiettivo, ora, è quello di definire, dato un processo stocastico reale $(X_t)_{t \geq 0}$ e un moto Browniano reale standard $(B_t)_{t \geq 0}$, il seguente integrale:

$$\int_a^b X_t dB_t$$

Putroppo la teoria dell'integrazione secondo Stieltjes, o anche quella secondo Young, non sono adatte per definire un integrale come quello scritto sopra, in quanto si può dimostrare che il moto Browniano ha traiettorie che quasi certamente sono:

- Non differenziabili in alcun intervallo $[t_1, t_2]$;
- Non a variazione limitata.

Bisogna quindi definire un nuovo integrale, effettuando delle scelte, in modo che le proprietà di linearità e di robustezza siano preservate.

Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$, un processo adattato $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in [0, T]}$ è detto **elementare** se esistono $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ tali che:

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-2} X_{t_k} \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1}[} + X_{t_{n-1}} \mathbb{I}_{[t_{n-1}, t_n]} ,$$

ossia è costante a tratti, in qualche senso. Esso è detto **a quadrato integrabile** se per ogni $k = 0, \dots, n-1$, X_{t_k} ammette momento secondo, ossia $\mathbb{E}[X_{t_k}^2] < +\infty$.

Per un tale processo, è ben definito, per $t \in [0, T]$, il seguente **integrale di Itô**:

$$\int_0^t X_s dB_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} [B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}]$$

Il processo $(M_t)_{t \geq 0}$ è continuo, e in particolare è una **martingala** (per motivi di spazio e tempo non analizzeremo nel dettaglio le martingale).

In ogni caso, osserviamo subito che già in questo caso l'integrale di Itô di un processo stocastico elementare (fissati gli estremi) è una variabile aleatoria, non un numero (come nel caso dell'integrazione secondo Lebesgue, ad esempio): questa è una prima, grande differenza tra il caso deterministico e quello stocastico. Se poi si fa variare l'estremo superiore di integrazione, il risultato è un nuovo processo stocastico, che risulta una martingala continua.

Vogliamo ora allargare la famiglia di processi per cui si può definire l'integrale stocastico. Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ e un moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ adattato rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, diciamo che un processo adattato $(X_t)_{t \geq 0}$ appartiene a $M_B^2([0, T])$ se il processo $(X_t)_{t \in [0, T]}$ è progressivamente misurabile, e in più:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_s^2 ds \right] < +\infty$$

Tale spazio vettoriale, una volta quozientato secondo un'opportuna relazione di equivalenza (in analogia con quanto si fa per definire, ad esempio, $L^2([0, 1])$), è uno spazio di Hilbert, se dotato della seguente norma:

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{M_B^2([0, T])} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[\int_0^T (X_s - Y_s)^2 ds \right],$$

derivante dal seguente prodotto scalare:

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[\int_0^T X_s Y_s ds \right]$$

Una successione $(\mathbf{X}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M_B^2([0, T])$ converge allora a $\mathbf{X} \in M_B^2([0, T])$ se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (X_s^n - X_s)^2 ds \right] = 0$$

Vale quindi il seguente teorema, che enunciamo solamente.

Teorema 1.3.1. I processi elementari a quadrato integrabile sono densi in $M_B^2([0, T])$; anche i processi continui a quadrato integrabile sono densi in $M_B^2([0, T])$.

Per $\mathbf{X} \in M_B^2([0, T])$, si definisce allora:

$$\int_0^t X_s dB_s \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t X_s^n dB_s,$$

dove $(\mathbf{X}^n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{X}$ in $M_B^2([0, T])$ è una successione di processi elementari a quadrato integrabile (per cui l'integrale è stato già definito).

Bisognerebbe controllare che la definizione sia ben posta, ossia che il limite esista, e non dipenda dalla particolare successione considerata. Tralasciamo le dovute verifiche, che si svolgono tutte usando l'importante **formula di isometria di Itô**, valida per $\mathbf{X} \in M_B^2([0, T])$:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_s^2 ds \right] = \int_0^T \mathbb{E} [X_s^2] ds$$

Sempre tramite questa formula, si dimostra facilmente la seguente proposizione, che conferma la robustezza dell'integrale appena definito.

Proposizione 1.3.2. Se $(\mathbf{X}^n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{X}$ in $M_B^2([0, T])$, allora per ogni $t \in [0, T]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t X_s^n dB_s = \int_0^t X_s dB_s ,$$

in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Il processo $(M_t)_{t \in [0, T]}$ dato da:

$$M_t = \int_0^t X_s dB_s$$

è una martingala (e c'è un teorema che assicura che ne esista una versione continua \mathbb{P} -quasi certamente), con $\mathbb{E}[M_t] = 0$ per ogni $t \geq 0$. Inoltre si dimostra facilmente che il processo $(N_t)_{t \in [0, T]}$ dato da:

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t X_s^2 ds$$

è anch'esso una martingala. Il processo $(A_t)_{t \geq 0}$ dato da:

$$A_t = \int_0^t X_s^2 ds$$

è quindi detto **variazione quadratica** del processo $(M_t)_{t \geq 0}$, perchè è continuo, crescente, adattato, e tale che $(M_t^2 - A_t)_{t \geq 0}$ è una martingala.

Concludiamo estendendo la nostra nozione di integrale ad una famiglia ancora più vasta.

Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, un moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ adattato rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, diciamo che un processo adattato $(X_t)_{t \geq 0}$ appartiene a $\Lambda_B^2([0, T])$ se il processo $(X_t)_{t \in [0, T]}$ è progressivamente misurabile, e in più:

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T X_s^2 ds < +\infty \right) = 1$$

Una successione $(\mathbf{X}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda_B^2([0, T])$ converge a $\mathbf{X} \in \Lambda_B^2([0, T])$ se per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\int_0^T (X_s^n - X_s)^2 ds \geq \varepsilon \right) = 0$$

Dalla disuguaglianza di Markov discende subito che per ogni $T > 0$ fissato vale:

$$M_B^2([0, T]) \subseteq \Lambda_B^2([0, T])$$

Vale allora un analogo risultato di densità.

Teorema 1.3.3. I processi elementari sono densi in $\Lambda_B^2([0, T])$; anche i processi continui sono densi in $\Lambda_B^2([0, T])$.

Si definisce allora l'integrale nello stesso modo: esso è ben definito (le dimostrazioni sono leggermente più tecniche, in quanto adesso la convergenza è quella in probabilità).

Anche in questo caso esiste un teorema che afferma che esista una versione continua del processo dato dall'integrale stocastico. In questo caso, però, dato che le ipotesi di integrabilità vengono a

mancare, non è detto che l'integrale stocastico sia una martingala. Esso è però una **martingala locale**, nel senso che esiste una successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescente e tendente a T \mathbb{P} -quasi certamente tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il processo $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \in [0, T]}$, definito da:

$$M_{t \wedge \tau_n} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t \wedge \tau_n} X_s dB_s$$

è una martingala.

1.4 Formula di Itô

Al solito, sia d'ora in avanti $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ uno spazio filtrato, e sia $(B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano rispetto a tale filtrazione.

Un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è detto **a variazione limitata** in $[0, T]$ (con $T > 0$) se le sue traiettorie lo sono \mathbb{P} -quasi certamente, ossia se per quasi ogni $\omega \in \Omega$ vale:

$$\sup_{\pi \in \mathcal{P}([0, T])} \sum_{k=0}^{l(\pi)-1} |X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)| < +\infty,$$

ove $\mathcal{P}([0, T])$ è l'insieme delle partizioni dell'intervallo $[0, T]$, e $l(\pi) = n$ se vale $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$.

Un processo è invece detto **semimartingala** se esistono:

- Una variabile aleatoria \mathcal{F}_0 -misurabile X_0 ;
- Un processo $(V_t)_{t \geq 0} \in BV([0, T])$ per ogni $T > 0$, con $V_0 \equiv 0$ \mathbb{P} -quasi certamente;
- Una martingala locale $(M_t)_{t \geq 0}$, con $M_0 \equiv 0$ \mathbb{P} -quasi certamente,

tali che per ogni $t \geq 0$:

$$X_t = X_0 + V_t + M_t$$

Si dimostra che tale decomposizione, se esiste, è unica a meno di versioni.

Prima di soffermarci su una particolare sottoclasse di semimartingale, diamo un'ulteriore definizione.

In analogia con la definizione di $\Lambda_B^2([0, T])$, diciamo che un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ appartiene a $\Lambda_B^1([0, T])$ (con $T > 0$) se è progressivamente misurabile, e in più:

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T |X_s| ds < +\infty \right) = 1$$

Si definisce quindi **processo di Itô** un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ a valori in \mathbb{R}^d tale che esistano:

- Una variabile aleatoria \mathcal{F}_0 -misurabile X_0 ;
- Un moto Browniano k -dimensionale rispetto alla filtrazione data (ossia una k -upla di moti Browniani standard, tra loro indipendenti);

- Un processo $(b_t)_{t \geq 0}$ a valori in \mathbb{R}^d :

$$b_t = (b_t^{(1)}, \dots, b_t^{(d)}) ,$$

con $b_t^{(i)} \in \Lambda_B^1([0, T])$ per ogni $T > 0$, per ogni $i = 1, \dots, d$;

- Un processo $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ a valori in $\mathbb{R}^{d \times k}$:

$$\sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_t^{(1,1)} & \dots & \sigma_t^{(1,k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_t^{(d,1)} & \dots & \sigma_t^{(d,k)} \end{bmatrix} ,$$

con $\sigma_t^{(i,j)} \in \Lambda_B^2([0, T])$ per ogni $T > 0$, per ogni $i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, k$,

tali che per ogni $t \geq 0$ valga \mathbb{P} -quasi certamente:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s \cdot dB_s ,$$

ossia per ogni $i = 1, \dots, d$:

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^k \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} dB_s^{(j)}$$

Un processo di Itô è allora una particolare semimartingala, in cui la martingala locale è un integrale stocastico rispetto ad un moto Browniano.

In notazione differenziale (precisiamo che questa è solo una notazione, ma le uguaglianze sono sempre da intendersi in senso integrale):

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t \cdot dB_t$$

Se dunque $(X_t)_{t \geq 0}$ è un processo di Itô reale (quindi $d = 1, k = 1$ nella definizione precedente), e $f \in C^2(\mathbb{R})$, allora vale la seguente formula, detta **formula di Itô**:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) b_s ds + \int_0^t f'(X_s) \sigma_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$$

Ci teniamo ben lontani dal dimostrare tale formula, che assomiglia molto ad uno sviluppo di Taylor al second'ordine, perchè la dimostrazione è molto tecnica, ed è decisamente lontana dai nostri scopi.

In particolare, l'ultimo dei tre termini al secondo membro è detto **correzione di Itô**.

Vediamo un semplice esempio d'utilizzo della formula appena presentata, calcolando:

$$\int_0^t B_s dB_s$$

Se $X_t = B_t$, e $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $\phi(x) = x^2$, allora per la formula di Itô:

$$B_t^2 - B_0^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^t ds = 2 \int_0^t B_s dB_s + t ,$$

dato che $\phi'(x) = 2x$, $\phi''(x) = 2$, da cui:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t)$$

Nel caso multidimensionale (ossia nel caso più generale in cui $d \geq 1, k \geq 1$), data:

$$f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

sufficientemente regolare, allora si ha, in notazione differenziale:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \nabla_x f(t, X_t) \cdot [b_t dt + \sigma_t \cdot dB_t] + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_t \sigma_t^T \nabla_x^2 f(t, X_t)) dt,$$

ossia:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) b_s^{(i)} ds + \\ &+ \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^k \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) \sigma_s^{(i,j)} dB_s^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^k \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) \sigma_s^{(i,l)} \sigma_s^{(j,l)} ds \end{aligned}$$

1.5 Equazioni differenziali stocastiche

Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ e un moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, la 5-pla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0})$ è detta **base stocastica**.

Su una base stocastica, si definisce **equazione differenziale stocastica** un'equazione del tipo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

In notazione differenziale, un'equazione differenziale stocastica è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ X_0 = Y \end{cases}$$

In particolare, il termine $\sigma(t, X_t)$ è detto **coefficiente di diffusione** al tempo t .

Una 6-pla data da una base stocastica e da un processo adattato $(X_t)_{t \geq 0}$ è una soluzione dell'equazione se:

- Per ogni $T > 0$, la mappa $t \rightarrow b(t, X_t)$ appartiene a $\Lambda_B^1([0, T])$;
- Per ogni $T > 0$, la mappa $t \rightarrow \sigma(t, X_t)$ appartiene a $\Lambda_B^2([0, T])$;
- L'equazione è verificata \mathbb{P} -quasi certamente.

C'è allora da trattare l'esistenza e l'eventuale unicità delle soluzioni, per un'equazione stocastica assegnata: ne vedremo due differenti, che poi riprenderemo nel prossimo capitolo.

Consideriamo un'equazione stocastica della forma:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ X_0 = Y \end{cases}$$

Si dice che vi è **esistenza forte** se, comunque assegnate una base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0})$ e una variabile aleatoria Y \mathcal{F}_0 -misurabile, esiste un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ adattato, tale che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0})$ è una soluzione dell'equazione (con dato iniziale $X_0 = Y$).

Si dice invece che vi è **esistenza debole** se, comunque viene fissata una probabilità μ su \mathbb{R}^d , esistono:

- Uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- Una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, e un moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ adattato rispetto a tale filtrazione;
- Una variabile aleatoria Y \mathcal{F}_0 -misurabile, con $Y \sim \mu$;
- Un processo adattato $(X_t)_{t \geq 0}$,

tali che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0})$ è una soluzione dell'equazione (con dato iniziale $X_0 = Y$), relativamente al moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ individuato.

L'esistenza forte implica quella debole: ciò non è affatto semplice da dimostrare, però.

Discussa l'esistenza, passiamo ora alla presentazione di due differenti nozioni di unicità: conserveremo la notazione adottata fino ad ora.

Si dice che vi è **unicità forte** (per traiettorie) se per ogni base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0})$ e per ogni Y \mathcal{F}_0 -misurabile accade che, prese due soluzioni $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}, (X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ dell'equazione, con $X_0^{(1)} = X_0^{(2)} = Y$ \mathbb{P} -quasi certamente, i due processi risultano indistinguibili.

Si dice invece che vi è **unicità debole** (in legge) se, date due qualsiasi soluzioni $(\Omega^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)}, \mathbb{P}^{(1)}, (\mathcal{F}_t^{(1)})_{t \geq 0}, (B_t^{(1)})_{t \geq 0}, (X_t^{(1)})_{t \geq 0})$ e $(\Omega^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)}, \mathbb{P}^{(2)}, (\mathcal{F}_t^{(2)})_{t \geq 0}, (B_t^{(2)})_{t \geq 0}, (X_t^{(2)})_{t \geq 0})$, si ha che $(X_t^{(1)})_{t \geq 0}$ e $(X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ sono equivalenti, ossia $\mathbf{X}^{(1)} \sim \mathbf{X}^{(2)}$ come variabili aleatorie a valori nello spazio delle traiettorie:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(i)} : \Omega^{(i)} &\rightarrow \mathbb{R}^{[0, +\infty[} \\ \omega &\rightarrow X^\omega : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow X^\omega(t) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

L'unicità forte implica quella debole: anche ciò non è affatto semplice da dimostrare. Vale inoltre il seguente risultato, che enunciamo solamente.

Teorema 1.5.1 (di Yamoda-Watanabe). L'esistenza debole e l'unicità forte implicano l'esistenza forte.

Capitolo 2

Problemi di controllo ottimale stocastico

Nella vita reale, l'**incertezza** è un fattore che risulta presente in molti problemi: essa può creare degli ostacoli (e, a volte, qualche vantaggio) per la ricerca del risultato ottimale.

I modelli che andremo a studiare in queste pagine saranno **dinamici**, ossia si evolveranno nel tempo. Supporremo inoltre che essi possano essere descritti mediante equazioni differenziali stocastiche di Itô: essi verranno dunque detti **modelli di diffusione** (infatti il termine che contiene l'incertezza viene spesso detto termine di diffusione, nell'ambito delle equazioni differenziali stocastiche). Stiamo quindi supponendo che l'incertezza consista in un **rumore bianco gaussiano**, causato da molteplici fattori esterni tra loro indipendenti.

L'obiettivo, dunque, è quello di selezionare un controllo ottimale (che naturalmente vari nel tempo), per far sì che il risultato sia il migliore possibile.

Problemi di ottimizzazione come questo sono allora detti problemi di **controllo ottimale stocastico**.

2.1 Il caso deterministico

Presentiamo brevemente la formulazione di un problema deterministico di controllo ottimale.

Siano $T \in]0, +\infty]$, e sia $y_0 \in \mathbb{R}^n$. La **dinamica** del sistema è data da un'equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) , & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} ,$$

Chiaramente, se $T = +\infty$, $[0, T]$ diventa $[0, +\infty[$.

Nell'equazione appena esposta, f è una mappa data dal problema:

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

ove $U \subseteq \mathbb{R}^m$ è detto **insieme dei controlli**. Di solito infatti sono presenti dei vincoli sia sul controllo, come ad esempio:

$$u(t) \in U , \quad t \in [0, T] ,$$

sia sullo stato (ad esempio si chiede che nell'istante finale lo stato abbia raggiunto una certa posizione).

Una funzione misurabile $u : [0, T] \rightarrow U$ (spesso si chiede che appartenga a $L^1([0, T], U)$) è allora detta **controllo**, mentre una soluzione y del problema di Cauchy esposto sopra è detta **traiettoria di stato** associata al controllo u , con **stato iniziale** y_0 . D'ora in poi assumeremo che via sia unicità della traiettoria di stato, una volta assegnati il controllo e lo stato iniziale.

Alcuni casi particolari di problemi di controllo ottimale sono quelli lineari invarianti nel tempo:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) , & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} ,$$

con $A \in M(n, \mathbb{R})$ e $B \in M(n, m, \mathbb{R})$, o quelli lineari variabili nel tempo:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) , & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} ,$$

con $A : [0, T] \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, $B : [0, T] \rightarrow M(n, m, \mathbb{R})$.

Nei problemi di ottimalità, è sempre dato, assieme alla dinamica del sistema e agli eventuali vincoli, un funzionale del seguente tipo:

$$J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T L(t, y(t), u(t)) dt + h(y(T)) ,$$

con $L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiamo allora:

$$\mathcal{V}([0, T]) \stackrel{\text{def}}{=} \{u : [0, T] \rightarrow U \mid u \text{ è misurabile} \}$$

Per ora, dunque, non imponiamo condizioni di integrabilità sui controlli.

Un controllo $u \in \mathcal{V}([0, T])$ è detto **ammissibile**, e la coppia (y, u) è detta **coppia ammissibile**, se:

- $u \in \mathcal{V}([0, T])$;
- y è l'unica traiettoria di stato associata a u ;
- Gli eventuali vincoli su y (ad esempio su $y(T)$) sono soddisfatti;
- La mappa $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da:

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} L(t, y(t), u(t))$$

appartiene a $L^1([0, T])$.

L'insieme dei controlli ammissibili verrà denotato con $\mathcal{V}_a([0, T])$.

Il problema del controllo ottimale, allora, consiste nel determinare (se esiste) un controllo $\bar{u} \in \mathcal{V}_a([0, T])$, tale che valga:

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{V}_a([0, T])} J(u)$$

Se un tale controllo esiste, esso è detto **controllo ottimale**, mentre la funzione \bar{y} associata è detta **traiettoria ottimale**. La coppia (\bar{y}, \bar{u}) , infine, è detta **coppia ottimale**.

Il problema appena proposto è detto **problema di Bolza**: se $h \equiv 0$ si parla invece di **problema di Lagrange**, mentre se $L \equiv 0$ si parla di **problema di Mayer**.

2.2 Formulazione del problema di controllo ottimale stocastico

Veniamo ora alla formulazione rigorosa del problema.

I problemi di controllo ottimale stocastico hanno dei punti comuni, che ora elenchiamo velocemente:

- Un **modello di diffusione**, che supporremo si possa descrivere mediante un'equazione differenziale stocastica (quindi mediante un moto Browniano, in sostanza);
- Uno o più **vincoli** che il controllo e lo stato associato devono soddisfare;
- Un criterio per calcolare la bontà di un controllo, come ad esempio un **funzionale**.

Il problema, allora, consiste nell'ottimizzare il criterio tra i controlli ammissibili (ad esempio minimizzare il funzionale tra i controlli ammissibili).

Fin qui, la teoria non è molto diversa dal caso deterministico. C'è però un dettaglio importante, che differenzia i due casi: nel caso stocastico, l'incertezza non è affatto nota a priori. Dunque il controllo deve risultare in particolare adattato (in base alla Proposizione (1.2.1) potremmo dire progressivamente misurabile) rispetto alla filtrazione data. In effetti, data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si potrebbe dire che per ogni $t \geq 0$ contiene le informazioni note al tempo t : con questa interpretazione, è naturale chiedere che l'eventuale controllo ottimale sia adattato.

In analogia con quanto visto nel capitolo precedente, e precisamente nella Sezione (1.5), daremo due formulazioni del problema di controllo ottimale stocastico: una forte e una debole.

I problemi verranno di solito posti nella loro formulazione forte: tuttavia, come vedremo nel prossimo capitolo, la formulazione debole sarà un potente mezzo con cui risolvere il problema di partenza (nella sua formulazione forte).

2.2.1 Formulazione forte

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ uno spazio filtrato (fissato a priori) sul quale è definito un moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ k -dimensionale adattato rispetto alla filtrazione, e supponiamo che la filtrazione sia completa e continua a destra.

Su tale spazio, consideriamo l'equazione differenziale stocastica seguente:

$$\begin{cases} dy(t) = b(t, y(t), u(t)) dt + \sigma(t, y(t), u(t)) \cdot dB_t \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

con:

- $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$,

con $T > 0$ fissato e $U \subseteq \mathbb{R}^m$. In notazione integrale:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t b(s, y(s), u(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, y(s), u(s)) \cdot dB_s$$

Il processo stocastico $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow U$ è il controllo, e per i motivi enunciati nel preambolo si richiede che esso sia adattato rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Anzi, in virtù della Proposizione (1.2.1),

possiamo richiedere che esso sia progressivamente misurabile. Anche lo stato associato y è un processo stocastico.

Come ogni problema di controllo ottimale che si rispetti, poi, è definito un funzionale di costo:

$$J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[\int_0^T L(s, y(s), u(s)) ds + h(y(T)) \right]$$

Notiamo la presenza di un valore atteso, dato che (come è stato notato in precedenza) tra parentesi vi è una variabile aleatoria, non un numero.

Considereremo controlli $u \in \mathcal{U}([0, T])$, ove:

$$\mathcal{U}([0, T]) \stackrel{\text{def}}{=} \{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow U \mid u \text{ è progressivamente misurabile} \}$$

Un controllo u è detto **s-ammissibile**, e la coppia (y, u) è detta **coppia s-ammissibile**, se:

- $u \in \mathcal{U}([0, T])$;
- y è l'unica soluzione dell'equazione stocastica scritta prima, con u fissato, nel senso dato nella Sezione (1.5);
- Eventuali vincoli sul controllo o sullo stato associato sono soddisfatti;
- Il processo reale $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ dato da:

$$\Gamma_t \stackrel{\text{def}}{=} L(t, y(t), u(t))$$

appartiene a $M_B^1([0, T])$, ossia è progressivamente misurabile con:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |L(s, y(s), u(s))| ds \right] < +\infty ,$$

e $h(y(T)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ (anch'essa a valori in \mathbb{R}).

L'insieme dei controlli s -ammissibili verrà denotato con $\mathcal{U}_a^s([0, T])$. Il problema di controllo ottimale stocastico, nella sua formulazione forte, consiste allora nel minimizzare $J(u)$ tra i controlli $u \in \mathcal{U}_a^s([0, T])$, ossia nel determinare (se esiste) un controllo $\bar{u} \in \mathcal{U}_a^s([0, T])$, tale che valga:

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_a^s([0, T])} J(u)$$

Se un tale controllo esiste, esso è detto **controllo s-ottimale**, mentre la funzione \bar{y} associata è detta **traiettoria s-ottimale**. La coppia (y, u) , infine, è detta **coppia s-ottimale**.

2.2.2 Formulazione debole

Abbiamo già evidenziato a sufficienza, nella scorsa sezione, che nel caso della formulazione debole lo spazio filtrato e il moto Browniano adattato sono fissati a priori. A volte, però, può essere conveniente considerare la base stocastica come variabile del problema, e quindi non fissarla dall'inizio: questo approccio è detto, appunto, **formulazione debole**, in analogia con quanto visto nella Sezione(1.5).

Una sestupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, (u(t))_{t \geq 0})$ è un **controllo w-ammissibile**, e (x, u) è detta **coppia w-ammissibile**, se:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ è uno spazio filtrato, e la filtrazione è completa e continua a destra;
- $(B_t)_{t \geq 0}$ è un moto Browniano adattato rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- $(u(t))_{t \geq 0}$ è un processo adattato (anzi, progressivamente misurabile) rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, definito in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in U ;
- $(x(t))_{t \geq 0}$ è l'unico stato associato a $(u(t))_{t \geq 0}$, in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, nel senso dato nella Sezione (1.5);
- Eventuali vincoli sono soddisfatti;
- Il processo reale $(L(t, u(t), y(t)))_{t \geq 0}$ appartiene a $M_B^1([0, T])$, e la variabile aleatoria reale $h(y(T))$ appartiene a $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, dove ovviamente questi spazi di funzioni sono definiti a partire dalla sestupla considerata.

L'insieme dei controlli w -ammissibili verrà denotato con $\mathcal{U}_a^w([0, T])$.

Il problema di controllo ottimale stocastico, nella sua formulazione debole, consiste allora nel minimizzare il funzionale J introdotto nel Paragrafo (2.2.1) al variare di $u \in \mathcal{U}_a^w([0, T])$ (si noti che qui è presente un abuso di notazione), ossia nel determinare (se esiste) una sestupla $\bar{\pi} \in \mathcal{U}_a^w([0, T])$, tale che valga:

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_a^w([0, T])} J(u)$$

Se un tale controllo esiste, esso è detto **controllo w -ottimale**, mentre la funzione \bar{y} associata è detta **traiettoria w -ottimale**. La coppia (y, u) , infine, è detta **coppia w -ottimale**.

Capitolo 3

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman: la versione stocastica

In questo capitolo finale ci concentreremo sulla tecnica della **programmazione dinamica**, ideata da R.Bellman nel 1950 circa, e utile in molti problemi di controllo ottimale.

L'idea base di tale metodo è quella di considerare una famiglia di controlli ottimali, al variare dell'istante iniziale $s \in [0, T]$, e dello stato iniziale, e di stabilire relazioni tra di essi mediante l'**equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman**, la quale è un'equazione nonlineare del primo ordine nel caso deterministico, nel secondo ordine nel caso stocastico (si pensi alla formula di Itô, introdotta nella sezione (1.4)).

Se l'equazione suddetta risulta risolvibile, anche con metodi puramente computazionali, allora il punto di minimo dell'Hamiltoniana presente nell'equazione è un controllo ottimale, che risulta tra l'altro un controllo feedback. Notiamo che questo approccio, se giunge al termine, risolve non solo il problema originale, ma un'intera famiglia di problemi, con istanti iniziali e stati iniziali differenti.

Uno dei principali problemi legati a tutto ciò è che si richiede che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman ammetta soluzioni classiche (ossia sufficientemente regolari). Nel caso stocastico questa richiesta è decisamente assurda, in quanto il termine diffusivo, in cui compare il moto Browniano, non è affatto regolare quanto serve. È per questo motivo che nel 1980 circa sono state introdotte le cosiddette **soluzioni di viscosità** (di cui però non parleremo), ossia soluzioni non regolari dell'equazione in un senso opportuno.

Nel seguito, allora, esamineremo il principio di ottimalità di Bellman, e vedremo la versione stocastica dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman: le idee sono simili a quelle usate nel caso deterministico, ma le dimostrazioni sono molto più delicate. Prima, però, fissiamo il contesto e la notazione.

3.1 Descrizione del problema e primi risultati

Consideriamo uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, con $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ completa e continua a destra. Sia quindi $(B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano adattato rispetto alla filtrazione data.

Consideriamo allora, su tale base stocastica, la seguente equazione di stato stocastica:

$$\begin{cases} dy(t) = b(t, y(t), u(t)) dt + \sigma(t, y(t), u(t)) \cdot dB_t \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

per $t \in [0, T]$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, e il seguente funzionale di costo:

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T L(r, y(r), u(r)) dr + h(y(T)) \right]$$

Sia quindi:

$$\mathcal{U}([0, T]) = \{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow U \mid u \text{ è progressivamente misurabile} \}$$

Sotto determinate condizioni, che vedremo tra poco, si ha:

$$\mathcal{U}([0, T]) = \mathcal{U}_a^s([0, T])$$

Stiamo quindi considerando il problema nella sua formulazione forte: il problema consiste allora nel minimizzare J in $\mathcal{U}([0, T])$.

Nell'introduzione al capitolo precedente, abbiamo accennato all'utilità della formulazione debole del problema. In effetti, nell'ambito del controllo ottimale stocastico, i problemi sono solitamente posti nella loro formulazione forte. Se però intendiamo usare la tecnica della programmazione dinamica, bisogna considerare una famiglia di problemi, con istanti iniziali e stati iniziali differenti.

Data però una soluzione dell'equazione scritta sopra, gli stati della traiettoria sono variabili aleatorie, non punti in \mathbb{R}^n , se continuiamo a considerare la base stocastica di partenza. In altre parole, se $(y(t))_{t \geq 0}$ è la traiettoria di stato associata al controllo $(u(t))_{t \geq 0}$, con stato iniziale $y_0 \in \mathbb{R}^n$ al tempo 0, allora $y(0) \equiv y_0$ \mathbb{P} -quasi certamente, ma $y(t)$ è una variabile aleatoria, non un punto di \mathbb{R}^n , per ogni $t > 0$.

Tuttavia, se $(u(t))_{t \geq 0}$ è ammissibile, allora tale processo è progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione data: il controllore, dunque, al tempo t conosce gli stati della traiettoria associata al controllo, e in particolare conosce $y(t)$. Se allora cambiamo probabilità, e consideriamo la probabilità condizionata rispetto alla σ -algebra \mathcal{F}_t (sia essa $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$), $y(t)$ risulta costante $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ -quasi certamente.

Cambiare probabilità, allora, ci permette di usare la tecnica della programmazione dinamica: ecco allora mostrata l'utilità della formulazione debole del problema.

Fissato allora $T > 0$, per $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$ consideriamo la seguente equazione di stato:

$$\begin{cases} dy(t) = b(t, y(t), u(t)) dt + \sigma(t, y(t), u(t)) \cdot dB_t, \quad t \in [s, T] \\ y(s) = y_0 \end{cases},$$

con il funzionale:

$$J_{s, y_0}(u) = \mathbb{E} \left[\int_s^T L(r, y(r), u(r)) dr + h(y(T)) \right]$$

Fissato allora $s \in [0, T[$, denotiamo con $\mathcal{W}^w([s, T])$ l'insieme delle 5-ple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (B_t)_{t \geq s}, (u(t))_{t \geq s})$ tali che:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità, e \mathcal{F} è completa;
- $(B_t)_{t \geq s}$ è un moto Browniano standard m -dimensionale (con $B(s) \equiv 0$ \mathbb{P} -quasi certamente), definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- Se chiamiamo $(\tilde{\mathcal{G}}_t^s)_{t \in [s, T]}$ la filtrazione definita come segue:

$$\tilde{\mathcal{G}}_t^s \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(B_r \mid r \in [s, t]) ,$$

e poi chiamiamo $(\mathcal{G}_t^s)_{t \in [s, T]}$ il completamento di $(\tilde{\mathcal{G}}_t^s)_{t \in [s, T]}$, allora:

$$u : [s, T] \times \Omega \rightarrow U$$

risulta un processo definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{G}_t^s)_{t \in [s, T]}$;

- Selezionato il controllo $(u(t))_{t \geq 0}$, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste un'unica soluzione dell'equazione scritta sopra, con stato iniziale $y(s) = y_0$, nel senso dato nella Sezione (1.5), definita sullo spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{G}_t^s)_{t \in [s, T]})$;
- $L(t, y(t), u(t)) \in M_B^1([s, T])$ e $h(y(T)) \in L^1(\Omega)$ (entrambi i processi sono a valori reali, ed entrambi gli spazi sono definiti a partire dallo spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{G}_t^s)_{t \in [s, T]})$).

Scriveremo a volte $(u(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{W}^w([s, T])$, se la parte rimanente della 5-ple sarà chiara dal contesto.

Notiamo che la definizione di $\mathcal{W}^w([s, T])$ assomiglia un po' a quella dell'insieme $\mathcal{U}_a^w([0, T])$, ma in questo caso la filtrazione è generata dal moto Browniano, e quindi non è assegnata in maniera arbitraria: ecco perchè abbiamo preferito usare una lettera differente per denotare l'insieme.

Il problema, quindi, diventa quello di determinare, per ogni $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$, una 5-ple $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}, (\bar{B}_t)_{t \geq s}, (\bar{u}(t))_{t \geq s}) \in \mathcal{W}^w([s, T])$ tale che:

$$J_{s, y_0}(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{W}^w([s, T])} J_{s, y_0}(u)$$

Facciamo ora alcune ipotesi (chiameremo γ questo sistema di ipotesi, d'ora in poi):

- $T > 0$;
- U è uno spazio metrico separabile e completo (altrimenti detto uno **spazio polacco**);
- Le funzioni $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono tutte uniformemente continue;
- Esiste $L > 0$ tale che tutte le funzioni citate sopra risultano L -Lipschitziane rispetto alla variabile y e L -limitate per $y = \mathbf{0}$, ossia per ogni coppia $(t, u) \in [0, T] \times U$ fissata vale:

$$\|b(t, \mathbf{0}, u)\| \leq L ,$$

e per ogni $y, y' \in \mathbb{R}^n$:

$$\|b(t, y, u) - b(t, y', u)\| \leq L \|y - y'\| ,$$

e similmente per le funzioni σ, L, h .

Assumendo il sistema di ipotesi γ , per ogni $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$ e per ogni $u \in \mathcal{W}^w([s, T])$ esiste un'unica traiettoria di stato associata y che risolve l'equazione presentata sopra. In pi, $J_{s, y_0}(u)$ è ben definito. Ci è diretta conseguenza dei teoremi di esistenza forte e debole per un'equazione differenziale stocastica (che però non abbiamo presentato nel Capitolo (2)). In tali ipotesi, in pratica, abbiamo:

$$\mathcal{U}([0, T]) = \mathcal{U}_a^s([0, T])$$

Possiamo allora definire la seguente **funzione valore**:

$$\begin{cases} V(s, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u \in \mathcal{W}^w([s, T])} J_{s, y_0}(u), & s \in [0, T[\\ V(T, y_0) \stackrel{\text{def}}{=}} h(y_0) \end{cases}$$

La seguente proposizione, ora, elenca alcune proprietà della funzione valore.

Proposizione 3.1.1. Sia soddisfatto il sistema di ipotesi γ . Allora esiste $K > 0$ tale che la funzione valore soddisfa le seguenti proprietà:

- Per ogni $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$:

$$|V(s, y_0)| \leq K(1 + \|y_0\|);$$

- Per ogni $s, s' \in [0, T]$, per ogni $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$:

$$|V(s, y_0) - V(s, y_1)| \leq K \left[\|y_0 - y_1\| + (1 + (\|y_0\| \vee \|y_1\|)) |s - s'|^{\frac{1}{2}} \right]$$

Non vediamo la dimostrazione di tale proposizione, che è una facile e diretta conseguenza di un teorema di esistenza forte per equazioni differenziali stocastiche con coefficienti aleatori (ossia dipendenti da $\omega \in \Omega$ in modo esplicito), che non abbiamo esposto.

Notiamo che nel caso stocastico, a differenza del caso deterministico, non si ha locale Lipschitzianità nella variabile temporale, ma solo una sorta di condizione di $\frac{1}{2}$ -Hlderianità.

Concludiamo la sezione con un risultato tecnico, che non dimostriamo nei dettagli perchè la dimostrazione si basa su definizioni e risultati riguardanti la legge del moto Browniano nello spazio delle traiettorie continue, nota come **legge di Wiener**.

Sia $s \in [0, T[$, e sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (B_t)_{t \geq 0}, (u(t))_{t \geq 0}) \in \mathcal{W}^w([s, T])$. Sia poi $\hat{s} \in [s, T[$, e sia $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una variabile aleatoria $\mathcal{G}_{\hat{s}}^s$ -misurabile. Se vale il sistema di ipotesi γ , allora, si pu risolvere la seguente equazione stocastica:

$$\begin{cases} dy(t) = b(t, y(t), u(t)) dt + \sigma(t, y(t), u(t)) \cdot dB_t, & t \in [\hat{s}, T] \\ y(\hat{s}) = \xi \end{cases},$$

sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t^s)_{t \geq s})$. Esiste allora un processo stocastico, che denotiamo con:

$$(y(t, \hat{s}, \xi, u))_{t \in [\hat{s}, T]},$$

tale che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ rispetto a \mathbb{P} valga, per ogni $t \in [\hat{s}, T]$:

$$y(t, \hat{s}, \xi, u)(\omega) = \xi(\omega) + \int_{\hat{s}}^t b(r, y(r, \hat{s}, \xi, u), u(r)) dr + \int_{\hat{s}}^t \sigma(r, y(r, \hat{s}, \xi, u), u(r)) \cdot dB_r$$

Lemma 3.1.2. Sia $s \in [0, T[$, e sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (B_t)_{t \geq 0}, (u(t))_{t \geq 0}) \in \mathcal{W}^w([s, T])$. Allora per ogni $\hat{s} \in [s, T[$ e per ogni variabile $\xi \mathcal{G}_{\hat{s}}^s$ -misurabile vale, per quasi ogni $\omega \in \Omega$ rispetto a \mathbb{P} :

$$J_{\hat{s}, \xi(\omega)}(u) = \mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, \hat{s}, \xi, u), u(r)) dr + h(y(T, \hat{s}, \xi, u)) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] (\omega)$$

3.2 Il principio di ottimalità di Bellman

Esponiamo ora la versione stocastica del **principio di ottimalità di Bellman**.

Teorema 3.2.1 (Principio di ottimalità di Bellman, versione stocastica). Sia soddisfatto il sistema di ipotesi γ . Allora, per ogni $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$ e per ogni $\hat{s} \in [s, T]$:

$$V(s, y_0) = \inf_{u \in \mathcal{W}^w([s, T])} \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(t, s, y_0, u), u(r)) dr + V(\hat{s}, y(\hat{s}, s, y_0, u)) \right]$$

Dimostrazione. Fissiamo $\hat{s} \in [s, T]$ in maniera arbitraria. Una volta fatto ciò, denotiamo con $Z(s, y_0)$ il secondo membro dell'uguaglianza scritta sopra: si tratta di mostrare che:

$$V(s, y_0) = Z(s, y_0)$$

Dimostriamo allora che vale $V(s, y_0) \geq Z(s, y_0)$. Per definizione di estremo inferiore, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (B_t)_{t \geq 0}, (u(t))_{t \geq 0}) \in \mathcal{W}^w([s, T])$ tale che:

$$V(s, y_0) + \varepsilon > J_{s, y_0}(u)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V(s, y_0) + \varepsilon > J_{s, y_0}(u) &= \mathbb{E} \left[\int_s^T L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + h(y(T, s, y_0, u)) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + \mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + h(y(T, s, y_0, u)) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] \right] \end{aligned}$$

Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + h(y(T, s, y_0, u)) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, \hat{s}, y(\hat{s}), u), u(r)) dr + h(y(T, \hat{s}, y(\hat{s}), u)) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] \end{aligned}$$

e per il Lemma (3.1.2):

$$\mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + h(y(T, s, y_0, u)) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] = J_{\hat{s}, y(\hat{s})}(u),$$

ove $y(\hat{s}) = y(\hat{s}, s, y_0, u)$. Dunque:

$$\begin{aligned} J_{s, y_0}(u) &= \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + J_{\hat{s}, y(\hat{s})}(u) \right] \geq \\ &\geq \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + V(\hat{s}, y(\hat{s}, s, y_0, u)) \right] \geq Z(s, y_0) \end{aligned}$$

Dunque vale la disuguaglianza:

$$V(s, y_0) \geq Z(s, y_0)$$

Viceversa, fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la Proposizione (3.1.1), esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|y_0 - y_1\| < \delta$, allora:

$$|J_{\hat{s}, y_0}(u) - J_{\hat{s}, y_1}(u)| + |V(\hat{s}, y_0) - V(\hat{s}, y_1)| < \varepsilon$$

per ogni $u \in \mathcal{W}^w([\hat{s}, T])$. Questo passaggio può sembrare un po' oscuro (soprattutto per il fatto che valga per ogni $u \in \mathcal{W}^w([\hat{s}, T])$), ma per dimostrare questo passaggio servono risultati e nozioni di carattere prettamente probabilistico che non abbiamo il tempo di affrontare.

Sia allora $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una partizione di Borel di \mathbb{R}^n , ossia una successione di elementi appartenenti a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j = \mathbb{R}^n,$$

e tale che per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$:

$$D_i \cap D_j = \emptyset$$

Possiamo chiaramente chiedere che ogni elemento di tale partizione abbia diametro minore di δ , ossia che per ogni $j \in \mathbb{N}$ valga:

$$\sup_{v_1, v_2 \in D_j} \|v_1 - v_2\| < \delta$$

Sia poi $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$ valga $x_j \in D_j$. Allora, ovviamente, per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste una 5-pla $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mathbb{P}_j, (B_t^{(j)})_{t \geq 0}, (u^{(j)}(t))_{t \geq 0}) \in \mathcal{W}^w([\hat{s}, T])$ tale che:

$$J_{\hat{s}, x_j}(u^{(j)}) \leq V(\hat{s}, x_j) + \varepsilon$$

Usando le disuguaglianze viste finora, allora, per $x \in D_j$ vale:

$$J_{\hat{s}, x}(u^{(j)}) \leq J_{\hat{s}, x_j}(u^{(j)}) + \varepsilon \leq V(\hat{s}, x_j) + 2\varepsilon \leq V(\hat{s}, x) + 3\varepsilon$$

Per la proposizione (1.2.2), allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste un processo ψ_j (progressivamente misurabile rispetto a una filtrazione che non specifichiamo) tale che:

$$u_j(t, \omega) = \psi_j(t, B^{(j)}(\cdot \wedge t, \omega))$$

per ogni $t \in [\hat{s}, T]$, per \mathbb{P}_j -quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Ora, per ogni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (B_t)_{t \geq 0}, (u(t))_{t \geq 0}) \in \mathcal{W}^w([s, T])$, sia $y(t) = y(t, s, y_0, u)$ lo stato associato. Definiamo allora il seguente controllo $(\tilde{u}(t))_{t \geq 0}$:

$$\tilde{u}(t, \omega) = \begin{cases} u(t, \omega), & t \in [s, \hat{s}[\\ \psi_j(t, B^{(j)}(\cdot \wedge t, \omega) - B^{(j)}(\hat{s}, \omega)), & t \in [\hat{s}, T] \wedge y(t, \omega) \in D_j \end{cases}$$

Si può dimostrare (tralasciamo i dettagli) che $\tilde{u} \in \mathcal{W}^w([s, T])$. Dunque:

$$V(s, y_0) \leq J_{s, y_0}(\tilde{u})$$

A questo punto, usando il Lemma (3.1.2):

$$J_{s, y_0}(\tilde{u}) = \mathbb{E} \left[\int_s^T L(r, y(r, s, y_0, \tilde{u}), \tilde{u}(r)) dr + h(y(T, s, y_0, \tilde{u})) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, \tilde{u}), \tilde{u}(r)) dr + \mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, s, y_0, \tilde{u}), \tilde{u}(r)) dr + h(y(T, s, y_0, \tilde{u})) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E} \left[\int_{\hat{s}}^T L(r, y(r, \hat{s}, y(\hat{s}), \tilde{u}), \tilde{u}(r)) dr + h(y(T, \hat{s}, y(\hat{s}), \tilde{u})) \middle| \mathcal{G}_{\hat{s}}^s \right] \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + J_{\hat{s}, y(\hat{s})}(\tilde{u}) \right] \leq \\
&\leq \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + V(\hat{s}, y(\hat{s}, s, y_0, u)) + 3\varepsilon \right],
\end{aligned}$$

per la disuguaglianza vista in precedenza. Dunque:

$$V(s, y_0) \leq \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(r, s, y_0, u), u(r)) dr + V(\hat{s}, y(\hat{s}, s, y_0, u)) + 3\varepsilon \right],$$

e per l'arbitrarietà di $u \in \mathcal{W}^w([s, T])$:

$$V(s, y_0) \leq Z(s, y_0) + 3\varepsilon$$

A questo punto, usando l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si ottiene:

$$V(s, y_0) \leq Z(s, y_0),$$

dunque la tesi. □

Segue subito dal teorema appena dimostrato il seguente corollario.

Corollario 3.2.2. Sia soddisfatto il sistema di ipotesi γ , e sia $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$. Se (\bar{y}, \bar{u}) è una coppia ottimale, tale quindi che:

$$J_{s, y_0}(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{W}^w([s, T])} J_{s, y_0}(u),$$

allora, per quasi ogni $\omega \in \Omega$ rispetto a \mathbb{P} , si ha per ogni $t \in [s, T]$:

$$V(t, \bar{y}(t)) = J_{t, \bar{y}(t)}(\bar{u}) = \mathbb{E} \left[\int_t^T L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr + h(\bar{y}(T)) \middle| \mathcal{G}_t^s \right]$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned}
V(s, y_0) &= J_{s, y_0}(\bar{u}) = \\
&= \mathbb{E} \left[\int_s^t L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr + \mathbb{E} \left[\int_t^T L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr + h(\bar{y}(T)) \middle| \mathcal{G}_t^s \right] \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\int_s^t L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr \right] + \mathbb{E} [J_{t, \bar{y}(t)}(\bar{u})],
\end{aligned}$$

per il Lemma (3.1.2). Chiaramente poi vale:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_s^t L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr \right] + \mathbb{E} [J_{t, \bar{x}(t)}(\bar{u})] \geq \\ & \geq \mathbb{E} \left[\int_s^t L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr \right] + \mathbb{E} [V(t, \bar{x}(t))] , \end{aligned}$$

e per il principio di ottimalità di Bellman:

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr \right] + \mathbb{E} [V(t, \bar{x}(t))] \geq V(s, y_0)$$

Le disuguaglianze viste sono tutte uguaglianze, quindi in particolare vale:

$$\mathbb{E} [J_{t, \bar{x}(t)}(\bar{u})] = \mathbb{E} [V(t, \bar{x}(t))]$$

Ma a priori vale:

$$J_{t, \bar{x}(t)}(\bar{u}) \geq V(t, \bar{x}(t)) ,$$

e dall'uguaglianza dei valori attesi otteniamo l'uguaglianza \mathbb{P} -quasi certa, che poi è la tesi. \square

3.3 L'equazione SHJB

Riguardando il Teorema (3.2.1), chiameremo **equazione della programmazione dinamica** la seguente equazione (al variare di $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$:

$$V(s, y_0) = \inf_{u \in \mathcal{W}^w([s, T])} \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, y(t, s, y_0, u), u(r)) dr + V(\hat{s}, y(\hat{s}, s, y_0, u)) \right]$$

Tale equazione può essere molto complicata, o addirittura impossibile, da risolvere. Come nel caso deterministico, però, si può dire qualcosa nel caso in cui V è sufficientemente regolare. Nel prossimo teorema, allora, indicheremo con $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ la classe delle funzioni:

$$v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che v_t, v_y, v_{yy} sono tutte ben definite in $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ e continue.

Teorema 3.3.1. Supponiamo che valga il sistema di ipotesi γ , e supponiamo che:

$$V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$$

Allora V è soluzione del seguente problema con dato finale:

$$\begin{cases} -v_t(t, y) + \sup_{u \in U} G(t, y, u, -v_y(t, y), -v_{yy}(t, y)) = 0 , & (t, y) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n \\ v(T, y) = h(y) , & y \in \mathbb{R}^n \end{cases} ,$$

ove:

$$G : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times S(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

è data da:

$$G(t, y, u, p, P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{Tr} [P \sigma(t, y, u) \sigma(t, y, u)^t] + \langle p, b(t, y, u) \rangle + L(t, y, u)$$

Dimostrazione. Fissiamo $(s, y_0) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$, e $u \in U$. Sia $\hat{u} \in \mathcal{W}^w([s, T])$ dato da $\hat{u}(t) \equiv u$ in $[s, T]$, e sia y la traiettoria associata a questo controllo (con dato iniziale $y(s) = y_0$). Se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, abbiamo:

$$-\frac{1}{s_n - s} \left\{ \mathbb{E}[V(s_n, y(s_n)) - V(s, y_0)] + \mathbb{E} \left[\int_s^{s_n} L(r, y(r), u) dr \right] \right\} \leq 0$$

Ma usando la formula di Itô si ottiene proprio, per costruzione di G :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{s_n - s} \left\{ \mathbb{E}[V(s_n, y(s_n)) - V(s, y_0)] + \mathbb{E} \left[\int_s^{s_n} L(r, y(r), u) dr \right] \right\} = \\ & = -\frac{1}{s_n - s} \mathbb{E} \left[\int_s^{s_n} -V_t(r, y(r)) + G(r, y(r), u, -V_y(r, y(r)), -V_{yy}(r, y(r))) dr \right], \end{aligned}$$

e per $n \rightarrow \infty$ tale quantità tende a:

$$-V_t(s, y_0) + G(s, y_0, u, -V_y(s, y_0), -V_{yy}(s, y_0))$$

Deduciamo allora, per arbitrarietà di $u \in U$, che:

$$-V_t(s, y_0) + \sup_{u \in U} G(s, y_0, u, -V_y(s, y_0), -V_{yy}(s, y_0)) \leq 0$$

Al contrario, sia $\varepsilon > 0$. Esiste allora $\hat{s} \in]s, T]$ vicino a s tale che esiste un controllo $\bar{u} \in \mathcal{W}^w([s, T])$ tale che:

$$V(s, y_0) + \varepsilon(\hat{s} - s) \geq \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr + V(\hat{s}, \bar{y}(\hat{s})) \right]$$

Allora, con le opportune divisioni:

$$\begin{aligned} -\varepsilon & \leq \frac{1}{\hat{s} - s} \left\{ \mathbb{E}[V(\hat{s}, \bar{y}(\hat{s})) - V(s, y_0)] + \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} L(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r)) dr \right] \right\} = \\ & = -\frac{1}{\hat{s} - s} \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} -V_t(r, \bar{y}(r)) + G(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r), -V_y(r, \bar{y}(r)), -V_{yy}(r, \bar{y}(r))) dr \right] \leq \\ & \leq -\frac{1}{\hat{s} - s} \mathbb{E} \left[\int_s^{\hat{s}} -V_t(r, \bar{y}(r)) + \sup_{u \in U} G(r, \bar{y}(r), u, -V_y(r, \bar{y}(r)), -V_{yy}(r, \bar{y}(r))) dr \right], \end{aligned}$$

e per il sistema di ipotesi γ (quindi per l'uniforme continuità di tutte le funzioni coinvolte) tale quantità tende a:

$$-V_t(s, y_0) + \sup_{u \in U} G(s, y_0, u, -V_y(s, y_0), -V_{yy}(s, y_0))$$

Otteniamo dunque, per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$:

$$-V_t(s, y_0) + \sup_{u \in U} G(s, y_0, u, -V_y(s, y_0), -V_{yy}(s, y_0)) \geq 0,$$

quindi la tesi. \square

L'equazione appena presentata è detta **equazione stocastica di Hamilton-Jacobi-Bellman**, e la funzione G è detta **Hamiltoniana generalizzata**. Sotto determinate ipotesi, l'equazione ammette una soluzione classica: per approfondimenti, si veda [1].

Bibliografia

- [1] Fleming, W.H. - Soner, H.M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, 1992.
- [2] Yong, J. - Zhou, X.Y. *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*. Springer-Verlag, 1999.