<u>Sistemi dinamici</u>

Giulio Del Corso

Indice:

Sistema dinamico continuo:

Su di un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è un'equazione differenziale autonoma (Ossia non dipendente da t) $\frac{dX}{dt} = F(X)$ con $F: W \to \mathbb{R}^n$ differenziabile.
F così definita è detta campo vettoriale.

Osservazione:
Un sistema si dice non autonomo se F dipende dal tempo.

Esempio:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Osservazione:
Ogni non autonomo può essere considerato un sistema autonomo di un grado superiore (Omogeneizzazione) ponendo:

$$Y = \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix} ; \dot{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ F(Y) \end{pmatrix} ; Y_0 = \begin{pmatrix} t_0 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

Orbita:

L'orbita è una funzione $f: \mathbb{R} \to W \mid f(t) = X(t)\ \forall\ t$ soddisfi l'equazione differenziale (In pratica ne è una delle soluzioni particolari).

Sistema dinamico discreto:

Un sistema dinamico discreto in $W \subseteq \mathbb{R}^n$m è un diffeomorfismo $f: W \to W$

Orbita di un sistema dinamico discreto:
L'orbita di un SDD è una mappa da $\mathbb{Z}$ in W che associa a $k \to X_k \mid \forall\ k \in \mathbb{Z}\ X_{k+1} = f(X_k)$

Flusso integrale:

Il flusso integrale (Soluzione generale) è una famiglia dipendente da parametro di funzioni:
$\phi^t: X_0 \to X(t)$ che associa alla condizione iniziale (X_0) il valore dell'orbita corrispondente all'istante t.

Osservazione:
Si dice che un Sistema Dinamico è **integrabile** se ammette una formulazione esplicita del flusso integrale.

Sistema dinamico continuo lineare:
È un sistema dinamico nel quale il campo vettoriale al secondo membro è lineare:
$\frac{dX}{dt} = AX$ con A matrice a coefficienti costanti e X una funzione vettoriale.

Osservazione:
X è una funzione vettoriale, questo significa che può essere rappresentata da un vettore:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $x_i: \mathbb{R} \to W \subseteq \mathbb{R}$ e che associa al tempo t la posizione del vettore.
Le nostre x_i sono le incognite che noi vorremmo scrivere in forma esplicita.

Integrale primo (di un Sistema Dinamico continuo):
Un integrale primo è una funzione $E: W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile su W che sia invariante rispetto alle soluzioni:
$E\big(X(t)\big) = E\big(X(0)\big) = E(X_0)$ $\forall$ soluzione (Ossia $\forall$ X_0)

Osservazione:
Nel caso di un sistema dinamico discreto la condizione diviene:
$E(X_k) = E(X_0)$ $\forall$ X_0 (Soluzione)

Sistema dinamico conservativo:
Un sistema dinamico continuo su $\mathbb{R}^2$ è conservativo se il flusso integrale $\forall$ t fissato è una trasformazione da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che conserva l'area (In valore e segno).

Osservazione:
Se $X_{k+1} = AX_k$; $A \in M_2(\mathbb{R})$ è conservativo se e solo se $\det A = 1$

Generalizzazione della soluzione esponenziale per sistemi dinamici lineari:

Lavorando a dimensione 1 la soluzione del sistema dinamico:

$$\dot{x} = ax$$

Si ottiene considerando la successione:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t ax_k(s)\, ds \end{cases}$$

La soluzione è dunque:

$$x(t) = \exp(at) \cdot x_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!}\right) \cdot x_0$$

Generalizzazione:

$\dot{X} = AX$ ha come soluzione:

$$X(t) = \exp(At) \cdot A_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}\right) \cdot X_0$$

Calcolo di $\exp(At)$ in casi specifici:

$A = \lambda \cdot \mathrm{Id} \to A^k = \lambda^k \cdot \mathrm{Id} \to \exp(At) = e^{\lambda t} \cdot \mathrm{Id}$

Quindi la soluzione è:

$$X(t) = e^{\lambda t} \cdot X_0$$

$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora $\exp(At) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)$

Quindi la soluzione del sistema dinamico è:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = C \end{cases} \text{ è: } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ con } x_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i$$

Se la matrice A è nilpotente allora $\exists\ \bar{n} \mid A^{\bar{n}} = 0 \to \exp(At)$ è formato da un numero finito di termini. Dunque è possibile calcolarli a mano.

Teorema di Convergenza dell'esponenziale di matrici:

A matrice quadrata qualsiasi, allora la serie esponenziale $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}\right)$ converge $\forall\ t \in \mathbb{R}$ (Uniformemente su ogni compatto) e il limite è una matrice funzione continua di $t, \forall\ t \in \mathbb{R}$, che indichiamo con $\exp(At)$

Corollario:
Un sistema dinamico continuo e lineare ammette sempre flusso integrabile.
Attenzione:
Questo non garantisce che sia calcolabile.

Serie prodotto di Cauchy:

Date due serie $A(t)$; $B(t)$ la loro serie prodotto secondo Cauchy è:

$C(t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r t^r$; $C_r = \sum_{k=0}^{r} A_k B_{r-k}$

Teorema della somma degli esponenti:
Se $AB = BA \rightarrow \exp(At + Bt) = \exp(At)\exp(Bt)$

Teorema di derivazione dell'esponenziale:
$\exp(At)$ è derivabile e la sua derivata è $\frac{d\exp(At)}{dt} = A\exp(At) = \exp(At)\,A$

Cambiamento di coordinate:

L'idea è che mediante un cambiamento di coordinate possiamo ricondurci a certi tipi di matrici di cui sappiamo calcolare facilmente l'esponenziale.
Una volta conosciuto l'esponenziale di una forma di Jordan reale il problema sarà solo di ricondurci a questo tipo di matrici.

Procedimento generale:

$\dot{X} = AX$ e sia $Y = BX$ con B invertibile $\rightarrow \dot{Y} = B\dot{X} = BAX = BAB^{-1}Y$
Dunque sono equivalenti i due sistemi dinamici:

$$\dot{X} = AX \sim \dot{Y} = CY \; ; C = BAB^{-1}$$

La soluzione del sistema in Y è:

$$\begin{cases} Y(t) = \exp(Ct)\, Y_0 \\ Y_0 = BX_0 \end{cases}$$

Quindi la soluzione del sistema originale è:

$$X(t) = B^{-1} \exp(Ct)\, BX_0$$

Osservazione:

Se vogliamo ricondurci alla forma di Jordan la matrice degli autovettori (o degli autovettori generalizzati) è: $B^{-1} = (v_1, \dots, v_n)$

Attenzione:

Non farsi ingannare dal fatto che è scritta al contrario, infatti se la giriamo rispetto alla forma di Jordan otteniamo che:
$B^{-1}CB = A$ ossia C è la matrice A letta in base B^{-1} quindi le matrici sono invertite.

Osservazione:

Se stiamo studiando il sistema dinamico lineare $\dot{X} = AX$; A diagonalizzabile $\rightarrow$ tutte le orbite si possono esprimere mediante combinazioni lineari di funzioni esponenziali $\exp(\lambda_i t)$ con λ_i autovalori di A.

Caso matrici diagonalizzabili:

In questo sappiamo che esiste $\exists\, V$ base di autovettori tale che: $VAV^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Trucchetto su $\dim\ = 2$:
Il polinomio caratteristico è della forma:

$$\lambda^2 - \mathrm{traccia}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$$

E studiando solo Δ:
$\Delta > 0$ Due autovalori distinti $\rightarrow$ diagonalizzabile.
$\Delta < 0$ Due autovalori complessi coniugati.
$\Delta = 0$ Dipende da μ_g, se $\mu_g = 2$ è $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ altrimenti se $\mu_g = 1$ è $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

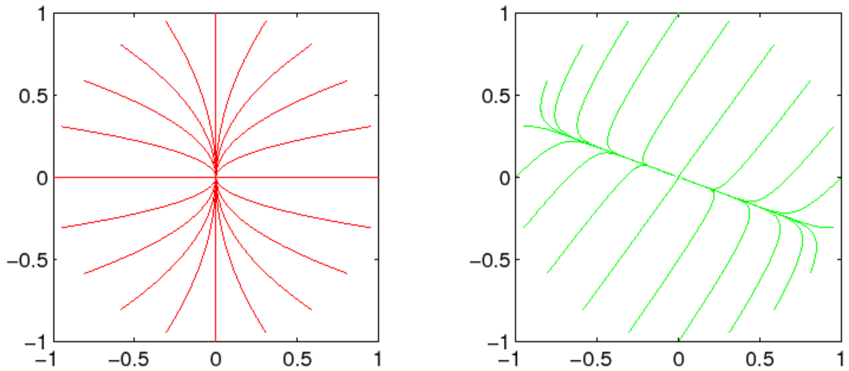
Traiettoria:
La traiettoria è la curva descritta in $\mathbb{R}^n$ dalle soluzioni senza parametrizzarle in funzione di t. In pratica è l'immagine della soluzione.

Punto di equilibrio:
Se $F(\overline{X}) = 0$ allora $\overline{X}$ è detto punto di equilibrio.

Punti di equilibrio (Nodi e selle):
Sono dei punti limiti con una determinata conformazione.

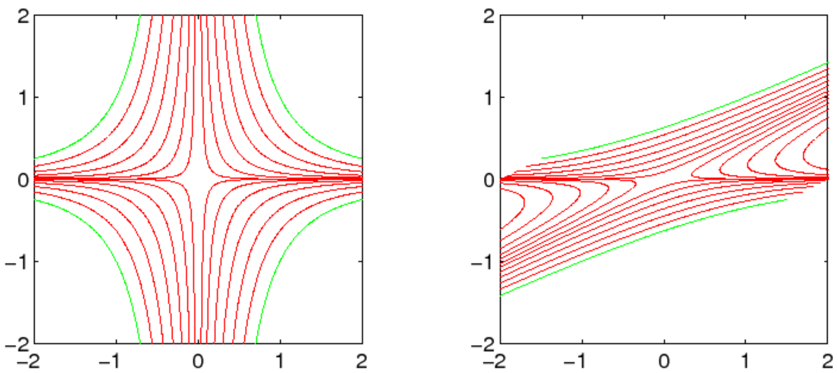
Esempio di punto di tipo nodo:

Per i lineari in $\mathbb{R}^2$ sono le traiettorie della soluzione: $\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 \\ x(t) = e^{bt}y_0 \end{cases}$ con $b < a < 0$



Esempio di punto di tipo sella:

Per i lineari in $\mathbb{R}^2$ sono le traiettorie della soluzione: $\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 \\ x(t) = e^{bt}y_0 \end{cases}$ con $b < 0 < a$



Autovalori Complessi:

Da ricordarsi la formula di Eulero $\exp(Jbt) = \cos(bt)\,\mathrm{Id} + \sin(bt)\,J$ con $Jb = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

Osservazione:
Scritta come sistema dinamico è la soluzione di un oscillatore armonico.

Osservazione pratica:
Se la matrice è $A = a\mathrm{Id} + bJ \rightarrow \exp(At) = e^{at}(\cos(bt) + \sin(bt)\,J)$
Quindi il sistema dinamico:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}(\cos(bt)\,x_0 - \sin(bt)\,y_0) \\ e^{at}(\sin(bt)\,x_0 + \cos(bt)\,y_0) \end{pmatrix}$$

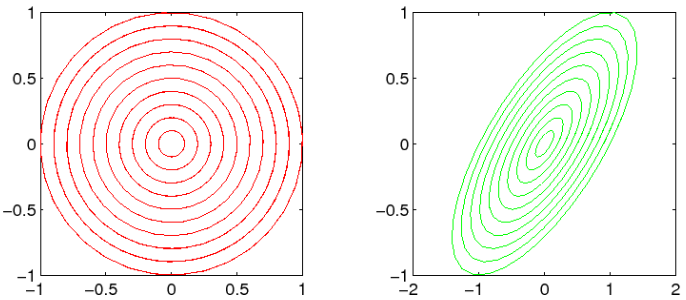
Osservazione sui coniugati:
Se troviamo un autovalore $a + ib$ allora $a - ib$ è anch'esso un autovalore, detti $W, \overline{W}$ i loro autovettori vale:
$Y = \frac{W+\overline{W}}{2}$; $X = \frac{W-\overline{W}}{2i}$ quindi se consideriamo la base (X, Y) vale:
$\exp(At) = \exp(BQB^{-1}t) = B\exp(Qt)\,B^{-1}$ con $Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathrm{Id} + bJ$

Punti di equilibrio (Autovalori complessi, Centri e Fuochi):

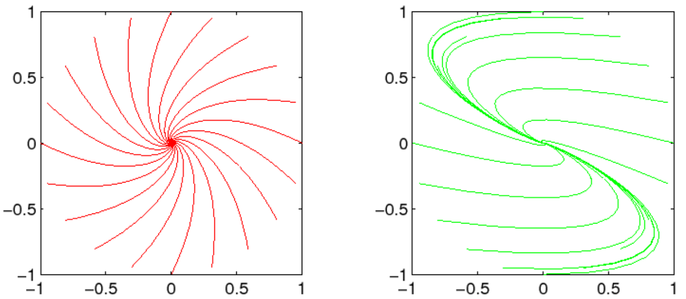
Sono le traiettorie del sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$$

Centri:
$a = 0$, le orbite "girano" attorno ad un punto. (Orbita periodica)



Fuochi:
$a > 0$ o $a < 0$, le orbite tendono ad un punto (Per $t \rightarrow \pm\infty$), frequenza pari alla parte immaginaria b del sistema.



Matrici Nilpotenti:

Un operatore lineare N su $\mathbb{R}^k$ (o la matrice ad esso associata) si dice nilpotente se $\exists\ s \in \mathbb{N}^* \mid N^s = \bar{\bar{0}}$

> **Osservazione:**
> Una matrice ha come unico autovalore $0 \leftrightarrow$ è nilpotente.

Osservazione:

Se A ha un solo autovalore $\lambda \to A = \lambda \cdot \mathrm{Id} + N$ e siccome questi commutano $(\lambda \cdot \mathrm{Id} \cdot N = N \cdot \lambda \cdot \mathrm{Id})$ allora:

$$\exp(At) = \exp(\lambda \cdot \mathrm{Id}) \exp(Nt) = e^{\lambda t} \exp(Nt)$$

Inoltre, siccome $N^s = \bar{\bar{0}}$ possiamo ricavare esplicitamente:

$$\exp(Nt) = \mathrm{Id} + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{N^{s-1} t^{s-1}}{(s-1)!}$$

Osservazione pratica:

Per un blocco di Jordan relativo ad un dato autovalore λ vale:

$$\exp(J_\lambda) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ t & 1 & & \\ \frac{t^2}{2} & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

> **Idea:**
> Questo procedimento mi permette di scrivere una matrice in forma di Jordan e studiarne poi i singoli pezzi considerandoli come casi precedenti per calcolarne dunque l'esponenziale.

Matrice semisemplice:

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice semisemplice se è diagonalizzabile in senso complesso.

Teoremino:

$\dot{X} = AX$; $X \in \mathbb{R}^n$; A semisemplice, allora tutte le orbite si scrivono come combinazioni lineari di $\exp(a_k t)\,(\cos(b_k t) \pm \sin(b_k t))$ con $\lambda_k = a_k \pm i \cdot b_k$ autovalore complesso.

Inoltre:

$$\exp(a_k t + J b_k) = e^{a_k t} \begin{pmatrix} \cos(b_k t) & -\sin(b_k t) \\ \sin(b_k t) & \cos(b_k t) \end{pmatrix}$$

Con $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Forma di Jordan:

Nel caso di una generica matrice A dobbiamo ricondurci alla forma di Jordan.
Una volta infatti calcolata la base di Jordan e la forma associata ci limitiamo a calcolare l'esponenziale di ciascuno dei blocchi associati secondo le regole sopra definite.
Quindi i casi possibili sono:

Autovalore singolo reale λ:

Si sostituisce al valore il suo esponenziale:

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Autovalore complesso coniugato:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} t\right) = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

Autovalore reale con molteplicità maggiore di 1:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} t\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Autovalore complesso coniugato con molteplicità maggiore di 1:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \mathrm{Id}_2 & \\ & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \mathrm{Id}_2 \\ & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix} t\right) = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_2 & t\cdot\mathrm{Id}_2 & \frac{t^2}{2}\cdot\mathrm{Id}_2 \\ & \mathrm{Id}_2 & t\cdot\mathrm{Id}_2 \\ & & \mathrm{Id}_2 \end{pmatrix}$$

Osservazione (Rapporto con quelle studiate ad APV):

Osserviamo che non esiste alcun rapporto con le equazioni differenziali studiate ad APV, il Wronskiano infatti viene utilizzato per equazioni differenziali in forma vettoriale di grado maggiore al primo. Queste dunque ne sono un caso specifico molto semplificato (Non farsi dunque ingannare dalla medesima ricerca della forma di Jordan).

Teoria qualitativa

Giulio Del Corso SD13

Introduzione:
Stiamo lavorando con $\dot{X} = F(X)$ con $F: W \subseteq_{aperto} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenziabile.
Sappiamo già che ammette un'unica soluzione per $X(0) = X_0 \in W$

Punto di equilibrio:
Se $F(\bar{X}) = 0$ allora $\bar{X}$ è detto punto di equilibrio.

Teorema del punto limite:
Se $X(t)$ (Soluzione) per $t \to +\infty$ ha limite $\lim_{t\to+\infty} X(t) = X_S$ e $X_S \in W$ aperto sui cui $F(X)$ (Campo vettoriale) è regolare e definito allora:

X_S è un punto di equilibrio.

Osservazione:
Il teorema vale anche per $t \to -\infty$

Vari tipi di stabilità:

Punto attrattivo:
S punto in W si dice attrattivo se $\exists\ U$ intorno di S | $\forall\ X_0$ condizione iniziale in U la soluzione corrispondente $X(t)$ ha S come limite. ($\lim_{t\to+\infty} X(t) = S$)

Trucchetto su $\mathbb{R}^2$:
Possiamo utilizzare il passaggio in polari, dato:
$\begin{cases} \dot{X} = \cdots \\ \dot{Y} = \cdots \end{cases}$ e $\begin{cases} r = \sqrt{X^2+Y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \end{cases} \to \begin{cases} \dot{r} = \frac{X}{r}\dot{X} + \frac{Y}{r}\dot{Y} \\ \dot{\theta} = \frac{X}{r^2}\dot{Y} - \frac{Y}{r^2}\dot{X} \end{cases}$

Bacino di attrazione:
Dato S punto di equilibrio, il suo Bacino di attrazione è l'insieme U delle condizioni iniziali che hanno S come punto limite.

Proprietà:
$S \in U$
S è attrattivo se sta in U°
Punti non attrattivi possono avere un bacino di attrazione (ad esempio i punti di sella).

Punto stabile:
Un punto $S \in W$ si dice stabile se $\forall$ intorno U di S $\exists\ V$ intorno di S | ogni soluzione con condizione iniziale in V sta in U $\forall\ t \geq 0$

Osservazione:
Punto stabile → Punto di equilibrio
Un punto stabile e attrattivo si dice **Asintoticamente Stabile**.

Punto instabile:
Un punto S di equilibrio si dice instabile se $\exists\ U$ intorno di S | $\forall\ V$ intorno di S $\exists$ una condizione iniziale $X_0 \in V$ la cui soluzione "esce" da U per qualche $t \geq 0$

Osservazione:
Un punto è instabile ↔ non è un punto stabile.

Linearizzazione:

Idea:

Concentrarsi sulla parte lineare in quanto più facile da studiare.

Sistema linearizzato:

Dato un sistema dinamico con X_S punto di equilibrio e l'uguaglianza $\dot{X} = F(X) = A(X - X_S) + G(X)$
Il sistema linearizzato di $\dot{X} = F(X)$ in X_S è:
$\dot{Y} = AY$ con $Y = (X - X_S)$

Osservazione:

In pratica è lo sviluppo di Taylor, G è infinitesimo di ordine superiore al primo e A è la matrice Jacobiana (Derivate parziali) di F calcolata in X_S.

Notazioni:

Le parti reali degli autovalori di A si dicono **Esponenti di Lyapounov**
Se tutti gli esponenti sono negativi X_S si dice **Pozzo**.
Se tutti gli esponenti sono positivi X_S si dice **Sorgente**.
Se gli esponenti ($\mathbb{R}^2$) sono uno positivo ed uno negativo si dice **Sella**.

Caso lineare:

Teorema del pozzo lineare:

Data la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ le seguenti due proprietà sono equivalenti:
L'origine è un pozzo per il sistema dinamico lineare $\dot{Y} = AY$
$\exists\ K, b > 0$ costanti | $|\exp(tA)Y_0| \leq ke^{-tb}|Y_0|$ $\forall$ condizione iniziale Y_0 e $\forall\ t > 0$

In pratica:

L'origine è asintoticamente stabile se è un pozzo.
Se esiste un esponente di Lyapounov maggiore di 0 l'origine è instabile.

Teorema della sorgente lineare:

Data la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ le seguenti due proprietà sono equivalenti:
L'origine è una sorgente per il sistema dinamico lineare $\dot{Y} = AY$
$\exists\ K, b > 0$ costanti | $|\exp(tA)Y_0| \geq ke^{tb}|Y_0|$ $\forall$ condizione iniziale Y_0 e $\forall\ t > 0$

Osservazione:

Se si studia $t \leq 0$; $t \to -\infty$ il comportamento di Pozzo/Sorgente si scambia.
Infatti $\dot{Y} = AY \to \dot{Y} = -AY$ quindi gli autovalori si invertono in segno.

Teorema della norma adattata:

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | $\alpha < \mathrm{Re}(\lambda) < \beta$ $\forall\ \lambda$ autovalore di A.
Allora esiste una base V tale che se $X = \sum x_i V_i$; $Y = \sum y_i V_i$ e $(X, Y)_V = \sum x_i y_i$ vale la disuguaglianza:
$\alpha \|Y\|_V^2 \leq (AY, Y)_V \leq \beta \|Y\|_V^2$

Caso non lineare:

Teorema del pozzo non lineare:

Sia X_S un pozzo per $\dot{X} = F(X)$ con campo vettoriale definito e C^1 su $W \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia A la matrice del linearizzato in X_S (La matrice Jacobiana di F)

Se $c \in \mathbb{R}$; $c > 0$ | ogni λ autovalore di A ha $\mathrm{Re}(\lambda) < -c$ → ∃ un intorno $U \subseteq W$ di X_S tale che:

$\phi^t(X)$ è definito ∀ X in U e ∀ $t > 0$

∃ una costante $B > 0$ | ∀ X in U e ∀ $t \geq 0$ tale che $|\phi^t(X) - X_S| \leq Be^{-ct}|X - X_S|$

Pratica:

$\phi^t(X) \to X_S$ per $t \to +\infty$ ∀ X_0 condizione iniziale in U. Dunque X_S è asintoticamente stabile.

Teorema della sorgente non lineare:

Sia X_S una sorgente per $\dot{X} = F(X)$ con campo vettoriale definito e C^1 su $W \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia A la matrice del linearizzato in X_S (La matrice Jacobiana di F)

Se $c \in \mathbb{R}$; $c > 0$ | ogni λ autovalore di A ha $\mathrm{Re}(\lambda) > c$ → ∃ un intorno $U \subseteq W$ di X_S tale che:

$\phi^t(X)$ è definito ∀ X in U e ∀ $t \leq 0$

∃ una costante $B > 0$ | ∀ X in U e ∀ $t < 0$ tale che $|\phi^t(X) - X_S| \leq Be^{ct}|X - X_S|$

Pratica:

$\phi^t(X) \to X_S$ per $t \to +\infty$ ∀ X_0 condizione iniziale in U. Dunque X_S è asintoticamente stabile.

Classificazione dei punti di equilibrio sul secondo ordine:

Fuoco stabile:
Autovalori complessi coniugati con parte reale negativa.
Spirale convergente

Fuoco instabile:
Autovalori complessi coniugati con parte reale positiva.
Spirale divergente

Nodo stabile:
Autovalori reali puri con parte reale negativa e distinta.
Linee convergenti

Nodo instabile:
Autovalori reali puri con parte reale positiva e distinta.
Linee divergenti

Centro:
Autovalori immaginari coniugati.
Cerchi

Sella:
Autovalori reali puri di segno opposto.
Nessuna linea passante, verso di percorrenza orario

Funzioni di Lyapounov:
Identificare una f che generalizza le proprietà di distanza in un intorno di un Pozzo e dell'energia in sun sistema dissipativo; permette di studiare la stabilità senza conoscere la soluzione generale..

Derivata totale:
Data una funzione $V(X)$ definita e C^1 su $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice Derivata totale di V (Rispetto al campo vettoriale $F(X)$) la funzione:

$$\dot{V}(X) = \frac{dV(X)}{dt} = \mathrm{grad}\big(V(X)\big) \cdot F(X)$$

Osservazione:
Se $\phi^t(X)$ è il flusso di $F(X)$ allora la derivata totale è la derivata in $t = 0$ della funzione (Soluzione particolare) ottenuta imponendo come condizione iniziale $h(t) = V\big(\phi^t(X)\big)$

<u>Funzione di Lyapounov:</u>

Una funzione V definita e C^1 in un intorno U di un punto di equilibrio S si dice una funzione di Lyapounov per l'equilibrio S se valgono:

$\dot{V}(X) \leq 0 \; \forall \; X$ in U

$V(S) = 0 \,; V(X) > 0 \;\; \forall \; X$ in U escluso S

Osservazione

Se $\dot{V}(X) < 0 \; \forall \; X$ in U si dice che la funzione di Lyapounov è **stretta**.

In questo caso è strettamente decrescente su ogni soluzione del sistema dinamico.

In caso generale semplicemente il valore di V non cresce lungo le soluzioni.

Teorema di Stabilità di Lyapounov:

Se il punto di equilibrio S possiede in un intorno U una (Qualsiasi!) funzione di Lyapounov $V(X) \rightarrow S$ è stabile.

<u>Informazioni sui Bacini:</u>

Positivamente invariante:

$P \subseteq W$ su cui è definito un sistema dinamico continuo si dice positivamente invariante se $\forall \; X_0$ in P la soluzione con condizione iniziale X_0 esiste $\forall \; t > 0$ ed è contenuta in P.

$X_0 \in P \rightarrow \phi^t(X_0) \in P, t \geq 0$

Un insieme P è invariante per il flusso integrale se le soluzioni con condizione iniziale in P esistono e sono contenute in $P \; \forall \; t \in \mathbb{R}$

Teorema della funzione di Lyapounov decrescente:

S punto di equilibrio per un sistema dinamico continuo definito sull'aperto W, sia $V(X)$ una funzione di Lyapounov per S definita sull'aperto W.

Se P è un intorno di S contenuto in W, compatto e positivamente invariante, tale che su ogni semiorbita $(t \geq 0)$ contenuta in P la funzione V sia strettamente decrescente (Salvo che su S).

Allora S è asintoticamente stabile e P è contenuto nel bacino di attrazione.

Osservazione:

In caso di sistemi fisici una funzione di Lyapounov può essere ricavata dall'energia totale.

Sistemi Newtoniani:

Idea:

Sono i sistemi in cui è presente una derivata 2°, ossia un'accelerazione.
Si introducono le variabili velocità e posizione.
L'energia può essere conservata o dissipata (Le sue proprietà forniscono le funzioni di Lyapounov).

Sistemi conservativi ad un grado di libertà:

Equazione del tipo (Su $\mathbb{R}$):

$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \sim \ddot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}$ con $f \in C^1\big((a,b)\big)$ con ammissibili $a, b = \pm\infty$

Risoluzione:

Poniamo $y = \dot{x}$ (Vettore velocità), il sistema diventa quindi:

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$ Sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$

Costruzione di un integrale primo e della funzione di Lyapounov:

Data $E(x,y)$ funzione C^1 ; $\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}f(x)$

Se vogliamo imporre $\dot{E} = 0$ possiamo scegliere:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -f(x) \,;\, \frac{\partial E}{\partial y} = y \rightarrow E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \int f(x)dx = E_{cinetica} + V_{potenziale}$$

> **Osservazione:**
>
> E è costante su ogni soluzione → Possiamo costruirci una funzione di Lyapounov (È proprio l'energia).

Teorema di stabilità del minimo:

Nel sistema newtoniano $\ddot{x} = f(x)$ ad un grado, se x_0 è un punto in cui $V(x) = -\int f(x)dx$ ha un minimo locale forte (Maggiorazione stretta), allora:

$x = x_0 \,;\, \dot{x} = y = 0$ è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.

> **Osservazione:**
>
> Se il minimo è non degenere (Ossia $-f'(x_0) = V''(x_0) > 0$) allora il sistema linearizzato in $(x_0, 0)$ è di tipo centro.
>
> $$\begin{cases} \dfrac{d(x-x_0)}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = f'(x_0)(x-x_0) \end{cases}$$
>
> Con matrice Jacobiana:
>
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow p.car. = \lambda^2 - f'(x_0)$$

Disegnare le soluzioni (Studio dell'energia potenziale):

Per disegnare le soluzioni (O almeno determinarne il comportamento qualitativo) possiamo sfruttare la funzione energia.

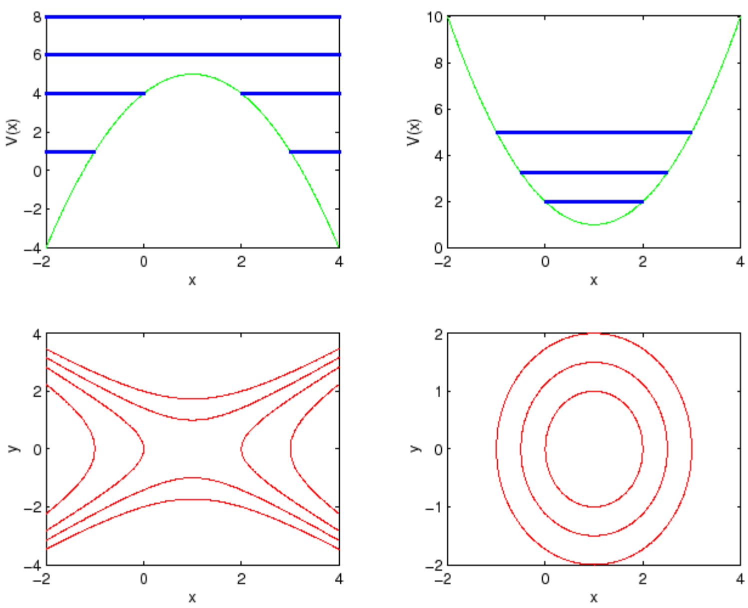
Ricordiamo che disegnare le soluzioni significa in pratica ricavare tutti i luoghi geometrici per i quali
$E(x,y) = costante$
Il primo passo è disegnare la funzione $z = V(x) = -\int f(x)dx$

Per fare questo ricordiamo che ne conosco la derivata: $V'(x) = -f'(x)$.

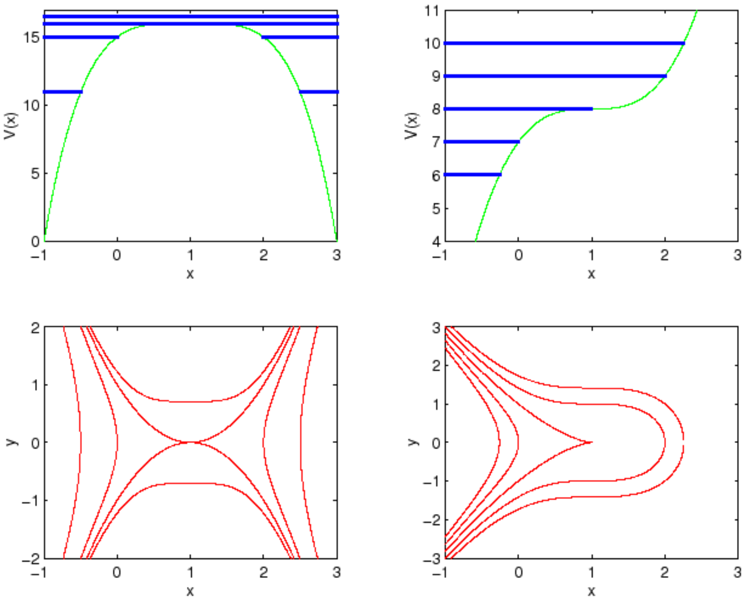
Osservazione 1:
Ad un minimo di $V(x)$ corrisponde un minimo di $E(x,y)$ (Punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico)
Attorno ad un minimo le curve di livello si chiudono come ellissi.

Osservazione 2:
Ad un massimo non degenere di $V(x)$ corrisponde un punto stazionario di $E(x,y)$ di sella.
(Si osserva linearizzando il sistema e osservando che gli autovalori sono reali e di segno opposto.
Attorno ad un massimo le curve si comportano come iperboli.

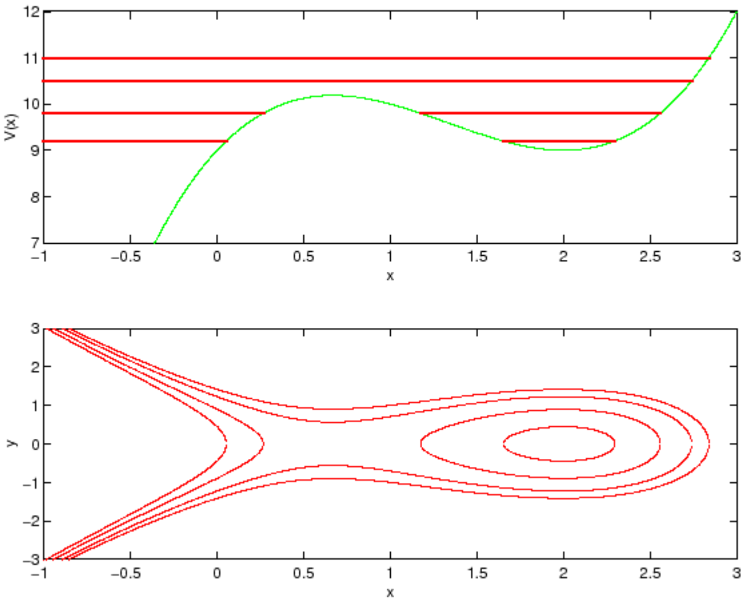
Esempio (Massimo non degenere e minimo non degenere):



Esempio (Massimo degenere e flesso a tangente orizzontale):



Esempio (Studio generale):



<u>Sistemi dissipativo ad un grado di libertà:</u>
Aggiungiamo alla formula precedente una dissipazione (Funzione della derivata prima), di solito un'accelerazione in funzione della derivata prima (Ossia che aumenti all'aumentare della velocità).
Equazione del tipo (Su $\mathbb{R}$):
$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - \gamma \frac{dx}{dt}$ in $\mathbb{R}$ con $f \in C^1\big((a,b)\big)$ con ammissibili $a, b = \pm\infty$ e $\gamma > 0$ coefficiente di dissipazione.

Risoluzione:
Poniamo $y = \dot{x}$ (Vettore velocità), il sistema diventa quindi:
$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) - \gamma y \end{cases}$ Sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$

Costruzione della funzione di Lyapounov:
Come prima scegliamo come funzione di Lyapounov:

$$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \int f(x)dx$$

Osservazione:
Non è più un integrale primo poiché cala nel tempo:

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = -\gamma y^2 \leq 0$$

Punti di equilibrio e caratterizzazione:
I punti di equilibrio sono quegli x corrispondenti ai punti stazionari di $V(x)$.
Se $f(x_0) = 0$ allora il linearizzato in $(x_0, 0)$ è:

$$\begin{cases} \frac{d(x-x_0)}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f'(x_0)(x - x_0) - \gamma y \end{cases}$$

Con matrice Jacobiana:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & -\gamma \end{pmatrix} \to p.car. = \lambda^2 + \gamma\lambda - f'(x_0)$$

Osservazione:
Se $f'(x_0) > 0$ gli autovalori sono discordi → Sella non lineare.
Se $f'(x_0) < 0$ gli esponenti di L. sono negativi → Pozzo asintoticamente stabile.

Sistemi gradienti:

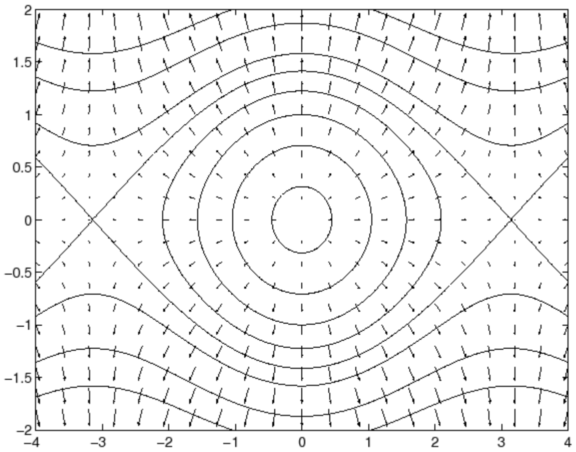
Se il campo vettoriale $F(x)$ è il gradiente di una funzione – $U(x)$ (Detta potenziale ma da non confondere con i newtoniani) allora il sistema dinamico definito da F ammette U come funzione di Lyapounov globale, di conseguenza è facile studiarne i punti di equilibrio e i bacini di attrazione.

Un sistema gradiente è definito da un'equazione del tipo:

$$\dot{X} = F(X) = \nabla U = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$U = -\frac{1}{2}y^2 + \cos(x)$



Studio mediante funzione di Lyapounov:

Definiamo la funzione di Lyapounov come $L(x) = U(x) + costante$

Punti di equilibrio:

Ogni punto di minimo locale non degenere per $U(x)$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Bacini di attrazione:

Teorema:

Sia $X(t)$ una soluzione del sistema dinamico $\dot{X} = -\nabla U(X)$ definito sull'aperto W e tale che $\forall\ t \geq 0$ si mantiene dentro un compatto $K \subseteq W$. Supponiamo inoltre che i punti di equilibrio del sistema dinamico (I punti stazionari di U) siano isolati.

Allora il limite per $t \to +\infty$ della soluzione $X(t)$ esiste ed è un punto stazionario di $U(X)$

Osservazione pratica:

Se lavoriamo con dimensione 2 e con matrice Hessiana non degenere allora i punti di equilibrio possono essere massimi, minimi o punti di sella.

Si tracciano le curve di livello $U(x, y) = h_i$ con $h_i = U(x_i)$ il valore assunto dai punti di sella.

Gli aperti connessi delimitati da queste curve e contenenti i minimi ne sono i bacini di attrazione.

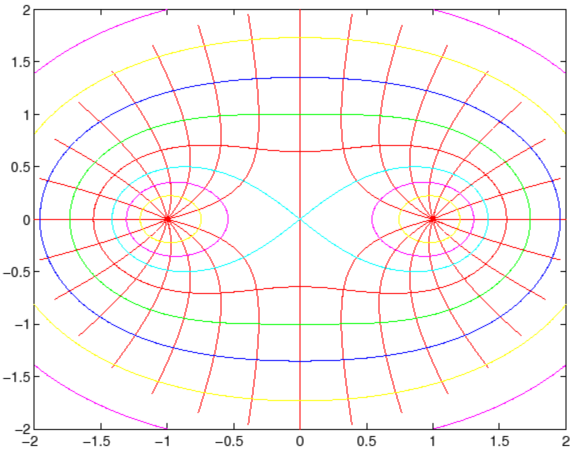
Esempio completo:

Sia $U(x,y) = 1 - 2x^2 + 2y^2 + (x^2+y^2)^2$ il potenziale di un sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = 4y(-1-x^2-y^2) \end{cases}$$

I tre punti stazionari sono $(1,0)$; $(-1,0)$; $(0,0)$ con $(0,0)$ punto di sella.

Alcune linee di livello sono:



<u>**Studio mediante linearizzazione:**</u>

Osservazione:

La matrice associata al linearizzato di un punto di equilibrio è simmetrica che per il teorema spettrale è diagonalizzabile. Dunque gli autovalori della matrice associata sono gli esponenti di Lyapounov.

Osservazione pratica:

La matrice linea rizzata è – $Hessiana$. Dunque:

$A = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(S)\right)$ dove S è il punto in cui la stiamo valutando.

Se l'Hessiana è definita positiva il punto di equilibrio è un **pozzo** (Ossia se U ha un minimo non degenere).

Se U ha un massimo non degenere invece è una **sorgente**.

Se esistono autovalori di segno discorde allora il punto di equilibrio è di **sella**.

<u>Studio sulle selle:</u>

Sella non lineare:
L'origine è una sella non lineare se il suo linearizzato ha un esponente di Lyapounov positivo ed uno negativo.

Equivalente: il linearizzato ha nell'origine un punto di equilibrio di tipo sella.

Osservazione (Curve eccezionali):
Una sella non lineare ha sempre delle soluzioni che vi giungono per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$.
Le immagini di queste soluzioni formano due insiemi disgiunti localmente chiusi in un intorno del punto di equilibrio ed aventi per frontiera delle curve eccezionali.

Osservazione (Separatrici):
Una sella non lineare ha sempre esattamente due separatrici:

Separatrice stabile (P. di equilibrio limite per $t \to +\infty$; bacino di attrazione)

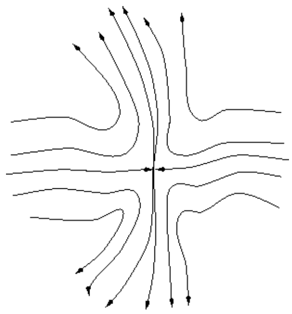
Tangente all'autospazio dell'autovalore negativo del linearizzato.

Separatrice instabile (P. di equilibrio limite per $t \to -\infty$; bacino di repulsione)

Tangente all'autospazio dell'autovalore positivo del linearizzato.

Esempio:
Nell'immagine di prima $y = 0$; $-1 < x < 1$ è la separatrice instabile perché bacino di repulsione del punto di sella $(0,0)$.
La separatrice stabile invece è $x = 0$ in quanto bacino di attrazione del punto di sella.

Curve eccezionali:
Una curva eccezionale è una curva la cui immagine contiene delle soluzioni del sistema dinamico che hanno limite diverso o vi giungono con tangente diversa rispetto ad altre soluzioni arbitrariamente vicine.



Separatrici:

Una curva differenziabile in $\mathbb{R}^2$ si dice separatrice per un sistema dinamico continuo se la sua immagine C ha le seguenti proprietà:

Tutte le soluzioni con condizioni iniziali in C hanno lo stesso punto limite S per $t \to +\infty$

$\forall\ P \in C\ \exists\ V$ intorno di P tale che i punti in $V - C$ non hanno lo stesso limite per $t \to +\infty$

Oppure:

Si può sostituire con $t \to -\infty$

Osservazione:

Da queste segue che C è invariante, ossia che tutte le soluzioni con condizione iniziale in C hanno immagine strettamente contenuta in C.

Punti di equilibrio iperbolici:

Un punto di equilibrio iperbolico di un sistema dinamico continuo è un punto di equilibrio la cui matrice del linearizzato non abbia esponenti di Lyapounov non nulli.

Osservazione:

In $\mathbb{R}^2$i tre tipi di punti di equilibrio iperbolico sono i pozzi, le sorgenti e le selle.

In un intorno di questi possiamo lavorare esclusivamente con il linearizzato.

Insiemi limite:

Dato un sistema dinamico continuo:

L'insieme dei valori limiti dell'orbita $X(t)$ per $t \to +\infty$ si chiama ω-limite dell'orbita.
L'insieme dei valori limiti dell'orbita $X(t)$ per $t \to -\infty$ si chiama α-limite dell'orbita.

Osservazione:
Se l'orbita va all'infinito o tende ad un valore esterno al dominio di definizione gli insiemi limite possono essere vuoti.

Teorema:
Dato un sistema dinamico continuo su W aperto di $\mathbb{R}^n$, se L è l'insieme limite di una soluzione $X(t)$ allora:

L è un insieme chiuso.
$L \cup W$ è un insieme invariante.
Se $X(t)$ è un'orbita contenuta per $t \geq 0$ in un insieme compatto $K \subseteq W$ allora L è connesso.

Orbite periodiche:
Una soluzione $X(t)$ di un sistema dinamico continuo si dice orbita periodica se è periodica come funzione di t, ossia se esiste un P tale che:

$$X(P+t) = X(t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Il minimo di tali P si dice **periodo**.

Attenzione:
Un punto di equilibrio si dice che ha periodo 0 ma non si considera un'orbita periodica.

Osservazione:
Per un'orbita periodica ogni punto della traiettoria è un valore limite.
Se un'orbita periodica è il limite di un'orbita diversa si dice ciclo limite.

Esempio:
Dato il sistema dinamico:

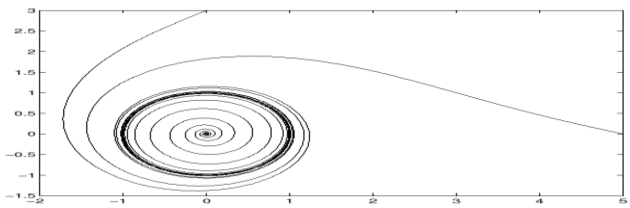
$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x - y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Spostandolo in coordinate polari:

$$\begin{cases} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(r^2 - 1) \\ \ \ r^2\dot{\theta} = -y\dot{x} + x\dot{y} = -r^2 \end{cases}$$

Dunque $x^2 + y^2 = 1$ è un'orbita periodica, percorsa in verso orario con periodo 2π.

Se $r < 1 \to \dot{r} < 0$ quindi l'origine è l'ω-limite e l'orbita periodica è l'α-limite.
Se $r > 1 \to \dot{r} > 0$ quindi il ciclo limite è l'α-limite mentre l'ω-limite è vuoto.



Idea:
In $\mathbb{R}^2$ sappiamo caratterizzare in maniera qualitativa tutti gli insiemi limite. Per dimensioni maggiori di 2 invece questo risultato non è garantito.
Lavoriamo con $F(X)$ campo vettoriale su un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sezione locale:
È una curva $g: I \subseteq \mathbb{R} \to W$ tale che in ogni punto $g(s)$ la velocità $\frac{dg}{ds}$ della curva è linearmente indipendente dal campo vettoriale F.

Equivalente:
La sezione locale attraversa trasversalmente tutte le soluzioni del sistema dinamico che incontra.

Osservazione:
Nessuna sezione locale passa per un punto di equilibrio.
Per ogni punto di equilibrio passa almeno una sezione locale.
Ogni sezione locale S ha un intorno nel quale tutte le soluzioni passanti nell'intorno intersecano S.

Idea:
Studiando le intersezioni successive di una soluzione con una sezione locale andiamo a suddividere in componenti connesse $\mathbb{R}^2$ nelle quali è qualitativamente facile studiare l'andamento delle soluzioni.

Lemma della sequenza monotona:
Sia $g: I \to W$ una sezione locale, $X_0, X_1, \dots, X_n$ una sequenza di punti appartenenti alla sezione locale e alla traiettoria nell'ordine dato.
Allora lungo la sezione g i punti X_i formano una sequenza monotona.

Lemma degli insiemi limite del piano:
Nel piano $\mathbb{R}^2$ gli insiemi α-limite e gli insiemi ω-limite non vuoti e compatti che non contengono punti di equilibrio sono orbite periodiche.

<u>Teorema di Poincaré – Bendixon:</u>
Sia C una curva chiusa che corrisponde ad una traiettoria di un sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$ tale che l'insieme di definizione W del sistema dinamico contenga l'interno della regione delimitata da C.
Allora all'interno di C esiste almeno un punto di equilibrio o almeno un'altra orbita periodica.

Discretizzazione

Idea:
Passare da un sistema dinamico continuo ad uno discreto non migliora la risolubilità (Ossia non è comunque detto che esista una soluzione esplicita per il flusso integrale se il sistema dinamico discreto non è lineare) ma la descrizione della traiettoria è data da un'operazione iterata, dunque con sufficiente capacità di calcolo diventa possibile rappresentarla.

Equazioni lineari alle differenze prime:
Un sistema dinamico discreto lineare in $\mathbb{R}^n$ è della forma:
$X_{k+1} = AX_k$ con $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Orbita:
$\{X_k\}$; $k \in \mathbb{Z}$ dove ciascun termine si può scrivere mediante l'iterazione precedente:
$X_k = A^k X_0$

Osservazione:
Per il calcolo dell'orbita il calcolo di una potenza n-esima di una matrice è abbastanza pesante, un sistema è dunque costruire la forma di Jordan di A e lavorare con quella.

Attenzione:
Questo è un sistema valido solo per i casi nei quali è facile ottenere la matrice di Jordan che, in generale, è un problema mal posto.

Il calcolo della matrice di Jordan associata e del relativo esponenziale è identico al caso precedente, otterremo dunque le soluzioni del sistema:
$X_k = A^k X_k = B^{-1} J^k B X_k$ con B^{-1} base di autovettori

Espresse come combinazioni di:
λ_i^k con λ_i autovalore reale di A
$\lambda_i^k P_i(k)$ con λ_i autovalore reale di A e $P_i(k)$ polinomio.
$\mathrm{Re}(z_i^k)$, $\mathrm{Im}(z_i^k)$ con $z_i, \overline{z_i}$ autovalori complessi coniugati di A
$\mathrm{Re}(z_i^k)P_i(k)$, $\mathrm{Im}(z_i^k)P_i(k)$ con $z_i, \overline{z_i}$ autovalori complessi coniugati di A e $P_i(k)$ polinomio.

Definizione (Mappa stabile):
$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una mappa stabile nel punto X_0 se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che:
$|X - X_0| < \delta \to |F^k(X) - F^k(X_0)| < \varepsilon\ \forall\, k \in \mathbb{N}$
Una mappa è instabile se e solo se non è stabile.

Una mappa è asintoticamente stabile in X_0 se esiste un intorno U di X_0 tale che:
$$X \in U \to \lim_{k\to\infty} |F^k(X) - F^k(X_0)| = 0$$

Teorema dei pozzi e sorgenti non lineari discreti:
Sia $X_{k+1} = f(X_k)$ un sistema dinamico discreto, X_0 un punto fisso tale che $f(X_0) = X_0$ e A la matrice jacobiana di f in X_0.
Se tutti i moltiplicatori di Lyapounov di A sono minori di 1 allora f è asintoticamente stabile in X_0, se tutti maggiori di 1 f^{-1} è asintoticamente stabile in X_0.

Osservazione:
I **moltiplicatori** di Lyapounov sono i moduli degli autovalori.

<u>Equazioni alle differenze finite:</u>
E'un'equazione definita per ricorrenza di ordine n-esimo. Un esempio di ordine 2 è:

$$X_{k+2} = F(X_{k+1}, X_k)$$

Può essere ricondotta ad un sistema dinamico mediante:

$V_k = \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ X_k \end{pmatrix}$ e $V_{k+1} = \begin{pmatrix} X_{k+2} \\ X_{k+1} \end{pmatrix} = G(V_k) = \begin{pmatrix} F(X_{k+1}, X_k) \\ X_{k+1} \end{pmatrix}$

Esempio:

$$ax_{k+2} + bx_{k+1} + cx_k = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+2} \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}x_{k+1} - \frac{c}{a}x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Metodo di Eulero:

Caso lineare:
Si definisce come:

$$X_{k+1} = \left(\mathrm{Id} + \frac{At}{m}\right) X_0$$

Dove *m* sono i numeri di sottointervalli che caratterizzano il passo (In pratica vogliamo il tempo $h = \frac{d}{m}$ e lo suddividiamo in m intervalli, maggiore è questo numero migliore è l'approssimazione).

Caso non lineare:
Se stiamo approssimando con il metodo di Eulero un sistema non lineare $\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ F(0) = X_0 \end{cases}$
Definiamo la soluzione di Eulero al tempo h come:

$$X(h) \cong X_1 = X_0 + hF(X_0)$$

In generale:

$$\begin{cases} X_0 = X(0) \\ X_{k+1} = X_k + hF(X_k) \end{cases}$$

Nei valori intermedi fra i punti così calcolati si calcola il poligono di Eulero, ossia l'interpolante lineare continua e derivabile a tratti dei punti calcolati.

Errore di troncamento accumulato:
Differenza fra la successione definita con il metodo di Eulero e la soluzione del sistema dinamico originario.

Teorema di convergenza del metodo di Eulero:
Se il campo vettoriale è Lipschitziano di costante L e limitato in modulo dal valore M, ossia:

$$|F(X) - F(Y)| \leq L|X - Y| \; ; \; |F(X)| < M$$

Allora l'errore in $\mathbb{R}^n$ accumulato Δ^k dopo il tempo $t = kh$ soddisfa la disuguaglianza:

$$\left|\Delta^k\right| \leq Mh\left[e^{\sqrt{n}Lt} - 1\right]$$

<u>Algebra di operatori e discretizzazione di ordine superiore:</u>
Sono un metodo per discretizzare delle equazioni differenziali di ordine superiore al primo.

Data $f(t)$ definita $\forall\ t$ allora gli operatori:

Spostamento:
$(Sf)(t) = f(t+h)$

Differenza in avanti:
$(\Delta_+ f)(t) = f(t+h) - f(t)$

Identità:
$(If)(t) = f(t)$

> **Osservazione:**
> Mandano lo spazio delle funzioni in se.
> Tutti gli operatori commutano.

Applicando il binomio di Newton:

$$\Delta_+^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} S^j I^{k-j} (-1)^{k-j}$$

Quindi usando l'operatore derivata $Df(t) = \frac{df}{dt(t)}$ valgono le relazioni:

$$\frac{\Delta_+}{h} = D + O(h)$$
$$\frac{\Delta_+^2}{h^2} = D^2 + O(h)$$

Differenza centrale:
Può essere utilizzata per equazioni differenziali con derivate solo di ordine pari.
Data $f(t)$ definita $\forall\ t$ allora l'operatore differenza centrale è:

$$\Delta_0 f(t) = f\left(t+\frac{h}{2}\right) - f\left(t-\frac{h}{2}\right)$$

Le potenze pari sono definite come operatori su di una successione.

<u>Mappa standard sistema newtoniano conservativo:</u>

La mappa standard è la discretizzazione di un sistema Newtoniano ad un grado di libertà.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$$

La mappa standard è:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_k) \end{cases}$$

Teorema della mappa standard:

La mappa standard associata a $\ddot{x} = f(x)$ con f di classe C^1 su un aperto W reale è conservativa su $W \times \mathbb{R}$

Osservazione:

La discretizzazione è conservativa ma la mappa standard non possiede necessariamente un integrale primo.

Esempio carino (Mappa standard del pendolo):

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + h\sin(x_k) \end{cases}$$

Oppure rimpiazzando con hy:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + h^2\sin(x_k) \end{cases}$$

Questa mappa ha due punti fissi:

Il primo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori complessi di modulo 1 ed è detto **punto fisso ellittico**.

Il secondo $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ ha due autovalori reali di modulo uno maggiore ed uno minore di 1, è detto **punto fisso iperbolico**.

Un punto interessante è $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$ poiché dopo due iterazioni ritorna su se stesso, è detto **orbita di periodo 2**.

Studiando la matrice associata alla doppia iterazione osserviamo che gli autovalori sono complessi coniugati di modulo 1, si dice allora che è un **punto periodico ellittico.**

Teorema delle separatrici stabile ed instabile:
Sia X_0 un punto fisso iperbolico per S diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$, sia A la matrice del linearizzato in X_0.

Esiste una curva (**Separatrice stabile**) regolare ed iniettiva $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$\gamma(0) = X_0$
La velocità $\gamma'(0)$ è un autovettore per A con autovalore in modulo **minore** di 1.
L'immagine di $\gamma(\mathbb{R})$ è un insieme invariante (La funzione s_1 scambia)
$\forall\, s \in \mathbb{R}\,, |s_1(s)| < |s|$

Esiste una curva (**Separatrice instabile**) regolare ed iniettiva $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$\gamma(0) = X_0$
La velocità $\gamma'(0)$ è un autovettore per A con autovalore in modulo **maggiore** di 1.
L'immagine di $\gamma(\mathbb{R})$ è un insieme invariante (La funzione s_1 scambia)
$\forall\, s \in \mathbb{R}\,, |s_1(s)| < |s|$

Definizione:
Un punto si dice omoclinico se appartiene alla separatrice stabile e a quella instabile di un punto fisso iperbolico.

Osservazione:
Un punto si dice doppiamente asintotico se ha la stessa orbita per $t \to +\infty\,; t \to -\infty$
Ogni punto omoclinico è doppiamente asintotico.
Se le due separatrici passanti per il punto omoclinico hanno vettori velocità fra loro indipendenti il punto si dice omoclinico trasversale.

L'orbita di un punto omoclinico è formata da punti omoclinici (Orbita omoclinica)

Se un punto omoclinico è trasversale allora ogni punto della sua orbita è omoclinico trasversale.

Ricerca di un'orbita periodica (Metodo di Newton):

$$X^{k+1} = X^k + \left(\mathrm{Id} - A^{(2)}(X^k)\right)^{-1} \left(S^2(X^k) - X^k\right)$$

Dati due punti periodici iperbolici:
Un punto appartenente all'intersezione della separatrice stabile del primo con la separatrice instabile del secondo si dice omoclinico se questi due punti appartengono alla stessa orbita periodica, altrimenti si dice eteroclinico.

Caso dissipativo:
Studiamo il sistema dinamico newtoniano dissipativo:

$$\ddot{x} = f(x) - \gamma \dot{x}$$

La discretizzazione è:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h^2 f(x_k) + (1 - \gamma h) y_k \\ y_{k+1} = (1 - \gamma h) y_k + h^2 \sin(x_k) \end{cases}$$

<u>Sistemi conservativi</u>

Sistemi Newtoniani conservativi ad un grado di libertà:

Idea:
Sono i sistemi in cui è presente una derivata 2°, ossia un'accelerazione.
Si introducono le variabili velocità e posizione.
In questo capitolo affronteremo il caso in cui l'energia venga conservata.

Equazione del tipo (Su $\mathbb{R}$):
$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \sim \ddot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}$ con $f \in C^1\big((a,b)\big)$ con ammissibili $a, b = \pm\infty$

Risoluzione:
Poniamo $y = \dot{x}$ (Vettore velocità), il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$$ Sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$

Energia potenziale:
$$V(x) = -\int f(x)dx$$

Energia cinetica:
$$T(y) = \frac{1}{2}y^2$$

Energia totale:
$$E(x,y) = T(y) + V(x)$$

Formulazione equivalente:
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

Sistemi Hamiltoniani ad un grado di libertà:

Data una funzione a due variabili $H(x, y)$ (Hamiltoniana, generalizzazione dell'energia), le equazioni di Hamilton che descrivono un sistema dinamico continuo sono:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

Formulazione equivalente:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = J\nabla H(p, q) \; ; \; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione:

La funzione Hamiltoniana è un integrale primo.

Esempio scorrimento:

$$H(p, q) = T(p) \leftrightarrow \begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = \frac{\partial T}{\partial p} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} p(t) = p_0 \\ q(t) = q_0 + v_0 t \end{cases} ; v_0 = \frac{\partial T}{\partial p}(p_0)$$

Teorema di Liouville a due variabili:

Sia $H(p, q)$ una funzione di classe C^2. Se $(p(t), q(t))$ è la soluzione con condizione iniziale (p_0, q_0) la trasformazione:

$\Phi^t : (p_0, q_0) \rightarrow (p(t), q(t))$ conserva l'area $\forall \in \mathbb{R}$ dove è definita.

<u>Integrabilità, caso Newtoniani:</u>
Integrabile per una Hamiltoniana che deriva da un sistema Newtoniano significa che la soluzione è definita da equazioni finite che possono coinvolgere una funzione implicita, una quadratura ed una funzione inversa.

Procedimento:
Data una Hamiltoniana ottenibile da un sistema Newtoniano:

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)\ ;\ \begin{cases} \dot{p} = -\frac{dV(q)}{dq} \\ \dot{q} = \frac{1}{m}p \end{cases}$$

Siccome l'Hamiltoniana è un integrale primo possiamo fissare il valore E e ricavare la corrispondente orbita:

$$p = \pm\sqrt{2m\big(E - V(q)\big)}$$

Dalle equazioni di Hamilton ricaviamo:

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E - 2V(q)}{m}}$$

Che essendo un sistema a variabili separate è risolubile a meno di quadratura:

$$t_2 - t_1 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

Problema:
q_i sono le coordinate assunte al tempo t_i-esimo. Dunque serve la legge oraria, ossia la funzione deve essere invertibile (Basta monotona).
Perciò se la funzione passa per un punto $(p,q) = (0,q^*)$ l'integrale deve essere scritto come:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q_1}^{q^*}\frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} - \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q^*}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

Applicazione (Calcolo del periodo delle orbite periodiche):
Ricordando che in un punto di equilibrio si devono annullare i due secondi membri delle equazioni di Hamilton allora i punti stazionari di una funzione:

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$$

Sono del tipo $(0,q^*)\ |\ V(q^*) = 0$
Detti q_1, q_2 i due punti di intersezione della traiettoria non contenente punti di equilibrio con l'asse delle q allora per ragioni di simmetria vale:

$$P = \sqrt{2m}\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

Caso non Newtoniano:

Valgono risultati analoghi:

Teorema delle curve di livello dell'Hamiltoniana:

Sia $H(p,q)$ una funzione Hamiltoniana di classe C^2 su di un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^2$.
Se una componente connessa C dell'insieme di livello $H(p,q) = E$ è non vuoto, compatta e non contiene punti stazionari di $H(p,q)$ allora coincide con la traiettoria di un'orbita periodica.
Se invece C, privata dei punti stazionari, è una traiettoria, la soluzione corrispondente o esce da ogni compatto in W oppure ha come punto limite uno dei punti stazionari (questo cale per $t \to +\infty$; $t \to -\infty$)

Osservazione:

I punti di minimo dell'Hamiltoniana sono circondati da curve chiuse sulle quali le orbite periodiche girano in senso antiorario.

Se l'Hamiltoniana ha un massimo girano in senso orario.

Questo secondo caso è impossibile se l'Hamiltoniana deriva da un Newtoniano.

<u>Studio qualitativo Hamiltoniana:</u>

Trovare i punti di equilibrio:
Sono i punti stazionari dell'Hamiltoniana $\nabla H(p,q)=\underline{0}$

Il sistema linearizzato si ottiene come:

$$JA=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2 H}{\partial(p,q)^2}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b & -d\\ a & b\end{pmatrix}$$

Se $\det(A)>0$ → Autovalori immaginari puri → Punto di massimo o minimo locale non degenere (Punto stabile)
Se $\det(A)<0$ → Autovalori reali di segno opposto → Sella non lineare se il punto di equilibrio è una sella

Disegnare le separatrici:
Seguono dai punti di equilibrio individuati.

Determinare le orbite periodiche:
Seguono dai punti di equilibrio individuati e dal disegno delle separatrici.

Individuare le orbite aperte ma definite $\forall\, t\in\mathbb{R}$:
Seguono dai punti di equilibrio individuati.

Disegnare le curve eccezionali:
Individuare alcune soluzioni rappresentative e i rispettivi insiemi limiti:

<u>Trasformata di Legendre:</u>

Idea:
Gran parte dei sistemi dinamici fisici non sono di tipo Hamiltoniano in quanto le informazioni vengono codificate in termini di velocità e accelerazione. Questi sistemi però possono essere ricondotte ad una rappresentazione particolare (detta Lagrangiana).

Data un'Hamiltoniana $H(p,q)$ la velocità generalizzata $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)$ può essere espressa in funzione di q e del momento p.

Vogliamo ricondurci ad una formulazione Lagrangiana $L(q,\dot{q})$

Ipotesi sulla Hamiltoniana: $H(p,q)$ di classe C^2 e strettamente convessa.

La relazione tra il formalismo Hamiltoniano $H(p,q)$ e quello Lagrangiano $L(q,\dot{q})$ è data dalla Trasformata di Legendre:

$$(p,q) \to \left(q, \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)\right) \text{(Monotona crescente)}$$

Osservazione:
Geometricamente la Lagrangiana è esprimibile come l'opposto dell'ordinata all'origine della retta tangente all'Hamiltoniana.

Quindi:

$$L(q,\dot{q}) = p\dot{q} - H(p,q)$$

Equazioni di Lagrange:

Sono le equazioni che descrivono il moto in funzione di q e $\dot{q}$. Esprimono dinamiche equivalenti alle equazioni Hamiltoniane associate (Esiste un diffeomorfismo che scambia le soluzioni)

Sfruttando la trasformazione di Legendre otteniamo le condizioni sulle derivate:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (**Equazione di Lagrange**)

Condizione di non annullamento della derivata seconda:

Equivalente alla condizione di convessità.

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{q}} = \frac{d^2 L}{d\dot{q}^2} \neq 0$$

Esempio Newtoniano:

$p = m\dot{q}\,; H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Dunque:

$$L(q,\dot{q}) = m\dot{q}\dot{q} - H(m\dot{q},q) = m\dot{q}^2 - \frac{(m\dot{q})^2}{2m} - V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

L'equazione di Lagrange diventa:

$$p = m\dot{q}\,; \dot{p} = m\ddot{q}\,; m\ddot{q} = -V'(q)$$

Cambiamenti di coordinata:

Non è necessario scegliere q come coordinata che parametrizza le soluzioni.

Teorema di covarianza dell'equazione di Lagrange:

Sia $x = x(q)$ un cambiamento di coordinata di classe C^2 (Quindi una funzione differenziabile, invertibile e con inversa differenziabile, $\frac{dx}{dq} \neq 0$).

Sia $L_2(x,\dot{x}) = L_2\big(x(q),\dot{x}(q,\dot{q})\big) = L(q,\dot{q})$

Allora l'equazione di Lagrange nelle variabili q e quella nelle variabili x esprimono dinamiche equivalenti:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial x} = 0$$

Sistemi Lagrangiani:
Sono sistemi Hamiltoniane non del tipo $H(p,q) = T(p) + V(q)$ ottenute mediante trasformata di Legendre dalle equazioni di Lagrange.

Moti vincolati ad un grado di libertà di un corpo puntiforme:
Un corpo puntiforme di massa m si muove lungo una curva regolare $X(q)$ con q parametro e C^2 in $\mathbb{R}^n$.

L'energia cinetica è data da $T = \frac{m}{2}|\dot{X}|^2 = \frac{m}{q}\left|\frac{dX}{dq}\right|^2 \dot{q}^2$ che è convessa e dipende solo da $q, \dot{q}$
$T = T(q, \dot{q})$

Detta $W(X)$ l'energia potenziale delle forze esterne, allora la restrizione dell'energia potenziale alla curva: $W\big(X(q)\big) = V(q)$ avrà derivata:

$$\frac{dV(q)}{dq} = \operatorname{grad}\Big(W\big(X(q)\big)\Big)\frac{dX(q)}{dq}$$

Questa è la componente tangente (A meno del segno) del campo $\operatorname{grad}(W)$ al punto.

Ipotesi aggiuntiva:
Le componenti della forze normali alla curva sono annullate dalla reazioni vincolari.

L'equazione del moto diventa descrivibile dalla Lagrangiana:

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$$

Sfruttando le equazioni di Lagrange otteniamo che:

$p = m\dot{q}\left|\frac{dX}{dq}\right|^2$ (Momento)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \big(m\ddot{X} + \nabla W\big)\cdot\frac{dX}{dq} = 0$ (Equazione di Lagrange)

Quindi l'accelerazione è compensata dalla forza esterna di potenziale W.

L'equazione di Newton è $m\ddot{X} = -\nabla W + R$ con R reazione normale.

Quindi le due equazioni (Lagrange, Newton) sono equivalenti sotto l'ulteriore ipotesi che le reazioni vincolari siano perpendicolari al vincolo (Vincolo senza attrito lungo la direzione di spostamento). Una volta note le equazioni di Lagrange possiamo dall'equazioni di Newton ricavare R.

Pendolo:

Corpo puntiforme di massa m ne piano (x, y) con energia potenziale $W(x, y) = mgy$ e soggetto al vincolo $x^2 + y^2 = l^2$

Parametrizzando l'angolo a partire dal basso:

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin\theta \\ -l \cos\theta \end{pmatrix}$$

La funzione di Lagrange è:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta) = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right)\dot{\theta}^2 - mgy(\theta) = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Il momento è dunque:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

Da cui l'equazione di Lagrange:

$$\frac{dp}{dt} = ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

La trasformata di Legendre definisce l'Hamiltoniana:

$$H(p, \theta) = p\dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

Corpi non puntiformi:

Nei corpi non puntiformi bisogna considerare l'energia di rotazione della forma $\frac{I\dot{\theta}^2}{2}$

Con I momento di inerzia che per corpi uniformi è del tipo $I \propto mR^2$

Esempio:

Cilindro attorno all'asse di simmetria $I = \frac{mR^2}{2}$

Sfera di densità uniforme $I = \frac{2mR^2}{5}$

Esempio (Piano inclinato di Galileo):

Il vincolo è dato dalla condizione di non strisciare, $q = -R\theta$

Dunque l'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{2mR^2}{10}\dot{\theta}^2 = \frac{7}{10}m\dot{q}^2$$

Se l'angolo del piano con l'orizzontale è a allora il potenziale è:

$$V(q) = (mg\sin a)q + mgR$$

Dunque la Lagrangiana è (a meno di costanti additive):

$$L(q,\dot{q}) = \frac{7}{10}m\dot{q}^2 - (mg\sin a)q$$

Sistemi rotanti:
Sono quei sistemi dinamici in cui l'energia non si preserva e viene fornita, ad esempio, da un motore esterno.

Supponendo che la rotazione del punto che stiamo studiando avvenga attorno all'asse delle z possiamo parametrizzarne le coordinate come:

$$\begin{cases} x(q,t) = r(q)\cos(\omega t) \\ y(q,t) = r(q)\sin(\omega t) \\ z(q,t) = z(q) \end{cases}$$

La derivata totale della parametrizzazione è:

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(q)\cos(\omega t)\,\dot{q} - r(q)\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y} = r'(q)\sin(\omega t)\,\dot{q} + r(q)\omega\cos(\omega t) \\ \dot{z} = \dot{z}(q)\dot{q} \end{cases}$$

Dunque l'energia cinetica è:

$$T(q,\dot{q}) = T_2(q,\dot{q}) + T_0(q)$$

Supponendo applicate al corpo delle forze con energia potenziale non dipendenti dal tempo:

$$W\big(x(q,t), y(q,t), z(q,t)\big) = V(q)$$

Allora la Lagrangiana è:

$$L = T - V = T_2 + T_0 - V$$

La trasformata di Legendre e la sua inversa sono:

$$p = a(q)\dot{q}\ ;\ \dot{q} = \frac{p}{a(q)}\ ; a(q) = m\{|r'(q)|^2 + |z'(q)|^2\}$$

Perciò l'Hamiltoniana è:

$$H(p,q) = T_2 - T_0 + V(q)$$

Osservazione:
L'Hamiltoniana è un integrale primo per le equazioni di Hamilton.

Trasformazioni canoniche (Hamiltoniane):

Vogliamo determinare i cambiamenti di coordinate $\varphi: (p,q) \to (w,z)$ che trasformano sistemi dinamici con Hamiltoniana $H(p,q)$ in sistemi dinamici con Hamiltoniana $K(w,z)$

Ipotesi semplificativa:
Le Hamiltoniane si corrispondono per valore:

$$H(p,q) = K(w,z) = K\big(w(p,q), z(p,q)\big)$$

Una trasformazione è detta canonica se ogni cambiamento di coordinate preserva la forma Hamiltoniana della dinamica.

Teorema delle trasformazioni che conservano l'area:
Sia φ un cambiamento di coordinate che sia un diffeomorfismo (C^1 con inversa C^1), se A è la matrice Jacobiana di φ:

$$A = \frac{\partial(w,z)}{\partial(p,q)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{pmatrix}$$

La trasformazione è canonica se e solo se $\det(A) = 1$

Esempio interessante (Coordinate polari canoniche):
Una trasformazione canonica $(I,\theta) \to (p,q)$ è data da:

$$p = \sqrt{2I}\cos\theta \ ; q = \sqrt{2I}\sin\theta$$

Parametrizzazione delle orbite periodiche:

Se l'Hamiltoniana ha sull'aperto W insiemi di livello tutti compatti che si riducono ad una curva regolare semplice e chiusa allora ognuna di queste curve individua un'orbita periodica.

Orbite periodiche di tipo librazione:

Se q appartiene ad $\mathbb{R}$ allora $p(t), q(t)$ devono essere entrambe periodiche con lo stesso periodo P.

La curva di livello racchiude una parte del piano nel quale, se l'Hamiltoniana è definita, deve esserci almeno un punto di equilibrio.

Orbite periodiche di circolazione:

Se la coordinata q è una variabile angolo lo spazio delle fasi è contenuto in un cilindro.

L'orbita può essere comunque di librazione ma può anche essere di circolazione:

$$\begin{cases} p(t+P) = p(t) \\ q(t+P) = q(t) + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Se di circolazione l'orbita si avvolge sul cilindro senza delimitare alcun compatto.

Osservazione:

Una variabile angolo è un'applicazione $q: \mathbb{R} \to S^1$ che parametrizza la circonferenza.

Esempio (Oscillatore armonico):

$H(p,q) = \omega \frac{p^2+q^2}{2}$

La trasformazione canonica:

$\begin{cases} p = \sqrt{2I}\cos\theta \\ q = \sqrt{2I}\sin\theta \end{cases}$ riduce l'Hamiltoniana a:

$$H(p,q) = K(I,\theta) = \omega I$$

Dunque I è una variabile azione (Dimensione di un'energia moltiplicata per il tempo) mentre θ è una variabile angolo con frequenza ω costante rispetto ad I.