Teoria Geometria 1: Topologia:

Definizioni:
Sartoria Topologica ; Topologia ; Base ; Teorema della Base ($X = \bigcup \beta$; $\exists C \subseteq A \cap B$) ; $\pm$ Fine ; Parte interna ; Chiusura ; Frontiera ; Aderenti ; Denso ; Intorno ; Sistema fondamentale di intorni (Base Locale) ; Funzioni continue

T1) Lemma dell'aderenza:
$f: X \to Y\ continua \leftrightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{\overline{f(A)}}\ \forall A \subseteq X$

Dim:
f continua $\to f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ è un chiuso che contiene $A \to \bar{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$
Se $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ vale $\forall C \subseteq Y$ chiusa $[A = f^{-1}(C)]$: $f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(C)\right)} = \bar{C} = C$
Quindi $\overline{\overline{f^{-1}(C)}} \subseteq f^{-1}(C)$ chiuso.

Definizioni:
Teorema di composizione di funzioni continue ; Continua in un punto ; Continua $\leftrightarrow$ Continua in ogni suo punto ; Omeomorfismo ; Applicazioni Aperte/Chiuse

T2) Caratterizzazioni Omeomorfismi:
$f: X \to Y$ continua, sono equivalenti:
1) Omeomorfismo
2) Chiusa e bigettiva
3) Aperta e bigettiva

Dim:
[**1** $\to$ **2**] Omeomorfismo per definizione è bigettivo ; $g: Y \to X$ inversa di f →Continua→ $\forall\ C \subseteq_{chiuso} X$ vale $f(C) = g^{-1}(C)$ chiuso in Y
[**2** $\to$ **3**] $A \subseteq_{Aperto} X$; $C \coloneqq X \backslash A$ chiuso ; $f(A) =_{bigettiva} f(X \backslash C) = Y \backslash f(C) \to f(A)$ complementare del chiuso $f(C)$
[**3** $\to$ **1**] $g: Y \to X$ inversa di f ; $\forall A \subseteq_{aperto} X$ vale $g^{-1}(A) = f(A)$ aperto $\to g$ continua

Definizioni [Metrici ; 47]:
Distanza ; Spazio Metrico ; Palla Aperta ; Topologia indotta da una distanza ; Spazi Equivalenti ; Spazio Metrizzabile ; Sottoinsiemi e Applicazioni Limitate

Definizioni [Sottospazi ; 53]:
Topologia di Sottospazio ; E' la meno fine tra quelli che rendono continua l'inclusione ; Sottospazio Discreto ; Chiusura sul sottospazio = ∩ chiusura sullo spazio ; Y $\subseteq_{ap}$ X : Z $\subseteq_{ap}$ Y $\leftrightarrow$ Z $\subseteq_{ap}$ X ; Y $\subseteq_{chi}$ X : Z $\subseteq_{chi}$ Y $\leftrightarrow$ Z $\subseteq_{chi}$ X ; Intorno sul sottospazio $\leftrightarrow$ Intorno sullo spazio ; Immersione topologica [Omeomorfismo fra X e f(X)] ; Immersione è un'applicazione chiusa/aperta

T3) Immersioni:

f: X → Y continua:

1) f Chiusa + Iniettiva → Immersione Chiusa
2) f Aperta + Iniettiva → Immersione Aperta

Dim:

[1] f continua iniettiva e chiusa → $\forall\ C \subseteq_{chiuso}\ X \rightarrow f(C) \subseteq_{chiuso}\ Y$ e $f(C) \subseteq f(X) \rightarrow f(C) \subseteq_{chiuso}\ f(X)$

Allora $f_{ristretta}: X \rightarrow f(X)$ è continua, bigettiva e chiusa → Omeomorfismo

Definizioni [Prodotti ; 55]:

Topologia Prodotto

T4) Base Canonica e Proiezione:

1) $U \times V$ con U, V aperti di P e Q formano una base della $\tau_{prodotto}$
2) Le proiezioni p, q sono aperte e $\forall (x, y) \in P \times Q: p: P \times \{y\} \rightarrow P\ ; q: \{x\} \times Q \rightarrow Q$ sono omeomorfismi
3) $f: X \rightarrow P \times Q$ è continua ↔ $f_1 = pf\ ; f_2 = qf$ sono continue

Dim:

[1] Sia $\tau_{prodotto}$; per i suoi elementi vale $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ → i sottoinsiemi $U \times V$ (Aperti di P, Q) sono base di UNA topologia τ

p, q continue rispetto a τ e $p^{-1}(U) = U \times Q \rightarrow \tau \ll \tau_{prodotto}$

Se U, V aperti di P, Q allora $U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \in \tau_{prodotto}$ → ogni aperto di τ unione di aperti di $\tau_{prodotto}$ → $\tau_{prodotto} \ll \tau$

[2] $y \in Q$; U, V aperti di P, Q allora vale: $(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} U \times \{y\} \text{ se } y \in V \\ \emptyset \text{ se } y \notin V \end{cases}$ allora gli aperti di $P \times \{y\}$ sono $U \times \{y\}$ con U aperto di $P \rightarrow p: P \times \{y\} \rightarrow P$ Omeomorfismo

[3] f continua ↔ ogni contro immagine di un aperto è aperta ↔ $\forall\ U, V\ \ f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \times f_2^{-1}(V)$ aperto in X.

Definizioni [Hausdorff ; 57]:
Spazio di Hausdorff (T2)

T5) Finiti e Chiusi:
In un T2 i sottoinsiemi finiti sono chiusi

Dim:
Dimostriamo che $\{x\}$ è chiuso $\forall\, x \in X$; se $y \in X - \{x\} \rightarrow \exists\, U \in I(x)\,; V \in I(y) \mid U \cap V = \emptyset \rightarrow$
$V \subseteq X - \{x\} \rightarrow X - \{x\}$ aperto $\rightarrow \{x\}$ chiuso.

T6) Sottospazi e prodotti di T2:
Sottospazi e prodotti di T2 sono T2

Dim:
[***Sottospazi***] X è T2 ; $Y \subseteq X\,; x, y \in Y \rightarrow \exists U, V \subseteq X \mid U \cap V = \emptyset$ con $x \in U\,; y \in V \rightarrow U \cap Y\,; V \cap Y$ sono aperti disgiunti in Y
[***Prodotti***] X, Y sono T2 e siano $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ $[x \neq z] \rightarrow \exists U, V \subseteq_{aperti\ ,distinti}\ X \mid x \in U\,; y \in V \rightarrow$
$(x, y) \in U \times Y\,; (z, w) \in V \times Y$ e $(U \times Y) \cap (V \times Y) = (U \cap V) \times Y = \emptyset$

T7) Diagonale:
X è T2 $\leftrightarrow \Delta \coloneqq \{(x, x) | x \in \mathrm{X}\}$ è chiusa nel prodotto

Dim:
$[\rightarrow]$ X è T2$\rightarrow (x, y) \in X \times X - \Delta \rightarrow y \neq x \rightarrow \exists U, V$ aperti $\mid U \cap V = \emptyset\,; x \in U\,; y \in V \rightarrow$
$(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta \rightarrow X \times X - \Delta$ è intorno di ogni suo punto$\rightarrow \Delta$ chiuso.
$[\leftarrow]$ Δ chiusa $\rightarrow \exists\, U, V \subseteq_{aperti}\ X \mid (x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta \rightarrow x \in U\,; y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$

Definizioni [Connessione ; 62]:
Connesso ; Sconnesso ; Sottospazio connesso per la topologia indotta ; Connesso per archi ; Spazio Convesso ; Prodotto di Connessi è Connesso

T8) Equivalenza connessione:
1) Sconnesso
2) Unione disgiunta di due aperti
3) Unione disgiunta di due chiusi

Dim:
$[\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2} + \mathbf{3}]$ Se A è aperto/chiuso $\rightarrow A^C$ è aperto/chiuso $\rightarrow A, A^C$ è unione disgiunta di aperti chiusi.
$[\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{1}]$ $A_1 \cup A_2 = X$ aperti $\rightarrow A_1 = A_2^C$ chiuso
$[\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1}]$ $C_1 \cup C_2 = X$ chiusi $\rightarrow C_1 = C_2^C$ aperto

T9) Sottospazio:
X spazio topologico ; $A \subseteq_{aperto\ /chiuso}\ X \rightarrow \forall\, Y \subseteq_{connesso}\ X$ vale $Y \subseteq A$ oppure $Y \cap A = \emptyset$

Dim:
$Y \cap A$ è aperto e chiuso in Y ; se Y connesso $\rightarrow Y \cap A = \emptyset$ o$Y \cap A = Y$

T10) $[0,1]$

$[0,1]$ è connesso per la topologia euclidea

Dim:

C, D chiusi $\neq \emptyset \mid C \cup D = [0,1]$; $0 \in C$ per ipotesi, sia $d \coloneqq \inf(D)$, se $d \in C \cap D$ abbiamo finito.
Altrimenti D chiuso $\rightarrow d \in D$: se $d = 0$ fine, se $d > 0$ allora $E =_{chiuso} C \cap [0,1]$ e contiene $[0, d[$ è contenuto in $E \rightarrow d \in E \rightarrow d \in C$

T11) Immagine di un connesso:

$f: X \rightarrow Y$ continua ; X connesso $\rightarrow f(X)$ connesso

Dim:

$Z \subseteq f(X)$ sottoinsiemi $\neq 0$ e aperti/chiusi di $f(X) \rightarrow \exists A \subseteq Y$; $C \subseteq Y$ $Z = f(X) \cap A = f(X) \cap C$
f continua $\rightarrow f^{-1}(Z) = f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(Z) = f^{-1}(C) \rightarrow f^{-1}(Z) = X$ con X connesso $\rightarrow Z = f(X)$

T12) Lemma:

Connesso per archi → Conneso

Dim:

Dato X connesso per archi; $A, B \subseteq_{aperti} X \mid A \cup B = X$
Sia $x \in A$; $y \in B$ e $a: [0,1] \rightarrow X \mid a(0) = x$; $a(1) = y$ allora $a^{-1}(A)$ e $a^{-1}(B)$ sono non vuoti e $a^{-1}(A) \cup a^{-1}(B) = [0,1] \rightarrow \exists t \in a^{-1}(A) \cap a^{-1}(B) \mid a(t) \in A \cap B$

Definizioni:

Componente connessa ; $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$ e Y connesso $\rightarrow W$ connesso ; Unione di connessi con un punto in comune è connessa ; A, B connessi con $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A \cup B$ connesso ;

T13) Scomposizione:

Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse ; le componenti connesso sono chiuse

Dim:

Ogni punto è contenuto in almeno una componente, se C, D componenti $\mid C \cap D = \emptyset \rightarrow C \cup D$ componente connessa → si sceglie la più grande.
Se C connessa $\rightarrow \bar{C}$ connessa contente $C \rightarrow C = \bar{C}$

Definizioni:

Se ogni punto ammette un intorno connesso allora le componenti connesse sono aperte ; Totalmente sconnesse ~ Componenti connesse come punti di $\mathbb{Q}$; Chiuso e connesso non implica Connesso per archi (Pulce e pettine)

T14) Connessione per archi:

In $\mathbb{R}^n$ connesso e aperto → Connesso per archi

Dim:

Sia $\Omega_p = \{q \in \Omega \mid q$ raggiungibile conun arco da $p\}$, se $\Omega_p \neq \emptyset$ aperto chiuso su connesso allora $\Omega_p = \Omega$

1) $\Omega_p \neq 0$ in quanto $p \in \Omega_p$

2) Ω_p aperto, infatti: Ω aperto → $\exists B$ palla attorno a $q \mid B \subseteq \Omega \rightarrow B \subseteq \Omega_p$

Lemma incollamento:

f_1, f_2 continue e ${f_1}_{|A\cap B} = {f_2}_{|A\cap B} \rightarrow f = f_1 \sim_{giunzione} f_2$ è continua

Dim Lemma:

La funzione è ben posta perché dove potrebbe esserci problemi di duplice assegnazione la funzione coincide.

Dato un aperto K sull'unione allora $f^{-1}(K)$ aperto, infatti:

$f^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap (A \cup B) = (f^{-1}(K) \cap A) \cup (f^{-1}(K) \cap B) = f_1^{-1}(K) \cup f_2^{-1}(K)$ aperto.

3) Ω_p chiuso, infatti: $q \in \Omega_p^C$ allora $\exists$ palletta non raggiungibile $\subseteq \Omega_p^C$. Se la palletta intersecasse Ω_p allora per giustapposizione $q \in \Omega_p$

Teoria di Geometria 2: Compattezza e Quozienti:

Definizioni:
Ricoprimento (Finito, Sottoricoprimento, Aperto, Chiuso, Localmente finito) ; Ricoprimento Fondamentale ; Ricoprimenti Aperti e Ricoprimenti Chiusi sono fondamentali

T1) Immagine di un Compatto:
$f: X \to Y$ continua ; X compatto→ $f(X)$ sottospazio compatto di Y

Dim:
$\{A\}$ famiglia di aperti di Y che ricoprono $f(X) \to \{f^{-1}(A)\}$ ricoprono $X \to$
$\exists A_1 \dots A_n \,| f^{-1}(A) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n) \to f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$

T2) $[0,1]$ Compatto:
$[0,1]$ con la topologia di sottospazio su $\mathbb{R}$ è compatto

Dim:
Sia $\boldsymbol{A}$ |
$[0,1] \subseteq \{A_{aperti} \mid A \in \boldsymbol{A}\}$; $X = \{insieme\ di\ t \mid [0,t]\ contenuto\ nell'unione\ di\ un\ \#\ finito\ di\ el.di\ \boldsymbol{A}\}$
$X \subseteq [0, \infty[$ osserviamo che $[0,0]$ contenuto in un aperto di $\boldsymbol{A} \to 0 \in X$
Sia $b = \sup(X) \to \exists t \in X \mid 1 \leq tz = b \to [0,1] \subseteq [0,t]$ contenuto nell'unione di un # finito
Se $b \leq 1$ è assurdo, infatti $\to \exists A \in \boldsymbol{A} \mid b \in A_{aperto}$ e $\exists \delta > 0 \mid]b-\delta, b+\delta[\subseteq A \to \exists t \in X \mid b - \delta < t \leq b$
Allora $[0,t] \subseteq A_1 \cup .. \cup A_n$ finita → se $0 \leq h < \delta$ $[0, b+h] = [0,t] \cup [t, b+h] \subseteq [0,t] \cup]b-\delta, b+\delta[$
Contenuta in $A \cup A_1 \cup .. \cup A_n \to b + h \in X\ \forall\ 0 \leq h < \delta$ (Assurdo per definizione di Sup)

Definizioni:
Sottospazio chiuso di un compatto è compatto ; unione finita di sottospazi compatti è compatta ; T. di Heine Borel; T. di Weierstrass ; se ogni ricoprimento fatto con elementi di una base ha un sottoricoprimento finito allora lo spazio è compatto

T3) Fibra:
$f: X \to Y$ chiusa, se Y compatto e $f^{-1}(y)$ compatto $\forall y \in Y \to X$ compatto

Dim:
$\forall\ A \subseteq X$ definiamo $A' \coloneqq \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}$; $Y \backslash A' = f(X \backslash A)_{chiuso} \to A'$ aperto
Sia $\bar{A}$ ricoprimento aperto di X ; $\bar{B} \coloneqq \{\cup_{finita}\ A \mid A \in \bar{A}\}$; $\bar{B}' = \{B' \mid B \in \bar{B}\}$ ricoprimento aperto di Y
[Se $y \in Y \to f^{-1}(y)$ compatta $\to \exists A_1, \dots, A_n \in \bar{A} \mid f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup .. \cup A_n \to y \in B'$ e $B = A_1 \cup .. \cup A_n$]
Ma Y compatto $\to \exists\ B_1, \dots, B_n \in \bar{B} \mid Y = B_1' \cup .. \cup B_n' \to X = B_1 \cup .. \cup B_n$ [Unione finita di unioni finite] è un sottoricoprimento finito.

T4) Chiuso in compatto:
Un sottospazio chiuso H in un compatto K è compatto

Dim:
A ricoprimento di H ; $\{A\} \cup (K \backslash H)$ ricoprimento di $K \to \{A_1 \dots A_n\} \cup (K \backslash H)$ ricopre $K \to \{A_1 \dots A_n\}$ ricopre H

T5) Controesempio: Compatto non implica chiuso:

$\mathbb{R}$ con $\tau_{cofinita}$; $X \subseteq_{compatto}$ $\mathbb{R}$ non finito $\rightarrow$ aperto ; prendiamo $\{A\}$ ricoprimento aperto di $X \rightarrow$ tutti infiniti, allora $X \backslash A_0$ chiuso $\rightarrow$ finito $\rightarrow$ compatto ma non chiuso in quanto $X = A_{0_{infinito}} \cup (X \backslash A_0)_{finito}$ che non è chiuso

T6) Teorema di Wallace:

X, Y spazi topologici ; $A \subseteq_{compatto}$ X ; $B \subseteq_{compatto}$ Y ; $W \subseteq_{aperto}$ $X \times Y \mid A \times B \subseteq W$ allora:
$\exists U \subseteq_{aperto}$ X ; $V \subseteq_{aperto}$ $Y \mid A \subseteq U$; $B \subseteq V$; $U \times V \subseteq W$

Dim:

[Caso particolare] $A = \{a\}$; $\forall y \in B\ \exists$ aperti $U_y \subseteq X$; $V_y \subseteq Y \mid (a, y) \subseteq U_y \times V_y \subseteq W$
La famiglia $\{V_y \mid y \in B\}$ è un ricoprimento aperto di $B \rightarrow \exists y_1 \dots y_n \mid B \subseteq V_{y_1} \cup .. \cup V_{y_n}$
Definiamo $U = U_{y_1} \cap .. \cap U_{y_n}$ e $V = V_{y_1} \cup .. \cup V_{y_n}$ [aperti] $\rightarrow \{a\} \times B \subseteq U \times V \subseteq \bigcup U_{y_i} \times \bigcup V_{y_i} \subseteq W$
[Caso generale] Se A compatto arbitrario sappiamo che $\forall\ a \in A\ \exists U_a, V_a \mid \{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$ e $\{U_a\}$ ricoprimento aperto di $A \rightarrow \exists a_1 \dots a_n \mid A \subseteq U_{a_1} \cup .. \cup U_{a_n} \rightarrow U = U_{a_1} \cup .. \cup U_{a_n}$; $V = V_{a_1} \cap .. \cap V_{a_n}$ sono t.c.
$A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$

Corollario 1:

Ogni sottospazio compatto di un T2 è chiuso.

Dim:

X è T2 e $K \subseteq X$ compatto ; se $x \notin K \rightarrow \exists U \subseteq X \mid x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$; infatti $\{x\} \times K$ non interseca
$\Delta \subseteq X \times X \rightarrow_{T2} \{x\} \times K \subseteq W = X \times X \backslash \Delta \rightarrow_{Wallace}$ $\exists U, V$ aperti |
$\{x\} \times K \subseteq U \times V \subseteq W \rightarrow x \in U$; $U \cap K = \emptyset$

Corollario 2:

X, Y spazi topologici:
1) X compatto $\rightarrow p$ $[proiezione]$: $X \times Y \rightarrow Y$ è chiusa
2) X, Y compatti $\rightarrow X \times Y$ compatto

Dim:

[1] $C \subseteq X \times X$ chiuso ; se $p(C) = Y$ Ok, altrimenti sia $y \notin p(C)$ (Valido anche in un intorno)
allora: $X \times \{y\} \subseteq X \times Y \backslash C \rightarrow_{Wallace}$ $\exists V$ aperto $\mid X \times V \cap C = \emptyset \rightarrow V \cap p(C) = \emptyset$
[2] Teorema T3 applicato alla proiezione $X \times Y \rightarrow Y$

Corollario 3:

Sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto $\leftrightarrow$ Chiuso e limitato

Dim:

[$\leftarrow$] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato $\rightarrow A \subseteq [-a, a]^n \cong [0,1]$ compatto $\rightarrow_{Cor2}$ $[-a, a]^n$ compatto$\rightarrow$ Ogni suo sottospazio chiuso è compatto
[$\rightarrow$] Ogni sottospazio chiuso di un compatto è compatto $\rightarrow d_0 : A \rightarrow \mathbb{R} \mid d_0(x) = \|x\|$ continua ammette massimo $\rightarrow A$ limitato. Ma $\mathbb{R}^n$ è T2 $\rightarrow A$ chiuso-

Corollario 4:

$f: X \rightarrow y$ continua con X compatto e Y T2 è chiusa (Se bigettivo omeomorfismo)

Dim:

$A \subseteq X$ chiuso $\rightarrow$ Compatto $\rightarrow f(A)$ Compatto$\rightarrow$ Chiuso in Y

Definizioni [Quozienti topologici]:
Identificazione (aperta/chiusa)

T7) Identificazioni:
$f: X \to Y$ continua e surgettiva:
Se è chiusa → Identificazione chiusa
Se è aperta → Identificazione aperta

Dim:
f surgettiva → $f\left(f^{-1}(A)\right) = A \ \forall A \subseteq Y$
Se f aperta e $A \subseteq Y \mid f^{-1}(A)$ aperto → $A = f\left(f^{-1}(A)\right)$ aperto → f identificazione

Esempio:
$f: [0,2\pi] \to S^1 \ \left(f(t) = (\cos t\,, \sin t)\right)$ è una identificazione chiusa ma NON aperta.

T8) Proprietà universale delle identificazioni:
$f: X \to Y$ identificazione e $g: X \to Z$ applicazione continua, allora:
$\exists h: Y \to Z$ continua $\mid g = hf \leftrightarrow g$ costante sulle fibre di f

Dim:
g costante sulle fibre → se $x, y \in X$ e $f(x) = f(y) \to g(x) = g(y)$ → Condizione necessaria, sufficiente?
f surgettiva→ $h: Y \to Z \mid h(y) \coloneqq g(x)$ dove $x \in X \mid f(x) = y \to h$ ben definito e $g = hf$. E' continua?
Se $U \subseteq Z$ aperto → $f^{-1}\left(h^{-1}(U)\right) = g^{-1}(U)$ aperto in X. Ma f identificazione → $h^{-1}(U)$ aperto in Y

Definizioni:
Topologia quoziente ; proposizione sulle classi

Teoria di Geometria 3: Gruppo fondamentale e Monodromia

Definizioni [Omotopia ; 163]:

Localmente connesso ; $\pi_0(X) = {}^{X}/_{\sim}$ relazione di equivalenza con classi dette Componenti connesse per archi ; Parametrizzazione standard ; Localmente connesso per archi ; X localmente connesso per archi → Componenti connesse per archi aperte e coincidenti con le Componenti connesse ; $f: X \to Y$ continua allora $\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ con $f([x]) = [f(x)]$; Applicazioni Omotope ; X, Y spazi topologici, la relazione di omotopia in $C(X, Y)$ è una relazione di equivalenza ; $X \to^{f_0, f_1} Y \to^{g_0, g_1} Z$ Se f_1 omotopa a f_0 e g_1 omotopa a g_0 → $g_0 \circ f_0$ omotopa a $g_1 \circ f_1$; Equivalenza omotopica [Omotopicamente equivalenti]

> ***Esempio (Applicazione antipodo è omotopa all'identità se n dispari):***
> $f: S^n \to S^n \mid f(x) = -x$ infatti:
> $S^n = S^{2k+1} = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| = 1\}$ e $F(z, t) = ze^{i\pi t}$

T1) Lemma:

$f, g: X \to Y$ continue ; se f, g sono omotope allora:
$\pi_0(f) = \pi_0(g): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$
Se $f: X \to Y$ equivalenza omotopica allora $\pi_0(f)$ bigettiva

> Dim:
> $\pi_0(f) = \pi_0(g) \leftrightarrow \forall x \in X \quad f(x)$ e $g(x)$ appartengono alla stessa componente connessa in Y
> Se $F: X \times I \to Y$ omotopia fra f e g $\to f(x)$; $g(x)$ estremi del cammino $F_x: I \to Y \mid F_x(t) = F(x, t)$
> Se f è una equivalenza omotopica e g continua | gf ; fg omotope all'identità allora:
> $\to \begin{cases} \pi_0(fg) = \pi_0(f)\pi_0(g): \pi_0(Y) \to \pi_0(Y) \\ \pi_0(gf) = \pi_0(g)\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(X) \end{cases}$ sono uguali all'identità → $\pi_0(f)$ invertibile con inversa $\pi_0(g)$

Definizioni:

Contrattile ; Spazi Omotopi ; Retratto e Retrazione ; Retratto e Retrazione per deformazione

T2) Proposizione Retratto per Deformazione → Retratto

$Y \subseteq X$ retratto per deformazione, allora:

> **1)** Y è un retratto di X
> **2)** $i: Y \to X$ è una equivalenza omotopica
>
> **Dim:**
> $R: X \times I \to X$ deformazione ; sia $r: X \to Y \mid R(x, 0) = i\big(r(X)\big) \to r: X \to Y$ retrazione e R omotopia tra $i \circ r$ e Id_X
> Ma $r \circ i = Id_Y \to i$ ed r equivalenze omotopiche.

Definizioni [Gruppo fondamentale]:
Cammini omotopicamente equivalenti ; Omotopia di cammini [Relazione di equivalenza] ;
$a: I \to X$ cammino e $\phi: I \to I$ applicazione continua | $\phi(0) = 0$; $\phi(1) = 1 \to a(t) \sim_{om.eq.} B(t) = a(\phi(t))$
Il prodotto $*$ è associativo
Regola del triangolo
$\forall\ a$ cammino $1_a * a \sim a * 1_a \sim a$ e $a * i(a) \sim 1_a$
$\pi_1(X, a) = {}^{\Omega(X,a,a)}/_{\sim}$ è un gruppo con $e = [1_a]$; $[a]^{-1} = [i(a)]$; $[a][b] = [a * b]$ detto Gruppo fondamentale
Isomorfismo di gruppi: $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ definiamo $\gamma_{\#}: \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$; $[a] = [i(\gamma) * a * \gamma]$
Semplicemente connesso ; $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$; f continua allora $\pi(f): \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ omomorfismo di gruppi

T3) Teorema isomorfismo:
$f: X \to Y$ equivalenza omotopica$\to \forall a \in X\ \ f_a: \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ è un isomorfismo di gruppi

Dim:
$g: Y \to X$ inversa omotopica di f (g continua | gf , fg omotope all'identità)
Allora $\pi_1(X, a) \to^{f_*} \pi_1(Y, f(a)) \to^{g_*} \pi_1(X, gf(a)) \to^{f_*} \pi_1(X, fgf(a))$
Per **C1** $f_* g_*$, $g_* f_*$ sono isomorfismi $\to f_*$ bigettiva per **C2**

C2:
$A \to^f\ B \to^g\ C \to^h\ D$ se gf bigettiva e hg iniettiva allora f bigettiva

Dim:
gf , fg iniettive $\to f, g$ iniettive
gf surgettiva $\to \forall\ b \in B\ \exists\ a \in A$ | $gf(a) = g(b)$ ma g iniettiva $\to f(a) = b \to f$ surgettiva

C1 [Nd 188]:
X spazio topologico e $g: X \to X$ continua omotopa all'identità, allora:
$\forall\ a \in X\ \ g_*: \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, g(a))$ è un isomorfismo di gruppi

T4) Teorema di Van Kampen:

Lemma di Lebesgue:
(Y,d) spazio metrico compatto ; $f: Y \to X$ applicazione continua ; A ricoprimento aperto di X allora:
$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \mid \forall y \in Y\ f\big(B(y,\delta)\big)$ è interamente contenuto in un aperto del ricoprimento.

Dim:
$f(Y) \subseteq_{compatto}\ X \to \exists A_1, \dots, A_n \in A \mid f(Y) \subseteq A_1 \cup .. \cup A_n$; siano $C_i = f^{-1}(X - A_i) = Y - f^{-1}(A_i)$ e $d_i: Y \to \mathbb{R}$, $d(y, C_i)$ sono continue e vale:
$d_i(y) = 0 \leftrightarrow y \in C_i$ ma $C_i \cap C_j = \emptyset \to$ se $g: Y \to]0,\infty[\ \mid g(y) = \max\big(d_1(y), \dots, d_n(y)\big)$ è continua e Y compatto.
Dunque sia $\delta > 0$ e $\min(g)$ su Y allora se $y \in Y \to g(y) \geq \delta \to \exists i \mid d_i(y) \geq \delta \to B(y,\delta) \subseteq f^{-1}(A)$

Corollario:
$\alpha: I \to X$ cammino chiuso ; A ricoprimento aperto di $X \to \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall i = 0, \dots, n-1$
$\alpha: \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to X$ interamente contenuta nel ricomprimento A [I è uno spazio metrico compatto]

Teorema di Van Kampen:
A, B aperti di X, $X = A \cup B$ e $x_0 \in A \cap B$
Se $f^*: \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e $g^*: \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ omomorfismi di gruppi indotti dalle inclusioni.
Se $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi $\to \pi_1(X, x_0)$ è generato da f^*, g^*

Dim:
Se $a \in \Omega(X, x_0, x_0)$ vogliamo ottenere come giunzione $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Omega(X, x_0, x_0)$ [In A o in B]
Per il Corollario del Lemma $\exists n > d \mid a_{|\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}$ è in A o in B
Definiamo la parametrizzazione standard:
$a_i(t) := a\left(\frac{i-1+t}{n}\right)$ e sia $x_i = a\left(\frac{1}{n}\right)$ Essendo connessi$\forall\, i\ \exists\, B_i \in \Omega(X, x_i, x_0) \mid$
Se $\begin{cases} x_i \in A \cap B \to B_i \in \Omega(A \cap B, x_i, x_0) \\ x_i \in A \backslash B \to B_i \in \Omega(A, x_i, x_0) \\ x_i \in B \backslash A \to B_i \in \Omega(B, x_i, x) \end{cases}$ $\to$ Se $\begin{cases} x_i \in A \to B_i \in \Omega(A, x_i, x_0) \\ x_i \in B \to B_i \in \Omega(B, x_i, x_0) \end{cases}$ $\to a \sim_{om.eq.} \gamma_1 * \dots * \gamma_n \mid$
$\gamma_1 = a_1 * B_1$; $\gamma_2 = i(B_1) * a_2 * B_2; \dots;\ \gamma_n = i(B_{n-1}) * a_n \to \in \Omega(A, x_0, x_0) \cup \Omega(B, x_0, x_0)$

Corollario 1:
A, B aperti di $X \mid X = A \cup B$ e $A \cap B \neq \emptyset \to$ Se $A, B, A \cap B$ connessi per archi e A, B sono semplicemente connessi allora X è semplicemente connesso.

Corollario 2:
S^n è semplicemente connesso $\forall n \geq 2$

Corollario 3:
Il complementare di un insieme finito in $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 3$

Corollario 4:
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso $\forall\ n \geq 0$

Definizioni [Rivestimenti ; 197]:
(Lavoriamo con connessi per archi) ; Omeomorfismi locali

T5) Ogni omeomorfismo locale è un'applicazione aperta

Dim:
$f: X \to Y$ omeomorfismo locale ; $V \subseteq_{aperto} X$
$f(V)$ intorno di ogni suo punto $\leftrightarrow \forall\, y \in f(V)\ \exists U \subseteq_{aperto} Y \mid y \in U \subseteq f(V)$
Se $x \in V \mid f(x) = y$ allora per ipotesi $\exists\, A \subseteq_{aperto} X$; $B \subseteq_{aperto} Y \mid x \in A$; $f(A) = B$ e $f_{|A}: A \to B$ omeomorfismo $\to y \in f(V \cap A)$; $U = f(V \cap A)$ aperti in $B \to$ Aperto in Y

Definizioni:
Rivestimento ; Base ; Fibre ; Aperto banalizzante ; Connesso ; Rivestimento di grado d ; sezioni (204) ;
$p: E \to X$ rivestimento $\to p$ omeomorfismo locale e aperto ; $\forall\, x, y \in X\ p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ hanno la stessa cardinalità
$\forall\, Y \subseteq X$ connesso e localmente connesso per archi $p: p^{-1}(Y) \to Y$ è ancora un rivestimento

T6) Proprietà rivestimento:

$p: E \to X$ rivestimento allora:
1) p omeomorfismo locale (dunque aperto)
2) $\forall x, y \in X\ p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ hanno la stessa cardinalità
3) $\forall\, Y \subseteq X$ connesso e localmente connesso per archi $p_|: p^{-1}(Y) \to Y$ è ancora un rivestimento

Dim:
[1] $V \subseteq X$ aperto banalizzante di $p \to p_{|p^{-1}(V)}: p^{-1}(V) \to V$ omeomorfismo locale.
Gli aperti di $p^{-1}(V)$, essendo V un aperto banalizzante, ricoprono $E \to p: E \to X$ omeomorfismo locale
[2] Se $x_0 \in X$; $A \subseteq X \mid A \coloneqq \{x \mid p^{-1}(x)$ hanno la stessa cardinalità di $p^{-1}(x_0)\}$ siccome è non vuoto e X connesso se mostriamo che è aperto chiusi $\to A = X$
Se $V \subseteq X$ aperto banalizzante $\to \forall x \in V\ \ p^{-1}(x)$ interseca ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ in un unico punto
[3] $y \in Y$; $V \subseteq X$ aperto banalizzante (contenente y) di $p: E \to X$ rivestimento.
Y localmente connesso per archi e $V \cap Y$ aperto $\to \exists\, B \subseteq_{aperto} X \mid B \cap Y$ è la componente connessa di y in $V \cap Y$
Sia A la componente connessa di $B \cap V \mid (B \cap Y) \subseteq A \to A \cap Y = B \cap Y_0$
X è localmente connesso per archi $\to A$ aperto e localmente connesso per archi
Ma $A \subseteq V \to A$ banalizzante $\mid A \cap Y$ connesso per archi
$\{A_i\}$ componente connessa di $p^{-1}(A)$; $p: A_i \to A$ omeomorfismo $\to p: A_i \cap p^{-1}(Y) \to A \cap Y$ omeomorfismo $\to \{A_i \cap p^{-1}(Y)\}$ tutte e sole le componenti connesse di $p^{-1}(A \cap Y)$

Definizioni:
Rivestimento universale (Rivestimento $u: Y \to X$; Y connesso e semplicemente connesso) ; semilocalmente semplicemente connesso

T7) Proprietà universale del rivestimento universale:
Sia $u: Y \to X$ un rivestimento universale e $p: E \to X$ un rivestimento.
Allora per ogni coppia di punti $y \in Y$; $e \in E$ tali che $u(y) = p(e)$ esiste un unico morfismo di rivestimenti $\varphi: Y \to E$ tale che $\varphi(y) = e$

In particolare i rivestimenti universali di uno spazio topologico X sono tutti isomorfi tra loro.

T8) Teorema:
Uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi possiede un rivestimento universale se e solo se è semilocalmente semplicemente connesso.

Van Kampen versione universale:
Intro:
A, B due aperti di uno spazio topologico X tale che $X = A \cup B$, supponiamo che A, B ed $A \cap B$ siano connessi per archi e sia $x_0 \in A \cap B$ un punto fissato. Le inclusioni $A \subseteq X$; $B \subseteq X$; $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$ inducono un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(A, x_0) \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "a_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(B, x_0) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

T9) Teorema di Van Kampen:
Nelle notazioni precedenti $\forall\, G$ gruppo, $\forall h, k$ omomorfismi in G tali che $ha_* = k\beta_*$ esiste un unico omomorfismo di gruppi φ che renda commutativo il diagramma.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(A, x_0) \arrow[dr, "f_*"] \arrow[d, "h"] & \\ \pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "a_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & G & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "\varphi"'] \\ & \pi_1(B, x_0) \arrow[ur, "g_*"'] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Corollario:
Se β_* è surgettivo allora anche f_* è surgettivo ed ha come nucle il sottogruppo normale generato da $a_*(\ker \beta_*)$, equivalente:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle a_*(\ker\, \beta_*) \rangle}$$

Corollario:
Se β_* è un isomorfismo allora anche f_* è un isomorfismo.

Definizioni:
Gruppo libero generato da un insieme ; Prodotti liberi

Intro:
Dalla definizione di prodotto libero esiste un unico omomorfismo di gruppi h che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,x_0) \arrow[d] \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0) \arrow[r, "h"] & \pi_1(X,x_0) \\ \pi_1(B,x_0) \arrow[u] \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

con $\uparrow, \downarrow$ le inclusioni nel prodotto libero.

Se chiamiamo $\hat{\alpha}$; $\hat{\beta}$ le composizioni di α_* e β_* con i morfismi di inclusione nel prodotto libero allora il nucleo di h contiene tutti gli elementi della forma: $\hat{\alpha}\hat{\beta}(s^{-1})$ con $s \in \pi_1(A \cap B, x_0)$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(A \cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{N} \arrow[r, "h"] & \pi_1(X,x_0) \\ & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "g"'] \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

T10) Teorema di Van Kampen con prodotti liberi:

Il nucleo di h è il più piccolo sottogruppo normale contenente tutti gli elementi della forma: $\hat{\alpha}\hat{\beta}(s^{-1})$ con $s \in \pi_1(A \cap B, x_0)$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(A \cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & G & \pi_1(X,x_0) \arrow[l, "\varphi"'] \\ & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "g"'] \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

Corollario:
Se S è un insieme di generatori di $\pi_1(A \cap B, x_0)$ allora:

$$\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\langle \hat{\alpha}\hat{\beta}(s^{-1}) \mid s \in S \rangle}$$

Corollario:
Se $A \cap B$ è semplicemente connesso allora:

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)$$

Teoria di Geometria 4: Rivestimenti e Monodromia

Definizioni:
$Omeo(E)$; Sottogruppo propriamente discontinuo

T1) Proprietà omeomorfismi discontinui:
E localmente connesso per archi e $G \subseteq Omeo(E)$ che agisce in modo propriamente discontinua, se $E/_G$ è connesso allora $p: E \to E/_G$ è un rivestimento

Dim:
Sia $e \in E$; $\widehat{U} \in I(e)$ tale che $g(\widehat{U}) \cap \widehat{U} = \emptyset \; \forall \; g \neq Id$
E localmente connesso per archi $\to$ $\widehat{U}$ localmente connesso per archi $\to$ prendiamo $U \subseteq \widehat{U}$ la componente connessa per archi contenente $e \to U$ è un aperto connesso di E e a maggior ragione $g(U) \cap U = \emptyset \; \forall g \neq Id$
p è la proiezione al quoziente $\to$ aperta e $p^{-1}\big(p(U)\big) = \cup\{g(U) \mid g \in G\}$
Basta dimostrare che gli aperti connessi di $g(U)$ al variare di $g \in G$ sono tutte e sole le componenti connesse di $p^{-1}\big(p(U)\big)$ e che $\forall \; g \in G \;\; p: g(U) \to p(U)$ è un omeomorfismo.
Siccome $g(U) \cap h(U) = h(h^{-1}g(U) \cap U) = h(g^{'}(U) \cap U) = \emptyset$ si ha $p^{-1}\big(p(U)\big) = \cup\{g(U) \mid g \in G\}$ aperti connessi e disgiunti $\to$ sono le componenti connesse in $p^{-1}\big(p(U)\big)$
Infine, $p: U \to p(U)$ è aperta e bigettiva $\to$ E' un omeomorfismo e quindi $p: g(U) \to p(U)$ è un omeomorfismo perché composizione di due omeomorfismi $g^{-1}: g(U) \to U$ e $p: U \to p(U)$

T2) Omeomorfismi propriamente discontinui:
$G \subseteq Omeo(E)$; E Hausdorff, se G agisce liberamente $(g(e)e \; \forall e \in E \; \forall g \neq Id)$ e se $\forall \; e \in E \; \exists \; U \in I(e)$ aperto | $g(U) \cap U = \emptyset$ per al più un insieme finito di g allora:
G agisce in modo propriamente discontinuo

Dim:
Siano e ed U come da condizioni, bisogna provare che $\exists \; V$ intorno di $e \mid g(V) \cap V = \emptyset \; \forall g \neq Id$
Sia $\{g_1, \dots, g_n\} = \{g \in G \mid g(U) \cap U \neq 0\}$; siccome E è T2 e G agisce liberamente allora $\exists \; n$ aperti disgiunti $U_1, \dots, U_n \subseteq E \mid g_i(e) \in U_i \; \forall i$
Si verifica che $V = U \cap g_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap g_n^{-1}(U_n)$ è un intorno con le proprietà richieste.

Definizioni:
Sezioni: $p: X \to Y$; $s: Y \to X \mid p(s(y)) = y \; \forall \, y \in Y$

T3) Proprietà sezioni:

$p: X \to Y$ continua ; $s: X \to Y$ sezione continua di p, ossia vale $p(s(y)) = y \; \forall \, y \in Y$ allora:

1) p è un'identificazione
2) X è T2 $\to$ s è un'immersione chiusa

Dim:
[1] p deve essere surgettiva ; bisogna provare che se $A \subseteq Y$ è tale che $p^{-1}(A) \subseteq X$ aperto $\to$ A aperto in Y
Ma $A = s^{-1}(p^{-1}(A))$ ed s continua $\to$ A aperto
[2] s è iniettiva ; bisogna dimostrare che se X è T2 $\to$ s è chiusa
Sia $C \subseteq Y \to s(C) = s(Y) \cap p^{-1}(C)$ quindi basta mostrare che $s(Y)$ è chiuso in X.
Dato che $x \in S(Y) \leftrightarrow x = sp(x)$ possiamo scrivere $s(Y) = f^{-1}(\Delta)$ con $\Delta \subseteq_{diagonale} X \times X$ e $f: X \to X \times X$ tale che $f(x) = (x, sp(x))$
X è T2 $\to$ Δ chiusa $\to$ $s(Y)$ è chiusa

T4) Lemma:

Sia $p: E \to X$ un rivestimento $\to \forall \, V \subseteq X$ banalizzante e $\forall \, e \in p^{-1}(V) \; \exists! \, S_e: V \to p^{-1}(V)$ sezione continua di p tale che $S_e(p(e)) = e$

Dim:
Sia $U \subseteq p^{-1}(V)$ la componente connessa tale che $e \in U$. Dato che $p_{|U}: U \to V$ è un omeomorfismo $\to S_e = p_{|U}^{-1}$ è una sezione con le proprietà richieste.
Se $u: V \to E$ è un'altra sezione continua tale che $u(p(e)) = e \to$ dato che $u(V) \subseteq p^{-1}(V)$ e V connesso, $u(V)$ è contenuto nella componente connessa di $p^{-1}(V)$ che contiene e, ossia $u: V \to U$ allora
$u = p_{|U}^{-1} = S_e$

Definizioni:
Sollevamento di un'applicazione continua

T5) Unicità del sollevamento:

$p: E \to X$ rivestimento ; Y connesso ; $f: Y \to X$ continua. Allora $\forall\ g, h: Y \to E$ sollevamenti di f vale $g \equiv h$ oppure $g(y) \neq h(y)\ \forall\ y \in Y$

Dim:
Siano $g, h: Y \to E$ i due sollevamenti di f ; $A \coloneqq \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$, siccome Y è connesso basta mostrare che A ; $Y \setminus A$ sono aperti.
Sia $y \in Y$; $V \subseteq X$ aperto ban. tale che $f(y) \in V$
Siano $U_g, U_h \subseteq p^{-1}(V)$ le componenti connesse tali che $g(y) \in U_g$; $h(y) \in U_h$ e consideriamo l'aperto $W = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$
Se $y \in A \to g(y) = h(y) \to U_g = U_h$ ma $P_{|U_g = U_h}$ è iniettiva allora (Altrimenti non sollevano):
$g(w) = h(w)\ \forall w \in W \to W \subseteq A$ cioè W è intorno di $y \in A \to A$ intorno di ogni suo punto $\to A$ aperto
Se $y \in Y \setminus A \to U_h \cap U_g = \emptyset \to W \cap A = \emptyset \to Y \setminus A$ aperto

Corollario:
$p: E \to X$ rivestimento ; Y connesso ; $f: Y \to X$ continua.
Allora $\forall\ y \in Y$; $\forall\ e \in E$ tali che $p(e) = f(y)$ ed $\exists$ al più un sollevamento $g: Y \to E$ di f tale che $g(y) = e$

T5) Sollevamento cammini:

$p: E \to X$ rivestimento ; $a: I \to X$ cammino continuo ed $e \in E \mid p(e) = a(0) \to \exists!\ a_e: I \to E$ sollevamento di a tale che $a_e(0) = e$

Dim:
L'unicità segue dal teorema di unicità del sollevamento.
Per il numero di Lebesgue $\exists n$ ed n aperti banalizzanti $V_1, \dots, V_n \subseteq X$ tali che $Im\left(a_{|\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}\right) \subseteq V_i\ \forall\ i$
Definiamo per ricorrenza $a_i: \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \to E \mid p\big(a_i(t)\big) = a(t)$; $a_1(0) = e$; $a_i\left(\frac{i}{n}\right) = a_{i+1}\left(\frac{i}{n}\right)\ \forall i$
L'incollamento degli a_i restituisce a_e richiesto, infatti:
Supponiamo di avere a_i, sia $e_i = a_i\left(\frac{i}{n}\right)$ e $S_{i+1}: V_{i+1} \to p^{-1}(V_{i+1})$ la sezione di p tale che $S_{i+1}\left(a\left(\frac{i}{n}\right)\right) = e_i$
allora $a_{i+1}(t) = S_{i+1}\big(a(t)\big)$ per $\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}$ e si ottiene $a_e = a_1 * \dots * a_n$

T6) Lemma della L:

$L \coloneqq \{(t,s) \in I^2 \mid ts = 0\}$; $i: L \hookrightarrow I^2$ morfismo di inclusione ; $p: E \to X$ rivestimento ; $F: I^2 \to X$ e $f: L \to E$ continue tali che $pf = Fi \to \exists G: I^2 \to E$ sollevamento di F tale che $Gi = f$

$$\begin{array}{ccc} L & \to^{f} & E \\ \downarrow^{i} & \nearrow^{G} & \downarrow^{p} \\ I^2 & \to^{F} & X \end{array}$$

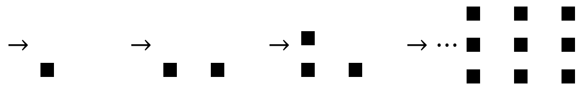
Dim:

[Caso particolare] $Im(F) \subseteq V$ aperto banalizzante ; $pf = Fi \to f(L) \subseteq p^{-1}(V)$ e siccome L è connesso allora $f(L) \subseteq U$ componente connessa di $p^{-1}(V)$

Sia $s: V \to U$ l'inversa dell'omeo $p: U \to V$. Ponendo $G \subseteq SF$ si ha $pG = psF = F \to G$ sollevamento ed inoltre $f = spf = sFi = Gi$

[Caso generale] Per il numero di Lebesgue esistono n ed n^2 aperti banalizzanti $V_{ij} \subseteq X$ tali che $F\big(Q(i,j)\big) \subseteq V_{ij}$ dove $Q(i,j) = \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}; \frac{j}{n}\right]$

Dotando $\mathbb{N}^2$ del'ordinamento totale $(i,j) \leq (h,k)$ se $i+j < h+k$ oppure $i+j = h+k$ e $j \leq k$ si osserva che: $Q(h,k) \cap \big(L \cup \bigcup_{(i,j)\leq(h,k)} Q(i,j)\big) = \bigcup\{$due lati contigui di $Q(h,k)\}$ Possiamo applicare il caso particolare ai $Q(h,k)$ e costruire $G_{hk}: L \cup \bigcup_{(i,j)\leq(h,k)} Q(i,j) \to E$ e $G = G_{mn}$ è quello richiesto.



T7) Teorema di sollevamento dell'omotopia:

$p: E \to X$ rivestimento ; $F: I^2 \to X$; $a: I \to E$ continua tali che $F(t,0) = p\big(a(t)\big) \forall\, t \in I$

Allora $\exists!$ sollevamento $G: I^2 \to E$ di F tale che $G(t,0) = a(t)\ \forall\, t$

Dim:

Unicità garantita dal teorema di unicità dei sollevamenti dato che I^2 è connesso.

Sia $b: I \to E$ il sollevamento di $s \to F(0,s)$ tale che $b(0) = a(0)$

L'incollamento $a * b$ definisce $f: L \to E$, $f(t,0) = a(t)$ e $f(0,s) = b(s)$ che per costruzione verifica, con F, le ipotesi del teorema della L.

T10) Lemma di sollevamento dei cammini omotopi:

$p: E \to X$ rivestimento ; $\beta, \gamma \in \Omega(X,a,b)$; $e \in E$ tale che $p(e) = a$; siano $\gamma_e, \beta_e: I \to E$ sollevamenti di γ, β tali che $\gamma_e(0) = \beta_e(0) = e$; allora sono equivalenti:

1) $\gamma \sim \beta$

2) $\gamma_e(1) = \beta_e(1)$ e $\gamma_e \sim \beta_e$

Dim:

[1 → 2] Sia $F: I^2 \to X$ omotopia di cammini t.c. $F(0,t) = \gamma(t); F(1,t) = \beta(t); F(s,0) = \gamma; F(s,1) = \beta$

Per il teorema del sollevamento dell'omotopia $\exists\ G: I^2 \to E$ continua e tale che $G(s,0) = e$

Per l'unicità si ha $G(0,t) = \gamma_e(t)$ e $G(1,t) = \beta_e(t)$

Il cammino $G(s,1)$ è un sollevamento continuo di 1_b e pertanto deve essere costante $\to \gamma_e(1) = \beta_e(1)$ e G omotopia di cammini.

[**2 → 1**] Se $\gamma_e \sim \beta_e \to$ anche $\gamma = p\gamma_e \sim p\beta_e = \beta$

T11) S^1:

$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

Dim:

Consideriamo la mappa continua $p: \mathbb{R} \to S^1 \mid t \to e^{2\pi i t}$; pè surgettiva, mostriamo che è un rivestimento.

$\forall\ ]a, b[\ \subseteq \mathbb{R}$ si ha $p^{-1}(p]a, b[) = \cup\{]a + n, b + n[\ \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Se $|b - a| < 1 \to \forall n \in \mathbb{Z}$ l'intervallo $]a + n, b + n[$ è una componente connessa di $p^{-1}(p]a, b[)$ e l'applicazione $p:]a + n, b + n[\ \to S^1$ è un omeomorfismo sull'immagine (continua, biunivoca e aperta).

Se consideriamo un cammino $a \in \Omega(S^1, x_0, y_0)$ per il sollevamento dei cammini sappiamo che, fissato t tale che $p(t) = x_0$; $\exists! \hat{a} \in \Omega(\mathbb{R}, t_0, \hat{a}(1))$ che soleva a

Chiamiamo grado di a il valore $\hat{a}(1)$

Grazie al Sollevamento dei Cammini Omotopi vale che cammini omotopi hanno lo stesso grado.

Consideriamo $\varphi: \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ tale che $\varphi(a) = \hat{a}(1)$

E' ben definita perché cammini omotopi hanno lo stesso grado.

φ omeomorfismo:

$\widehat{a * \beta} = \hat{a} * \left(\text{Sollevamento di } \beta \text{ a partire da } \hat{a}(1)\right) = \left(\hat{\beta} + \hat{a}(1)\right) \to \widehat{a * \beta}(1) = \left(\hat{\beta}(1) + \hat{a}(1)\right) =$
$= \hat{\beta}(1) + \hat{a}(1)$

$\ker(\varphi) = \{0\}$

$\ker(\varphi) = \{[a] \mid \hat{a}(1) = 0\} = \{[1_1]\}$ perché i cammini di grado 0 sono tutti e soli quelli $\sim$ costante quindi iniettivo.

φ surgettivo:

Lo è se contiene 1, in questo caso è vero poiché $p_{|[0,1]}: [0,1] \to S^1$ ha grado 1 $\to$ Surgettivo

Dunque $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

T12) Teorema di Borsuk:

Non esiste $f: S^2 \to S^1$ continua tale che $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in S^2$

Dim:

Sia $f: S^2 \to S^1$ continua, vogliamo mostrare che $\exists\ x_0 \in S^2 \mid f(-x_0) \neq -f(x_0)$

Consideriamo il rivestimento $p: \mathbb{R} \to S^1$; $p(t) = e^{2\pi i t}$ allora $\exists g: S^2 \to \mathbb{R}$ che solleva f ossia $pg = f$

Dunque $\exists x_0 \in S^2 \mid g(x_0) = g(-x_0) \to f(x_0) = f(x_0) \to\ f(-x_0) \neq -f(x_0)$

Ma esiste questo x_0?

Sia $h: S^2 \to \mathbb{R}$ continua con $h(x) = g(x) - g(-x)$; S^2 è connessa quindi $h(S^2)$ è connessa$\subseteq \mathbb{R}$ quindi convesso. $\forall\ y \in S^2\ \ h(S^2)$ contiene $h(y)$; $h(-y)$ e quindi anche la combinazione convessa:

$\frac{1}{2}h(y) + \frac{1}{2}h(-y) + \frac{1}{2}\big(g(-y) - g(y)\big) = 0 \to 0 \in h(S^2) \to \exists x \in S^2 \mid h(x) = g(x) + g(-x) = 0$

T13) Teorema del punto fisso di Brouwer:

Ogni applicazione continua $f: D^2 \to D^2$ ha un punto fisso,

Dim:

Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x\ \forall x \in D^2$

Possiamo definire $r: D^2 \to S^1$; $r(x) = x + t\big(x - f(x)\big)$ dove $t \geq 0$; $\|r(x)\| = 1$

Se $f(x) \notin S^1 \to (x)$ è il punto di intersezione di S^1 con la retta passante per x di estremo $f(x)$

Se $f(x) \in S^1 \to$ la semiretta interseca S^1 nei due punti $f(x) \neq r(x)$

r continua e $r(x) = x\ \forall x \in S^1 \to r$ è una retrazione del disco sul bordo, assurdo.

Definizioni [Monodromia ; 215]
Monodromia di un rivestimento ; Azione sinistra ; Azione destra ; Azioni fedeli/libere/transitive ; Azioni compatibili

T14) Rivestimenti e monodromia:
$p: E \to X$ rivestimento connesso ; $e \in E$; $x = p(e)$ allora:

1) L'omomorfismo di gruppi $p_*: \pi_1(E, e) \to \pi_1(X, x)$ è iniettivo e $p_*\pi_1(E, e) = \{[a] \in \pi_1(X, x) | e[a] = e\}$
2) $\exists$ bigezione fra la fibra $p^{-1}(x)$ e l'insieme dei laterali dx di $p_*\pi_1(E, e)$ in $\pi_1(X, x)$
3) $\forall [a] \in \pi_1(X, x)$ vale $[a]^{-1} p_*\pi_1(E, e)[a] = p_*\pi_1(E, e[a])$
In particolare i sottogruppi $\{p_*\pi_1(E, u) | \ p(u) = x\}$ sono tutti e soli i coniugati di $p_*\pi_1(E, e)$ in $\pi_1(X, x)$

Dim:
[**1**] L'iniettività deriva dal fatto che cammini omotopi si sollevano a cammini omotopi con gli stessi estremi.
$[\subseteq] [a] \in p_*\pi_1(E, e) \to \exists \beta: I \to E$ con $\beta(0) = \beta(1) = e$ e tale che $[a] = [p\beta] \to \beta(1) = a_e(1) \to e[a] = e$
$[\supseteq]$ Sia $a \in \Omega(X, x, x)$ con $Mon(e, a) = e[a] = e \to a_e$ è chiuso $\to [a] = [pa_e] \in p_*\pi_1(E, e)$
[2] La monodromia permette di definire l'applicazione $\pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$; $[a] \to e[a] = Mon(e, a)$
Mostriamo che è surgettiva e che $e[a] = e[\beta] \leftrightarrow$ si ha $[a][\beta^{-1}] \in p_*\pi_1(E, e)$
Se $u \in p^{-1}(x)$, dato che E connesso per archi , $\exists \gamma: I \to E$ tale che $\gamma(0) = e$; $\gamma(1) = u$
Per l'unicità del sollevamento $\gamma = (p\gamma)_e$ e quindi per definizione di monodromia $u = e[p\gamma] \to$ surgettiva
Infine siano $[a], [\beta] \in \pi_1(X, x) \to$ vale $e[a] = e[\beta] \leftrightarrow e[a][\beta^{-1}] = e \leftrightarrow [a][\beta]^{-1} \in p_*\pi_1(E, e)$
[3] Basta mostrare che $\forall a \in \Omega(X, x, x)$ vale: $[a]^{-1} p_*\pi_1(E, e)[a] \subseteq p_*\pi_1(E, e[a])$
Sia $a_e: I \to E$ sollevamento di a tale che $a_e(0) = e$; allora $a_e(1) = e[a]$ e vale quindi:
$i(a_e) * \Omega(E, e, e) * a_e \subseteq \Omega(E, e[a], e[a])$

T15) Corollario:
$\pi_1(\mathbb{p}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$

Dim:
La proiezione $p: S^n \to \mathbb{p}^n(\mathbb{R}) \cong {S^n}/{\sim}$ con $x \sim y \leftrightarrow x = \pm y$ è un rivestimento connesso di grado 2.
Siano $e \in S^n$, $x = p(e) \to p_*\pi_1(S^n, e) \subseteq \pi_1(\mathbb{p}^n(\mathbb{R}), x)$ ha esattamente due laterali destri.
Se $n \geq 2 \to S^n$ semplicemente connesso $\to p_*\pi_1(S^n, e) = 0$
Quindi $\pi_1(\mathbb{p}^n(\mathbb{R}), x)$ ha esattamente due elementi → è $\mathbb{Z}_2$ a meno di isomorfismo.

T16) Proposizione:
Sia dato un diagramma commutativo di applicazioni continue con p, q rivestimenti.
Allora $\forall\ e \in E$; $\forall\ [a] \in \pi_1(X, p(e))$ vale $\varphi(e[a]) = \varphi(e)f_*([a])$

$$\begin{array}{ccc} E & \to^{\varphi} & F \\ \downarrow^{p} & & \downarrow^{q} \\ X & \to^{f} & Y \end{array}$$

Dim:
$a: I \to X$ chiuso con punto base $p(e)$; $a_e: I \to E$ l'unico sollevamento di a tale che $a_e(0) = e$
Per definizione di monodromia vale $a_e(1) = e[a] \to \varphi(e[a]) = (a_e(t))$
Consideriamo $b: I \to F$; $b(t) = \varphi(a_e(t))$ siccome $q(b(t)) = q\varphi a_e(t) = fpa_e(t) = fa(t)\ \forall t \to b$ è il sollevamento di fa tale che $b(0) = \varphi(e)$ e quindi $\varphi(e)f_*([a]) = \varphi(e)[fa] = b(1) = \varphi a_e(1) = \varphi(e[a])$

Teoria di Geometria 5: Analisi complessa

Definizioni:
Algebra delle serie formali ; Ordine di una serie ; Famiglie sommabili ; Inversa di una serie formale ; Raggio di convergenza ; somme e prodotti di serie convergenti

T1) Formula di Hadamard:
$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$

Dim:
$\lim_{n\to\infty} \sup(u_n) \coloneqq \lim_{\rho\to\infty} \sup_{n\geq\rho}(u_n)$ per Cauchy $\begin{cases} \text{se } \lim\sup(v_n)^{\frac{1}{n}} < 1 \to \sum v_n < \infty \\ \text{se } \lim\sup(v_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \to \sum v_n = \infty \end{cases}$

Poniamo $v_n = |a_n|\rho^n$ e diventa $\begin{cases} \text{se } \lim\sup|a_n| < \frac{1}{\rho} \to \sum v_n < \infty \\ \text{se } \lim\sup|a_n| \geq \frac{1}{\rho} \to \sum v_n = \infty \end{cases}$

Corollario [Teorema della derivata di una serie convergente]:
Sia $S(x) = \sum_{n\geq} a_n x^n$ una serie formale e $S^{'}(x) = \sum_{n\geq} n a_n x^{n-1}$ allora le due serie hanno lo stesso ρ

T2) Esponenziale complesso:
L'esponenziale complesso è un rivestimento

Dim:
$e: \mathbb{R} \to S^1 \mid e(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$
1) E' surgettiva ; $\forall\ ]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ vale $e^{-1}\big(e(]a,b[)\big) = \cup\{]a+n, b+n[\mid n \in \mathbb{Z}\}$
2) Se $|b-a| < 1 \to \forall\ n \in \mathbb{Z}\ \ ]a+n, b+n[$ è una componente connessi di $e^{-1}\big(e(]a+,b[)\big)$ quindi $e:]a+n, b+n[\to S^1$ è un omeomorfismo sull'immagine.

Definizioni:
Funzioni analitiche

T3) Convergente → Analitica:
$S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergente per $|z| \leq \rho \rightarrow$ la funzione $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ è analitica in $B°(0,\rho)$

Dim:
Sia $x_0 \in B(0,\rho)$; $|x_0| = r_0 < \rho$ vogliamo mostrare:
1) $\sum_{\rho\geq 0} \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} x^p$ è convergente di raggio $\geq \rho - r_0$
2) La sua somma $\sum_{\rho\geq 0} \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p = S(z)$
[**1**] Sia $a_n^* = |a_n|$; $S^{(p)}(x_0) = \sum_{n\geq 0\,;n=p+q} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q$ quindi $|S^{(p)}(x_0)| \leq \sum_{n\geq 0\,;n=p+q} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}^* r_0^q$
Sia $r_0 < r < \rho$ allora $\sum_{\rho\geq 0} \frac{1}{\rho!} S^{(p)}(x_0)(r - r_0)^p \leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q}^* r_0^q (r - r_0)^p =$
$= \sum_{p+q=n} a_n^* \frac{n!}{p!q!} r_0^q (r - r_0)^p = \sum_n a_n^* r^n < \infty$
[2] $\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} x_0^a (x - x_0)^p$ è assolutamente convergente per [1] → la somma non dipende dall'ordine, sommiamo quindi in due modi e otteniamo l'uguaglianza:

$$\sum_{p+q=n\,;\,n\geq 0} a_n (x_0 + x - x_0)^n = \sum a_n x^n = S(x)$$
$$\sum_{\rho\geq 0} \left(S^{(p)}(x_0)\right) (x - x_0)^p \frac{1}{p!}$$

T4) Infinitamente differenziabile:
f infinitamente differenziabile su D aperto ; confizione necessaria e sufficiente affinché f sia analitica su D è che ogni $x_0 \in D$ abbia V intorno | $\exists\, M, t$ finiti e maggiori di 0 tali che $\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)\right| \leq M t^p \quad \forall\, p \geq 0$

T5) Principio del prolungamento analitico:
f analitica su D aperto connesso ; $x_0 \in D$ allora sono equivalenti:
a) $f^{(n)}(x_0) = 0\ \forall\, n \geq 0$
b) f è identicamente 0 in un intorno di x_0
c) f identicamente 0 su D

Dim:
[$\boldsymbol{g \rightarrow a}$] Ovvia
[$\boldsymbol{b \rightarrow c}$] Sia $D' = \{x \in D \mid$ in un intorno di x f è $0\}$; $x_0 \in D' \rightarrow D' \neq \emptyset$ allora se D' è aperto/chiuso è tutto.
Se $x_1 \in \overline{D'} \rightarrow x_1 \in D'$ infatti è analitica nel punto quindi esiste un intorno per il quale la funzione si sviluppa in serie e dunque siccome $b \rightarrow a$ vale $f^{(n)}(x_1) = 0 \rightarrow x_0 \in D'$

Corollario I:
L'anello delle funzioni analitiche in un aperto connesso è un dominio di integrità

Corollario II:
Se due funzioni analitiche su D aperto connesso coincidono in un intorno di un punto allora coincidono su tutto D

Definizioni [Zeri di una funzione analitica]:
Ordine di uno 0 ; ordine della serie ; se $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n \ | f(x_0) = 0$ ma non identicamente nulla ; se $k_{\min} \ | a_k \neq 0 \rightarrow f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ e $g(x_0) = a_k \neq 0$; k è l'ordine dello 0 , se è 1 si dice semplice altrimenti si dice multiplo

<u>T6) Analitica e punti isolati:</u>
Se f è analitica si di un aperto connesso e $f \neq 0 \rightarrow$ gli 0 di f sono un insieme discreto (E dunque formato da punti isolati)

Dim:
Se compatto allora l'insieme è finito ; dal Corollario II $\forall$ punto esiste un intorno nel quale è non nulla.

Definizioni [Funzioni Meromorfe]:
Su D aperto una funzione è meromorfa se è analitica a meno di un numero finito di poli e zeri (Isolati)

<u>T7) Derivata:</u>
f' di una funzione f meromorfa su D è ancora meromorfa su D con gli stessi poli.
Se x_0 è un polo di ordine k per $f \rightarrow$ di ordine $k+1$ per f'

Dim:
f' è definita e analitica su $D' = D \backslash$#finito di poli
Se $f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k} g(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{k+1}} g_1(x)$ con $g_1(x) = (x - x_0)g'(x) - kg(x)$ che non si annulla in $x_0 \rightarrow x_0$ polo di ordine $k+1$ per $f'(x)$

Teoria di Geometria 6: Funzioni olomorfe ed Integrale di Cauchy

Definizioni:
Un cammino differenziabile: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ per cui le posizioni $x(t)$; $y(t)$ sono funzioni derivabili con continuità ;
Forma differenziale su D aperto: $w = Pdx + Qdy$ con P, Q continue ;
$\int_\gamma w := \int_a^b \left(P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right)dt$; Cambio di parametro $u \to t(u)$ con t continua, con derivata > 0 , $t(a) = a$, $t(b) = b \to f\big(t(u)\big)t'(u)du \to$ L'integrale non cambia a meno di riparametrizzazione ;
Se la derivata è $< 0 \to \int_\gamma w = -\int_{\gamma'} w$ [Cambio di orientazione] ; Primitiva se F differenziabile su D e tale che $dF = w \to \int_\gamma dF = F(b) - F(a)$; Esatta se ammette una primitiva

T1) Condizione forma esatta:
w è esatta $\leftrightarrow \int_\gamma w = 0 \ \ \forall\, \gamma$ cammino chiuso differenziabile a tratti

Dim:
$[\to]$ $w = dF \to \int_\gamma w = F(a) - F(a)$
$[\leftarrow]$ $(x_0, y_0) \sim_{dipende\ \ solo\ dagli\ \ estremi} (x, y)$; per ipotesi sia $F(x,y) = \int_\gamma w$ ed effettuiamo un piccolo incremento lungo gli assi, vale: $F(x+h, y) - F(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} w \to \frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(\varepsilon, y)d\varepsilon$
Quindi $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$; $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \to w = Pdx + Qdy$

T2) Forme esatte e rettangoli:
D disco aperto ; se $\int_\gamma w = 0 \ \ \forall\, \gamma$ bordo di un rettangolo con assi paralleli $\to w$ è esatta

Dim:
(x_0, y_0) centro del disco ; $(x,y) \in D \to \exists \gamma_1, \gamma_2$ cammini bordi di un rettangolo da (x_0, y_0) in (x,y) ma per il teorema precedente la loro somma è nulla, dunque: $\int_{\gamma_1} w = \int_\gamma w \to_{stesso\ \ ragionamento} \frac{\partial F}{\partial x} = P$; $\frac{\partial F}{\partial y} = Q \to$ Esatta

Definizioni:
Formula di Green - Riemann: $\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

T3) Proprietà di Green - Riemann:
$w = Pdx + Qdy$; forma differenziale su di un aperto D connesso ; se $\frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}$ esistono e sono continue:

1) w esatta $\to \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ [Chiusa]
2) Se D è un disco $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \to w$ esatta

Dim:
[1] Esatta $\to_{GR}$ $\forall$ rettangolo $\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$; se $\exists$ un punto per il quale $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0 \to \iint \ \neq 0$ Assurdo
[2] Per G-R $\to \int_\gamma w = 0$ con γ bordo di un rettangolo ; se D è un disco $\to w$ esatta per T2

Definizioni:

$w = Pdx + Qdy$ è chiusa se ammette una primitiva locale ; chiusa $\leftrightarrow$ l'integrale su ogni rettangolo è nullo ; chiusa $\leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $(P, Q$ devono ammettere derivata) ; Vogliamo estendere la definizione di integrale a cammini continui non differenziabili ; Primitiva lungo un cammino $\gamma: [a,b] \to D_{aperto}$ continua è $f(t)$ $| \forall \tau \in [a,b]$ $\exists F$ primitiva di w in un intorno di $\gamma(\tau)$ | $F(\gamma(t)) = f(t)$ per t vicino a τ

T4) Teorema di esistenza Primitiva lungo un cammino:

w chiusa in D ; $\gamma: [a,b] \to D_{aperto}$ continua allora esiste una primitiva di w lungo γ.
Due diverse primitive differiscono per una costante.

Dim:

[Esistenza] Ogni $t \in [a,b]$ ha un intorno mappato da γ dove w ha una primitiva F
$[a,b] = I$ compatto $\to \exists$ sequenza finita $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ | ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ ammette una primitiva F_i ; l'intersezione $U_i \cap U_{i+1}$ contiene $\gamma(t_{i+1})$ quindi $\neq \emptyset \to$ Connesso $\to F_{i+1} - F_i$ costante $\to F_{i+1}$ coincide con F_i su $U_i \cap U_{i+1}$
Definiamo $f(t) := F_i(\gamma(t))$ $\forall t \in U_i$; f è continua e soddisfa la proprietà della primitiva lungo un cammino.
[Unicità] f_1, f_2 due primitive ; $f_1(t) - f_2(t) =_{per\ def.} F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t))$ in un intorno di $t \in [a,b]$
Ma $F_1 - F_2$ è costante $\to f_1 - f_2$ è costante in un intorno di ogni punto $\to f_1 - f_2$ è localmente costante.
Localmente costante su di un connesso $\to$ Costante [Infatti $U = \{x \in [a,b] \mid f(x) = u\}$ è aperto/chiuso]

Osservazione:

Ci permette di definire $\int_\gamma w$ con γ semplicemente continua.

Esempio (Forma differenziale chiusa non esatta):

$\frac{dz}{z}$ chiusa in $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$

T5) Indice:

γ cammino chiuso che non passi per l'origine $\to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$ è intero

Dim:

$w = \frac{dz}{z}$ forma chiusa ; nella dimostrazione di T4 si sceglie F una determinazione del logaritmo $\log z$
Quindi $f(b) - f(a)$ è diff. di derivata del logaritmo nel punto $\gamma(a) = \gamma(b)$ $\to$vale $2\pi i n$ con n intero.

Definizioni:
Omotopia tra due cammini

T6) Primitiva lungo un'Omotopia:

w chiusa in D ; $G: I^2 \to D$ omotopia $\to \exists f$ primitiva di w lungo l'omotopia e due diverse differiscono per una costante.
($\exists!$ a meno di costanti la primitiva su di un rettangolo F di w | $\forall$ intorno $\delta(t,u)$ vale $F(\delta(t,u)) = f(t,u)$ con $(t,u) \to \delta(t,u)$ mappa continua del rettangolo)

Dim:
$D \coloneqq \bigcup_{j\in J} U_j$; con Lebesgue esistono $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = 1$ e $0 \neq S_0 < S_1 \ldots < S_k = 1$ tali che $G([t_i, t_{i+1}] \times [S_j, S_{j+1}]) \subseteq U_{ij}$
Scegliamo F_{00} primitiva su $U_{00} \to f_{|[0,t_1]\times[0,S_1]} \coloneqq F_{00}(G(t,s))$
Scegliamo F_{10} in U_{10} in modo che $F_{10}(t_1, 0) = F_{00}(t_1, 0) \to$ segue che $F_{10}(t_1, s) = F_{00}(t_1, s)$ per $s \leq 1$
Iteriamo così.

T7) Uguaglianza per omotopia:

Se γ_0 ; γ_1 sono cammini omotopi su D con estremi fissati allora:
$\int_{\gamma_0} w = \int_{\gamma_1} w \;\; \forall\, w$ chiusa

Dim:
δ la mappa di omotopia ed f una primitiva di w rispetto a δ
f costante sull'asse verticale $t = 0$; $t = 1$ di $I \times I \to$
$f(0,0) = f(0,1)$; $f(1,0) = f(1,1) \to \begin{cases} \int_{\gamma_0} w = f(1,0) - f(0,0) \\ \int_{\gamma_1} w = f(1,1) - f(0,1) \end{cases}$

T8) Cammini chiusi:

γ_0 , γ_1 cammini omotopi chiusi $\to \forall\, w$ chiuso $\int_{\gamma_0} w = \int_{\gamma_1} w$

T9) Forme chiuse ed esatte:

Ogni forma w chiusa su di un semplicemente connesso è esatta.

Dim:
Da T8 $\to \int_{\gamma} w = 0 \;\forall\, \gamma$ cammino chiuso $\to$ Ammette una primitiva

<u>Indice di Cauchy</u>

$I(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ [Sappiamo che è intero]

Con γ cammino chiuso su $\mathbb{C}$; $a \in \mathbb{C}$

Proprietà:

1) Se a è fissato $I(\gamma, a)$ è costante se γ non sorpassa a

Idea:

Segue direttamente da T8

2) Se γ fissato $\to I(\gamma, a)$ è localmente costante fino a che varia nella zona

Idea:

Basta variare γ rimanendo nella zona senza toccare a e segue da P1

3) γ in un semplicemente connesso con $a \notin$ Parte interna di $\gamma \to I(\gamma, a) = 0$

Idea:

Si deforma per P2 fino al punto

4) γ cerchio percorso in verso positivo, allora $I(\gamma, a) = 0$ se $a \notin \gamma°$; $I(\gamma, a) = 1$ se $a \in \gamma°$

5) Definiamo il prodotto: $t \to \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ (I due cammini non devono passare da 0) allora:
$I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$

6) Dati γ_1, γ_2 due cammini chiusi su $\mathbb{C}$; se γ_1 non prende mail il valore 0 e se vale $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$ allora la mappa $t \to \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ non prende mai il valore 0 e vale $I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0)$

Teoria di Geometria 7: Funzioni Olomorfe e Teorema dei Residui

Definizioni:

Differenziabile su $\mathbb{R}^2$ se $f(x_0+h, y_0+k) = ah + bk + \delta\sqrt{h^2+k^2}$

Olomorfa se $\exists \lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u}$ con u complesso

T1) Condizioni di Cauchy

f olomorfa in un punto $\leftrightarrow$ differenziabile e $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Dim:

[→] Olomorfa $\to f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = c(h+ik) + a(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \to \frac{\partial f}{\partial x} = c\,;\frac{\partial f}{\partial y} = ic$
$\to \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

[←] differenziabile e $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \to c = a\,; ic = b \to f$ olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$

Osservazione (Derivata complessa):

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ equivalente, infatti:

$$z = x+iy \to \begin{cases} dz = dx + idy \\ d\bar{z} = dx - idy \end{cases} \to \begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = \frac{1}{2}(dz - d\bar{z}) \end{cases} \to_{Cauchy} df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}$$

Quindi: $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,; \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \to \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \leftrightarrow \text{Olomorfa}\right)$

T2) Teorema di Cauchy:

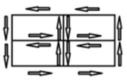
Se $f(z)$ olomorfa su di un aperto $D \subseteq \mathbb{C} \to f(z)dz$ è una forma differenziale chiusa

Dim (Hp aggiuntive):

Se le derivate parziali sono continue → Chiusa $\leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ che è equivalente alla condizione di Cauchy.

Dim:

$f(z)dz$ chiusa $\leftrightarrow \forall$ cammino/rettangolo chiuso γ l'integrale $\int_\gamma f(z)dz = 0$



Suddividiamo in sottorettangoli $R_i \to \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^4 a(R_i)$ e deve essercene uno R_1^* tale che:

$|A(R_1^*)| \geq \frac{1}{4}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \to_{iterando} |A(R_k^*)| \geq \frac{1}{4^k}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \to_{C.di\ Conv.Cauchy} \exists\, z_0 \in R_k^*\ \forall k \to z_0 \in D$ e f olomorfa in z_0 Sviluppiamo: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z)|z-z_0|$ con $\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0$ da cui:

$\int_{\gamma(R_k^*)} f(z)dz = f(z_0)\int_{\gamma(R_k^*)} dz = f'(z_0)\int_{\gamma(R_k^*)}(z-z_0)dz + \int_{\gamma(R_k^*)} \varepsilon(z)|z-z_0|dz$

I primi due termini valgono 0 mentre l'ultimo (trascurabile rispetto all'area R_k^*) si comporta come $\frac{1}{4^k} \to |a(R)| = 0 \to \int_\gamma f(z)dz$

Corollario I:

$f(z)$ olomorfa su $D \to \exists$ una primitiva locale (Olomorfa)

Corollario II:

$f(z)$ olomorfa su $D \to \int_\gamma f(z)dz = 0\ \ \forall\, \gamma$ cammino olomorfo ad un punto

T3) Formula integrale di Cauchy:

f olomorfa su di un aperto D ; $a \in D$; γ cammino chiuso non passante per a ; $I(\gamma, a)$ indice del cammino allora:

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = I(\gamma,a)f(a)$

Dim:

Costruiamo $g(z) \mid \begin{cases} g(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & per\ z \neq a \\ g(z) = f'(a) & per\ z = a \end{cases}$ è continua ed è olomorfa su $D\backslash a$ per T2 vale:

$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = 0 \rightarrow$ per definizione di Indice di Cauchy: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = I(\gamma,a)f(a)$

T4) Teorema degli esponenti di Taylor:

$f(z)$ olomorfa su $D = \{z \mid |z| < \rho\} \rightarrow f$ si può scrivere come serie di potenze sul disco

Dim:

Osserviamo che se ne troviamo una che converge per $|z| < r$ →indipendente da r per unicità.

Sia $r < r_0 < \rho$; per T3 se $\gamma = r_0 S^1$ allora $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t-a}dt$ per $|z| < r$

Ma $\frac{I}{t-z} = \frac{I}{t}\cdot\frac{I}{1-\frac{z}{t}} = \frac{I}{t}\left(I + \frac{z}{t} + \cdots + \frac{z^n}{t^n} + \cdots\right) \rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\geq 0}\frac{f(t)z^n}{t^{n+1}}dt \rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con:

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_0}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt$

Corollario:

Olomorfa → Analitica

E' noto che Analitica→ ∃ derivate → Olomorfa quindi:

Olomorfa ↔ Analitica (Sul disco)

T5) Teorema di Morera (Convesso del Teorema di Cauchy):

$f(z)$ continua su $D \subseteq_{aperto} \mathbb{C}$; se $f(z)dz$ è chiusa → $f(z)$ olomorfa

Dim:

f ha una primitiva locale ; la primitiva è olomorfa e $f = g'$ è la derivata di una olomorfa → f olomorfa

Corollario:

$f(z)$ continua su D e olomorfa su $D\backslash\Delta$ con Δ curva → f olomorfa su tutto D

T6) Principio di simmetria di Schwartz:

Sia D un aperto connesso simmetrico rispetto all'asse reale (Di componenti simmetriche D_1, D_2)

Data f olomorfa e continua di D_1 con valori reali sull'asse delle x allora:

∃! funzione olomorfa che la estende a D

Dim:

Unico per il principio del prolungamento analitico. Costruiamolo come $g(z)_{|D_2} \coloneqq \overline{f(\bar{z})}$

continua su D_2 e olomorfa su $D_2\backslash Asse_x$ → Olomorfa su D_2 per il corollario di T5.

Osserviamo che la funzione estesa è simmetrica.

T7) Disuguaglianza di Cauchy:
Dato uno sviluppo in serie di Taylor di una funzione olomorfa allora:
$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$

Dim:
Se $f(z)$ è olomorfa $\rightarrow f(z) = \sum a_n z_n$ con $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$
Se $z = re^{i\theta}$; $0 \leq r \leq \rho \rightarrow f(re^{i\theta}) = \sum a_n r^n e^{i\theta n}$ integriamo i termini (r fissato allora f periodica):
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_p r^p e^{i(p-n)\theta} d\theta \rightarrow a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta_{Upper\ \ Bound\ \ M(r)}$

T8) Teorema di Liouville:
Una funzione olomorfa limitata sul piano è costante

Dim:
$M(r) < M$ per ipotesi $\rightarrow_{T7} |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \rightarrow a_n = 0$ per $n \geq 1 \rightarrow f(z) = a_0 \rightarrow f$ costante

Definizioni:
Se $\forall$ disco compatto in D vale la proprietà:
$f(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$
Allora si dice che la f rispetta la Proprietà del valor medio.

T9) Principio del massimo modulo:
f funzione continua e complessa su D aperto ; se f ha la proprietà del valor medio e $|f|$ ha un massimo in $a \in D \rightarrow f$ costante in un intorno di a

Dim:
Se $f(a) = 0$ ovvio ; se $f(a) \neq 0$ supponiamolo, a meno di moltiplicazione, reale e maggiore di 0
Per $r > 0$ piccolo $M(r) = \sup_\theta \left(f\left(a + re^{i\theta}\right)\right)$ allora $M(r) \leq f(a)$ per ipotesi e per il Principio del valor medio: $f(a) \leq M(r)$ con $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \rightarrow f(a) = M(r) \rightarrow g(z) \coloneqq Re\big(f(a) - f(z)\big) \geq 0$ per $|z - a| = r$ e $g(z) = 0 \leftrightarrow f(z) = f(a) \rightarrow M = 0$ sia g continua e $\geq 0 \rightarrow g = 0 \rightarrow f(z) = f(a)$

Corollario:
D aperto limitato connesso ; f definita su $\bar{D}$ continua e con la Proprietà del valor medio, ; M Upper Bound di $|f(z)|$ su $\partial D \rightarrow |f(z)| \leq M\ \forall z \in D$ e se $|f(a)| = M$ per un $a \in D \rightarrow f$ costante.

Dim:
Sia $M^* = \sup_{z\in\partial D} |f(z)|$; $\bar{D}$ è compatto $\rightarrow$ questo accade per uno $z_0 \in \bar{D}$ quindi se:
1) $z_0 \in D \rightarrow$ massimo locale per $|f(z)| \rightarrow f$ è costante perché l'insieme $\{z \in D \mid f(z) = f(z_0)\}$ è chiuso e aperto, ed inoltre $M = M^*$
2) $z_0 \in \partial D \rightarrow M^* = M$ e $|f(z)| < M \ \ \forall z \in D$

T10) Lemma di Schwartz:

$f(z)$ olomorfa su $|z| < 1$ e t.c. $f(0) = 0$; $|f(z)|_{su\ |z|<1} < 1$ allora:

1) Vale $|f(z)| \leq |z|$ sul disco
2) Se per un $a \neq 0$ vale $|f(z_0)| = |z_0| \to f(z) = \lambda z$ e $|\lambda| = 1$

Dim:

[1] Nello sviluppo $f(0) = 0 \to a_0 = 0 \to \frac{f(z)}{z}$ olomorfa in $|z| < 1$ e per ipotesi $|f(z)| < 1$ dunque $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r}$ per $|z| \leq r$ (Per il principio del massimo modulo)

Fissato z vale $|f(z)| < \frac{|z|}{r}$ per $r \geq |z|$ e $< 1 \to$ al limite $|f(z)| \leq |z|$

[2] Se $|f(z_0)| = |z_0| \to_{principio\ \ \max\ modulo}$ Costante $\to \frac{f(z)}{z} = \lambda$; $|\lambda| = 1$

Definizioni:

Sfera di Riemann, è la sfera S^2, è compatta e levando un punto e il suo coniugato (Es. $P = (0,0,1)$; $P^{'} = (0,0,-1)$) esistono due carte di proiezione (Proiezioni Stereografiche):

$z = \frac{x+iy}{1-u}$; $z^{'} = \frac{x-iy}{1+u}$ per le quali vale $zz^{'} = 1$

T11) Olomorfa e Serie di Laurent:

f olomorfa $\to \exists!$ serie di Laurent che converge ad f

Dim:

$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$; mostriamo che esiste una serie di Laurent che converge in norma a $f(z)$ per $r_2 < |z| < r_1$

Siano $\rho_2 < r_2^{'} < r_2 < r_1 < r_1^{'} < \rho_1$ e consideriamo $K := \{r_2^{'} \leq |z| \leq r_1^{'}\}$

Vale $\forall\ z \in K^\circ$, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_1^{'}} \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_2^{'}} \frac{f(t)dt}{t-z}$

Per $|t| > |z|$ vale $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}$

Per $|t| < |z|$ vale $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{\left|1-\frac{t}{z}\right|} = -\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n<0} \frac{z^n}{t^{n+1}}$

Quindi $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ con $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_1^{'}} \frac{f(t)}{t^{n+1}}dt\ ; n \geq 0 \\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_2^{'}} \frac{f(t)}{t^{n+1}}dt\ ; n < 0 \end{cases}$

T12) Teorema di estensione di Riemann:

z_0 singolarità isolata di f, cioé f olomorfa in $0 < |z - z_0| < \delta \to f$ si prolunga olomorficamente in $z_0 \leftrightarrow |f|$ è limitato in un intorno di z_0

Dim:

[$\to$] Ovvio

[$\leftarrow$] f olomorfa sulla corona $\to$ $\exists!$ serie di Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ tale che i coefficienti verificano la disuguaglianza di Cauchy $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ se $|f(z)| \leq M$ per $|z - z_0| < \varepsilon$

Abbiamo quindi $|a_{-p}| \leq Mr^p \to a_n = 0\ \ \forall n < 0$

Basta porre $f(z_0) = 0$ e $f(z)$ è somma di una serie convergente (Quella di Taylor)

T13) Teorema di Weierstrass:

z_0 singolarità essenziale per $f(x) \rightarrow \forall\varepsilon > 0\ f(0 < |z - z_0| < \varepsilon)$ è denso in $\mathbb{C}$

Dim:

Supponiamo per assurdo che $\exists\ a, r$ tali che $f(0 < |z - z_0| < \varepsilon) \cap D(a, r) = \emptyset$ allora possiamo scrivere l'inversa $g(z) = \frac{1}{f(z)-a} \leq \frac{1}{r} \rightarrow$ questa inversa ha una singolarità in z_0 ma non è rimuovibile poiché $|g(z)|$ è limitato $\rightarrow g$ si estende olomorficamente in $z_0 \rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)+a}$ è meromorfa in z_0 Assurdo.

T14) Teorema di Rouché:

K compatto con bordo orientato T ; f, g olomorfe in D intorno aperto di K

Se su T vale $|f(z)| > |g(z)|$ allora:

$\#_{zeri}(f + g)_{su\ K} - \#_{poli}(f + g)_{su\ K} = \#_{zeri}(f)_{su\ K} - \#_{poli}(f)_{su\ K}$

Dim:

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = I(f \circ \gamma, 0)$ con γ cammino chiuso che avvolge 0.

Se $z = f(\gamma(w)) \rightarrow dz = f'(\gamma(w))\gamma'(u)du$

Se $|\gamma_1(t)| > |\gamma_2(t)| \rightarrow I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0)$ perché $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$ fa giri piccoli intorno ad 1 che non toccano 0 $\rightarrow$ sono $\sim$ costante $\rightarrow \#_{zeri}(f + g)_{su\ K} = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f' + g'}{f+g} dz = \sum_i \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{f' + g'}{f+g} dz =$

$= \sum_i \frac{1}{2\pi i}\int_{(f+g)\circ\gamma_i} \frac{du}{u} = I((f + g) \circ \gamma, 0) = I(f \circ \gamma, 0) = \#_{zeri}(f)_{su\ K}$

T15) Lemma Residui:

γ cammino chiuso $\rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = I(\gamma,0)a_1$

Dim:

$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z)$ con $g(z) = \sum_{n\neq -1} a_n z^n$ olomorfa con primitiva $\sum_{n\neq -1}\frac{a_n z^n}{n+1} \rightarrow$

$$\int_\gamma f(z)dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma g(z)dz = a_{-1}2\pi i\, I(\gamma,0)$$

Il primo per definizione di Indice di Cauchy, il secondo nullo perché g ha una primitiva.

T16) Teorema dei Residui

Sia D un aperto della Sfera di Riemann ; f olomorfa su D (Eccetto punti isolati che siano singolarità per f). Se T è il bordo di un sottoinsieme compatto A di D (T non passanti per le singolarità o per il punto all'∞) allora:

1) Solo un numero finito di singolarità sono in A
2) $\int_T f(z)dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,z_k)\big)$

Dim ($\infty \notin A$):

Ciascuna singolarità ha un disco che la contiene, disgiunto dalle altre.
Sia γ_k il cammino attorno al disco δ_k percorso con verso positivo. Sia $A' = A\backslash\{Dischi\}$
Rimangono a questo punto i bordi, sappiamo che:
$\int_T f(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z)dz$ e ciascuno di loro rispetta la relazione:
$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,z_k)$

Dim ($\infty \in A$):

Prendiamo $|z| \geq r$ intorno dell'infinito che non intersechi T ; $f(z)$ olomorfa.
Sia $A'' = A\backslash\{|z| > r\}$; il valore di A'' è dato da T di A e il cerchio $|z| = r$ in verso positivo.
Prima parte nota mentre la seconda da definizione di P_∞ vale:
$\int_{|z|=r} f(z)dz = -2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)$

Caso specifico:

$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ con $R(x)\sim\frac{1}{x^n}$; $n \geq 2$
Scrivendolo come semicerchio complesso nella parte positiva:
$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{\delta(R)} R(z)dz = 2\pi i\sum \mathrm{Res}\big(R(z)\big)$
La seconda parte della somma tende a 0 per il lemma seguente.

Lemma:

$f(z)$ continua su $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$; r, θ modulo e argomento di z ; se $\lim zf(z) = 0$
allora $\int_{\delta(R)} f(z)dz \rightarrow 0$

Dim:

Se $M(r)$ Upper Bound di $|f(z)|$ su $\delta(R) \rightarrow \left|\int_{\delta(R)} f(z)dz\right| \leq M(r)r(\theta_2 - \theta_1)$

Teoria di Geometria 8: Extra ed esempi

Extra 1) Quozienti:

Quoziente di un T2 è T2?

Risposta:

No, ad esempio $\mathbb{R}/\sim$ con $x \sim y$ se $x = y$ o $|x|, |y| > 1$

Extra 2) Classi e omeomorfismi:

X spazio topologico, $Omeo(X)$ gruppo per prodotto ; $G \subseteq Omeo(X)$; $x, y \in X$

$x \sim y$ se $\exists\ g \in G \mid y = g(x)$ [Le classi sono le orbite] ; si indica con $X/_G$

1) G finito e X è T2 $\rightarrow X/_G$ è T2

2) X T2 e $\pi: X \rightarrow X/_G$ proiezione:

Se $\exists\ A \subseteq_{aperto} X \mid A \cap$ ogni orbita di G (Proiezione da A nelle classi surgettiva) e $\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$ è finito, allora:

$X/_G$ è T2

Extra 3) Proiettivi:

I Proiettivi reali e complessi sono connessi, compatti e T2

Dim:

$S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Continue e surgettive allora Compatti e connessi.

[Se G gruppo di Omeomorfismi ; $X/_G$ è T2 $\leftrightarrow K = \{(x, g(x)) \in X \times X\}$ è chiusa nel prodotto]

Per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è l'antipodale. [Complesso T2 nd]

Extra 4) Omeomorfismo:

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow S^1 \quad (x_0, x_1) \rightarrow \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2} ; \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2}\right)$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow S^2$ Omeomorfismo

Extra 5) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; $n \geq 2$:

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha come gruppo fondamentale $\mathbb{Z}_2$ se $n \geq 2$

Dim:

$p: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rivestimento connesso di grado 2 ; $e \in S^n$; $x = p(e)$ ma dal teorema di pagina 216

$p_*\pi_1(S^n, e) \subseteq \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x)$ ha due laterali destri ; $n \geq 2 \rightarrow S^n$ semplicemente connesso

$\rightarrow p_*\pi_1(S^n, e) = e \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x)$ ha due elementi $\rightarrow \cong \mathbb{Z}_2$

Extra 6) $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ha come gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$

Dim:

$\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ è un omeomorfismo con $n \rightarrow [a_n]$

a_0 è costante ma dal corollario a_{n+m} omotopicamente equivalente a $a_n + a_m$ e $a_{-n} = i(a_n)$

Extra 7) Immersioni:
Continua ed iniettiva non implica immersione.

Controesempio:
$\mathbb{R}_{euclidea} \rightarrow^{Id} \mathbb{R}_{indiscreta}$

Extra 8) Discreta:
Chiusura di un discreto non è discreta.
Un discreto è chiuso?

Controesempio:
No ad entrambe.
$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è discreto ma $\overline{\left\{\frac{1}{n}\right\}} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \cup 0$ non lo è.

Extra 9) Proiezione:
La proiezione non è chiusa

Extra 10) Uryson:
$A, B \subseteq_{chiusi} \mathbb{R}^2$ disgiunti, allora $\exists f$ continua | $f(A) = 0$; $f(B) = 1$

Extra 11) Esempio sconnesso:
$[0,1] \cap \mathbb{Q}$ sconnesso

Extra 12) Applicazione:
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ continua è costante.

Dim:
$\mathbb{R}$ connesso e in $\mathbb{Q}$ le uniche componenti connesse sono i punti.

Extra 13) $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \cap \mathbb{Q}$:
$[0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto

Dim:
$\left\{\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{n}\right[\;\; ; \;\; \left]\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]\right\}$