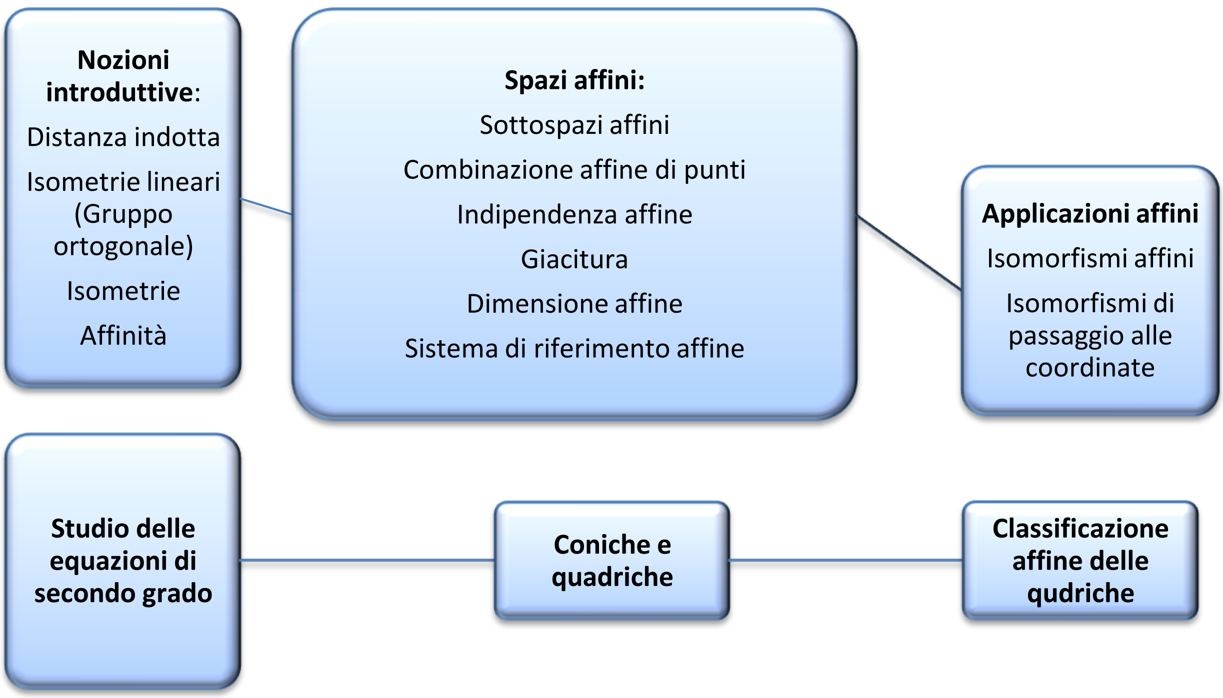
GAAL: Capitolo di Geometria Affine e Coniche



Definizione (Distanza indotta da un prodotto scalare Φ):

È una funzione $d: V \times V \to \mathbb{R} \mid d(x,y) = \sqrt{\Phi(x-y, x-y)}$

Definizione (Distanza astratta):

È una funzione $d: X \times X \to \mathbb{R} \mid$

$d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\ \forall x,y,z$ *Disuguaglianza di Charles*

Definizione (Isometrie lineari):

$O(\Phi) = \{g \in GL(V) \mid \forall\, p,q \in V \text{ vale } \Phi(p,q) = \Phi(g(p), g(q))\}$

Osservazione:

Viene anche chiamato gruppo ortogonale.

Definizione (Isometria):

$\mathrm{Isom}(V,d) = \{f: V \to V \mid \forall\, p,q \in V \text{ vale } d(p,q) = d(f(p), f(q))\}$

Proposizione:

$\text{Isom}(V,d) = \langle O(\Phi), \{\tau_v\}_{v\in V}\rangle$ ossia dalle isometrie lineari (Quelle che lasciano fissa l'origine) e dalle traslazioni.

<u>Definizione (Gruppo delle affinità):</u>

$\text{Aff}(V) = \langle GL(V), \tau_v\rangle$

Idea (Come gruppo):

$\text{Aff}(V) = V \ltimes GL(V)$

Con la seguente struttura per la composizione:

$(v,h)\circ(v',h') = (h(v')+v, h\circ h')$ o in matrici $(B|A)(B'|A') = (AB'+B|AA')$

Osservazione:

Dal punto di vista matriciale sono della forma: $Ax + B \mid A \in GL(V)$

Osservazione:

$O(\Phi) \subset \text{Isom}(V,d) \subset \text{Aff}(V) \subset S(V)$

<u>Definizione (Spazio affine E sullo spazio vettoriale V):</u>

È una terna (E,F,V) con $E \neq \emptyset$ insieme, $F: E\times E \to V \mid (p,q) \to \overrightarrow{pq}$, V spazio vettoriale.

F verifica:

$\forall\ p \in E$ vale $\overrightarrow{pp}$

$\forall\ p \in E$ vale $F_p: E \to V \mid q \to \overrightarrow{pq}$ è Bigettiva

$\forall\ p,q,r \in E$ vale $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{rp} = 0$

<u>Definizione (Esempio standard di spazio affine):</u>

$V = E = R^n$ e $F =$ distanza euclidea.

Proprietà derivate:

$\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$

<u>Definizione:</u>

$p + v \coloneqq q \to$ l'unico punto di $E \mid \overrightarrow{pq} = v$

Osservazione:

$p + (v_1+v_2) = (p+v_1)+v_2$

<u>Definizione: (Combinazione affine di punti):</u>

Siano $p_0, p_1, \dots, p_n \in E$

1. Scelgo un punto base (Es. p_0).
2. Considero la bigezione $q \to \overrightarrow{p_0 q}$
3. Studio la combinazione lineare e individuo il punto $p_0 + \sum b_j \overrightarrow{p_0 p_j}$

Proposizione:
Se impongo che $\sum b_j = 1$ allora la scelta del punto base non mi condiziona il risultato.

Osservazione:
$\begin{cases} \sum b_j p_j = p_K \sum b_j \overrightarrow{p_k p_J} \\ \qquad \sum b_j = 1 \end{cases}$

<u>Definizione (Indipendenza affine):</u>
Una n-upla di punti di E si dice affinemente indipendente se scelto un punto base i vettori ottenuti mediante la bigezione F sono linearmente indipendenti.

<u>Definizione (Sottospazio affine):</u>
Può essere o $\emptyset$ o $A \neq \emptyset$ chiuso per combinazioni affini.

Proposizione:
$\emptyset \neq A$ sottospazio affine di E, allora $\forall\, p_0 \in A$ $T_{p_0} = \{pp_0 \mid p \in A\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Definizione (Giacitura o spazio tangente):</u>
Siccome T_{p_0} non dipende dalla scelta di p_0 si indica con $T(A)$ la giacitura di A s. affine di E.

Osservazione:
$A = p + T(A)$

Osservazione:
$T(A_1 \cap A_2) = T(A_1) \cap T(A_2)$

Osservazione:
$T(E) = V$

<u>Definizione (Dimensione affine):</u>
È la dimensione dello spazio vettoriale associato (Giacitura).
$\dim_{\text{aff}} A = \dim\big(T(A)\big)$

Osservazione:
$\dim(\emptyset) = -1$

<u>Definizione (Sistema di riferimento affine):</u>
È un sottoinsieme ordinato $P = (p_0, p_1, \dots, p_n) \subseteq E \mid B_P = (\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})$ sia una base di V.

Osservazione:
$\dim V = n \leftrightarrow \exists\ P$ riferimento affine$|\ |P| = n + 1$

Definizione (Applicazione affine):

È una funzione $f: E_1 \to E_2$ che rispetti le combinazioni affini. $E_1 = (E_1, F_1, V_1)$; $E_2 = (E_2, F_2, V_2)$

Osservazione:
Composizione di trasformazioni affini è una trasformazione affine.

Idea:

$$\begin{array}{ccc} p \in E_1 & \to_f & f(p) = q \in E_2 \\ \downarrow_p & & \downarrow_q \\ V_1 & \to_{d_p(f)} & V_2 \end{array}$$

Proposizione:
Fissato arbitrariamente $p \in E_1$, $f(p) = q$ sono equivalenti:
f è affine, $dp(f)$ è lineare (Si dice differenziale di f).

Quindi $\forall z \in E_1\ f(z) = dp(\overrightarrow{pz}) + q$

Definizione (Isomorfismo affine):

$f: E_1 \to E_2$ è affine e bigettiva.

Osservazione:
f^{-1} è affine.
f isomorfismo affine $\leftrightarrow dp(f)$ isomorfismo lineare.

Osservazione(Isomorfismo di passaggio alle coordinate):
Sia $P = (p_0, \dots, p_n)$ riferimento affine, sia $f(p_0) = q_0, \dots f(p_n) = q_n$ allora $\exists! f: E_1 \to E_2$che estenda questi dati.

Formula di Grassmann affine:

$H_1 = p_1 + W_1$; $H_2 = p_2 + W_2$ allora:
Se $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset \to \dim_{\text{aff}}(H_1 + H_2) = \dim_{\text{aff}}(H_1) + \dim_{\text{aff}}(H_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$
Se $H_1 \cap H_2 = \emptyset \to \dim_{\text{aff}}(H_1 + H_2) = \dim_{\text{aff}}(H_1) + \dim_{\text{aff}}(H_2) - \dim(W_1 \cap W_2) + \mathbf{1}$

Osservazione:
$H_1 \cap H_2 = \emptyset \leftrightarrow (p_2 - p_1) \notin W_1 + W_2$

Osservazione:
$H_1 + H_2 = p_1 + \big(W_1 + W_2 + \text{Span}(p_2 - p_1)\big)$

Osservazione:

$H_1 \subseteq H_2 \leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$ e $(p_2 - p_1) \in W_2$

Costruzione di $\mathbf{Aff}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{K})$ come sottogruppo di $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}, \boldsymbol{K})$:

Data $f \in Aff(n, K)$ sappiamo che possiamo scriverla come $f(x) = Ax + B$ con $A \in GL(n, K)$, $B \in K^n$ la traslazione.

Possiamo associare ad f alla seguente matrice di dimensione $n+1$: $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$

Osservazione:

Mantiene le proprietà di composizione delle affinità, infatti:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' + B \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Studiare le equazioni:

Idea, si possono sfruttare le matrici e le proprietà dei prodotti scalari per rappresentare un'equazione.

$$Eq_{n^\circ} = \{\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & d \end{pmatrix} ; M \in M(n+1, K) ; A \in M(n, K) ; B \in K^n ; M = M^t ; A = A^t\}$$

Esempio:

$n = 2 ; q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 1$

Ossia: $(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1$

Quindi la matrice associata sarà: $M_q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Osservazione:

Ricordarsi che le equazioni si studiano a meno di un moltiplicatore; $Eq \sim \alpha Eq \ \forall \alpha \neq 0 \in K$

Definizione (Quadriche e coniche):

Sono gli insiemi degli 0 di un'equazione.

Graficamente sono le intersezioni del cono isotropo con l'iperpiano di altezza 1.

Quando due quadriche rappresentano la stessa equazione?

Se ∃ un'affinità che manda l'una nell'altra.

Classificazione equazioni e quadriche:

$$\{\text{equazioni}\}\big/_{(A|b) \sim \alpha(A|b)\ \forall \alpha \neq 0} \cong \{\text{quadriche}\}\big/_{Q \sim f(Q)\ \forall f = \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aff}(K^n)}$$

Idea:

Individuare forma normale che caratterizzi una quadrica (O una conica in generale).

Applichiamo un **algoritmo** per semplificare la forma della matrice M.

1. Traslazioni

Sfruttiamo le matrici della forma $\begin{pmatrix} \text{Id} & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se $\exists\ D \mid AD + B = 0$ che annulli il termine di primo grado.

$M \to_\tau M \mid \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & d \end{pmatrix} \to_\tau \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$

Notazione:

Se $\exists D$ si dicono forme con Centro di simmetria (O con **Centro**).

Individuazione invariante:

$\text{rango}(A)$; $\text{rango}(M)$

***2.* Dividiamo per d_1 se $\neq 0$.**

Casi possibili su $\mathbb{C}$	Rango A	Rango M	Matrice associata	Equazione	Luoghi di 0
	2	3	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	
		2	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	*Rette incidenti*
	1	2	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + 1 = 0$	*Rette parallele*
		1	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$x_1^2 = 0$	*Retta "doppia"*

Osservazione (Su $\mathbb{R}$):

La segnatura è un invariante non univoco; $\sigma(n, m, 0) = \sigma(m, n, 0)$

Usiamo come invariante l'**indice di Witt**.

Casi possibili su $\mathbb{R}$	**Rango A**	**Rango M**	$W(A)$	$W(M)$	**Matrice associata**	**Equazione**	**Luoghi di 0**
	2	3	0	0	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
				1	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	*Classe delle ellissi*
			1	1	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	*Classe delle iperboli*
		2	0	1	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	*Punto*
			1	2	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$-x_1^2 + 1 = 0$	*Rette che si intersecano*
	1	2			$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$x_1^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
					$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$-x_1^2 + 1 = 0$	*Rette parallele*

<u>Sottocampo in $\mathbb{R}$ senza centro:</u>

Ossia dato da $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & d \end{pmatrix}$ e $AD + B = 0$ non ha soluzione in K^2

Teorema:

Non ha centro $\leftrightarrow$ $\mathrm{Rango}(A) = 1\, ; \mathrm{Rango}(M) = 3$

Quindi ha forma normale $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \to x_1^2 + 2x_1 = 0$ *Classe delle parabole*.