Capitolo V:

Superpratico

Giulio Del Corso

Funzioni olomorfe:

Condizioni di Cauchy - Riemann:

f è olomorfa in un punto se e solo se la funzione (Considerata in funzione delle variabili reali x ed y) è differenziabile nel punto e vale la seguente relazione fra le fra le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Equivalente:

Se $f = P + iQ$ con P, Q funzioni reali allora otteniamo la condizione di Cauchy - Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \;\; ; \; \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Osservazione:

Sono condizioni necessarie e sufficienti alla derivabilità nel punto.

Calcolo della derivata complessa:

Esistono quatto formulazioni equivalenti della derivata:

$f^{'}(x) = P_x + iQ_x$
$f^{'}(x) = Q_y - iP_y$
$f^{'}(x) = P_x - iP_y$
$f^{'}(x) = Q_y + iQ_x$

Osservazione:

Valgono le normali leggi di derivazione per somma di funzioni o funzioni composte.
Su $\mathbb{C}$ olomorfe e analitiche coincidono come definizioni.

Funzioni complesse:

Esponenziale:

$a^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

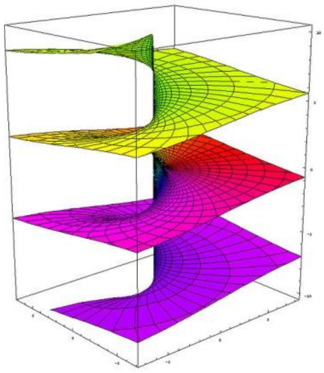
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Converge assolutamente

Infinitamente derivabile

Olomorfa e periodica di periodo $2\pi i$

Logaritmo:



E' una funzione polidroma (capace di assumere più valori) in quanto ottenuta dall'esponenziale complesso che è una funzione periodica.

$w = \ln(z) \leftrightarrow z = e^w$

Se $z = pe^{i\theta} = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$

Dunque:

$p = |z| = e^u \rightarrow u = \ln|z|$

$e^{i\theta} = e^{iv} \leftrightarrow v = \arg z$

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$

Logaritmo principale:

E' quello ottenuto scegliendo la prima derivazione del logaritmo:

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ con $-\pi < \arg z < \pi$

Analitico su tutto $\mathbb{C}$ tranne in 0 (non definito) e su $x \leq 0$ dove è discontinuo.

Calcolo esplicito:

Dato il numero complesso $a + ib$:$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\arg_{[-\pi,\pi]}(a+ib) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \quad \text{se } a = 0\,; b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \quad \text{se } a = 0\,; b < 0 \\ \text{Non def} \quad \text{se } a = 0\,; b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{se } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \text{ se } a < 0\,; b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \text{ se } a < 0\,; b < 0 \end{cases}$$

Seno:

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

Surgettiva, periodica, stessi 0 della funzione reale.

Infinitamente derivabile.

Olomorfa e periodica di periodo 2π

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Coseno:

$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

Surgettiva, periodica, stessi 0 della funzione reale.

Infinitamente derivabile.

Olomorfa e periodica di periodo 2π

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Integrali curvilinei:

Nel calcolo degli integrali curvilinei di variabile complessa abbiamo due strategie distinte:

Metodo complesso:

Si tratta la variabile z come una normale variabile complessa e si effettua la sostituzione:

$$\int_{\Upsilon} f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z^{'}(t)dt$$

Problema:
Non è detto che la parametrizzazione sia banale in z, le circonferenze ad esempio sono facili mentre le rette no.

Metodo reale:

Si sostituisce alla variabile complessa la sua notazione di Gauss:

$$z = x + iy$$

Al differenziale si sostituisce la sua versione complessa:

$$dz = dz + idy$$

Ci si limita a questo punto a moltiplicare e calcolare rispetto ai due differenziali considerando i come una costante moltiplicativa qualsiasi.

Formule integrali di Cauchy:

Idea:
Il valore in un punto di una funzione analitica dipende esclusivamente dai valori di una qualsiasi curva chiusa semplice che circonda il punto.

Formula integrale di Cauchy:
Sia f una funzione analitica su di un D semplicemente connesso, $z_0 \in D$ e C una curva chiusa che contenga z_0 al suo interno (Percorsa in senso antiorario).
Allora:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$$

Dominio multiconnesso:
Se il dominio è multiconnesso vale la formula purché il percorso lasci sempre a sinistra il dominio.

Formula di ordine superiore:
Se f è analitica su di un dominio semplicemente connesso D con z_0 un suo punto interno ed f indefinitamente derivabile in z_0 allora:

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)$$

<u>Sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa:</u>

Data $f(z)$ una funzione olomorfa sul disco aperto $|z| < \rho$, allora f può essere sviluppata come una serie di potenze sul disco.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_0} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Serie note:

$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$; $|z| < 1$ $\quad$ $\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$; $|z| < 1$ $\quad$ $\frac{1}{a-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k-1}}$; $|z| < a$

$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $\quad$ $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ $\quad$ $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ $\quad$ $\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\quad$ $\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}$; $|z| < 1$

Derivazione per serie:

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{2^{k+1}}$$

Sviluppo in serie di Laurent:

Una funzione $f(z)$ definita in una corona circolare $\rho_2 < |z| < \rho_1$ si dice che ammette uno sviluppo in serie di Laurent se esiste una serie di Laurent $\sum a_n z^n$ che converge nella corona circolare e la cui somma sia uguale ad $f(z)$ in ogni punto della corona.

Serie di Laurent (Di $\boldsymbol{f(z)}$ in $\boldsymbol{c}$):

$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ con C curva semplice chiusa nella corona circolare.

Teorema:

Una funzione analitica è sempre sviluppabile come serie di Laurent.

Osservazione:

La differenza sta nei termini $\{-\infty, .., -1\}$

Prima di provare a ricavarli sfruttando le formule è meglio cercare uno sviluppo noto.

(Nella formula il valore di z_0 viene (quasi?) sempre posto 0)

Classificazione delle singolarità:

Definizione (Singolarità isolata):
Una singolarità isolata è un punto tale che la funzione sia analitica in un suo intorno eccetto il punto stesso.

Singolarità rimuovibile:
Nessun intero $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$ nello sviluppo di Laurent.

Mediante limite:
Un punto z_0 singolare è rimuovibile se esiste il limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ finito.

Polo di ordine m:
Numero finito di interi $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$ nello sviluppo di Laurent.
m è il minor valore dell'esponente tale che a_m sia diverso da 0.

Mediante limite:
Calcoliamo il limite $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z)$
Se è infinito allora l'ordine è maggiore di n.
Se è 0 allora l'ordine è minore di n
Se è finito allora l'ordine è n.
Formula del residuo per poli semplici:
$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

Attenzione:
Lavorando con numeri complessi può spesso accadere che i limiti non esistano.

Formula del residuo per poli multipli (ordine m):
$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)\,]$

Singolarità essenziale:
Numero infinito di interi $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$ nello sviluppo di Laurent.

Mediante limite:
Per esclusione dai casi precedenti oppure se $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$; $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ non esistono
(Provare per valori specifici come x e iy)

Limiti interessanti incontrati:
$\lim_{z \to z_0} \frac{\sin z - \sin k\pi}{z - k\pi} = \cos k\pi$
$\lim_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_k}}{z - z_k} = e^{z_k}$

Teorema dei residui:

Sia D un aperto della sfera di Riemann S^2 ed f una funzione olomorfa in D eccetto alcuni punti isolati che sono le singolarità di f.
Sia T il bordo orientato di un sottoinsieme compatto A di D e supponiamo che T non passi attraverso nessuna singolarità di f o per il punto all'infinito.

Allora solo un numero finito di singolarità z_k sono contenute in A e vale:

$$\int_T f(z)dz = 2\pi i(\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k))$$

Dove $\mathrm{Res}(f, z_k)$ denota il residuo.

Calcolo del residuo:

Caso di un polo semplice:

Sia z_0 il polo di f.
Allora $f(z) = \frac{1}{z-z_0} g(z)$ con g olomorfa in un intorno di z_0.
Scriviamo la serie di Laurent:

$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ vale allora $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

Oppure:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) f(z)$$

Caso di poli multipli:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} g(z)$$

Scriviamo la serie di Laurent:

$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ vale allora $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

Oppure:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z} (z - z_0)^k f(z)$$

Teorema dei residui applicato al calcolo di integrali reali:

Primo tipo:

$I = \int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t))dt$; $R(x, y)$ è una funzione razionale senza poli sulla circonferenza unitaria.

Svolgimento:

$I = 2\pi \sum \text{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\right)$ La sommatoria è estesa a tutti i poli contenuti nella circonferenza unitaria.

Secondo tipo:

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$; $R(y)$ è una funzione razionale senza poli reali.

Svolgimento:

Verificare che l'integrale sia convergente, condizioni necessarie e sufficienti sono:
La parte principale di $R(x)$ all'infinito ha lo stesso comportamento di $\frac{1}{x^n}$; $n \geq 2$
$\lim_{|x| \to \infty} xR(x) = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \text{Res}(R(z))$
$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum \text{Res}(R(z))$
Considerando rispettivamente i residui nel semicerchio superiore e in quello inferiore.

A seconda di dove è più facile calcolare i poli usiamo una delle due formule.

Terzo tipo:
$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx$

Proposizione:
Se $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ per $y \geq 0$ allora:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\big(f(z), e^{iz}\big)$ con il residuo calcolato nei poli di $y \geq 0$

Osservazione:
Nel caso in cui ci sia un polo sull'asse delle x questo risultato non è più valido.
Dobbiamo quindi "evitare" il polo saltandolo con un semicerchio nel semipiano positivo.
Nel caso in cui un polo sia proprio nell'origine vale la seguente proposizione.

Proposizione:
Se $z = 0$ è un polo semplice allora l'integrale calcolato sul semicerchio tende a $\pi i\mathrm{Res}(g, 0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)\,dz = \pi i \mathrm{Res}(g, 0)$$

Questo significa che calcoliamo i residui normalmente tranne quello in 0 che, una volta calcolato a parte, viene moltiplicato per πi invece che per $2\pi i$

Seni e Coseni:
Mediante sostituzioni oculate è possibile ricondurci ad integrali del terzo tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, f(x)dx = \mathrm{Re}\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)dx\big)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, f(x)dx = \mathrm{Im}\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)dx\big)$$

Dopo aver calcolato i residui teniamo rispettivamente solo la parte reale o solo quella immaginaria.

Trucco:
Se al denominatore abbiamo un polo semplice possiamo effettuare una sostituzione differente per trasformalo in una singolarità rimuovibile (spetto l'integrale diventa del 2° tipo).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x f(x)}{x} dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{ix}-1)f(x)}{x} dx\right)$$

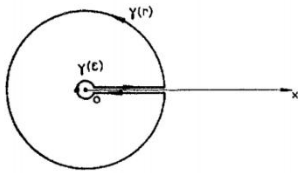
Quarto tipo:

$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^a} dx$; $0 < a < 1$; $R(x)$ funzione razionale senza poli sul semiasse positivo $x \geq 0$

Condizione necessaria e sufficiente:

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$$

Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{R(z)}{z^a}$



Calcoliamo l'integrale su:

Ottenendo la relazione:

$$\left(1 - e^{-2i\pi a}\right) I = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\frac{R(z)}{z^a}\right)$$

Quinto tipo:

$\int_0^{+\infty} R(x) \log(x)\, dx$

Condizioni:

$R(x)$ funzione razionale senza poli sull'asse $x \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} xR(x) = 0$

Consideriamo lo stesso insieme del quarto tipo.

Relazione:

$\int_0^{+\infty} R(x) \log(x)\, dx = -\frac{1}{2} \mathrm{Re}(\sum \mathrm{Res}(|R(z)(\log z)^2|))$

$\int_0^{+\infty} R(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \mathrm{Im}(\sum \mathrm{Res}(|R(z)(\log z)^2|))$

Metodo generale:
Si cerca di capire quale è la forma più simile fra quelle note e si scrive il dominio in maniera tale che la parte reale sia proprio quella che ci interessa.
Una volta scritta la funzione complessa associata l'integrale di linea si ricava con il metodo dei residui.
Il punto delicato è verificare la convergenza a 0 delle parti non reali dell'integrale di linea, riporto in seguito le sostituzioni effettuate e le proprietà del dominio di integrazione.

INSERIRE LE SOSTITUZIONE

<u>Radici utili dell'unità:</u>

Radici quarte dell'unità:

$$\{\pm 1; \pm i\}$$

Radici ottave dell'unità:

$$\left\{\pm 1, \pm i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}$$

Teorema di Rouché per funzioni meromorfe:

Data una funzione meromorfa i passaggi da effettuare per determinare il numero degli 0 di una funzione sono i seguenti.

Passo 1:

Controlliamo se gli 0 del denominatore sono anche 0 del numeratore, in caso affermativo dobbiamo verificare che il punto in questione sia effettivamente uno 0.

Passo 2:

Si determina la molteplicità degli 0, un metodo potrebbe essere derivare il numeratore, gli 0 con molteplicità maggiore di 1 devono essere 0 anche della funzione derivata.

Passo 3:

Si applica il teorema di Rouché (Selezionare due insiemi con bordo comune per applicare a corone circolari).

Teorema di Rouché:

f, g olomorfe su di un insieme connesso e sul suo contorno C.

Se $|g(z)| < |f(z)|$ sul bordo C allora f e $f + g$ hanno lo stesso numero di 0 (Contati con molteplicità) all'interno di C.

Variante:

Se stiamo lavorando con funzioni dotate di poli la formula diventa:

$\#\{0\ di\ f + g\} - \#\{poli\ di\ f + g\} = \#\{0\ di\ f\}$

Casi interessanti:

Se dobbiamo calcolare gli 0 su di una corona circolare si calcolano nel cerchio esterno e si sottraggono quelli del cerchio interno.

Se dobbiamo calcolare gli 0 su di una striscia conviene suddividerla in rettangoli e controllare che su ogni lato del rettangolo valga la maggiorazione data.

Se alcuni rettangoli più piccoli ci danno problemi basta limitarsi a considerarli da un certo punto in poi.