Preparazione orale analisi numerica:

CAPITOLO Errori (1):

Ricavare il coefficiente di amplificazione:

Sviluppare la serie di Taylor su $\tilde{x}$ di centro x con $\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$

$$\varepsilon_{in} = \frac{\left(f(x)+(\tilde{x}-x)f'(x)+\frac{(\tilde{x}-x)^2}{2}f''(\xi)\right)-f(x)}{f(x)} \doteq \varepsilon_x \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

CAPITOLO Gerschgorin (4):

Primo teorema di Gershgorin (Massimizzare il valore per riga):

Gli autovalori di una matrice A appartengono all'insieme: $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Dimostrazione:

Sia x autovettore | $Ax = \lambda x$; sulla i-esima riga vale $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$

Prendiamo x_k componente di massimo modulo, vale:

$(a_{k,k} - \lambda)x_k = -\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j$ dividiamo per x_k e otteniamo $a_{k,k} - \lambda = -\sum_{j\neq k} a_{k,j}\frac{x_j}{x_k}$ ma $\left|\frac{x_j}{x_k}\right| \leq 1$,

quindi: $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j\neq k}|a_{k,j}|$

Secondo teorema di Gershgorin (Polinomio sulla matrice):

Se l'unione dei cerchi di Gerschgorin è formata da due sottoinsiemi disgiunti M_1 e M_2 dati dall'unione di m_1, m_2 cerchi, allora M_1 conterrà m_1 autovalori mentre M_2 ne conterrà m_2.

Dimostrazione:

Data A sia $\mathrm{D}(A)$ la matrice con i valori diagonali di A, $A(t) := D + t(A - D)$ | $t \in [0,1]$

Gli elementi e gli autovalori di $A(t)$ sono funzioni continue di t, variandolo otteniamo:

$A(0) = D$; $A(1) = A$ sempre con gli stessi centri e raggio crescente.

Siccome M_1 e M_2 sono disgiunti allora gli autovalori nono possono passare da l'uno all'altro, quindi contengono il numero di valori dati dal numero dei cerchi.

Teorema riducibile ↔ fortemente connesso:

Una matrice è riducibile ↔ Il suo grafo non è fortemente connesso.

Dimostrazione (Insiemi raggiungibili):

Osservazione: i grafi di A e $B = PAP^T$ differiscono solo di una permutazione di nodi.

→

Portata in forma $\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$ allora non esiste nessun cammino fra le due parti della matrice.

←

Esiste una coppia di nodi per cui non esiste un cammino,

$Q = \{\text{nodi non raggiungibili da p}\}$; $P = \{\text{nodi raggiungibili da p}\}$

Ovviamente da nessun nodo di P posso raggiungere Q, permutando in modo tale che gli indici di P siano i primi risulta A riducibile.

Terzo teorema di Gershgorin:

Supponiamo che $\exists\lambda \mid \lambda \in K_i \to \lambda \in \delta K_i$ allora se A è irriducibile → λ appartiene a tutti i cerchi di Gerschgorin e quindi a tutte le loro frontiere.

Dimostrazione (Successione termini massimi):

Come il primo otteniamo $\left|a_{k,k} - \lambda\right| = \sum_{j\neq k}\left|a_{k,j}\right|\left|\frac{x_j}{x_k}\right| = \sum_{j\neq k}\left|a_{k,j}\right|$ in quanto $\lambda \in \delta K_k$.

Di conseguenza se $a_{k,j} \neq 0 \to |x_k| = \left|x_j\right|$.

Siccome A è irriducibile → $\exists a_{k,k'} \neq 0 \to |x_k| = |x_{k'}|$.

Quindi possiamo scegliere come indice k' ed essendo A irriducibile possiamo trovare una successione che copre tutti gli indici.

Perciò ciascuna componente può essere presa come quella di modulo massimo → $\lambda \in \delta K_i$

CAPITOLO Norme (5):

Uniformemente continuità delle norme:

La funzione $x \to \|x\|$ è uniformemente continua.

Dimostrazione (Disuguaglianza triangolare):

Usiamo la disuguaglianza triangolare: $\|a\| \leq \|a-b\| + \|b\|$ da cui si ottiene:

$\|b\| - \|a\| \leq \|-(a-b)\| = |-1| \cdot \|a-b\| = \|a-b\|$

Quindi $|\|b\| - \|a\|| \leq \|a-b\| = \|\sum(a_i - b_i)e_i\| \leq \sum\|(a_i - b_i)e_i\| = \sum|a_i - b_i| \cdot \|e_i\|$

Quindi se $|a_i - b_i| \leq \delta \to |\|b\| - \|a\|| \leq \delta \sum\|e_i\|$

Ossia $\forall \varepsilon \; \exists \; \delta := \frac{\varepsilon}{\sum\|e_i\|}$.

Equivalenza delle norme vettoriali:

$\forall$ *coppia di norme su* $\mathbb{C}^n$ $\exists \alpha, \beta \mid \forall x \in \mathbb{C}^n$ *vale* $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$

Dimostrazione (Passando per norma infinito):

Per $x = 0$ la disuguaglianza vale.

Se si dimostra con $\| \; \|_2 = \| \; \|_\infty$ allora vale per qualsiasi coppia di norme, infatti se abbiamo:

$\begin{cases} \alpha_1\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \beta_1\|x\|_\infty \\ \alpha_2\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \beta_2\|x\|_\infty \end{cases} \to \frac{\alpha_1}{\beta_2}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{\beta_1}{\alpha_2}\|x\|_2$

L'insieme S_∞ è chiuso e limitato in $\mathbb{C}^n$ quindi la funzione $\| \; \|_1$ avrà un massimo β e un minimo α.

Allora $\alpha \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \leq \beta$ da cui la tesi.

Funzione Norme di matrici:

La funzione $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \mid A \to max_{x \in S}\|Ax\|$ *è una norma matriciale.*

Dimostrazione:

L'unica non banale è la submoltiplicatività:

Imponiamo $AB \neq 0$ e prendiamo un vettore $y \mid \|y\| = 1$; $\|AB\| = \max\{\|ABx\| : x \in S\} = \|ABy\|$

Detto $z := by \neq 0$ allora:

$\|ABy\| = \|Az\| = \frac{\|Az\|}{\|z\|}\|z\| = \frac{\|Az\|}{\|z\|}\|By\| = \left\|A\frac{z}{\|z\|}\right\| \|By\|$ e poiché $\frac{z}{\|z\|}$ e y hanno norma 1 vale:

$\max\|AB\| \leq \max\|A\| \max\|B\| = \|A\|\|B\|$

Raggio spettrale e norma:

$\forall \; A \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \| \; \|$ *norma di matrici indotta* $\mid \rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Dimostrazione:

Prima disuguaglianza:

Sia λ autovalore per A e x autovettore corrispondente (Normalizzato, $\|x\| = 1$)

$Ax = \lambda x \to \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda|$

Quindi $\forall$ autovalore $|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1}\|Ax\| = \|A\|$

Seconda parte:
Definiamo una norma vettoriale, S matrice non singolare allora $\|x\|_S := \|S^{-1}x\|_\infty$ è una norma.
La norma matriciale indotta è:
$\|A\|_S = \max_{\|y\|_S=1}\|Ay\|_S = \max_{\|S^{-1}x\|_\infty=1}\|S^{-1}Ax\|_\infty = \max_{\|y\|_\infty}\|S^{-1}ASy\|_\infty$
Quindi $A \to \|S^{-1}AS\|_\infty$ è una matrice indotta.
Terza parte:
Sia $J = T^{-1}AT$ la forma di Jordan di A ; $E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$

Coniugando otteniamo: $E^{-1}JE$ diagonale a blocchi del tipo $D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \varepsilon & \ddots & \\ & \ddots & & \\ & & & \varepsilon \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$

Passando alle norme: $\|E^{-1}JE\|_\infty = \|E^{-1}T^{-1}ATE\|_\infty = \|A\|_{TE}$ che è la massima somma sulle righe dei moduli degli elementi di J ossia:
$\max_{i,j}\left\|D_i^{(j)}\right\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$

Osservazione:
Il raggio spettrale è una norma nel caso in cui valga l'uguaglianza, ossia gli autovalori di modulo massimo compaiono in blocchi di dimensione 1.

Limite norma e raggio spettrale:
Vedere pagina 17 dispense.

<u>CAPITOLO Forma normale di Schur (1):</u>

Teorema Forma normale di Schur:
$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}\ \exists T$ *triangolare superiore e* $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *unitaria* | $QAQ^H = T$

Dimostrazione (Induzione su dimensione):
Induzione su dimensione di A.
Se $\boldsymbol{n = 1}$ vale $A = 1 \cdot A \cdot 1$
$(\boldsymbol{n-1}) \to \boldsymbol{n}$: Sia x autovettore normalizzato ($x^Hx = 1$; $Ax = \lambda x$).
Sia $S = \langle x \rangle$ e $(y_2, \dots, y_n)$ base ortonormale di S^T.
Sia $U = (x, y_2, \dots, y_b)$, osserviamo che $U^HAUe_1 = U^HAx = U^H\lambda x = \lambda U^Hx = \lambda e_1$
Perciò $U^HAU = \begin{pmatrix} \lambda & b^H \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$ con $b \in \mathbb{C}^{n-1}$; per HP induttiva $\exists Q_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}$ |
$A = UQ_n \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} Q_n^H U^H$

CAPITOLO Metodi diretti per sistemi lineari (3):

Condizionamento:

Consideriamo una perturbazione del vettore dei termini noti $b \to b + \delta_b$
Vogliamo studiare quanto debba essere perturbato il vettore iniziale per rendere vera l'uguaglianza: $A(x + \delta_x) = b + \delta_b$
$A\delta_x = \delta_b \to \delta_x = A^{-1}\delta_b$ scelta una norma vale $\|\delta_x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta_b\|$

Siccome vogliamo studiare l'errore relativo $\left(\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|}\right)$ sfruttiamo la seconda disuguaglianza:
$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$
Allora: $\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta_b\|}{\|A\|^{-1}\|b\|} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}$
Il valore $\mu(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ è detto numero di condizionamento.

Teorema di esistenza e unicità della fattorizzazione LU:

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la fattorizzazione LU $\exists!$ se tutti i minori principali sono invertibili.

Dimostrazione (Induzione su dimensione/Assurdo):

$\leftarrow$
Se $n = 1$ nulla da dimostrare.
Se valido $\forall\, m < n$ allora mi basta mostrare che posso smontare A nella forma:
$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ a^T & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ a^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{n-1} & u \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Perché esista la condizione è: $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ vera per induzione e
$b = L_{n-1}u$; $a^T = v^T U_{n-1}$; $a_{n,n} = v^T u + k$
Poiché A_{n-1} è invertibile per ipotesi allora per il T. di Binet lo sono anche L_{n-1} e U_{n-1}.
Quindi u ; v si ricavano dai due sistemi $\begin{cases} u = L_{n-1}^{-1}b \\ v^T = U_{n-1}^{-1}a^T \end{cases}$ di dimensione $n - 1$ non singolari.
Ricavati u ; v allora $k = a_{n,n} - v^T u$.
$\rightarrow$
Supponiamo per assurdo che $\exists\, k \leq n - 1 \mid \det A_k = 0$ se la fattorizzazione LU $\nexists$ la dimostrazione è finita, se esiste non è unica, infatti:
$$A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ V & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_k & T \\ 0 & W \end{pmatrix}$$
Considerando $A_k = L_k U_k \to \det A_k = 0 = \det L_k \det U_k$ e siccome $\det L_k = 1 \to \det U_k = 0$
Ma allora $C = VU_k \to$ le soluzione di V non sono uniche.

Matrici elementari

Matrice della forma: $E \coloneqq I - \sigma uv^H$

Osservazioni:

Il rango della matrice uv^H è 1
Se $x \in v^\perp \to Ex = x - \sigma uv^H(x) = x$ ossia x è autovettore relativo ad 1 ($n - 1$ indipendenti).
Se $u \notin v^\perp$ allora $Eu = u - \sigma uv^H u = u(1 - \sigma v^H u)$ da cui $(1 - \sigma v^H u)$ autovalore con autovettore u e E invertibile se $\sigma v^H u \neq 1$.
Se vale $u \in v^\perp$ allora l'autovalore 1 ha $\mu_a(1) = n$; $\mu_g(1) = n - 1$

CAPITOLO Metodi iterativi per sistemi lineari (5):

Proposizione (Condizione sufficiente di convergenza):

Data P matrice di iterazione, se $\exists \| \ \|$ norma matriciale indotta | $\|P\| < 1$ allora la successione converge.

Dimostrazione:

Data $\| \ \|$ norma indotta | $\|P\| < 1$, se il limite $\exists$ sappiamo che è soluzione del sistema e che:
$x_{k+1} = Px_k + b$; $x_{sol} = Px_{sol} + b$ sottraendoli l'uno all'altro otteniamo:
$x_{k+1} - x_{sol} = P(x_k - x_{sol}) \to e_{k+1} = Pe_k \to e_k = P^k e_0$
Passando alle norme vale:
$\|e_k\| \leq \|P\|^k \|e_0\|$ siccome $\|P\| < 1 \to$ per il T. dei carabinieri $\|e_k\| \to 0$.

Proposizione (Condizione necessaria e sufficiente di convergenza):

La successione converge $\leftrightarrow \rho(P) < 1$

Dimostrazione:

$\leftarrow$
$\rho(P) < 1 \to \exists\ \varepsilon \mid \rho(P) + \varepsilon < 1 \to\ \exists \| \ \|$ indotta | $\rho(P) < \|P\| < \rho(P) + \varepsilon$
Quindi $\|P\| < 1 \to$ Proposizione di prima.
$\to$
Se la successione converge x_0 allora lo scelgo affinché e_0 sia autovettore per P, ossia:
$Pe_0 = \lambda e_0 \to e_k = P^k e_0 = \lambda^k e_0$, per ipotesi $e_k \to 0$ quindi $|\lambda|^k \to 0$ cioè $|\lambda| < 1$ $\forall$ autovalore.

Condizioni di arresto all'iterazione:

Le condizioni intuitive di arresto sono $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$ e $\|b - Ax_k\| \leq \varepsilon$ e vogliamo che queste condizioni implichino $\|x_k - x_{sol}\| \leq \delta$ dipendente da ε.

Valutazione del passo:
$x_k - x_{k-1} = (x_k - x_{sol}) - (x_{k-1} - x_{sol}) = P(x_{k-1} - x_{sol}) - (x_{k-1} - x_{sol}) =$
$= (\mathrm{Id} - P)(x_{sol} - x_{k-1})$
Quindi $(x_{sol} - x_{k-1}) = (\mathrm{Id} - P)^{-1}(x_k - x_{k-1})$ invertibile perché $\rho(P) < 1$
Passando alle norme:
$\|x_{sol} - x_{k-1}\| = \|(\mathrm{Id} - P)^{-1}\|\varepsilon \leq (1 - \|P\|)^{-1}\varepsilon$

Se $\|P\|$ si avvicina ad uno la costante di amplificazione diventa molto alta.

Valutazione del residuo:

Il residuo è $r_k := b - Ax_k$ quindi:
$A^{-1}r_k = A^{-1}b - x_k = x_{sol} - x_k$ perciò:
$\|x_{sol} - x_k\| = \|A^{-1}r_k\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r_k\| \leq \varepsilon \|A^{-1}\|$
Ricavare $\|A^{-1}\|$ sarebbe troppo pesante quindi maggioriamo con:
$\|x_{sol} - x_k\| \leq \varepsilon \frac{\mu(A)}{\|A\|}$
Con errore relativo: $\frac{\|x_{sol} - x_k\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \frac{\mu(A)}{\|b\|}$

Teoremi di convergenza sui metodi di Jacobi e Gauss-Seidel:

Se A soddisfa una delle seguenti condizioni allora $\rho(J) < 1$; $\rho(G) < 1$:

1. *A è fortemente dominante diagonale.*
2. *A^T è fortemente dominante diagonale.*
3. *A è irriducibilmente dominante diagonale*
4. *A^T è irriducibilmente dominante diagonale*

Dimostrazione (Passare dal determinante e moltiplicare per $\boldsymbol{D}$):

$(\boldsymbol{J})$

Studiamo $\det(J - \lambda \mathrm{Id}) = \det(D^{-1}(B + C) - \lambda \mathrm{Id})$; moltiplichiamo per D, quindi $\det(B + C - \lambda D)$ con $(B + C - \lambda D)$ la matrice che (A meno del segno) ha giusto la diagonale moltiplicata per λ.
Se fosse per assurdo $|\lambda| \geq 1$ allora anche questa matrice è dominante diagonale (O irr. Dominante diagonale), quindi non singolare, perciò λ non può essere un autovalore.

$(\boldsymbol{G})$

Studiamo $\det(G - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \to \det\big(C - \lambda(D - B)\big) = 0$
La matrice così ottenuta ha parte triangolare inferiore moltiplicata per λ, pertanto se A è dominante diagonale (O irr. Dominante diagonale) lo è anche $C - \lambda(D - B)$.

Proposizione:

Se la matrice A è tridiagonale con elementi sulla diagonale diversi da 0 allora $\rho(G) = \rho(J)^2$

Dimostrazione:

Vogliamo mostrare ch λ è autovalore di $J \leftrightarrow \mu = \lambda^2$ è autovalore di G.
Dati λ , μ autovalori di J , G allora $\det(J - \lambda \mathrm{Id}) = 0$; $\det(G - \mu \mathrm{Id}) = 0$, per definizione di G possiamo scrivere:

$$\det((D - B)^{-1}C - \mu \mathrm{Id}) = \det(C - \mu D + \mu B) = 0$$

Consideriamo $D_\alpha \coloneqq \mathrm{Diag}(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ con $\alpha \neq 0$, coniugando il risultato di prima otteniamo:

$$\det(D_\alpha(C - \mu D + \mu B)D_\alpha^{-1}) = 0$$

Vale: $D_\alpha C D_\alpha^{-1} = \alpha^{-1}C$; $D_\alpha(\mu D)D_\alpha^{-1} = -\mu D$; $D_\alpha(\mu B)D_\alpha^{-1} = \mu\alpha B$
Moltiplicando per α otteniamo $\det(C - \mu\alpha D + \mu\alpha^2 B) = 0$ confrontandola con $\det(J - \lambda \mathrm{Id}) = \det(D^{-1}(B + C) - \lambda \mathrm{Id}) = \det(C - \lambda D + B) = 0$ otteniamo:

λ autovalore per J ; $\alpha = \frac{1}{\lambda}$; $\mu = \lambda^2$ otteniamo che μ lo è per G.

μ autovalore per G ; $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$; $\lambda = \sqrt{\mu}$ otteniamo che λ lo è per J.

CAPITOLO Zeri di funzione e problemi di punto fisso (5):

Teorema (Condizione sufficiente di convergenza):

Sia $f \in C^1(I)$, $\alpha \in I \mid f(\alpha) = \alpha$; $I = [\alpha - p, \alpha + p]$; $p > 0 \mid |f'(x)| < 1\ \forall\ x \in I$; *allora* $\forall\ x_0 \in I$ *vale* $x_k \in I$; $lim_k\, x_k = \alpha$

Dimostrazione:

Poiché $f \in C^1(I)$ per il T. di Weierstrass $|f'|$ ammette massimo e minimo.
Sia $\lambda = \max\{|f'(x)| \mid x \in I\} < 1$, vogliamo mostrare che $|x_i - \alpha| \leq \lambda^i p$ per induzione su i:
$i = 0$ allora vale per ipotesi.
Se vale $\forall$ indice minore di i allora per il T. del valor medio $\exists\ \xi_i$ compreso fra x_i e α |
$x_{i+1} - \alpha = f(x_i) - f(\alpha) = f'(\xi_i)(x_i - \alpha)$ e passando ai moduli:
$|x_{i+1} - \alpha| = |f'(\xi_i)||x_i - \alpha| \leq \lambda \cdot \lambda^i p$

Teorema (Unicità punto fisso):

Sia $f \in C^1([a,b])$ *con* $|g'(x)| < 1\ \forall x \in [a,b]$ *allora esiste al più un* $\alpha \in [a,b] \mid f(\alpha) = \alpha$

Dimostrazione (Per assurdo):

Se per assurdo $\exists\ \beta \in [a,b] \mid f(\beta) = \beta \to \alpha - \beta = f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta) \to f'(\xi) = 1$

Teorema (Versione floating point):

Sia α *punto fisso di* $f \in C'(I)$, $\lambda \coloneqq max\{|f'(x)| \mid x \in I\} < 1$ *e* $\sigma \coloneqq \frac{\delta}{1-\lambda}$;
Se $\sigma < \lambda$ *e* $|x_0 - \alpha| \leq p$ *allora* $|\overline{x_i} - \alpha| \leq \sigma + \lambda^i(p - \sigma)$

Dimostrazione:

Per induzione, se $i = 0, \overline{x_0} = x_0$ allora $|\overline{x_0} - \alpha| \leq p$
Se vale $\forall$ valore minore di i allora $|\bar{x}_{i+1} - \alpha| = |f'(\xi_i)| \cdot |\bar{x}_i - \alpha| + \delta \leq$
$\leq \lambda\left(\sigma + \lambda^i(p - \sigma)\right) + (1 - \lambda)p = \sigma + \lambda^{i+1}(p - \sigma)$

Teorema (Velocità di convergenza):

Sia $g \in C^p([a,b])$, $g^{(1)}(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$; $g^{(p)} \neq 0$ *allora* $\exists\ I \coloneqq [\alpha - s, \alpha + s]$ | *se* $x_0 \in I \to$ *la successione converge in modo superlineare ad* α *con ordine* p.
Viceversa se $g \in C^p([a,b])$; $\alpha = g(\alpha)$ *ed* $\exists x_0 \in [a,b]$ | *la successione converge ad* α *con ordine* p *allora* $g^{(1)}(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$; $g^{(p)} \neq 0$

Dimostrazione:

$\to$
Se $g'(\alpha) = 0$ allora $\exists I$ centrato in α in cui la derivata ha modulo minore di 1.
Per definizione la convergenza in questo intervallo è superlineare.
Sviluppiamo Taylor: $g(x_k) = g(\alpha) + (Termini\ eliminati\ essendo\ le\ derivate) + \frac{(x_k-\alpha)^p g^{(p)}(\xi_k)}{p!}$
Da cui $\lim \left|\frac{g(x_k)-\alpha}{(x_k-\alpha)^p}\right| = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} \in (0, +\infty)$

$\leftarrow$

Abbiamo $1 \leq r < p$ e vogliamo mostrare che $g^{(r)}(\alpha) = 0$

Per definizione di ordine di convergenza $\lim \left|\frac{g(x_k)-g(\alpha)}{(x_k-\alpha)^r}\right| = 0$

Dimostriamolo per induzione su r:

$0 = \lim \left|\frac{g(x_k)-g(\alpha)}{x_k-\alpha}\right| = \lim \left|\frac{x_k-\alpha}{x_k-\alpha} g'(\xi_k)\right| = \lim|g'(\xi_k)| = |g'(\alpha)|$

Supponendo $g^{(1)}(\alpha) = \cdots = g^{(r-1)}(\alpha) = 0$ vale:

$g(x_k) - g(\alpha) = \frac{(x_k-\alpha)g'(\alpha)}{1} + \cdots + \frac{(x_k-\alpha)^{r-1}g^{(r-1)}(\alpha)}{(r-1)!} + \frac{(x_k-\alpha)^r g^{(r)}(\xi_k)}{r!} = \frac{(x_k-\alpha)^r g^{(r)}(\xi_k)}{r!}$

Quindi: $0 = \lim \left|\frac{g(x_k)-\alpha}{(x_k-\alpha)^r}\right| = \lim \frac{|g^{(r)}(\xi_k)|}{r!} = \frac{|g^{(r)}(\alpha)|}{r!}$

Proposizione (Convergenza metodo di Newton):

Sia $f \in C^2([a,b])$ con $f(\alpha) = 0$ e $\alpha \in [a,b]$. Se $f'(\alpha) \neq 0$ allora $\exists\, I \coloneqq [\alpha - p, \alpha + p] \mid \forall x_0 \in I$ la successione generata dal metodo di Newton converge ad α con ordine almeno 2 (Esattamente 2 se $f''(\alpha) \neq 0$)

Dimostrazione:

Sia $g(x) \coloneqq x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; poiché $f(\alpha) = 0$ allora $\exists\, I \coloneqq [\alpha - p, \alpha + p] \mid |g'(x)| < 1$

Sono soddisfatte le ipotesi del teorema del punto fisso quindi la successione converge ad α.

Per determinare l'ordine:

$\lim \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)} = \lim \frac{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha}{(x_k-\alpha)^2}$

Sviluppiamo con Taylor f in un intorno di x_k.

$0 = f(\alpha) = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{(\alpha-x_k)^2 f''(\xi)}{2} \rightarrow -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = (\alpha - x_k) + \frac{(\alpha-x_k)^2}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}$

Sostituendo otteniamo:

$$\lim \frac{\frac{(\alpha-x_k)^2}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}}{(x_k-\alpha)^2} = \lim \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

<u>CAPITOLO Interpolazione (4):</u>

Determinante di Vandermonde:

Sia $V_n \coloneqq (v_{i,j}) \mid v_{i,j} = (x_i^j)$; $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$ allora $\det V_n = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$

Dimostrazione (Induzione su *n*):

$\boldsymbol{n = 1}$ è $x_1 - x_0$ per verifica diretta

$\boldsymbol{n - 1 \rightarrow n}$ Data la matrice V_{n-1} consideriamo $V_n(x_n)$ uguale a V_n con ultima riga $(1, x_n, x_n^2 \dots, x_n^n)$

Sviluppando $\det V_n(x_n)$ rispetto all'ultima riga ed in funzione di x_n otteniamo un polinomio di grado n con coefficiente principale pari a $\det V_{n-1}$.

Raccogliamo $\det V_{n-1}$ e fattorizziamo ottenendo $\det V_n(x_n) = \det V_{n-1}\,(x_n - \varepsilon_1) \dots (x_n - \varepsilon_n)$

Siccome gli 0 di $\det V_n$ comprendono $(x_0, \dots, x_{n-1})$ sono esattamente questi.
Quindi $\det V_n(x_n) = \det V_{n-1}(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) = \det V_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$.

Resto dell'interpolazione:

Per stimare il livello di approssimazione consideriamo $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

Proposizione:

Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$ *allora dato* $x \in [a,b]$ $\exists\, \xi \in [a,b] \mid r_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Dimostrazione:

Supponiamo $x \neq x_i$, consideriamo $g(y) = r_n(y) - r_n(x) \frac{\prod(y-x_i)}{\prod(x-x_i)}$ di classe C^{n+1}

g si annulla su tutti gli x e gli x_i, $n+2$ punti in totale, dunque per il T. di Rolle g' si annulla in almeno $n+1$ punti, g'' su n, etc. $g^{(n+1)}$ in almeno un punto.

$g^{(n+1)}(y) = \left[f^{(n+1)}(y) - 0\right] - \frac{(n+1)!\, r_n(x)}{\prod(x-x_i)}$

Imponendo l'annullamento su ξ abbiamo la tesi.

DFT:

Proposizione:

Se ε_n *è una radice dell'unità, allora vale:* $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^{ij} = \begin{cases} n \; per \; i \equiv 0 \; (n) \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$

Dimostrazione:

Se $i \equiv 0\ (n) \rightarrow \left(\varepsilon_n^i\right)^j = 1\ \forall\, j$ ovvero $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^{ij} = n$

Altrimenti consideriamo $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^{n-1})$; ε_n lo annulla ma $\varepsilon_n^i - 1 \neq 0$

Quindi deve essere $1 + \varepsilon_n^i + \varepsilon_n^{2i} + \dots + \varepsilon_n^{(n-1)i} = 0$ che dimostra la tesi.

Proposizione:

Sia F *la matrice di Vandermonde associata ai nodi* ε_n^j *con* $0 \leq j < n$*, allora:*

1. $F = F^T$

2. $F^H F = n \cdot Id$

3. $F^2 = n \prod$ *con* $\prod = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \therefore & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Dimostrazione:

1. L'elemento (i,j) è $F(i,j) = \varepsilon_n^{ij} = \varepsilon_n^{ji} = F(j,i)$

2. $F^H F(i,j) = \sum_{r=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}_n^{ir} \varepsilon_n^{jr} = \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_n^{-ir} \varepsilon_n^{jr} = \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_n^{r(j-1)}$

E vale per il risultato di prima: $F^H F(i,j) = \begin{cases} n \text{ per } i = j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

3. $F^2(i,j) = \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_n^{ir} \varepsilon_n^{rj} = \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_n^{r(i+j)}$