Analisi a più variabili:

Integrazione sulle curve e superfici, forme differenziali

Definizione (Parametrizzazione di T):
$T \subseteq \mathbb{R}^n$, una sua parametrizzazione è una coppia (φ, Δ) con $\Delta = (a, b)$ intervallo di $\mathbb{R}$ e $\varphi: \Delta \to \mathbb{R}^n$ continua $\mid \varphi(\Delta) = T$
Possiamo indicarla con la notazione $\gamma(\varphi, \Delta, T)$

Definizione (Parametrizzazione di classe C^k):
$\gamma \in C^k \leftrightarrow \varphi \in C^k(\Delta)$
Se Δ è chiuso allora $\gamma \in C^k(\Delta) \leftrightarrow$ esiste un intervallo aperto $I \supseteq \Delta \mid \gamma(\tilde{\varphi}, I, T) \in C^k$

Definizione (Parametrizzazione regolare):
$\gamma(\varphi, \Delta, T) \in C^1$ è detta regolare se $\varphi'(t) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ $\forall\, t \in \Delta$

Se φ è C^1 a tratti (Ma globalmente C^0) deve essere regolare su ogni tratto di una partizione.

Definizione (Parametrizzazione semplice):
Una parametrizzazione $\gamma(\varphi, \Delta, T)$ è semplice se $\varphi: \Delta \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva.

Osservazione:
Se Δ è chiusa dobbiamo dimostrare che valgono le proprietà per un $I \supseteq \Delta$ aperto e $\tilde{\varphi}$ estensione.

Definizione (Parametrizzazioni equivalenti):
Date due parametrizzazioni:
$\gamma_0(\varphi_0, \Delta_0, T)$
$\gamma_1(\varphi_1, \Delta_1, T)$
Tali che $\mathrm{Imm}(\varphi_0) = \mathrm{Imm}(\varphi_1)$, allora:
φ è equivalente a $\varphi' \leftrightarrow \exists X: \Delta_0 \to \Delta_1$ diffeomorfismo, di classe C^1 e invertibile, con $X'(t) \neq 0$ $\forall t \in \Delta_0$ tale che $\varphi_0(t) = \varphi_1\big(X(t)\big)$

Definizione (Curva orientata):
Fissata l'immagine T di una parametrizzazione è la classe di equivalenza delle parametrizzazioni su quell'immagine.
La notazione per indicare una curva è mediante una qualsiasi delle sue parametrizzazioni φ equivalenti.

Definizione (Orientamento):
Se due parametrizzazioni sono equivalenti e X' è positiva si dice che l'orientamento è coincidente.
Se due parametrizzazioni sono equivalenti e X' è negativa si dice che l'orientamento è opposto.
Quindi abbiamo due classi di equivalenza distinte.

Curva regolare e curva semplice seguono dalla definizione di parametrizzazione regolare e semplice.

Lemma di equivalenza (ND pagina 7):
Dati due intervalli chiusi Δ_0 ; Δ_1, se:
$\varphi_0 : \Delta_0 \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^n$ regolare e semplice e $\varphi_1 : \Delta_1 \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^n$ funzione di classe C^1 allora sono equivalenti:

$\varphi_1^{'}(s) \neq 0 \ \forall \ s \in \Delta_1$
$\gamma_0(\varphi_0, \Delta_0, T) \sim \gamma_1(\varphi_1, \Delta_1, T)$

Lemma (ND pagina 8):
$(\varphi, [a,b], T) \sim (\varphi_0, [0,1], T)$
Inoltre le due parametrizzazioni della curva hanno la stessa orientazione.

Somma fra due cammini (Curve orientate):
Date due curve C_1 ; C_2 con estremi coincidenti la somma è la curva riparametrizzata dal primo punto della prima al secondo della seconda. Si indica con $C_1 + C_2$

Osservazione:
Data una curva C si può trovare sempre un'altra curva che sommata alla prima dia una curva chiusa, si indica con $-C$

Curve rettificabili:
Data una partizione dell'intervallo possiamo definire la lunghezza di un elemento della partizione e dunque la lunghezza della poligonale è:
$\sum_{i=1}^{n} \|\varphi(t_i), \varphi(t_{i-1})\|$

Definiamo perciò la lunghezza della curva come:
$L(\varphi) = \sup_{\text{Partizioni}} \ \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(t_i), \varphi(t_{i-1})\|$

Se questo valore è finito diciamo che la curva è rettificabile.

Osservazione:
La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione
La lunghezza non dipende dall'orientazione
$L(C_1 + C_2) = L(C_1) + L(C_2)$
Formula pratica per curve C^1 $\int_a^b \|\varphi^{'}(t)\| dt$

<u>Integrale curvilineo di 1_a specie (Integrale di linea):</u>

$\Upsilon = \{\varphi : [a, b] = \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ Curva ; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\varphi \in C^1$, l'integrale curvilineo di prima specie è definito come:

$$\int_{\Upsilon} f := \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt$$

Proprietà:

$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in C^1$ con $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(a_2) \rightarrow \int_{\Upsilon_1+\Upsilon_2} f = \int_{\Upsilon_1} f + \int_{\Upsilon_2} f$

$\Upsilon \in C^1 \rightarrow \int_{-\Upsilon} f = \int_{\Upsilon} f$

Osservazione:

L'integrale di 1_a specie non dipende dall'orientazione.

<u>Integrale curvilineo di 2_a specie:</u>

$\Upsilon = \{\varphi : [a, b] = \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n\}$; $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\varphi \in C^1$, l'integrale curvilineo di seconda specie è definito come:

$$\int_{\Upsilon} F := \int_{\Upsilon} F(t) \cdot dt = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt$$

Proprietà:

$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in C^1$ con $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(a_2) \rightarrow \int_{\Upsilon_1+\Upsilon_2} F = \int_{\Upsilon_1} F + \int_{\Upsilon_2} F$

$\Upsilon \in C^1 \rightarrow \int_{-\Upsilon} F = -\int_{\Upsilon} F$

Osservazione:

Dipende dall'orientazione.

Forme differenziali:

Dato lo spazio $\mathbb{R}^n$ dotato della base canonica $(e_1, \dots, e_n)$, definiamo il funzionale:

$$dx_j := e_j^* \text{ con } dx_j(e_i) = \delta_{ji}$$

Questi formano una base dello spazio duale, generano dunque tutti i funzionali.

Definizione (Forma differenziali di grado 1):

E' una applicazione $x \to \omega(x)$ definita su di un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori nel duale $(\mathbb{R}^n)^*$

$\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare, ω è una forma differenziali di grado 1 in $\mathbb{R}^n$ ha una rappresentazione locale:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x) dx_j \text{ con } \omega_j(x) \in C(u_{aperto})$$

Integrale di una forma differenziale:

$\Upsilon = \{\varphi: [a, b] = \Delta \to \mathbb{R}^n\}$; $\varphi \in C^1$, l'integrale curvilineo è definito come:

$$\int_\Upsilon \omega := \sum_{j=1}^{n} \int_\Upsilon \omega_j \, dx_j = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \omega_j\big(\varphi(t)\big)\varphi_j'(t)dt$$

Proprietà:

$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in C^1$ con $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(a_2) \to \int_{\Upsilon_1+\Upsilon_2} \omega = \int_{\Upsilon_1} \omega + \int_{\Upsilon_2} \omega$

$\Upsilon \in C^1 \to \int_{-\Upsilon} \omega = -\int_\Upsilon \omega$

Osservazione:

Dipende dall'orientazione.

Definizione (Forma esatta):

Se $\exists\, F \mid \omega = \nabla F$ (Equivalente $\omega_j = \partial_j F$) la forma si dice esatta.

Proprietà (D1 $3 \to 1$ Lemma di Poincarè ; $1 \to 2$; 4.22):

Se ω è una 1-forma di classe C^n sono equivalenti:

1) ω è esatta.
2) $\forall$ curva chiusa Υ di classe C^1 (o C^1 a tratti) vale $\oint_\Upsilon \omega$
3) $\forall\, \Upsilon_1, \Upsilon_2$ con $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$; $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ risulta:

   $\int_{\Upsilon_1} \omega = \int_{\Upsilon_2} \omega$ (Il cammino dipende solo dagli estremi)

Definizione (Forma chiusa):

Sia $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x) dx_j \in C^1$ in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$

ω è una forma chiusa se $\partial x_k \omega_j(x) = \partial x_j \omega_k(x)$

Osservazioni:

Forma esatta $\to$ Forma chiusa

Una forma chiusa su di un semplicemente connesso è esatta.

Integrale di funzioni complesse:

Data una funzione $f: U \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa se è differenziabile in senso complesso in ogni punto z_0 di un aperto U di $\mathbb{C}$.

$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfa allora (Equazioni di Cauchy Riemann):

∃ le derivate parziali.

Vale $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Esempi:

$f(z) = \cos z$

$f(z) = \sin z$

$f(z) = \mathrm{pol}(z)$

$f(z) = e^z$

Composizione di olomorfe è olomorfa.

Integrale di superficie:

Definizione (Superficie):
E' uno spazio T2 $\sum$ tale che $\forall x_0 \in \sum$ esiste $V \subseteq \sum$ aperto tale che $x_0 \in V$ ed esiste un omeomorfismo $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V$; $\varphi^{-1}: V \to U$

Definizione (Carta locale o parametrizzazione di $\sum$):
E' una coppia (φ, U) con $\varphi: U \to \sum$ continua.
La notazione con cui si indica è $\sigma(\varphi, U)$

Definizione (Parametrizzazione di classe C^k):
Se $\varphi \in C^k(U)$

Definizione (Parametrizzazione regolare di $\sum \subseteq \mathbb{R}^3$):
Se è di classe C^1 e $\varphi'(u)$ ha rango 2 per ogni $u \in U$

Definizione (Parametrizzazioni equivalenti):
$\sigma_0(\varphi_0, U_0)$ e $\sigma_1(\varphi_1, U_1)$ sono equivalenti $\sigma_0 \sim \sigma_1$ se esiste un diffeomorfismo:
$X: \varphi_0^{-1}(V_{01}) \to \varphi_1^{-1}(V_{01})$
Con $V_{01} = \varphi_0(U_0) \cap \varphi_1(U_1) \neq \emptyset$
Se rispettano:

$\varphi_0(u) = \varphi_1\big(X(u)\big)$; $\forall\, u \in \varphi_0^{-1}(V_{01})$
$\det\big(X'(u)\big) \neq 0$; $\forall\, u \in \varphi_0^{-1}(V_{01})$

Definizione (Orientazione):
Se il Jacobiano è positivo hanno la stessa orientazione.
Se il Jacobiano è negativo hanno orientazione opposta.

Definizione (Superficie regolare):
Sia $\sum \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$; $n \geq 3$ ed $F = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \sum \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$ una famiglia di parametrizzazioni (Atlante) tali che:
1) U_k, W_k sono aperti $\varphi_k: U_k \to W_k \cap \sum$ è una funzione $C^1(U_k)$ tale che $\varphi_k'(u)$ ha rango 2 per ogni $u \in U_k$
2) $W_k \supseteq B(x_k, r_k)$ dove $B(x_k, r_k) = \{x \in \mathbb{R}^n$; $\|x - x_k\| < r_k\}$ e $\sum \subseteq \bigcup_k B(x_k, r_k)$ cioè sono un ricoprimento di $\sum$
3) U_k sono intervalli aperti in $\mathbb{R}^2$
4) $\forall\, i \neq j$ tale che $\sum \cap W_k \cap W_j \neq \emptyset$ esiste un diffeomorfismo:
$X_{jk}: \varphi_j^{-1}\big(\sum \cap W_k \cap W_j\big) \to \varphi_k^{-1}\big(\sum \cap W_k \cap W_j\big)$ tale che:
$\varphi_j\big(u^{(j)}\big) = \varphi_k\left(X_{jk}\big(u^{(j)}\big)\right)$; $\forall\, u^{(j)} \in \varphi_j^{-1}\big(W_j \cap W_k\big)$
Allora $(\sum, F)$ si chiama superficie regolare.

Osservazione:
Se $\sum$ è compatto allora l'atlante può essere scelto finito.

Aggiungere due parole pagina 64, partizione dell'unità e superfici orientabili, superfici con bordo, superfici con bordo orientabili

Integrale di superficie di 1_a specie:

Date:
Una superficie $\sum$ con parametrizzazione $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$
Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_\Sigma f ds = \iint_U f\big(\varphi(u,v)\big) \|\partial_u \varphi(u,v) \times \partial_v \varphi(u,v)\| dudv$$

Osservazioni:
La seconda parte è l'area, infatti:

$$\text{Area}(U) = \iint_U dS = \iint_U \|\partial_u \varphi(u,v) \times \partial_v \varphi(u,v)\| dudv$$

Non dipende dall'orientazione.

Osservazione (Prodotto vettore):

$$a \times b = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Lemma (ND ; 3.76):
Date due parametrizzazioni $\sum_1(\varphi, U)$ e $\sum_2(\vartheta, V)$ equivalenti e tali che $\varphi(U) = \vartheta(V)$allora esiste un diffeomorfismo $X: U \to V$ con $\det X^{'}(u) \neq 0$, $u \in U$; $\varphi(u) = \vartheta\big(X(u)\big)$
Inoltre se f è una funzione continua allora $\int_{\Sigma_1} fdS = \int_{\Sigma_2} fdS$

Osservazione:
L'integrale di superficie di 1_a specie non dipende dalla parametrizzazione e dall'orientazione.

Forme differenziali di grado 2 nello spazio euclideo:

Definizione (Forme bilineari):
E' una mappa $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che sia lineare su entrambe le componenti.

Definizione (Forme antisimmetriche):
$\phi(v, w) = -\phi(w, v)$

Indichiamo con $A^2(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle forme bilineari antisimmetriche di $\mathbb{R}^n$
Ogni forma bilineare antisimmetrica può essere rappresentata come:
$\phi(u, v) = \langle u, Av \rangle$; $A^t = -A$

Lemma (ND ; 4.79):
Una forma è antisimmetrica se e solo se $\phi(v, v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

Lemma (ND):
Se ϕ è una forma bilineare antisimmetrica, v_1, v_2 due vettori in $\mathbb{R}^n$ allora abbiamo la relazione:
$\sum_{k_1,k_2=1}^{2} b_{k_1,k_2} \phi\left(v_{k_1}, v_{k_2}\right) = \det B \, \phi(v_1, v_2)$
Per ogni matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Osservazione (Scomposizione):
Ogni matrice antisimmetrica si scrive come:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque ammette una scomposizione della forma:

$$A = a_{12}J_{12} + a_{13}J_{13} + a_{23}J_{23}$$

Con:

$$J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; J_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione ($dx_1 \wedge dx_2$):
Sia $dx_1 \wedge dx_2 \in A^2(\mathbb{R}^3)$ la forma bilineare antisimmetrica che corrisponde a J_{12}.
Se e_1, e_2, e_3 è una base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$; $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$ sono due vettori allora:
$dx_1 \wedge dx_2(v, w) = \langle v, J_{12}w \rangle$

Definizione ($dx_{k_1} \wedge dx_{k_2}$):
Questa base delle forme bilineari antisimmetriche in $\mathbb{R}^n$ è definita come:
$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \in A^2(\mathbb{R}^n)$; $n \geq 3$ con:

$$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2}\left(e_{j_1}, e_{j_2}\right) = \begin{cases} 0 \; se \; \{j_1, j_2\} \neq \{k_1, k_2\} \\ 1 \; se \; j_1 = k_1 \; ; j_2 = k_2 \\ -1 \; se \; j_1 = k_2 \; ; j_2 = k_1 \end{cases}$$

Osservazioni:
$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} = -dx_{k_2} \wedge dx_{k_1}$
$dx_k \wedge dx_k = 0$
Ogni forma bilineare si può scrivere come:
$\phi = \sum dx_k \wedge dx_j$

Definizione (2-forma):
Una 2-forma è un'applicazione $x \to a(x)$ definita su di un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ che ad ogni $x \in U$ associa una forma bilineare antisimmetrica $a(x) = \sum a_{jk} \, dx_j \wedge dx_k$

Osservazione (Differenziale di una 1-forma):
Data la 1-forma $\omega = \sum \omega_j(x) dx_j$
Siccome $d\omega := \sum d\omega_j(x) \wedge dx_j$ e $d\omega_j = \sum \partial_{x_k} \omega_j(x) dx_k$ otteniamo:
$d\omega = \sum \left(\partial_{x_k} \omega_j(x) - \partial_{x_j} \omega_k(x)\right) dx_k \wedge dx_j$

Osservazione (Forma esatta):
La 2-forma a si dice esatta se esiste una 1-forma ω tale che $a = d\omega$

Pull Back delle forme differenziali:
ROBA ROVA ROBA

Lemma (ND ; 4.84):

Lemma (ND ; 4.85):

Lemma (ND ; 4.86):

Integrali delle forme differenziali di grado 2 sulle superfici:
ROBA

Definizione (Integrale di superficie di ω):

Osservazione:
ROBA
Dipende dall'orientazione.
MANCA UN MUCCHIO DI ROBA

<u>Formula di Stokes - Green:</u>

Lemma (D ; 4.93):
Se il punto $x \in \sum^{\circ}$, W intorno di x con parametrizzazione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \cap \sum$ ed a una forma con coefficienti con supporto in W allora:
$\int_{\sum \cap W} da = 0$

Lemma (D ; 4.94):
Se il punto $x \in \partial \sum$, W intorno di x con parametrizzazione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \cap \sum$ ed a una forma con coefficienti con supporto in W allora:
$\int_{\sum \cap W} da = \int_{\partial W} a$

Formula di Stokes - Green (D ; 4.96):
Se $\sum = \sum^{\circ} \cup \partial \sum \subseteq \mathbb{R}^n$; $n \geq 3$ è una superficie regolare orientabile con bordo $\partial \sum$ e $a(x)$ è una 1-forma allora:
$\int_{\sum} da = \int_{\partial \sum} a$

Formula di Stokes - Gauss in $\mathbb{R}^3$:

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso e limitato con frontiera regolare di classe C^1 tale che $\partial U = \sum_1 \ \cup \ldots \cup \sum_n$ unione disgiunta di superfici regolari e connesse.

Data una 2-forma $\omega = \omega_1(x)dx_2 \Lambda dx_3 - \omega_2(x)dx_1 \Lambda dx_3 + \omega_3(x)dx_1 \Lambda dx_2$ sappiamo che il differenziale di ω è:

$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} \omega_j(x)\right) dx_1 \Lambda dx_2 \Lambda dx_3$

Formula di Stokes nello spazio (D?????):

Se $U \subseteq_{aperto} \ \mathbb{R}^3$ e $\partial U = \bigcup_{j=1}^{N} \sum_j$ superfici regolari, compatte e connesse allora:

$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega$

Formula di Gauss - Green:
Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso e limitato con frontiera regolare di classe C^1 tale che $\partial U = \sum_1 \cup \ldots \cup \sum_n$ unione disgiunta di superfici regolari e connesse.
Dato un campo vettoriale:
$A(x): U \to \mathbb{R}^3$; $A(x) = \left(A_1(x), A_2(x), A_3(x)\right)$
Siccome Digitare l'equazione qui.

ROBA ROBA ROBA

Lemma (D ; 4.114):

Formula di Gauss- Green (D ; 4.115):
Se $U \subseteq_{aperto} \mathbb{R}^3$