Teorema di approssimazione di Weierstrass

Vincenzo Galgano

20 maggio 2015

Sommario

In questo elaborato analizzeremo il Teorema di approssimazione di Weierstrass proponendo le dimostrazioni di Fejer e di Bernstein e studiandone alcune applicazioni. Inoltre introdurremo (enunciandolo soltanto, senza dimostrarlo) il Teorema di Stone-Weierstrass che generalizza il risultato di Weierstrass agli spazi di Hausdorff.

Indice

1 L'enunciato di Weierstrass

Teorema 1.1 (Teorema di Weierstrass)**.**
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione continua.
Allora $\forall \epsilon > 0$ esiste un polinomio $P(x)$ tale che
$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$

Da un punto di vista topologico, l'enunciato equivale a dire: *"L'insieme dei polinomi é denso nello spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ rispetto la norma $\|\cdot\|_\infty$. "*
Una prima domanda lecita é se, data una qualsiasi funzione continua, essa possa essere espressa come una serie di potenze seppur non come polinomio. La risposta é negativa come mostra la seguente:

Proposizione 1.2. *La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita*

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

é liscia (ossia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$) ma non esiste $\epsilon > 0$ per cui nell'intervallo $|x| < \epsilon$ $g(x)$ sia esprimibile come serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Dimostrazione: Osserviamo che per una funzione su $|x| < \epsilon$ data dalla serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i coefficienti soddisfano $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Sia $g(x)$ la funzione in oggetto: per induzione si mostra che $\forall x \neq 0$ vale $g^{(n)}(x) = P_n(\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ per qualche polinomio $P_n(x)$. Segue che $g(x)$ é liscia fuori da 0. Per $x = 0$ si ha $g^{(n)}(0) = 0$ e $g(x)$ liscia in 0.
Dall'osservazione iniziale abbiamo che se $g(x)$ fosse esprimibile come serie di potenze in un intervallo del tipo $|x| < \epsilon$ allora i suoi coefficienti sarebbero tutti nulli. Assurdo, poiché $g(x) \neq 0$ in $|x| < \epsilon$.

$\square$

2 La dimostrazione di Fejer

Definizione 2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e 2π-periodica. Dato $n \in \mathbb{Z}$, l' n-esimo* **coefficiente di Fourier** *di f é:*

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Consideriamo dunque le somme (al variare di $k \in \mathbb{N}$):

$$S_k(f,t) := \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(n) e^{int}$$

Tali somme sono abbastanza instabili per determinare una funzione continua dai suoi coefficienti di Fourier, in quanto richiedono ipotesi troppo forti sulla funzione, come nel seguente risultato:

Teorema 2.2 (Teorema di Dirichlet)**.** *Sia f una funzione continua con derivata continua e limitata quasi ovunque. Allora per $k \to \infty$ le somme*

$$S_k(f,t) \to f(t)$$

nei punti in cui f é continua.

É evidente che ci sono molte funzioni continue f per le quali $S_k(f,t)$ ha limsup infinito.
A risolvere tale inconveniente fu il diciannovenne Fejer, che mostró che le medie $\sigma_k = \dfrac{S_0 + ... + S_k}{k+1}$ si comportano meglio. Da qui il suo risultato:

Teorema 2.3 (Teorema di Fejer).
Sia T la circonferenza unitaria.
(i) Sia $f : T \to \mathbb{C}$ Riemann-integrabile. Allora dove f é continua vale:

$$\sigma_k(f,t) = \sum_{r=-k}^{k} \frac{k+1-|n|}{k+1} \hat{f}(n) e^{int} \to f(t)$$

per $k \to \infty$;
(ii) Sia $f : T \to \mathbb{C}$ continua. Allora $\sigma_k(f,t) \rightrightarrows f(t)$ (uniformemente).

Prima di dimostrare il teorema definiamo:

Definizione 2.4. *Chiamiamo* **Kernel di Fejer**

$$K_k(t) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{k+1-|n|}{k+1} e^{int}$$

Tale funzione ha le seguenti proprietá:
(i)$\forall t \neq 0$

$$K_k(t) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{sin(\frac{(k+1)t}{2})}{sin(\frac{t}{2})} \right)^2$$

(ii) $K_k(t) \geq 0$, $\forall t$
(iii) $K_k(t) \rightrightarrows 0$ (uniformemente) fuori l'intervallo $[-\delta, \delta]$ $\forall$ $\delta > 0$
(iv)

$$\frac{1}{2\pi} \int_T K_k(t) dt = 1$$

Dimostriamo ora il teorema di Fejer:

Dimostrazione del Teorema 3:
(i) Poiché f é Riemann-integrabile, f é limitata sulla circonferenza T: sia $M \geq |f(x)|$, $\forall x$.
Allora $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_{(t,\epsilon)}$ tale che $|f(x) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall |x-t| < \delta$.

Dalla proprietá (iii) del kernel di Fejer, sappiamo che $\exists N = N_\delta$ tale che per $k \geq N$ si ha $|K_k(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$, $\forall x \notin [-\delta, \delta]$. Ne segue che:

$$|\sigma_k(f,t) - f(t)| = |\frac{1}{2\pi} \int_T (f(t-x) - f(t))K_k(x)dx| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta,\delta]} |(f(t-x)-f(t))K_k(x)|dx + \frac{1}{2\pi} \int_{x \notin [-\delta,\delta]} |(f(t-x)-f(t))K_k(x)|dx \leq$$

e, poiché $|f(t-x) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ in $[-\delta, \delta]$ e $|f(t-x) - f(t)| \leq 2M$ fuori, si ha:

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta,\delta]} |K_k(x)|dx + \frac{2M}{2\pi} \int_{x \notin [-\delta,\delta]} |K_k(x)|dx \leq$$

da cui, poiché $|K_k(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$ fuori $[-\delta, \delta]$ e per la proprietá (ii)+(iv), abbiamo:

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{x \notin [-\delta,\delta]} dx = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(ii) Ripercorrendo la dimostrazione del punto (i) e notando che f é uniformemente continua (per Heine-Cantor) su T, sostituendo opportunamente δ e N con costanti dipendenti solo da ϵ, si ha la tesi.

□

Corollario 2.5. *Date f, g continue a valori complessi sulla circonferenza unitaria T, se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$, allora $f = g$.*

Dimostrazione: $0 = \sigma_k(f,t) - \sigma_k(g,t) \to f(t) - g(t)$ per $k \to \infty$.

□

Richiamiamo ora la definizione di polinomio trigonometrico per poi mostrare la versione di Fejer del teorema di Weierstrass.

Definizione 2.6. *Un* **polinomio trigonometrico** *é una funzione della forma $\sum_{n=-k}^{k} a_n e^{int}$.*

Riformuliamo il teorema 1 in termini di questi polinomi:

Teorema 2.7 (Teorema di Weierstrass, versione trigonometrica). *Sia $f : T \to \mathbb{C}$ continua. Allora $\forall \epsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico P tale che*

$$\sup_{t\in T} |f(t) - P(t)| < \epsilon$$

Dimostrazione: Tale polinomio trigonometrico é $\sigma_k(f,t)$ ed esiste per il Teorema di Fejer.

□

Resta ora da dimostrare che il Teorema 4 implica il Teorema 1. Per comoditá rienunciamo il Teorema 1:

Teorema di Weierstrass : Sia $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora $\forall \epsilon > 0$ esiste un polinomio $P(x)$ tale che su $[a,b]$ vale $|f(x)-P(x)| < \epsilon$.

Dimostrazione via Fejer. Senza perdita di generalitá possiamo supporre $[a,b] = [-\pi,\pi]$, sostituendo $f(x)$ con $g(x) = f(a + \frac{(x+\pi)(b-a)}{2\pi})$ e un'approssimazione Q di $g(x)$ con $P(x) = Q(\frac{2\pi(x-a)}{b-a} - \pi)$. Consideriamo la funzione continua:

$$F(x) = \begin{cases} f(|x|) \ \ per \ \ |x| \leq \pi \\ F \ ha \ periodo \ 2\pi \ in \ |x| > \pi \end{cases}$$

Dal Teorema di Fejer, esistono $k \geq 1$ e $a_{-k}, \ \dots \ , a_{-1}, a_0, a1, \ \dots \ , a_k \in \mathbb{C}$ tali che $|F(t) - \sum_{n=-k}^{k} a_n e^{int}| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall t$.

Ma in ogni intervallo limitato $[-M,M]$ la serie $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(ix)^r}{r!} \rightrightarrows e^{ix}$ (uniformemente).

Dunque $\forall n \in [-k,k] \exists m_n$ tale che per $|t| \leq 1$ si ha

$$|\sum_{r=0}^{m_n} \frac{(int)^r}{r!} - e^{int}| \leq \frac{\epsilon}{(4k+2)|a_n| + 1}$$

Allora il polinomio $P(t) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \sum_{r=0}^{m_n} \frac{(int)^r}{r!}$ per $t \in [0,1]$ soddisfa:

$$|P(t) - f(t)| = |P(t) - F(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=-k}^{k} \frac{\epsilon}{4k+2} = \epsilon$$

$\square$

3 La dimostrazione di Bernstein

Nel 1911 Bernstein forní una dimostrazione alternativa del teorema di Weierstrass attraverso un risultato basato su particolari polinomi che hanno poi preso il suo nome:

Definizione 3.1. *Data $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, per $n \in \mathbb{N}$ l' n-esimo* **polinomio di Bernstein** *di f é:*

$$B_n(x,f) := \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} f(\frac{r}{n})$$

Alcune proprietá di questi polinomi sono:
1. Se $f = c$ costante, allora $B_n(x,c) = c$;
2. Se $g \geq h$, allora $B_n(x,g) \geq B_n(x,h)$. In particolare, $B_n(x,g) \geq 0 \ \forall g \geq 0$.

Il risultato di Bernstein che dimostra il teorema di Weierstrass é il seguente:

Teorema 3.2 (Teorema di Bernstein)**.** *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Allora in $[0,1]$ la successione $(B_n(x,f))_{\mathbb{N}} \rightrightarrows f(x)$ (uniformemente).*

Dimostrazione: Sia $\epsilon > 0$. Per Heine-Cantor f é uniformemente continua in $[0,1]$, ossia per $x, y \in [0,1]$

$$\exists \delta > 0, \ |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \ \ \forall |x-y| \leq \delta$$

Sia $M = \sup_{[0,1]} |f(x)|$ e fisso $x_0 \in [0,1]$.
Passo 1) trovare una funzione positiva non costante che limiti superiormente $f - f(x_0)$:

- Se $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, allora abbiamo giá $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- Se $|x - x0| > \delta$, allora consideriamo $|f(x) - f(x_0)| \leq 2M < 2M(\frac{x - x_0}{\delta})^2$.

  Dunque in $[0,1]$ ho che $|f(x) - f(x_0)| \leq 2M(\frac{x - x_0}{\delta})^2 + \epsilon$.

Passo 2) sfruttare le proprietá dei polinomi di Bernstein:

$$|B_n(x,f)-f(x_0)| = |B_n(x,f-f(x_0))| \leq B_n(x, 2M(\frac{x-x_0}{\delta})^2+\epsilon) =$$

$$= B_n(x, 2M(\frac{x-x_0}{\delta})^2) + B_n(x,\epsilon) = \frac{2M}{\delta^2}B_n(x,(x-x_0)^2)+\epsilon$$

Ma $B_n(x,(x-x_0)^2) = x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2x_0x + x_0^2 = (x-x_0)^2 + \frac{x-x^2}{n}$ e sostituendo nella precedente disuguaglianza si ha:

$$|B_n(x,f)-f(x_0)| \leq \frac{2M}{\delta^2}(x-x_0)^2 + \frac{2M}{\delta^2 n}(x-x^2)+\epsilon$$

Notiamo che $\max_{x_0} x_0 - x_0^2 = \frac{1}{4}$. Quindi ponendo $x = x_0$ otteniamo:

$$|B_n(x_0,f)-f(x_0)| \leq \frac{M}{2\delta^2 n}+\epsilon$$

Per n abbastanza grande si ha $\frac{M}{2\delta^2 n} < \epsilon$ e quindi definitivamente si ha

$$|B_n(x_0,f)-f(x_0)| \leq 2\epsilon$$

□

4 Il Teorema di Bernstein in Probabilitá

Posta X_n^x una variabile aleatoria binomiale di parametri n e x, ci soffermiamo sulla relazione

$$\boxed{B_n(x,f) = \mathbb{E}[f(\frac{X_n^x}{n})]}$$

Mostriamo ora il ragionamento "probabilistico" che c'é dietro la dimostrazione del teorema di Bernstein.

Siamo in un bar di Pisa a giocare a freccette col bersaglio appeso al muro.
Il nostro bersaglio ha area unitaria e $\forall x \in [0,1]$ fissato consideriamo una regione avente area x colorata di nero. Supponiamo di lanciare n freccette e che r tra queste finiscono nella regione nera: allora il giocatore vince $f(\frac{r}{n})$ euro.
Al crescere del numero di lanci n, qual é la speranza della variabile aleatoria $f(\frac{X_n^x}{n})$?
Sappiamo che:

- x^r é la probabilitá cghe r freccette siano nella regione nera;
- $(1-x)^{n-r}$ é la probabilitá che le restanti $n-r$ freccette siano fuori la zona nera;
- $\binom{n}{r}$ é il numero di modi di scegliere r freccette dagli n lanci.

Allora la probabilitá di lanciare esattamente r freccette nella regione nera é $\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}$.
Dunque la speranza é $\mathbb{E}[f(\frac{X_n^x}{n})] = B_n(x, f)$.
All'aumentare degli n tentativi, diventa sempre piú probabile che la proporzione $\frac{r}{n}$ di freccette nella regione nera sia piú vicina all'intera area x della regione. Quindi la speranza si avvicina sempre piú a $f(x)$, ossia

$$B_n(x, f) = \mathbb{E}[f(\frac{X_n^x}{n})] \to f(x)$$

5 Applicazione del Teorema di Weierstrass: i momenti

Ora che abbiamo visto il Teorema di Weierstrass dimostrato da Fejer e Bernstein, studiamone alcune applicazioni.
La prima che proponiamo é utile quando si lavora con i momenti in Teoria

della Probabilitá.

Teorema 5.1 (Teorema di Hausdorff).
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue. Se $\forall r \geq 0$ vale l'uguaglianza dei momenti

$$\int_a^b x^r f(x)dx = \int_a^b x^r g(x)dx$$

allora $f = g$ su $[a, b]$.

Dimostrazione. Sia $h = f - g$. É sufficiente mostrare che setutti i momenti di h si annullano al variare di r, allora h dev'essere costantemente nulla.
Poiché $\int_a^b h(x)dx = 0$, allora per ogni polinomio $P(x)$ abbiamo

$$\int_a^b P(x)h(x)dx = 0$$

Consideriamo la successione $(P_n)_n$ di polinomi convergenti uniformemente alla funzione $\bar{h}$ su $[a, b]$. Allora $P_n(x)h(x) \rightrightarrows |h(x)|^2$ (uniformemente) su $[a, b]$.
Perció abbiamo che $\int_a^b |h(x)|^2 dx = 0$.
Ma poiché $|h(x)|^2$ é reale e non negativo su tutto $[a, b]$, dev'essere necessariamente $|h(x)|^2 = 0$ e quindi $h(x) = 0$.

□

Osservazione: Tuttavia il teorema di Hausdorff non é piú valido su intervalli infiniti; un valido controesempio é la funzione

$$h(x) = e^{-x^{\frac{1}{4}}} sin(x^{\frac{1}{4}})$$

che é non nulla, continua e a valori reali ma che ha tutti i momenti nulli su $[0, \infty)$.

6 Applicazione del Teorema di Weierstrass: le maree

Un'altra applicazione dell'approssimazione polinomiale fu evidenziata da Kelvin circa la previsione delle maree.

Premettiamo che l'altezza della marea $h(t)$ al tempo t é data dalla somma di alcune funzioni periodiche $h_1(t) + ... + h_N(t)$. Ad esempio, $h_1(t)$ potrebbe avere come periodo la rotazione della Terra rispetto alla Luna, mentre $h_2(t)$ la rotazione della Terra rispetto al Sole e cosí via.
Approssimando le $h_i(t)$ con polinomi trigonometrici si ha un'approssimazione di $h(t)$ del tipo

$$h(t)\ a_0 + \sum_{r=1}^{N}(a_r cos(m_r t) + b_r sin(m_r t))$$

Registrando il valore $h(t)$ in un ampio "raggio d'azione" $[S, S+T]$ si possono calcolare i coefficienti dalle formule (per $T \to \infty$)

$$\frac{2}{T}\int_S^{S+T} h(t)cos(m_r t)dt \to a_r$$

$$\frac{2}{T}\int_S^{S+T} h(t)sin(m_r t)dt \to b_r$$

Inoltre i valori m_r sono presi da frequenze della forma $k\lambda$ con λ ottenuto dai periodi $2\pi\lambda^{-1}$ dei valori $h_i(t)$.

7 Separabilitá dello spazio L^1

Rienunciamo il **teorema 1** nella sua forma topologica:

L'insieme dei polinomi é denso nello spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ rispetto la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sia $P([a, b])$ lo spazio dei polinomi su $[a, b]$ e $C^0([a, b])$ lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$. Dal *teorema 1* sappiamo che $P([a, b])$ é denso in $C^0([a, b])$.

Definizione 7.1. *Uno spazio topologico é* **separabile** *se contiene un sottoinsieme numerabile e denso.*

$\mathbb{Q}[X]$ é un sottoinsieme denso e numerabile di $P([a, b])$, dunque $P([a, b])$ é separabile. Per Weierstrass, allora anche $C^0([a, b])$ lo é, cosí come lo é ogni spazio topologico in cui $C^0([a, b])$ é denso.
Ad esempio, $L^1([a, b])$ (lo spazio delle funzioni a modulo *Lebesgue*-integrabile)

é separabile poiché contiene $C^0([a, b])$.

8 Il Teorema di Stone-Weierstrass

Prima di concludere questo elaborato introduciamo il Teorema di Stone-Weierstrass che generalizza il teorema di approssimazione di Weierstrass. Tuttavia ne daremo solo la formulazione senza dimostrarlo. Vediamo prima alcune definizioni preliminari.

Definizione 8.1. *Dato lo spazio* $\mathbb{R}^S = f : S \to \mathbb{R}$*, una* **algebra di funzioni** $\mathfrak{A}$ *su* S *é un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^S$ *stabile anche per prodotto puntuale*

$$f, g \in \mathfrak{A} \implies fg \in \mathfrak{A}$$

Definizione 8.2. *Un* **reticolo** $\mathfrak{R}$ *di funzioni su* S *é un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^S$ *stabile per le operazioni* $f \vee g$ *e* $f \wedge g$.

Definizione 8.3. *Una famiglia* $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^S$ *si dice* **separante** *se* $\forall x, y \in S$ $\exists f \in \mathfrak{F}$ *tale che* $f(x) \neq f(y)$.

Proposizione 8.4. *Un sottospazio* $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^S$ *é un reticolo se e solo se* $f \in \mathfrak{R} \implies |f| \in \mathfrak{R}$.

Siamo pronti ora per enunciare il teorema:

Teorema 8.5 (Teorema di Stone-Weierstrass)**.**
Sia $\mathcal{X}$ *uno spazio topologico di Hausdorff.*
Sia $\mathfrak{A}$ *un'algebra separante di funzioni continue su* $\mathcal{X}$.
Allora $\bar{\mathfrak{A}} = C^0(\mathcal{X})$ *oppure* $\exists x_0 \in \mathcal{X}$ *per cui*
$\bar{\mathfrak{A}} = f \in C^0(\mathcal{X}) | f(x_0) = 0$.

Osservazione: gli insiemi $\mathfrak{M}_x = f \in C^0(\mathcal{X}) | f(x) = 0$ sono tutti e soli gli ideali massimali dell'anello $C^0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$.
Altro importante risultato generale é il Teorema di Korovkin:

Teorema 8.6 (Teorema di Korovkin)**.**
Sia $K \subset \mathbb{R}$ compatto e siano $\mathfrak{L}_n : C^0(K, \mathbb{R}) \to C^0(K, \mathbb{R})$ operatori lineari definiti positivi. Se la successione $(\mathfrak{L}_n x^i)_{n \in \mathbb{N}} \rightrightarrows x^i$ (uniformemente) per $i \in 0, 1, 2$, allora $(\mathfrak{L}_n f)_{n \in \mathbb{N}} \rightrightarrows f$ (uniformemente) $\forall f$.

Si noti come tale teorema é una generalizzazione del Teorema di Bernstein (*teorema 5*).