

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Topologia di spazi a curvatura costante

Candidato

Guglielmo Nocera
Matr. 501522

Relatore

Prof. Roberto Frigerio

10 giugno 2016

Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

Nella presente dissertazione si affronteranno questioni riguardanti varietà a curvatura costante con strumenti di teoria geometrica dei gruppi. La teoria geometrica dei gruppi, fondata da Gromov negli anni '80, oltre ad avere portato ad interessanti risultati in vari contesti anche slegati dalla geometria differenziale, ha permesso di comprendere meglio le relazioni tra l'omotopia e la curvatura di varietà, tema peraltro già studiato negli anni precedenti con tecniche più classiche. Gettando un ponte tra la geometria di larga scala del rivestimento universale di una varietà compatta e la geometria del gruppo fondamentale della varietà stessa (codificata dalle proprietà dei suoi grafi di Cayley), la teoria geometrica dei gruppi ha permesso per esempio di chiarire le molte differenze che intercorrono tra i gruppi fondamentali delle varietà piatte e quelli delle varietà di curvatura negativa.

In questa tesi definiremo anzitutto una nozione di curvatura costante per spazi metrici come “locale isometria con uno spazio modello” appartenente ad una certa classe $\{M_\kappa^n\}$, i cui rappresentanti più noti sono \mathbb{R}^n , la sfera \mathbb{S}^n e lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n dotati di metriche intrinseche dette “metriche di lunghezze”. Il numero n , naturale maggiore di 2, sarà detto dimensione e sarà effettivamente la dimensione come varietà topologica reale, mentre il numero reale κ sarà detto curvatura.

Dimostreremo poi che due distinte strutture di questo genere su uno stesso spazio topologico (o meglio, su due spazi topologici con lo stesso gruppo fondamentale) sono incompatibili (per “distinte” si intenderà con dimensione diversa o con curvatures di segno diverso). Per far questo mostreremo che, in caso contrario, i due spazi modello di riferimento risulterebbero “quasi-isometrici”, dove per quasi-isometria intenderemo un opportuno indebolimento della nozione di isometria. Strumento principale per questo risultato sarà il Lemma di Milnor-Švarc, che permetterà di connettere la struttura di varietà a curvatura costante con il gruppo fondamentale, sul quale sarà stata posta una struttura metrica ben definita a meno di quasi-isometria, e dipendente solo dalla struttura di gruppo.

L'incompatibilità delle due strutture metriche sullo spazio base verrà dal fatto che due distinti spazi modello M_κ^n non sono quasi-isometrici. Ci concentreremo in particolare sul caso cruciale $M_0^n = \mathbb{R}^n$ e $M_{-1}^n = \mathbb{H}^n$ (lo spazio iperbolico). Per vedere che questi due

spazi non sono quasi-isometrici utilizzeremo un invariante di quasi-isometria, il cono asintotico, che fa riferimento alla teoria degli spazi Rips-iperbolici sulla quale dunque ci soffermeremo per quanto necessario.

Indice

1	Spazi a curvatura costante	7
1.1	Spazio iperbolico e spazi M_κ^n	7
1.2	Spazi di lunghezze	11
1.3	Gli M_κ^n come spazi di lunghezze	13
1.4	Rivestimento universale di varietà a curvatura costante	17
2	Gruppo fondamentale e quasi-isometria	21
2.1	Azioni di gruppi su spazi metrici	21
2.2	Quasi - isometria	22
2.3	Gruppo fondamentale di spazi a curvatura costante	25
2.4	Ultralimiti di spazi metrici	27
2.5	Coni asintotici e quasi-isometrie	28
3	Coni asintotici di spazi iperbolici	31
3.1	Iperbolicità secondo Rips	31
3.2	Coni asintotici di \mathbb{H}^n	36
3.3	Conclusione: proprietà determinate dalla topologia	38

Capitolo 1

Spazi a curvatura costante

1.1 Spazio iperbolico e spazi $M_{\mathcal{K}}^n$

Definizione 1.1 (Spazio iperbolico). *Consideriamo \mathbb{R}^{n+1} con il prodotto scalare di Minkowski*

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = -u_0v_0 + \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Definiamo lo spazio iperbolico n -dimensionale come

$$\mathbb{H}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, u \rangle_{\mathcal{M}} = -1, u_0 > 0\}$$

(foglio superiore dell'iperboloide).

Osservazione 1.2. Prima di definire una distanza sullo spazio iperbolico, che non sarà una restrizione della distanza euclidea, osserviamo che:

- \mathbb{H}^n è una varietà C^∞ n -dimensionale, in quanto controimmagine di -1 tramite la forma quadratica $q(p) = \langle p, p \rangle_{\mathcal{M}}$, che è una funzione C^∞ e ammette -1 come valore regolare: infatti il nucleo del differenziale $dq_p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ è l'ortogonale di p che ha codimensione 1 in \mathbb{R}^{n+1} (se $p \neq 0$), e dunque il differenziale è surgettivo:

$$dq_p(v) = 2\langle p, v \rangle_{\mathcal{M}}.$$

Si può pertanto concludere che \mathbb{H}^n è una varietà n -dimensionale in \mathbb{R}^{n+1} . Più precisamente $T_p\mathbb{H}^n = p^\perp$ per ogni $p \in \mathbb{H}^n$. Inoltre \mathbb{H}^n è orientato, ammettendo l'identità come campo normale mai nullo.

- Il prodotto scalare di Minkowski ristretto al tangente $T_p\mathbb{H}^n$ è definito positivo per ogni $p \in \mathbb{H}^n$. Infatti il tangente coincide con p^\perp e dunque, poiché la segnatura

globale del prodotto scalare è $(n, 1, 0)$, completando p a base di Sylvester di \mathbb{R}^{n+1} ($p \neq 0$) si osserva che la segnatura del prodotto scalare ristretto all'ortogonale deve essere $(n, 0, 0)$.

Osservazione 1.3. È immediato constatare che se $u \in \mathbb{H}^n$ allora $u_0 \geq 1$ e vale l'uguaglianza se e solo se tutte le altre componenti sono nulle.

Osservazione 1.4. Vale $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} \leq -1$ per ogni $u, v \in \mathbb{H}^n$, con uguaglianza se e solo se $u = v$.

Infatti:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} &= -u_0v_0 + \sum_{i=1}^n u_i v_i \leq -u_0v_0 + \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2} = \\ &= -u_0v_0 + (u_0^2 - 1)^{1/2} (v_0^2 - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ricordando l'osservazione precedente si vede facilmente (ad esempio derivando in u_0) che quest'ultima espressione è sempre minore o uguale di -1 .

Diamo i risultati seguenti senza dimostrazione, trattandosi di verifiche concettualmente elementari, necessarie alla definizione degli oggetti di cui ci occuperemo.

Proposizione 1.5 (Metrica dello spazio iperbolico). *La funzione $d_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definita come*

$$d_{\mathbb{H}^n}(u, v) = \operatorname{arcosh}(-\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}})$$

(*arcosh è la funzione inversa del ramo positivo del coseno iperbolico*) è una distanza su \mathbb{H}^n .

Proposizione 1.6 (Metrica della sfera). *Definiamo la funzione $d_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \rightarrow [0, \pi]$ associando alla coppia di punti (p, q) su \mathbb{S}^n l'unico numero reale in $[0, \pi]$ tale che*

$$\cos d(p, q) = \langle p, q \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Tale funzione è una distanza su \mathbb{S}^n .

N.B. Nella definizione della metrica sullo spazio iperbolico il prodotto scalare è quello di Minkowski, mentre nella definizione della metrica sulla sfera è quello euclideo.

Definizione 1.7. *Dati un numero reale κ e un numero naturale $n > 1$ si denota con M_{κ}^n (spazio modello n -dimensionale di curvatura costante κ) lo spazio metrico definito come segue:*

- se $\kappa = 0$, M_0^n è lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, d_{\mathcal{E}})$;

- se $\kappa > 0$, M_κ^n è lo spazio $\left(\mathbb{S}^n, \frac{d_{\mathbb{S}^n}}{\sqrt{\kappa}}\right)$ dove $\frac{d_{\mathbb{S}^n}}{\sqrt{\kappa}}(x, y) = d_{\mathbb{S}^n}(x, y)/\sqrt{\kappa}$.
- se $\kappa < 0$, M_κ^n è lo spazio $\left(\mathbb{H}^n, \frac{d_{\mathbb{H}^n}}{\sqrt{-\kappa}}\right)$ (come sopra).

Vedremo alla fine del capitolo alcuni motivi per escludere il caso $n = 1$ dalla trattazione.

Osservazione 1.8. È facile verificare che la topologia indotta da queste distanze è quella di varietà, cioè quella indotta dallo spazio ambiente euclideo \mathbb{R}^{n+1} .

Definizione 1.9. Chiameremo $Isom(M_\kappa^n)$ il gruppo delle isometrie globali di M_κ^n .

Definizione 1.10. Definiamo **iperpiano** di M_κ^n , per $\kappa \neq 0$, un sottoinsieme della forma $M_\kappa^n \cap H$, dove $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è un iperpiano vettoriale; se $\kappa = 0$ intendiamo un iperpiano affine di \mathbb{R}^n .

Osservazione 1.11. Se $\phi \in Isom(M_\kappa^n)$ non è l'identità, l'insieme dei punti da essa fissati è contenuto in un iperpiano. Infatti se $\phi(p) \neq p$ l'insieme di punti fissati da ϕ è contenuto nel bisettore H di p e $\phi(p)$, dato che se q è fissato da ϕ allora $d(p, q) = d(\phi(p), \phi(q)) = d(\phi(p), q)$ e quindi $q \in H$. Inoltre il bisettore è facilmente un iperpiano.

Lemma 1.12. Siano S_1 ed S_2 sottoinsiemi di M_κ^n e sia $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometria. Allora

- esiste $\psi \in Isom(M_\kappa^n)$ tale che $\psi|_{S_1} = f$;
- la restrizione di ψ all'intersezione di tutti gli iperpiani contenenti S_1 è unica.

Dimostrazione: Consideriamo anzitutto il caso in cui $S_1 = S_2 = H$ è un iperpiano. Dato che ogni iperpiano è il bisettore di una certa coppia di punti, l'azione di $Isom(M_\kappa^n)$ manda iperpiani in iperpiani. Inoltre l'azione così ottenuta di $Isom(M_\kappa^n)$ sull'insieme degli iperpiani in M_κ^n è transitiva (facile verifica). Pertanto non c'è perdita di generalità nell'assumere $H = H_0 = M_\kappa^{n-1}$.

Sia $\Sigma \subset H_0$ un insieme di n punti in posizione generale (ovvero non contenuti in alcun iperpiano $(n-2)$ -dimensionale di H_0) e sia in prima battuta $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un'isometria. Ripetendo un noto argomento di geometria analitica, esiste $\psi \in Isom(M_\kappa^n)$ tale che $\psi|_\Sigma = f|_\Sigma$. In particolare Σ è contenuto nell'iperpiano $\psi^{-1}(H_0)$. Visto che si suppone che Σ non giaccia in nessun iperpiano di H_0 , segue che $\psi^{-1}(H_0) = H_0$. Ma ora, applicando l'Osservazione 1.11 a $H_0 = M_\kappa^{n-1}$ e $\phi^{-1} \circ f$, e tenendo conto che i punti fissati da $\psi^{-1} \circ f \in Isom(H_0)$ non sono contenuti in nessun iperpiano di H_0 , si ha $\psi^{-1} \circ f = id_{H_0}$ i.e. $f = \psi|_{H_0}$.

Ora consideriamo il caso generale $f : S_1 \rightarrow S_2$. Se S_1 ed S_2 sono contenuti in

due iperpiani H_1 ed H_2 , allora possiamo sostituirli con $S'_1 = \psi_i(S_i) \subset H_0$, dove $\psi_i : H_i \rightarrow H_0$, $i = 1, 2$ sono opportune isometrie. Quindi, per induzione sulla dimensione di M_κ^{n-1} possiamo assumere che qualsiasi isometria $S'_1 \rightarrow S'_2$ sia la restrizione di un'isometria in H_0 , e si può quindi applicare il primo passo della dimostrazione.

Assumiamo dunque che S_1 non sia contenuto in un iperpiano di M_κ^n . Dunque ammette un sottoinsieme di cardinalità $n + 1$ che chiameremo $S_0 \subset S_1$ non contenuto in alcun iperpiano di M_κ^n , e come sopra esiste $\psi_0 \in Isom(M_\kappa^n)$ tale che $\psi_0|_{S_0} = f|_{S_0} = f$. Se $\psi_0|_{S_1} = f$ abbiamo concluso; altrimenti, dovrebbe esistere $x \in S_1$ tale che $\psi_0(x) \neq f(x)$, e applicando ancora (2.17) dovrebbe esistere $\psi_1 \in Isom(M_\kappa^n)$ in modo che $\psi_1|_{S_0} = f|_{S_0}$ e $\psi_1(x) = f(x)$. Ma questo non è possibile perché avremmo un elemento non banale $\psi_1^{-1}\psi_0 \in Isom(M_\kappa^n)$ che fissa un insieme S_0 che non era contenuto in nessun iperpiano, contraddicendo di nuovo l'Osservazione 1.11.

Per l'unicità, supponiamo che ψ e ψ' siano tali che $\psi|_{S_1} = \psi'|_{S_1}$. Allora $\psi^{-1}\psi'$ e il suo inverso mandano qualsiasi iperpiano contenente S_1 su un altro iperpiano di questo tipo, riducendosi conseguentemente ad una isometria nell'intersezione di tutti questi iperpiani. Sia I questa intersezione. Utilizzando la prima parte dell'enunciato, e la considerazione immediata che intersezione di iperpiani è un sottospazio (inteso come intersezione con un sottospazio dello spazio euclideo ambiente), si ha che I è isometrico a un certo M_κ^m per qualche $m \leq n$. Se S_1 fosse contenuto in qualche sottospazio $(m-1)$ -dimensionale $P \subset I$, potremmo costruire un iperpiano in M_κ^m tale che $I \cap H = P$ (di nuovo ciò si vede facilmente dalle definizioni, appoggiandosi ad analoghi enunciati vettoriali: ogni iperpiano di dimensione $m-1$ contenuto in un iperpiano H di dimensione m è intersezione di H con un altro iperpiano di M_κ^n , e così via), contraddicendo il fatto che I è l'intersezione di tutti gli iperpiani contenenti S . Pertanto S_1 non è contenuto in nessun iperpiano di I , e ancora per l'Osservazione 1.11 $\psi^{-1}\psi'$ si riduce all'identità su I . \square

Osservazione 1.13. In generale un sottospazio m -dimensionale di M_κ^n (cioè la sua intersezione con un sottospazio vettoriale di dimensione $m+1$ di \mathbb{R}^{n+1}) è una sotto-varietà di M_κ^n ed è isometrica a M_κ^m (iterando il ragionamento fatto all'inizio della dimostrazione di 1.12 ci si restringe a intersezioni con piani coordinati).

Proposizione 1.14. *Gli spazi modello sono propri, cioè tutte le palle chiuse sono compatte.*

Dimostrazione: Ci limitiamo senza perdita di generalità ai casi di \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n . Tenendo presente l'Osservazione 1.8, il caso sferico è banale, dato che \mathbb{S}^n stessa è compatta perché chiusa e limitata in \mathbb{R}^{n+1} . Nel caso iperbolico ogni palla è omeomorfa (isometrica) ad

¹Per comodità, possiamo momentaneamente includere il caso $n = 1$ come passo base, benché a rigore fuori dalla nostra definizione.

una palla attorno ad e^0 , dato che $Isom(M_\kappa^n)$ agisce sempre transitivamente, e

$$\begin{aligned} p \in B_{\mathbb{H}^n}(e^0, \varepsilon) &\iff \operatorname{arcosh}(-\langle p, e^0 \rangle_{\mathcal{M}}) \leq \varepsilon \iff 1 \leq p_0 \leq \cosh \varepsilon \iff \\ &\iff 1 \leq p_0 \leq \cosh \varepsilon \text{ e } 0 \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq -1 + \cosh^2 \varepsilon = \sinh^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi anche le palle di \mathbb{H}^n sono chiuse e limitate in \mathbb{R}^{n+1} , e quindi compatte. \square

1.2 Spazi di lunghezze

In questo contesto considereremo distanze a valori in $[0, +\infty]$.

Definizione 1.15 (Lunghezza di una curva). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una funzione continua a valori in uno spazio metrico X . Definiamo la sua lunghezza come*

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

dove il sup è preso su tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[0, 1]$.

Definizione 1.16. *Uno spazio metrico (X, d) è detto **spazio di lunghezze** se*

$$d(x, y) = \inf \{l(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

(vale ∞ se tali curve hanno tutte lunghezza infinita o non ve ne sono del tutto). In tal caso la distanza è detta *metrica di lunghezze* o *metrica intrinseca*.

Definizione 1.17. *Uno spazio metrico si dice **spazio geodetico** se ogni coppia di punti è collegata da una geodetica, ovvero una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ tale che $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.*

Osservazione 1.18. Ogni spazio geodetico è di lunghezze.

Dimostrazione: Puntualizziamo anzitutto che in ogni spazio metrico la lunghezza di una curva che collega due punti è maggiore o uguale della distanza fra i medesimi (segue immediatamente dalla definizione).

Preso ora γ geodetica fra due punti x, y vale

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a = \\ &= d(\gamma(a), \gamma(b)) = d(x, y). \end{aligned}$$

Quindi $d(x, y)$ è proprio il minimo fra le lunghezze delle curve che collegano i due punti. \square

Proposizione 1.19 (Metrica di lunghezze indotta). *Siano (X, d) uno spazio di lunghezze e \tilde{X} uno spazio topologico. Un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ induce una metrica di lunghezze su \tilde{X} nel seguente modo: data una curva $\gamma : I \rightarrow \tilde{X}$ definiamo $\tilde{l}(\gamma) = l(p \circ \gamma)$, e*

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf\{\tilde{l}(\gamma) \mid \gamma : I \rightarrow \tilde{X}, \gamma(0) = \tilde{x}, \gamma(1) = \tilde{y}\}.$$

Inoltre $p : (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ è una locale isometria (cioè conserva localmente le distanze ed è aperta).

Dimostrazione: Anzitutto \tilde{d} è una distanza: è evidentemente simmetrica e soddisfa la disuguaglianza triangolare, dato che presi tre punti $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \inf\{\tilde{l}(\gamma) \mid \gamma : I \rightarrow \tilde{X}, \gamma(0) = \tilde{x}, \gamma(1) = \tilde{y}\} = \\ &= \inf\{l(p \circ \gamma) \mid \gamma : I \rightarrow \tilde{X}, \gamma(0) = \tilde{x}, \gamma(1) = \tilde{y}\} \leq \\ &\leq \inf\{l(p \circ \gamma) \mid \gamma(0) = \tilde{x}, \gamma(1) = \tilde{y}, \tilde{z} \in \text{Im}(\gamma)\} = \\ &= \inf\{l(p \circ \gamma) + l(p \circ \delta) \mid \gamma(0) = \tilde{x}, \gamma(1) = \tilde{z}, \delta(0) = \tilde{z}, \delta(1) = \tilde{y}\} = \\ &= \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y}) \end{aligned}$$

dove si è usato che la lunghezza è invariante per riparametrazioni e additiva rispetto alla giunzione.

Quanto alla non degenerazione, siano \tilde{x} e \tilde{y} distinti in \tilde{X} . Supponiamo che $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Abbiamo allora una successione di curve $\gamma_i : I \rightarrow \tilde{X}$ che collegano \tilde{x} a \tilde{y} tali che $\inf\{l(p \circ \gamma)\} = 0$. Poiché X è uno spazio di lunghezze abbiamo in particolare $d(p(\tilde{x}), p(\tilde{y})) = 0$ e quindi \tilde{x} e \tilde{y} appartengono alla stessa fibra. Quindi esistono due aperti disgiunti $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ e $\tilde{V} \ni \tilde{y}$ tali che $p|_{\tilde{U}}$ e $p|_{\tilde{V}}$ sono omeomorfismi con l'immagine. Inoltre per la disuguaglianza triangolare su X abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste γ_ε che collega \tilde{x} e \tilde{y} e t.c. per ogni $t, t' \in I$ vale $d(p(\gamma_\varepsilon(t)), p(\gamma_\varepsilon(t'))) \leq l(p \circ \gamma_\varepsilon) < \varepsilon$, ovvero $\text{Im}(p \circ \gamma_\varepsilon) \subset B_{(X,d)}(p(\tilde{x}), \varepsilon)$. Presa una inversa locale $s : B_{(X,d)}(p(\tilde{x}), \varepsilon) \rightarrow \tilde{U}$ t.c. $s(p(\tilde{x})) = \tilde{x}$ (esiste per come abbiamo scelto \tilde{U} , e per ε abbastanza piccolo) la curva $s \circ p \circ \gamma_\varepsilon$ ha punto base \tilde{x} . Poiché p è un rivestimento essa è l'unico sollevamento di $p \circ \gamma_\varepsilon$ ad \tilde{X} con punto base \tilde{x} , ma allora deve coincidere con γ_ε , assurdo perché $\tilde{y} \notin \tilde{U}$. In maniera simile si può ora dimostrare che p conserva localmente le distanze: dato $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $p(\tilde{x}) = x$, per ipotesi esiste \tilde{U} intorno aperto di \tilde{x} tale che $p|_{\tilde{U}}$ è un omeomorfismo con l'immagine U . Consideriamo dunque l'applicazione inversa $s : U \rightarrow \tilde{U}$, e una palla $B(x, 2r) \subseteq U$ per un certo r . Allora presi $y, z \in B(x, r)$, per ogni $0 < \varepsilon < r$,

esiste certamente una curva γ congiungente y e z con sostegno in $B(x, 2r)$ di lunghezza più piccola di $d(y, z) + \varepsilon$, visto che X è di lunghezze. La sua immagine tramite s ha pertanto (secondo la definizione di lunghezza che abbiamo dato per curve in \tilde{X}) lunghezza anch'essa minore di $d(y, z) + \varepsilon$, e $\tilde{d}(s(y), s(z))$ sarà certamente minore di $d(y, z) + \varepsilon$: facendo tendere ε a 0 si ha $\tilde{d}(s(y), s(z)) \leq d(y, z)$. Per la disuguaglianza opposta basta ora ricordare che $\tilde{d}(s(y), s(z))$ è un inf su un insieme di curve contenuto in $\{\gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(0) = y, \gamma(1) = z\}$, che è l'insieme su cui si prende l'inf nella definizione di $d(y, z)$. Tale contenimento assicura che $\tilde{d}(s(y), s(z)) \geq d(y, z)$. Abbiamo quindi dimostrato che $\tilde{d}(p(\tilde{y}), p(\tilde{z})) = \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z})$ per ogni $\tilde{y}, \tilde{z} \in s(B_{(X,d)}(x, r))$, e poiché $s(B_{(X,d)}(x, r))$ è aperto in \tilde{X} esso costituisce un aperto attorno ad x su cui p conserva le distanze, come si voleva.

La distanza \tilde{d} è compatibile con la topologia di X dato che p è un omeomorfismo locale, è una metrica di lunghezze per costruzione e p è una isometria locale per la proprietà di conservazione vista e perché è aperta. \square

Osservazione 1.20. È facile vedere che se la distanza su X non assume valori infiniti e \tilde{X} è connesso allora anche \tilde{d} non assume valori infiniti.

Lemma 1.21. Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento e (X, d) è completo anche (\tilde{X}, \tilde{d}) lo è.

Dimostrazione: Sia (\tilde{x}_n) di Cauchy in \tilde{X} . Basterà provare che esiste un'estratta convergente. Supponiamo, a meno di estrarre una sottosuccessione, che $\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Quindi $\exists \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ t.c. $\tilde{\gamma}(1 - 2^{-n}) = \tilde{x}_n$ e $l(\tilde{\gamma}) \leq 4$ e $\tilde{\gamma}$ è uniformemente continua. Quindi anche $p \circ \tilde{\gamma}$ è uniformemente continua e perciò si estende con continuità a $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ per completezza di X .² Poiché infine p è un rivestimento si può sollevare γ a $\psi : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, con $\psi(0) = \tilde{x}_0$; si ottiene che $\psi|_{[0,1]} = \tilde{\gamma}$ e le \tilde{x}_n risultano convergere a $\psi(1)$ per continuità. \square

1.3 Gli M_κ^n come spazi di lunghezze

Proposizione 1.22. *Gli spazi modello M_κ^n sono spazi geodetici (e quindi di lunghezze). Inoltre le geodetiche, almeno localmente, sono uniche e dipendono con continuità dai propri estremi.*

²Infatti se $(t_n) \subset [0, 1]$ è di Cauchy allora per uniforme continuità $((p \circ \gamma)(t_n)) \subset X$ è di Cauchy. Quindi per completezza di X esiste un limite per ogni successione $(p \circ \gamma)(t_n)$ con $t_n \rightarrow 1$, e questi limiti saranno tutti coincidenti al variare della successione: per rendersene conto basta osservare che due successioni convergenti a 1 dal basso possono essere facilmente ricondotte ad un'unica successione ancora convergente a 1 dal basso.

Dimostrazione: Per semplicità ci limitiamo a trattare i tre spazi fondamentali. \mathbb{R}^n è convesso, e i segmenti sono facilmente geodetiche se parametrizzati come

$$\begin{aligned}\gamma &: [0, d(p, q)] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma(t) &= \frac{(d(p, q) - t)p + tq}{d(p, q)}\end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned}d(\gamma(t), \gamma(t'))^2 &= \frac{\|(d(p, q) - t)p + tq - (d(p, q) - t')p - tq\|^2}{\|p - q\|^2} = \\ &= \frac{|t - t'|^2 \|p\|^2 + |t - t'|^2 \|q\|^2 - |t - t'|^2 \langle p, q \rangle}{\|p - q\|^2} = |t - t'|.\end{aligned}$$

Per l'unicità, siano date due distinte geodetiche colleganti p e q , e c contenuto nel sostegno di una delle due ma non dell'altra. Allora avremmo $d(p, q) = d(p, c) + d(c, q)$, ma la disuguaglianza triangolare in \mathbb{R}^n è un'uguaglianza solo se i punti sono allineati (nell'ordine p, c, q). Quindi c appartiene al segmento passante per p e q . La parametrizzazione data è evidentemente l'unica che realizza la condizione di geodeticità.

Per \mathbb{H}^n fissiamo due punti p e q e consideriamo, in analogia con le costruzioni tipiche ad esempio della geometria delle superfici, le curve del tipo $\gamma : [0, d(p, q)] \longrightarrow \mathbb{H}^n$,

$$\gamma(t) = \cosh t p + \sinh t v$$

con v t.c. $\gamma(d_{\mathbb{H}^n}(p, q)) = q$, cioè ricordando la definizione di $d_{\mathbb{H}^n}$

$$v = \frac{q - (\cosh d_{\mathbb{H}^n}(p, q)) p}{\sinh d_{\mathbb{H}^n}(p, q)} = \frac{q + \langle p, q \rangle_{\mathcal{M}} p}{\sinh d_{\mathbb{H}^n}(p, q)}.$$

Il vettore v ha norma unitaria e appartiene a p^\perp , cioè al tangente in p ad \mathbb{H}^n :

$$\begin{aligned}\langle q + \langle p, q \rangle_{\mathcal{M}} p, q + \langle p, q \rangle_{\mathcal{M}} p \rangle_{\mathcal{M}} &= -1 + 2\langle p, q \rangle_{\mathcal{M}}^2 - \langle p, q \rangle_{\mathcal{M}}^2 = \\ &= \cosh^2 d_{\mathbb{H}^n}(p, q) - 1 = \sinh^2 d_{\mathbb{H}^n}(p, q)\end{aligned}$$

e

$$\langle v, p \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\langle q + \langle p, q \rangle_{\mathcal{M}} p, p \rangle_{\mathcal{M}}}{\sinh d_{\mathbb{H}^n}(p, q)} = 0.$$

Quindi si ha che $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle_{\mathcal{M}} = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1$ e $\cosh d_{\mathbb{H}^n}(\gamma(t), \gamma(t')) = -\langle \gamma(t), \gamma(t') \rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \cosh t p + \sinh t v, \cosh t' p + \sinh t' v \rangle_{\mathcal{M}} = \cosh t \cosh t' + \sinh t \sinh t' = \cosh(|t - t'|)$ per cui la curva è effettivamente a valori in \mathbb{H}^n ed è una geodetica.

Quanto all'unicità, siano p, q due punti di \mathbb{H}^n , collegati dalla curva γ descritta sopra e da un'altra geodetica δ . Prendiamo $c \in Im \delta \setminus Im \gamma$ e connettiamolo a p e q con due curve del tipo descritto sopra

$$\gamma_{cp}(t) = \cosh t c + \sinh t v_{cp}$$

$$\gamma_{cq}(t) = \cosh t c + \sinh t v_{cq}$$

in modo tale che $p = \gamma_{cp}(d_{\mathbb{H}^n}(c, p))$, $q = \gamma_{cq}(d_{\mathbb{H}^n}(c, q))$. Poiché δ è geodetica dovremo avere $d_{\mathbb{H}^n}(p, q) = d_{\mathbb{H}^n}(p, c) + d_{\mathbb{H}^n}(c, q)$, ovvero

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}^n}(p, q) &= \cosh(d_{\mathbb{H}^n}(p, c) + d_{\mathbb{H}^n}(c, q)) = \\ &= \cosh d_{\mathbb{H}^n}(p, c) \cosh d_{\mathbb{H}^n}(c, q) + \sinh d_{\mathbb{H}^n}(p, c) \sinh d_{\mathbb{H}^n}(c, q), \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}^n}(p, q) &= -\langle p, q \rangle_{\mathcal{M}} = \\ &= -\langle \cosh d_{\mathbb{H}^n}(c, p) c + \sinh d_{\mathbb{H}^n}(c, p) v_{cp}, \cosh d_{\mathbb{H}^n}(c, q) c + \sinh d_{\mathbb{H}^n}(c, q) v_{cq} \rangle_{\mathcal{M}} = \\ &= \cosh d_{\mathbb{H}^n}(c, p) \cosh d_{\mathbb{H}^n}(c, q) - \sinh d_{\mathbb{H}^n}(c, p) \sinh d_{\mathbb{H}^n}(c, q) \langle v_{cp}, v_{cq} \rangle_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Quindi si può avere l'uguaglianza richiesta se e solo se $\langle v_{cp}, v_{cq} \rangle_{\mathcal{M}} = -1$, ma ricordando che il prodotto di Minkowski ristretto al tangente è definito positivo e che i due vettori sono unitari si ha che $v_{cp} = -v_{cq}$, ovvero $\frac{p - (\cosh d_{\mathbb{H}^n}(p, c)) c}{\sinh d_{\mathbb{H}^n}(p, c)} = -\frac{q - (\cosh d_{\mathbb{H}^n}(c, q)) c}{\sinh d_{\mathbb{H}^n}(c, q)}$ da cui $c \in Span(p, q) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Tale piano non è tangente a \mathbb{H}^n in p (infatti ad esempio $\langle \gamma(t) - p, p \rangle_{\mathcal{M}} \neq 0$ per t non nullo per l'Osservazione 1.4, e ogni $\gamma(t)$ appartiene evidentemente a $Span(p, q)$): dunque $Span(p, q)$ ha intersezione unidimensionale con il tangente in p . Ciò significa che il versore velocità in p di ogni curva è unico a meno del segno, e dunque le curve derivabili γ e $\gamma_{pc} = inv(\gamma_{cp})$ coincidono fra 0 e $d_{\mathbb{H}^n}(p, c)$, essendo per costruzione determinate da p e dal vettore tangente in p (che è esattamente la derivata prima in 0).

Risulta poi chiara dalla formula la dipendenza con continuità dagli estremi.

Il caso \mathbb{S}^n è leggermente differente: le geodetiche non sono uniche (basta pensare ai poli di \mathbb{S}^1), ma lo sono localmente. Consideriamo curve della forma $\alpha(t) = \cos t p + \sin t v$ con $v \perp p$ t.c. $\alpha(d_{\mathbb{S}^n}(p, q)) = q$; analogamente al caso iperbolico, si verifica che queste sono geodetiche. Supponiamo che due punti p e q siano connessi da un'altra geodetica δ , e sia c un punto su di essa. Avremo come sopra due curve (sempre geodetiche)

$$\alpha_{cp}(t) = \cos t c + \sin t v_{cp}$$

e

$$\alpha_{cq}(t) = \cos t c + \sin t v_{cq}$$

che li collegano. Poiché δ è geodetica $d_{\mathbb{S}^n}(p, q) = d_{\mathbb{S}^n}(p, c) + d_{\mathbb{S}^n}(c, q)$, ovvero

$$\begin{aligned} \cos d_{\mathbb{S}^n}(p, q) &= \cos(d_{\mathbb{S}^n}(p, c) + d_{\mathbb{S}^n}(c, q)) = \\ &= \cos d_{\mathbb{S}^n}(p, c) \cos d_{\mathbb{S}^n}(c, q) - \sin d_{\mathbb{S}^n}(p, c) \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, q), \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} \cos d_{\mathbb{S}^n}(p, q) &= \langle p, q \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \langle \cos d_{\mathbb{S}^n}(c, p) c + \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, p) v_{cp}, \cos d_{\mathbb{S}^n}(c, q) c + \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, q) v_{cq} \rangle_{\mathcal{E}} = \\ &= \cos d_{\mathbb{S}^n}(c, p) \cos d_{\mathbb{S}^n}(c, q) + \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, p) \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, q) \langle v_{cp}, v_{cq} \rangle_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Segue che $\sin d_{\mathbb{S}^n}(c, p) \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, q) \langle v_{cp}, v_{cq} \rangle_{\mathcal{E}} = -\sin d_{\mathbb{S}^n}(c, p) \sin d_{\mathbb{S}^n}(c, q)$, ma i seni che compaiono nella formula, a differenza dei seni iperbolici, possono annullarsi anche in casi non banali. Ciò non accade, però, se ci restringiamo ad una palla abbastanza piccola, tale che $d_{\mathbb{S}^n}(c, p)$ e $d_{\mathbb{S}^n}(c, q)$ siano entrambi minori di π (nell'esempio sopra citato di \mathbb{S}^1 , ci stiamo restringendo ad un arco di circonferenza strettamente contenuto in una semicirconferenza). In tali condizioni si conclude come sopra, dato che da qui in poi valgono le stesse considerazioni sul prodotto scalare e sulle velocità delle curve. \square

Lemma 1.23. *Se p è una isometria locale fra uno spazio di lunghezze completo \tilde{X} e M_{κ}^n , allora p è un rivestimento.*

Dimostrazione: Dimostriamo anzitutto che dati una curva rettificabile (di lunghezza finita) $c : [0, 1] \rightarrow M_{\kappa}^n$ e un punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}) = c(0)$, esiste un unico sollevamento continuo $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ nel senso che $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$ e $p(\tilde{c}(t)) = c(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Infatti anzitutto un sottointervallo massimale di $[0, 1]$ su cui il sollevamento esiste è aperto e non vuoto perché p è un omeomorfismo locale (dunque localmente invertibile con continuità). Supponiamo di aver costruito il sollevamento su un sottointervallo $[0, a)$. Sia $t_n \in [0, a)$ una successione convergente ad a . Poiché p è una isometria locale, per m, n abbastanza grandi si ha che $d(\tilde{c}(t_n), \tilde{c}(t_m)) \leq l(\tilde{c}|_{[t_n, t_m]}) = l(c|_{[t_n, t_m]})$. Visto che la successione numerica $l(c|_{[0, t_n]})$ è di Cauchy, $\tilde{c}(t_n)$ è una successione di Cauchy in \tilde{X} , e di conseguenza converge ad un unico punto, il quale ha le proprietà richieste da $\tilde{c}(a)$. Quindi il sottointervallo massimale di $[0, 1]$ che contiene lo 0 è chiuso, e dunque coincide con $[0, 1]$ (e il sollevamento è unico).

Ciò dimostra automaticamente che p è surgettiva, dato che M_{κ}^n è uno spazio geodetico e dunque connesso per archi rettificabili.

Fissiamo ora un punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Sia $B(x, r)$ una palla in cui valgono le proprietà locali delle geodetiche enunciate nella Proposizione 1.22. Per ogni $y \in B(x, r)$ chiamiamo $c_y : [0, 1] \rightarrow B(x, r)$ la geodetica che unisce x a y e \tilde{c}_y il suo sollevamento con punto base \tilde{x} , però riparametrizzata per lunghezza d'arco. La mappa $s_{\tilde{x}} : B(x, r) \rightarrow \tilde{X}$ che manda y in $\tilde{c}_y(1)$ è un omeomorfismo con un aperto di \tilde{X} ; infatti localmente si tratta di

invertire p (che è un omeomorfismo locale) mandando y in $\tilde{c}_y(1)$. Bisogna dimostrare che tale inversione avviene con continuità, cioè che la mappa è continua.

Poiché p è un omeomorfismo locale, possiamo coprire l'immagine di c_y con un numero finito di palle $B_k \subseteq B(x, r)$, in modo che $c_y([(k-1)/n, k/n]) \subseteq B_k$ per $k = 1, \dots, n$, ed esistono mappe continue $s^k : B_k \rightarrow \tilde{X}$ con $S^k \circ p$ uguale all'identità in B_k e $s^k(c_y(t)) = s_{\tilde{x}}(c_y(t))$ per ogni $t \in [(k-1)/n, k/n]$. Dato che i segmenti geodetici in $B(x, r)$ dipendono in maniera continua dai loro estremi, se $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo allora per ogni z con $d(y, z) < \delta$, si ha $c_z([(k-1)/n, k/n]) \subseteq B_k$. Possiamo quindi definire una funzione $\tilde{s} : B(y, \delta) \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ come $\tilde{s}(z, t) = s^k(c_z(t))$ se $t \in [(k-1)/n, k/n]$; tale mappa è continua e ben definita, dato che nel connesso $B(y, \delta) \times \{0, t_{1/n}, \dots, t_{(n-1)/n}, 1\}$ le definizioni con s^{k-1} e s^k coincidono in $(y, t_{k/n})$ e pertanto ovunque, per unicità dei sollevamenti. Dato che quindi $t \mapsto \tilde{s}(c_z(t))$ è un sollevamento continuo di c_z in \tilde{x} , dovrà coincidere con \tilde{c}_z .

Quindi la restrizione di \tilde{s}_x a $B(x, r)$ coincide con la mappa continua $z \mapsto \tilde{s}(z, 1)$ e pertanto è continua in y , come volevamo.

Per concludere, avendo dimostrato che $p^{-1}(B(x, r))$ è l'unione degli insiemi aperti $s_{\tilde{x}}(B(x, r))$ al variare di $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e p ristretto ad ognuno di questi è un omeomorfismo su $B(x, r)$, osserviamo che questi insiemi devono essere disgiunti: se infatti $\tilde{y} \in s_{\tilde{x}}(B(x, r)) \cap s_{\tilde{x}'}(B(x, r))$, allora i sollevamenti di $c_{p(\tilde{y})}$ che iniziano in \tilde{x} e in \tilde{x}' finiscono entrambi in \tilde{y} e devono pertanto coincidere, da cui $\tilde{x} = \tilde{x}'$.

Si conclude quindi che p è un rivestimento. \square

1.4 Rivestimento universale di varietà a curvatura costante

Definizione 1.24. *Definiamo spazio (o varietà) a curvatura costante κ uno spazio di lunghezze localmente isometrico a un M_κ^n .*

Definizione 1.25. *In questo contesto definiamo **carta** una isometria $\phi : U \rightarrow M_\kappa^n$ da un aperto U di X su un aperto $\phi(U)$ di M_κ^n .*

Definizione 1.26 (Germe). *Sia X uno spazio a curvatura costante. Sull'insieme delle coppie (ϕ, x) , $x \in U \subset X$, $\phi : U \rightarrow M_\kappa^n$ carta in x , poniamo la relazione*

$$(\phi, x) \sim (\phi', x') \iff x = x' \wedge \exists \text{ aperto } V \subseteq U \cap U', x \in V, \text{ t.c. } \phi|_V = \phi'|_V.$$

*Si tratta evidentemente di una relazione di equivalenza: definiamo **germe** di ϕ in x la classe di (ϕ, x) . Denotiamo con*

$$\hat{X} = \{[(\phi, x)] \mid x \in X, \phi \text{ carta in } x\}$$

l'insieme dei germi.

Osservazione 1.27. $G = \text{Isom}(M_\kappa^n)$ agisce in maniera naturale su \hat{X} : se $\hat{x} = [(\phi, x)]$, $g \cdot \hat{x} = [(g \circ \phi, x)] \forall g \in G$.

Lemma 1.28. *Ogni M_κ^n è semplicemente connesso.*

Dimostrazione: Lo spazio iperbolico, come si vede facilmente dal modello dell'iperbolico, è globalmente omeomorfo ad \mathbb{R}^n tramite proiezione sulle ultime n coordinate, e dunque è semplicemente connesso come \mathbb{R}^n . Tutte le sfere in dimensione $n \geq 2$, inoltre, sono semplicemente connesse. \square

Teorema 1.29. *Sia X uno spazio a curvatura costante completo e connesso. Allora il suo rivestimento universale esiste e, dotato della metrica di lunghezze indotta, è isometrico a M_κ^n .*

Dimostrazione: Prese due carte $\phi : U \rightarrow V \subset M_\kappa^n$ e $\phi' : U' \rightarrow V' \subset M_\kappa^n$, con $U \cap U'$ connesso, sappiamo per il Lemma 1.12 che esiste un'unica isometria $g \in \text{Isom}(M_\kappa^n)$ tale che $\phi = g \circ \phi'$ su $U \cap U'$. Infatti $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$ è una isometria fra sottoinsiemi aperti di M_κ^n , e quindi esiste un'unica $g \in \text{Isom}(M_\kappa^n)$ t.c. $g(\phi(U \cap U')) = \phi'(U \cap U')$ e $g|_{\phi(U \cap U')} = \phi' \circ \phi^{-1}|_{\phi(U \cap U')}$, ovvero $g \circ \phi' = \phi$ su $U \cap U'$. Consideriamo ora l'insieme dei germi \hat{X} e due funzioni su di esso definite:

$$\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X, \quad \hat{p}([\phi, x]) = x$$

$$\hat{D} : \hat{X} \rightarrow M_\kappa^n, \quad \hat{D}([\phi, x]) = \phi(x).$$

Tali applicazioni sono ben definite (due carte dello stesso germe coincideranno sempre su x) e \hat{D} è G -invariante, nel senso che

$$g \cdot (\hat{D}([\phi, x])) = g(\hat{D}([\phi, x])) = g(\phi(x)) = \hat{D}([(g \circ \phi, x)]) = \hat{D}(g \cdot [(\phi, x)])$$

dove a sinistra si è considerata l'azione di g su M_κ^n come isometria, e a destra quella su \hat{X} definita nell'Osservazione 1.27. Inoltre dati $\hat{x}, \hat{x}' \in \hat{p}^{-1}(x)$ (cioè germi attorno allo stesso punto) esiste un'unica $g \in G$ tale che $g \cdot \hat{x} = \hat{x}'$ per quanto notato all'inizio (Lemma 1.12).

Nell'ottica di costruire il rivestimento universale di X andiamo ora a considerare una topologia su \hat{X} che renda \hat{p} un rivestimento e \hat{D} un omeomorfismo locale. Scegliamo come base della topologia gli insiemi $U_\phi \subset \hat{X}$ definiti come

$$U_\phi = \{[(\phi, x)] \mid x \in U\}$$

dove $\phi : U \rightarrow M_\kappa^n$ è una carta. La restrizione di \hat{p} a U_ϕ è un omeomorfismo su U , dato che l'immagine U è un aperto di X e la controimmagine di un aperto $V \subset U$,

intersecata con U_ϕ , è esattamente V_ϕ . Analogamente la restrizione di \hat{D} a U_ϕ è un omeomorfismo su $\phi(U)$ (dato che ϕ è un omeomorfismo). Se U è connesso, $\hat{p}^{-1}(U)$ (l'insieme dei germi attorno ai vari punti di U) è l'unione disgiunta degli aperti $U_{g \circ \phi}$ al variare di $g \in G$. Quindi \hat{p} è un rivestimento, in particolare un rivestimento di Galois con gruppo di Galois G (vale a dire, G agisce per omeomorfismi su \hat{X} , preservando le fibre del rivestimento e agendo transitivamente su ognuna di esse per quanto detto con riferimento al Lemma 1.12).

Costruiamo ora il rivestimento universale. Scelti un punto base $x_0 \in X$ e una carta ϕ attorno ad esso, siano $\hat{x}_0 \in \hat{X}$ il germe di ϕ in x_0 e \tilde{X} la sua componente connessa in \hat{X} . Indichiamo con p e D le restrizioni di \hat{p} e \hat{D} a \tilde{X} . A patto di considerare, invece di G , il suo sottogruppo Γ rispetto al quale \tilde{X} resta invariante³, esattamente come sopra $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento di Galois con gruppo di Galois Γ e $D : \tilde{X} \rightarrow M_\kappa^n$ è un omeomorfismo locale Γ -invariante. Ora mettiamo su \tilde{X} la metrica di lunghezze \tilde{d} indotta da p : possiamo farlo perché \tilde{X} è di Hausdorff in quanto dominio del rivestimento di X , che è di Hausdorff in quanto spazio metrico. Rispetto a tale metrica p è una isometria locale (cfr. Proposizione 1.19) e quindi anche D (localmente composizione di isometrie locali) è un'isometria locale.

Solo a questo punto usiamo la completezza di X per concludere che \tilde{X} è semplicemente connesso (e quindi è il rivestimento universale). Infatti se X è completo lo è anche (\tilde{X}, \tilde{d}) (Lemma 1.21) e possiamo applicare il Lemma 1.23 alla mappa $D : \tilde{X} \rightarrow M_\kappa^n$, che è dunque un rivestimento di M_κ^n . Poiché M_κ^n è semplicemente connesso e \tilde{X} è connesso, sappiamo dalla teoria dei rivestimenti che D deve essere un omeomorfismo e quindi \tilde{X} è semplicemente connesso. Inoltre, poiché D è un omeomorfismo e un'isometria locale tra spazi di lunghezze, è automaticamente una isometria globale fra \tilde{X} ed M_κ^n , perché in particolare il confronto fra le distanze può essere ridotto a quello fra lunghezze di curve, che è studiabile localmente. \square

Nota 1.30. Possiamo già motivare il fatto di aver escluso la dimensione 1 dalla trattazione. Anzitutto, \mathbb{S}^1 non è semplicemente connesso, e l'isometria del teorema precedente è solo una isometria locale. Di più: in dimensione 1 tutti gli spazi modello sono localmente isometrici, anzi \mathbb{H}^1 e \mathbb{R} sono isometrici (basta vedere il primo come geodetica parametrizzata da \mathbb{R} : la parametrizzazione è evidentemente un'isometria). Sostanzialmente, la curvatura non è un concetto apprezzabile in dimensione 1, e del resto le varietà 1-dimensionali sono completamente classificate, per cui non ce ne occuperemo.

Nota bibliografica. Per tutto il capitolo cfr. [BH99], Capitoli I.1,2,3.

³Detto *gruppo di ologonia di X rispetto al germe $[(\phi, x)]$*

Capitolo 2

Gruppo fondamentale e quasi-isometria

2.1 Azioni di gruppi su spazi metrici

Come si è accennato, dovremo stabilire una relazione di equivalenza, che sarà la quasi-isometria, che raggruppi spazi modello compatibili; per compatibili intendiamo tali che esista uno stesso spazio topologico compatto X che supporti due strutture metriche, una localmente isometrica a M_κ^n e una localmente isometrica a $M_{\kappa'}^{n'}$. Tale classe di equivalenza sarà quella del gruppo fondamentale di uno qualsiasi di questi spazi X . Andiamo ora a dotare il gruppo fondamentale di una struttura metrica che permetta, appunto, di parlare di isometria e quasi-isometria.

Definizione 2.1. *Un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico Y è un omomorfismo di gruppi $\Phi : G \rightarrow \text{Omeo}(Y)$.*

Si dice che l'azione è cocompatta se esiste un compatto $K \subset Y$ tale che $G \cdot K = Y$.

Se Y è uno spazio metrico, si dice che G agisce per isometrie se l'azione ha immagine in $\text{Isom}(Y) \subset \text{Omeo}(Y)$. L'azione si dice libera e propriamente discontinua se per ogni x esiste un intorno (diciamo nel caso metrico una palla $B(x, r)$) tale che $g(B(x, r)) \cap B(x, r) = \emptyset$ per ogni $g \in G \setminus \{e\}$.

Osservazione 2.2. L'azione del gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi sul suo rivestimento universale¹ commuta con il rivestimento. Essa è libera e propriamente discontinua: come intorno di un punto nello spazio totale del rivestimento basta

¹Ricordiamo la definizione di questa azione, che è a meno di coniugio: se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è il rivestimento, si sceglie un punto base $x_0 \in X$, e dati $z \in \pi_1(X, x_0)$ ed $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ esiste un'unica $f_z : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tale che $f_z(\tilde{x}_0)$ è il punto finale del sollevamento di z ad \tilde{X} a partire da \tilde{x}_0 e $p \circ f_z = p$: $f_z(y) = z \cdot y$. Ciò induce una mappa $\sigma : z \mapsto f_z \in \text{Omeo}(\tilde{X})$ che è l'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su \tilde{X} . Per la precisione, σ è un omomorfismo e gli f_z sono automorfismi di rivestimento. Sempre nel caso del rivestimento universale, l'azione su \tilde{X} è transitiva e lo spazio base risulta quoziente del rivestimento

prendere un aperto banalizzante, che non potrà contenere due punti appartenenti alla stessa fibra.

2.2 Quasi - isometria

Definizione 2.3 (Grafo di Cayley). *Siano G un gruppo e \mathcal{A} un insieme di generatori. Il grafo di Cayley $C_{\mathcal{A}}G$ è un grafo avente per vertici gli elementi di G ; due vertici g_1 e g_2 sono collegati da un arco se e solo se esiste $g \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ t.c. $g_1g = g_2$. (\mathcal{A}^{-1} è l'insieme degli inversi degli elementi di \mathcal{A}).*

Se assegniamo ad ogni arco lunghezza 1, l'insieme dei vertici del grafo di Cayley di un gruppo è uno spazio metrico con la distanza

$$d_{\mathcal{A}}(g_1, g_2) = \text{la minima lunghezza di un percorso necessario a raggiungere } g_2 \text{ da } g_1.$$

Tale minimo esiste sempre, dato che esiste sempre almeno il percorso che porta g_1 in 1 e da lì in g_2 , e le lunghezze sono numeri naturali; inoltre la funzione $d_{\mathcal{A}}$ è facilmente simmetrica e non degenera, e poiché andando da g_1 a g_2 e poi da g_2 a g_3 si realizza un percorso da g_1 a g_3 anche la disuguaglianza triangolare è verificata.

Definizione 2.4 (Quasi-isometria). *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Si dice (K, ε) -quasi isometria una funzione $f : X \rightarrow Y$ t.c. per ogni $x, y \in X$*

$$\frac{1}{K}d_X(x, y) - \varepsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq Kd_X(x, y) + \varepsilon$$

e tale che esiste C per cui ogni punto di Y si trova in una palla di raggio C centrata in un punto dell'immagine di f .

Osservazione 2.5. Una quasi-isometria non è necessariamente né continua, né iniettiva, né surgettiva. Ad esempio, una qualunque mappa fra spazi limitati di diametro rispettivamente r ed s , con $\varepsilon = \max\{2r, 2s\}$, è una $(1, \varepsilon)$ -quasi-isometria con costante $C = s$:

$$d_1(x, y) - \varepsilon \leq 0 \leq d_2(f(x), f(y)) \leq 2s \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Osservazione 2.6. La quasi-isometria è una relazione di equivalenza. La riflessività è evidente; date poi $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ (K, ε) -quasi-isometrie (a meno di prendere i massimi fra i due K e i due ε), $x, y \in X$,

$$d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \leq Kd_Y(f(x), f(y)) + \varepsilon \leq K^2d_X(x, y) + K\varepsilon + \varepsilon$$

per il gruppo degli *automorfismi di rivestimento*, che nel caso universale è identificato con il gruppo fondamentale.

e

$$d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \geq \frac{1}{K} d_Y(f(x), f(y)) - \varepsilon \geq \frac{1}{K^2} d_X(x, y) - \frac{\varepsilon}{K} - \varepsilon;$$

quanto alla proprietà di “quasi surgettività” dell’applicazione composta, si osserva che, dette C e D le costanti relative a f e g , per ogni $z \in Z$ esiste un punto $y \in Y$ t.c. $z \in B_Z(g(y), D)$, ed esiste $x \in X$ t.c. $y \in B(f(x), C)$. Quindi

$$d(z, g(f(x))) \leq d(z, g(y)) + d(g(y), g(f(x))) \leq C + Kd(y, f(x)) + \varepsilon \leq C + D + \varepsilon.$$

Inoltre è proprio la “quasi-surgettività” a garantire la simmetria della relazione, dato che a partire da una quasi-isometria $f : X \rightarrow Y$ possiamo costruire una funzione $g : Y \rightarrow X$ definita come $g(y) = x$, con x uno dei punti di X t.c. $y \in B_Y(f(x), C)$. L’assioma della scelta ci permette di costruire questa funzione, evidentemente non canonica ma sufficiente ai nostri scopi: la “quasi-surgettività” discende immediatamente dalla costruzione, e per $y, y' \in Y$ valgono

$$\begin{aligned} d_Y(y, y') &\leq d_Y(y, f(g(y))) + d_Y(f(g(y)), f(g(y'))) + d_Y(f(g(y')), y') \leq \\ &\leq C + Kd_X(g(y), g(y')) + \varepsilon + C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &\leq Kd_Y(f(g(y)), f(g(y'))) + K\varepsilon \leq \\ &\leq K[d_Y(y, f(g(y))) + d_Y(y, y') + d_Y(f(g(y')), y')] + K\varepsilon \leq 2KC + Kd_Y(y, y') + K\varepsilon \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{K} d_Y(y, y') - \frac{2C + \varepsilon}{K} \leq d_X(g(y), g(y')) \leq Kd_Y(y, y') + 2KC + K\varepsilon$$

e prendendo $\varepsilon' = \max\{\frac{2C + \varepsilon}{K}, K(2C + \varepsilon)\}$ si conclude.

Proposizione 2.7. *La struttura metrica del grafo di Cayley $C_{\mathcal{A}}G$ è unica a meno di quasi-isometrie (Lipschitziane) al variare dell’insieme \mathcal{A} fra gli insiemi finiti di generatori (se ne esistono). Quindi ha senso parlare di tipo di quasi-isometria di un gruppo finitamente generato, riferendosi appunto al tipo di quasi-isometria di un suo qualsiasi grafo di Cayley rispetto ad un sistema di generatori finito.*

Dimostrazione: Due grafi di Cayley dello stesso gruppo rispetto a due diversi sistemi di generatori \mathcal{A} e \mathcal{B} hanno gli stessi vertici. Siano $d_{\mathcal{A}}$ e $d_{\mathcal{B}}$ le distanze indotte sull’insieme dei vertici Γ dalla costruzione dei due grafi di Cayley. L’identità è una quasi isometria fra $(\Gamma, d_{\mathcal{A}})$ e $(\Gamma, d_{\mathcal{B}})$, dato che è surgettiva e $\frac{1}{\lambda} d_{\mathcal{B}}(x, y) \leq d_{\mathcal{A}}(x, y) \leq \lambda d_{\mathcal{B}}(x, y)$ dove λ è

la lunghezza della parola più lunga del “dizionario di traduzione” fra \mathcal{A} e \mathcal{B} , cioè se

$$\lambda_1 = \max\{n \mid \prod_{i=1}^n b_i \in \mathcal{A}, b_i \in \mathcal{B} \text{ con scrittura minimale}\}$$

e

$$\lambda_2 = \max\{n \mid \prod_{i=1}^n a_i \in \mathcal{B}, a_i \in \mathcal{A} \text{ con scrittura minimale}\},$$

$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Infatti se $x^{-1}y = \prod_{i=1}^n a_i$, $a_i \in \mathcal{A}$, $a_i = \prod_{j=1}^{m_i} b_{ij}$ (tutte scritte minimali)

$$d_{\mathcal{B}}(x, y) = \text{lungh}(\text{scrittura rispetto a } \mathcal{B} \text{ di } \prod_{i=1}^n a_i) = \text{lungh}(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} b_{ij}) \leq n\lambda = \lambda d_{\mathcal{A}}(x, y)$$

e se $x^{-1}y = \prod_{i=1}^n b_i$, $b_i \in \mathcal{B}$, $b_i = \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij}$ (sempre scritte minimali)

$$d_{\mathcal{A}}(x, y) = \text{lungh}(\text{scrittura rispetto a } \mathcal{A} \text{ di } \prod_{i=1}^n b_i) = \text{lungh}(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij}) \leq n\lambda = \lambda d_{\mathcal{B}}(x, y).$$

□

Il risultato fondamentale per gli scopi di questo capitolo è ora il seguente.

Teorema 2.8 (Lemma di Švarc-Milnor). *Sia Y uno spazio di lunghezze proprio. Se G agisce in modo libero, propriamente discontinuo e cocompatto per isometrie su Y , allora G è finitamente generato e scelto un punto arbitrario $x_0 \in Y$ la mappa*

$$\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$$

è una quasi-isometria.

Dimostrazione: Per ipotesi esiste un sottoinsieme K compatto (quindi limitato) di Y tale che $G \cdot K = Y$. Supponiamo che $K \subset B(x_0, D/3)$ per un certo D . L'insieme $\mathcal{A} = \{g \in G \mid gB(x_0, D) \cap B(x_0, D)\}$ è finito. Infatti per ogni punto $y \in B(x_0, D)$ esiste un intorno U_y t.c. $gU_y \cap U_y = \emptyset$ per ogni $g \neq 1$. Poiché lo spazio è proprio la palla è compatta, e quindi si può estrarre un ricoprimento finito $\{U_i\}, i = 1, \dots, m$. Preso un punto $y \in U_i$ solo un numero finito di sue immagini tramite l'azione di G potrà cadere in un U_i , precisamente al più una immagine per ogni U_i , dato che $g \cdot y \in U_i, h \cdot y \in U_i \implies hg^{-1} : g \cdot y \mapsto h \cdot y \implies (hg^{-1}U_i) \cap U_i \neq \emptyset \implies h = g$. Quindi le immagini di un U_i che intersecano $B(x_0, D)$ sono finite e si può concludere facendo variare $i = 1, \dots, m$ che anche \mathcal{A} è finito.

Vogliamo ora mostrare che \mathcal{A} genera G , sfruttando la struttura di spazio di lunghezze.

Dato $\gamma \in G$ consideriamo una curva rettificabile c che collega x_0 con $\gamma \cdot x_0$; esistono una partizione t_1, \dots, t_n tale che $d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq D/3$ per ogni i , e dei $\gamma_i \in G$ tali che $d(c(t_i), \gamma_i \cdot x_0) \leq D/3$, dato che $G \cdot B(x_0, D/3) = Y$. Quindi esistono $\gamma_i, y \in B(x_0, D/3)$ t.c. $\gamma_i \cdot y = c(t_i)$, e poiché l'azione è per isometrie $d(\gamma_i(x_0), c(t_i)) = d(x_0, y) \leq D/3$ (sceglieremo naturalmente $\gamma_1 = id, \gamma_n = \gamma$). Ciò ci dice subito, peraltro, che la candidata quasi-isometria verifica la condizione di “quasi-surgettività” richiesta ad una quasi-isometria, con costante $C = D/3$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che $d(\gamma_i \cdot x_0, \gamma_{i-1} \cdot x_0) \leq D$ e quindi $a_i := \gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i \in \mathcal{A}$. Segue che $\gamma = a_1 \dots a_n$ e G è generato da \mathcal{A} .

Vogliamo ora mostrare che l'applicazione data è una quasi-isometria; poiché G agisce per isometrie basterà confrontare $d_{\mathcal{A}}(1, \gamma)$ e $d(x_0, \gamma \cdot x_0)$. Poiché Y è uno spazio di lunghezze esiste una curva c che collega x_0 e $\gamma \cdot x_0$ di lunghezza minore di $d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$. Consideriamo la partizione meno fine possibile $0 = t_1, \dots, t_n = 1$ di $[0, 1]$ t.c. $d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq D/3$. Allora necessariamente $n \leq 3l(c)/D + 1 \leq 3(d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1)/D + 1$. (Se si prende ad esempio una partizione tale che $d(c(t_i), c(t_{i+1})) = D/3$ almeno per $i = 1, \dots, n-2$, si ha $(n-1)D/3 = l(c) - l(c|_{[t_{n-1}, 1]})$ da cui quanto detto). Poiché però come visto γ può essere espresso con n generatori vale $d_{\mathcal{A}}(1, \gamma) \leq (d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1)3/D + 1$.

Quanto alla disuguaglianza nel verso opposto, supponiamo $m = d_{\mathcal{A}}(1, \gamma)$, $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_m$ per certi $\alpha_i \in \mathcal{A}$. Chiamando $g_i = \alpha_1 \dots \alpha_i$ si ha

$$\begin{aligned} d(x_0, \gamma \cdot x_0) &\leq d(x_0, g_1 \cdot x_0) + \dots + d(g_{m-1} \cdot x_0, g_m \cdot x_0) = d(x_0, a_1 \cdot x_0) + \dots + d(x_0, a_m \cdot x_0) \leq \\ &\leq m\mu = d_{\mathcal{A}}(1, \gamma)\mu \end{aligned}$$

dove $\mu = \max\{d(x_0, a \cdot x_0) | a \in \mathcal{A}\}$.

In conclusione, prendendo $K = \max\{\mu, 3/D\}$ si ha

$$\begin{aligned} d(x_0, \gamma \cdot x_0)/K - 3/D - 1 &\leq d(x_0, \gamma \cdot x_0)/\mu \leq d_{\mathcal{A}}(1, \gamma) \leq 3d(x_0, \gamma \cdot x_0)/D + 3/D + 1 \leq \\ &\leq d(x_0, \gamma \cdot x_0)K + 3/D + 1. \end{aligned}$$

□

2.3 Gruppo fondamentale di spazi a curvatura costante

Alcune verifiche sono ora necessarie per poter applicare il Lemma di Milnor-Švarc ai risultati del capitolo precedente. Consideriamo d'ora in poi uno spazio compatto e connesso X su cui esista una struttura di spazio metrico a curvatura costante κ . Sap-

priamo dal Teorema 1.29 che X ammette rivestimento universale \tilde{X} e che questo, con la metrica di lunghezze indotta \tilde{d} , è isometrico ad M_κ^n (la compattezza di (X, d) implica in particolare la completezza). Vorremmo applicare il Lemma di Milnor-Švarc a \tilde{X} e concludere che il gruppo fondamentale di X è quasi-isometrico a (\tilde{X}, \tilde{d}) , sfruttando l'azione del gruppo fondamentale sul rivestimento universale. Anzitutto, come notato in precedenza, tale azione è libera e propriamente discontinua.

Ricordando che nel caso del rivestimento universale lo spazio base X è quoziente topologico dello spazio totale per l'azione di $\pi_1(X)$, si conclude che l'azione è anche cocompatta, dal momento che X è compatto (in generale se Y è uno spazio di Hausdorff che riveste uno spazio compatto X , allora esiste un compatto di Y che interseca tutte le fibre del rivestimento: per convincersene basta prendere un restringimento di chiusi -quindi compatti- del ricoprimento di X dato dagli aperti banalizzanti e trasferirlo su Y tramite le inverse locali).

Teorema 2.9. *Dato uno spazio metrico compatto (X, d) a curvatura costante (localmente isometrico a M_κ^n), il suo gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ è quasi-isometrico a M_κ^n .*

Dimostrazione: Dal Teorema 1.29 sappiamo che esiste il rivestimento universale \tilde{X} che, dotato della metrica di lunghezze indotta, è isometrico a M_κ^n . Esso è quindi proprio, e il gruppo fondamentale agisce in maniera libera, propriamente discontinua e cocompatta su \tilde{X} per via delle ultime osservazioni fatte. Inoltre, come si è detto, l'azione del gruppo fondamentale commuta con il rivestimento, e ciò ci assicura l'azione per isometrie rispetto alla metrica di lunghezze indotta, dato che le immagini delle curve tramite p sono invarianti sotto l'azione di $\pi_1(X)$. Se ne conclude che il gruppo fondamentale, con la metrica indotta dal grafo di Cayley (che -ricordiamo- è ben definita a meno di quasi-isometrie), è quasi-isometrico al rivestimento universale, e quindi, poiché la quasi-isometria è una relazione più debole dell'isometria, il gruppo fondamentale è quasi-isometrico a M_κ^n . \square

Notiamo ancora una volta che il tipo di quasi-isometria del gruppo fondamentale dipende solo dalla struttura topologica dello spazio base X . Pertanto se esistesse uno spazio topologico compatto e connesso X , tale da ammettere due distinte strutture metriche compatibili con la sua topologia che lo rendano localmente isometrico rispettivamente a M_κ^n e $M_{\kappa'}^{n'}$, allora M_κ^n e $M_{\kappa'}^{n'}$ sarebbero quasi-isometrici, in quanto entrambi quasi-isometrici al gruppo fondamentale di X .

Andremo a dimostrare che le classi di quasi-isometria di spazi modello con curvature di segno diverso (negativo, positivo, nullo) sono invece distinte. In questa prospettiva introduciamo subito un invariante di quasi-isometria.

2.4 Ultralimiti di spazi metrici

Definizione 2.10. Si definisce **filtro** su un insieme I una sottofamiglia ω di $\mathcal{P}(I)$ tale che

- $\emptyset \notin \omega$
- $A, B \in \omega \implies A \cap B \in \omega$
- $A \in \omega, B \supseteq A \implies B \in \omega$

Si dice **ultrafiltro** un filtro tale che $A \notin \omega \implies A^c \in \omega$, e si dice ultrafiltro **non principale** un ultrafiltro che non contiene insieme finiti (o equivalentemente singoli).

Proposizione 2.11. Su qualsiasi insieme infinito I esistono ultrafiltri non principali.

Dimostrazione: Consideriamo la famiglia dei sottoinsiemi cofiniti di I . Essa verifica le proprietà di filtro ed è detta *filtro di Fréchet*. La famiglia dei filtri che estendono il filtro di Fréchet è induttiva, e dunque esiste un elemento massimale. Questo è un ultrafiltro, dato che se $A \notin \omega$ e $A^c \notin \omega$ allora è possibile estendere ω con uno fra i due (si tratta di una verifica non difficile). Inoltre è non principale poiché se contenesse un insieme finito dovrebbe contenere anche il suo complementare visto che estende il filtro di Fréchet, e dunque conterrebbe il vuoto, assurdo. \square

Definizione 2.12. Diciamo che la successione $(x_i)_{i \in I}$ ha il punto x come **ultralimite** lungo un ultrafiltro ω ($\omega - \lim x_n = x$) se per ogni $U \ni x$ aperto l'insieme $\Lambda_U = \{i \in I \mid x_i \in U\}$ appartiene ad ω .

Proposizione 2.13. Dato un ultrafiltro ω su un insieme I , ogni I -successione di punti $(x_i)_{i \in I} \in X$, dove X è uno spazio topologico compatto, ammette un ultralimite $\omega - \lim x_n \in X$. Inoltre se X è di Hausdorff tale ultralimite è unico.

Dimostrazione: Negare la tesi significa dire che

$$\forall x \in X \exists U_x \ni x \text{ t.c. } \{n \mid x_n \in U_x\} \notin \omega.$$

Da tale ricoprimento $\{U_x\}$ di X estraiamo un sottoricoprimento finito $\{U_i\}_{i=1}^n$. Detto $\Lambda_i = \{n \mid x_n \in U_i\}$ abbiamo $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i = I$, ma $\Lambda_i \neq \omega$ per ogni i , contraddicendo la definizione di ultrafiltro.

Se ora X è T_2 , l'esistenza di due ultralimiti distinti y e z per la stessa successione implicherebbe che dati $U \ni y$ e $V \ni z$ disgiunti gli insiemi Λ_U e Λ_V , disgiunti, apparterrebbero entrambi ad ω ; assurdo. \square

Osservazione 2.14. Dato un ultrafiltro ω su I , sia $(X_i, d_i)_{i \in I}$ una successione di spazi metrici. Definiamo su $\prod_{i \in I} X_i$ la pseudodistanza $dist_\omega((x_i), (y_i)) = \omega\text{-lim } d_i(x_i, y_i) \in [0, \infty]$ (dove $[0, \infty]$ è visto come la compattificazione di Alexandrov di $[0, \infty)$, dunque l' ω -limite esiste sempre). Quozientando per la relazione di equivalenza “essere a distanza 0” si ottiene una pseudodistanza non degenera ma possibilmente a valori infiniti. Definiamo lo spazio così ottenuto X_ω . Se gli X_i sono equilimitati $dist_\omega$ è effettivamente una distanza; nel caso generale, fissata una successione $e_\omega \in X_\omega$ di punti base (considerati a meno di equivalenza), possiamo considerare $X_{\omega, e_\omega} = \{x_\omega \in X_\omega \mid dist_\omega(x_\omega, e_\omega) < \infty\}$, che risulta quindi effettivamente uno spazio metrico con la distanza $dist_\omega$:

$$\omega\text{-lim}(X_i, e_i) := (X_{\omega, e_\omega}, e_\omega).$$

Definizione 2.15 (Cono asintotico). Siano ω un ultrafiltro non principale su I e (λ_i) una I -successione di numeri reali tali che $\omega\text{-lim } \lambda_i = 0$. Dato uno spazio metrico (X, d_X) e una successione di punti base $(e_i) \subset X$ definiamo

$$Cono(X, e_\omega, (\lambda_i)) = \omega\text{-lim}(\lambda_i X, e_i)$$

dove $\lambda_i X = (X, \lambda_i d_X)$ ed e_ω è definito come sopra.

Osservazione 2.16. Nel caso degli spazi modello M_κ^n , una volta fissati la successione di riscaldamento e l'ultrafiltro, il cono asintotico è ben definito a meno di isometria, dato che $Isom(M_\kappa^n)$ agisce transitivamente sullo spazio e dunque ogni $X_i = (\lambda_i X, e_i)$ è isometrico a $X'_i = (\lambda_i X, e'_i)$ per qualunque coppia di successioni $(e_i), (e'_i)$.

2.5 Coni asintotici e quasi-isometrie

Proposizione 2.17. Una quasi-isometria f tra due spazi metrici puntati $(X, (e_i))$ e $(X', (e'_i))$ tale che $dist_\omega(f(e_i), e'_i) < \infty$ per ogni i induce un omeomorfismo bi-Lipschitz tra i rispettivi coni asintotici rispetto ad una stessa successione di riscaldamento $\{\lambda_i\}$ e ad uno stesso ultrafiltro ω .

Dimostrazione: Siano $X_\omega = Cono_\omega(X, (e_i), (\lambda_i))$, $X'_\omega = Cono_\omega(X', (f(e_i)), (\lambda_i))$. Sappiamo che dati due elementi $x \in X_\omega$, $y \in X'_\omega$, ovvero le classi di equivalenza rispetto alla relazione $dist_\omega = 0$ delle successioni $(x_i) \subset X$ e $(y_i) \subset X'$, per ogni i vale

$$\frac{1}{K}d_X(x_i, y_i) - \varepsilon \leq d_{X'}(f(x_i), f(y_i)) \leq Kd_X(x_i, y_i) + \varepsilon$$

cioè

$$\frac{\lambda_i}{K}d_X(x_i, y_i) - \lambda_i \varepsilon \leq \lambda_i d_{X'}(f(x_i), f(y_i)) \leq \lambda_i K d_X(x_i, y_i) + \lambda_i \varepsilon$$

cioè

$$\frac{1}{K}d_i(x_i, y_i) - \lambda_i\varepsilon \leq d'_i(f(x_i), f(y_i)) \leq Kd_i(x_i, y_i) + \lambda_i\varepsilon$$

dove d_i e d'_i sono le distanze riscalate.

Poiché ciò vale per ogni i , in particolare varrà passando all' ω -limite, che è ben definito in quanto l'immagine tramite f di (X, e_i) , per ogni i , è contenuta nella componente che definisce il cono asintotico: $d'_i(f(z), e'_i) \leq d'_i(f(z), f(e_i)) + d'_i(f(e_i), e'_i) \leq Kd_i(z, e_i) + \varepsilon + d'_i(f(e_i), e'_i)$.

Denotiamo con f_ω la funzione che a $[(x_i)_{i \in I}] \in X_\omega$ associa $[(f(x_i))_{i \in I}] \in X'_\omega$; la buona definizione rispetto al passaggio al quoziente segue, come anche la tesi del teorema, dalla proprietà di quasi-isometria: infatti ricordando che $\omega\text{-lim } \lambda_i = 0$ e che l'ultralimite è facilmente lineare si ha

$$\frac{1}{K}dist_\omega(x, y) \leq \omega\text{-lim } d'_i(f(x), f(y)) \leq Kdist_\omega(x, y).$$

Dunque f_ω è ben definita (se $dist_\omega(x, y) = 0$ allora $\omega\text{-lim } d'_i(f(x_i), f(y_i)) = 0$) ed è K -bi-Lipschitz (e quindi un omeomorfismo). \square

Osservazione 2.18. Alla luce dell'Osservazione 2.16 possiamo dire che una quasi-isometria f tra spazi modello M_κ^n e $M_{\kappa'}^{n'}$ induce un omeomorfismo bi-Lipschitz fra i rispettivi coni asintotici, dato che fissata una successione di punti base (e_i) in M_κ^n si può prendere come sequenza di punti base per $M_{\kappa'}^{n'}$ la successione $(e'_i) = (f(e_i))$, rientrando nelle ipotesi della Proposizione 2.17.

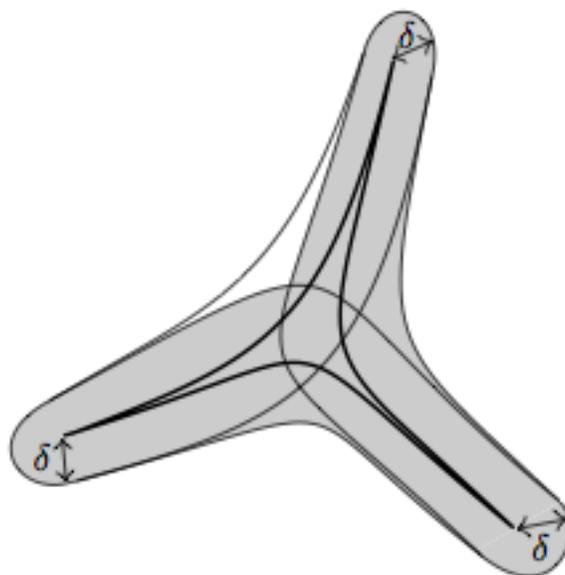
Nota bibliografica. Per le Sezioni 2.1, 2.2 e 2.3 vedi [BH99], pagg. 138-142. Per le Sezioni 2.4 e 2.5 cfr. [DK], Cap. 7.

Capitolo 3

Coni asintotici di spazi iperbolici

3.1 Iperbolicità secondo Rips

Definizione 3.1. *Uno spazio geodetico è detto Rips- δ -iperbolico se esiste un $\delta \in \mathbb{R}$ uniforme tale che, per qualunque triangolo con lati geodetici, ciascun lato è contenuto nel δ -intorno dell'unione degli altri due:*



Dimostriamo ora che lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n è Rips- δ -iperbolico per un qualche δ .

Lemma 3.2. *Lo spazio \mathbb{H}^n è Rips- δ -iperbolico se e solo se \mathbb{H}^2 è Rips- δ -iperbolico, dato che ogni triangolo geodetico di \mathbb{H}^n è contenuto in un piano di \mathbb{H}^n .*

Dimostrazione: Una geodetica γ per due punti $p, q \in \mathbb{H}^n$ è contenuta in tutti i piani *vettoriali* che passano per quei due punti. Infatti ricordando l'espressione (unica) della geodetica ricavata in 1.22 si ha che un piano vettoriale contenente p e q contiene tutte le loro combinazioni lineari come vettori, e quindi anche il v tangente usato nella formula della geodetica. Poiché a sua volta $\gamma(t)$ è combinazione lineare di p e v si ottiene quanto detto.

Quindi se consideriamo un sottospazio *vettoriale* W di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione 3 che contiene i tre vertici p, q, r del triangolo geodetico (esiste per l'algebra lineare), esso conterrà anche i lati del triangolo, e la sua intersezione con \mathbb{H}^n avrà dimensione 2 o 1, e dunque si immergerà in \mathbb{H}^2 (in quanto W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1}). \square

Osservazione 3.3 (Modello di Klein). Risulta evidente ancora da 1.22 che le geodetiche di \mathbb{H}^n sono tutte e sole le intersezioni con piani vettoriali di \mathbb{R}^{n+1} ; infatti l'intersezione di \mathbb{H}^n con un piano, se non vuota, è isometrica a \mathbb{H}^1 , che è uno spazio geodetico e quindi avendo dimensione 1 è una geodetica se parametrizzato per lunghezza d'arco.

Ciò permette di vedere una geodetica ad esempio del piano iperbolico come un segmento dato dall'intersezione del piano ad essa corrispondente con un disco ortogonale all'asse dell'iperboloide, posto ad altezza 1. Il disco avrà bordo sul cono che fa da asintoto all'iperboloide.

Tale costruzione, nel caso generale, è detta *modello di Klein* (o modello proiettivo, visto che stiamo prendendo la proiezione di \mathbb{H}^n su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) dello spazio iperbolico.

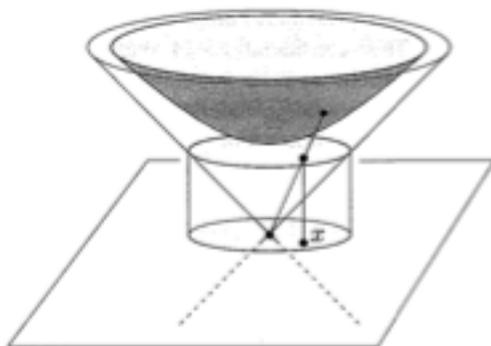


Figura 3.1: Modello dell'iperboloide e del disco di Klein

Abbiamo scaricato la verifica di Rips-iperbolicità sul piano iperbolico, che possiamo affrontare molto bene con la teoria delle superfici, senza coinvolgere la più generale geometria Riemanniana. È infatti possibile limitare il raggio di dischi e semidischi contenuti all'interno di un triangolo geodetico con delle considerazioni legate all'area,

nozione ben definita su \mathbb{H}^2 come superficie reale C^∞ orientata. Per poter effettuare dei calcoli precisi, premettiamo una parametrizzazione naturale di \mathbb{H}^2 in “coordinate polari”:

$$\begin{cases} x_0 = \cosh \eta \\ x_1 = \sinh \eta \cos \theta \\ x_2 = \sinh \eta \sin \theta \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che si tratta effettivamente di una parametrizzazione dell’iperboloide bidimensionale.

I meridiani del piano iperbolico, ovvero le curve parametrizzate per lunghezza d’arco con angolo θ costante, sono geodetiche, essendo della forma vista in 1.22.

Osservazione 3.4 (Triangoli con due vertici all’infinito). Dati due meridiani, supponiamo per comodità che i loro angoli azimutali θ siano della forma β e $-\beta$ (una rotazione dell’iperboloide è facilmente una isometria rispetto a $d_{\mathbb{H}^n}$). I meridiani saranno pertanto della forma

$$\gamma_1(t) = (\cosh t, \sinh t \cos \beta, \sinh t \sin \beta) \quad (t \geq 0)$$

$$\gamma_2(t) = (\cosh t, \sinh t \cos \beta, -\sinh t \sin \beta) \quad (t \geq 0).$$

Ogni triangolo geodetico avente due lati sui meridiani sarà rappresentato, nel disco di Klein di cui all’Osservazione 3.3, da un triangolo avente due lati uscenti dall’origine.

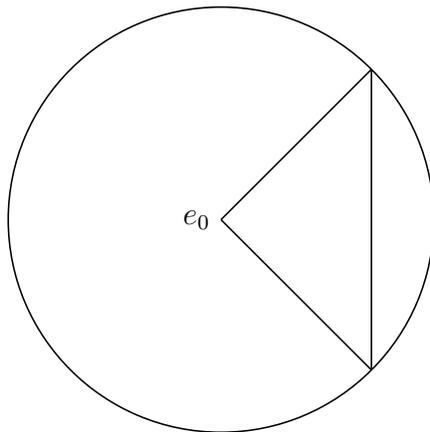


Figura 3.2: Triangolo con due vertici all’infinito nel disco di Klein

Le intersezioni dei due raggi con il bordo del disco, che non corrispondono a punti dell’iperboloide, sono però estremi di un segmento che corrisponde ad un arco geodetico L sul piano iperbolico (appunto l’intersezione di \mathbb{H}^2 con il piano che contiene il segmento). Il sottoinsieme di \mathbb{H}^2 compreso fra i due meridiani e tale arco geodetico è detto *triangolo geodetico con due vertici all’infinito*. Il piano P corrispondente al lato con

vertici all'infinito L , come si osserva facilmente dalla sua costruzione, è quello generato dalle due rette che fanno da asintoti ai due meridiani (guardando la figura 3.2, si può osservare che si tratta proprio delle rette che puntano ai due vertici all'infinito): sono rette con lo stesso angolo azimutale del meridiano corrispondente (β o $-\beta$) e pendenza 1, quindi, come segue immediatamente da queste due condizioni, sono le rette generate dai due vettori $(1, \cos \beta, \sin \beta)$ e $(1, \cos \beta, -\sin \beta)$.

L'area del triangolo con due vertici all'infinito è quindi facilmente calcolabile. Un normale (a meno di riscaldare) al piano P è dato dal prodotto vettore dei due generatori, ovvero $(-2 \cos \beta \sin \beta, 2 \sin \beta, 0)$, e quindi tutti i punti $(x_0, x_1, x_2) \in L$ saranno ortogonali a tale vettore; poiché $\sin \beta \neq 0$ (altrimenti avremmo una situazione banale) abbiamo la condizione $\cos \beta x_0 - x_1 = 0$.

Del resto sostituendo la parametrizzazione si ha

$$x_0 = \sec \beta \cos \theta \sqrt{x_0^2 - 1},$$

da cui risolvendo

$$x_0 = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta}}.$$

Per il calcolo dell'area basta ora tener presente che l'angolo azimutale spazia fra $-\beta$ e β , e l'angolo polare fra 0 e un certo $\eta(\theta)$ tale che $(x_0(\eta(\theta), \theta), x_1(\eta(\theta), \theta), x_2(\eta(\theta), \theta)) \in L$; il fattore di cambiamento di variabile nell'integrale di Lebesgue dato dalla parametrizzazione è $\sinh \eta$, per cui

$$\begin{aligned} \text{Area}(T_\beta) &= \int_{-\beta}^{\beta} \int_0^{\eta(\theta)} \sinh \eta \, d\eta \, d\theta = \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} (\cosh(\eta(\theta)) - 1) d\theta = \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} x_0(\theta) d\theta - 2\beta. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione trovata per x_0 in funzione di θ per tutti i punti di L si conclude che

$$\begin{aligned} \int_{-\beta}^{\beta} x_1(\theta) d\theta &= \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta}} = \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \beta}} \stackrel{u = \frac{\sin \beta}{\sin \theta}}{=} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \\ &= [\arcsin u]_{-1}^1 = \pi \end{aligned}$$

da cui $Area(T_\beta) = \pi - 2\beta$. Ora, 2β è esattamente l'angolo che misuriamo nel disco di Klein, essendo l'escursione dell'angolo azimutale. Mettendo insieme tre triangoli con due vertici all'infinito come in figura 3.3 si ottiene quello che si chiama *triangolo ideale*. La sua area è la somma di quelle dei tre triangoli più piccoli, e vale quindi $3\pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pi$, dato che come detto la trigonometria degli angoli θ è quella del disco ed essi sommano a 2π .

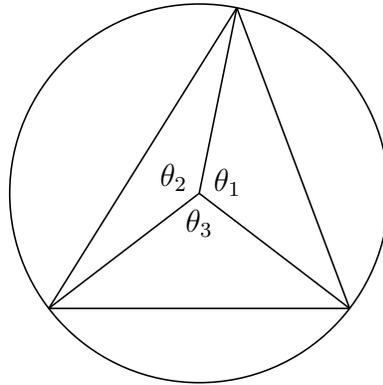


Figura 3.3: Decomposizione di un triangolo ideale in tre triangoli con due vertici all'infinito

Osservazione 3.5 (Ogni triangolo geodetico può essere incluso in un triangolo ideale). Basta osservare la figura 3.4, che come abbiamo visto dà una corrispondenza completa con ciò che sta accadendo sull'iperboloide, per convincersi che ogni triangolo geodetico può essere incluso in un triangolo ideale.

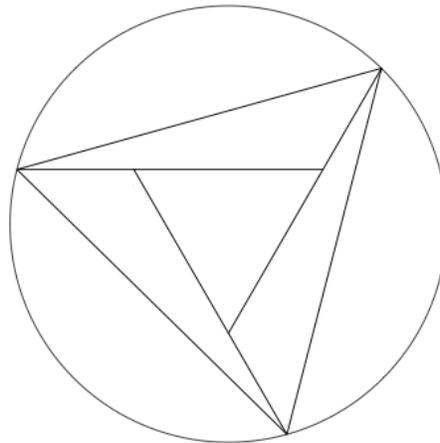


Figura 3.4: Contenimento di un triangolo geodetico in un triangolo ideale

Si può pertanto concludere che

Lemma 3.6. *L'area di ogni triangolo geodetico di \mathbb{H}^2 è minore o uguale di π .*

A questo punto segue facilmente:

Proposizione 3.7. *\mathbb{H}^2 è Rips-iperbolico.*

Dimostrazione: Supponiamo che per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ esista un triangolo geodetico T con vertici x, y, z tale che il lato xy non è contenuto nel δ -intorno degli altri due, in particolare sia $p \in xy$ esterno al δ -intorno di $yz \cup zx$. La palla $B_{\mathbb{H}^2}(p, \delta)$ non può quindi intersecare i lati yz e zx . Con una isometria che manda p in e_0 la geodetica xy deve andare nell'unione di meridiani opposti (sono le uniche geodetiche per e_0 in quanto gli unici piani passanti per 0 ed e_0 sono quelli verticali), e quindi la parte di $B_{\mathbb{H}^2}(p, \delta)$ contenuta nel triangolo andrà in una semipalla per motivi di simmetria attorno ai piani verticali. L'area di $B_{\mathbb{H}^2}(p, \delta) \cap T$ è pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Area}(B_{\mathbb{H}^2}(e_0, \delta)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \sinh \eta \, d\eta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cosh \delta - 1) d\theta = \\ &= \pi(\cosh \delta - 1) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Se ciò valesse per ogni δ , poiché i triangoli geodetici hanno tutti area minore o uguale di π , otterremmo un assurdo. \square

3.2 Coni asintotici di \mathbb{H}^n

Definizione 3.8. *Si dice albero reale uno spazio Rips-0-iperbolico (cioè uno spazio geodetico in cui ogni lato di un triangolo geodetico è contenuto nell'unione degli altri due).*

Osservazione 3.9. Un albero reale è in particolare unicamente geodetico.

Lemma 3.10. *Ogni componente $(X_\omega, (e_i))$ dell'ultralimite di spazi geodetici X_i è uno spazio geodetico.*

Dimostrazione: Sia X_ω l'ultralimite degli spazi geodetici X_i . Dati due punti x_ω e y_ω esistono geodetiche $\gamma_i : [0, T_i] \rightarrow X_i$ che connettono x_i e y_i . Poiché

$$T := \omega\text{-lim } T_i = d(x_\omega, y_\omega) < \infty$$

possiamo definire $\gamma_\omega : [0, T] \rightarrow X_\omega$ come l'ultralimite di funzioni; sarà ancora una geodetica (verifica immediata) e conetterà x_ω e y_ω . \square

Teorema 3.11. *Tutti i coni asintotici di uno spazio Rips-iperbolico sono alberi reali.*

Dimostrazione: Anzitutto, gli spazi $\lambda_i X$ sono Rips- $\lambda_i \delta$ -iperbolici, con ω -lim $\lambda_i = 0$, e il cono asintotico è ancora uno spazio geodetico (Lemma 3.10). Vediamo ora che le geodetiche sono uniche. Siano $y_\omega, z_\omega \in X_\omega, \gamma_i : [0, d_i(y_i, z_i)] \rightarrow X$ le geodetiche che connettono rispettivamente y_i con z_i e γ_ω il loro ultralimite (come nell'Osservazione 1.22). Sia invece ψ un'altra geodetica che connette y_ω e z_ω . Preso $t_0 \in [0, 1]$ e detto $\psi(t_0) = p_\omega$, consideriamo il triangolo $\Delta_i = y_i p_i \cup p_i z_i \cup Im \gamma_i$ in X : per δ -iperbolicità di X esiste un punto $q_i \in y_i p_i \cup p_i z_i$ tale che $d(\gamma_i(t_0), q_i) \leq \delta$, da cui moltiplicando per λ_i e passando all'ultralimite si ha $q_\omega \in \gamma_\omega(t_0)$. In particolare $d_\omega(q_\omega, y_\omega) = d_\omega(\gamma_\omega(t_0), y_\omega) = d_\omega(\psi(t_0), y_\omega)$ e $d_\omega(q_\omega, z_\omega) = d_\omega(\gamma_\omega(t_0), z_\omega) = d_\omega(\psi(t_0), z_\omega)$. Poiché $q_i \in y_i p_i \cup p_i z_i$ si ha facilmente che $q_\omega = p_\omega$, da cui $\psi(t_0) = \gamma_\omega(t_0)$ e $\psi = \gamma_\omega$.

Se ora $\Delta_\omega = x_\omega^1 x_\omega^2 \cup x_\omega^2 x_\omega^3 \cup x_\omega^3 x_\omega^1 \subseteq X_\omega$ è un triangolo geodetico, per unicità delle geodetiche Δ_ω è l'ultralimite (nel senso evidente) dei triangoli $\Delta_i = x_i^1 x_i^2 \cup x_i^2 x_i^3 \cup x_i^3 x_i^1$. Rispetto alle distanze $d_i = \lambda_i d$ tali triangoli devono soddisfare la condizione di Rips con $\delta_i = \lambda_i \delta$, e poiché ω -lim $\lambda_i \delta = 0$ abbiamo la condizione di 0-iperbolicità per Δ_ω . \square

Lemma 3.12. *Ogni arco (continuo) che connette due punti x, y di un albero reale T contiene anche la geodetica xy .*

Dimostrazione: Sia $z \in T \setminus xy$. Per compattezza esiste un t che minimizza la distanza di z da xy : $d(z, t) = d(z, xy) = k > 0$. Supponiamo di avere un altro punto $z' \in B(z, \frac{k}{2})$ e un analogo punto t' che minimizza la distanza di z' da xy ; allora $t = t'$. Infatti $z't' \cap xy = \{t'\}$, dato che se $z't'$ raggiungesse un altro punto t'' della geodetica avremmo $d(z, t') = d(z, t'') + d(t'', t') > d(z, t'') \geq d(z, t')$. Quindi per 0-iperbolicità del triangolo $z't \cup z't \cup t't$ si ha $z't = z't' \cup t't$; allora per 0-iperbolicità del triangolo $z't \cup tz \cup zz'$ ciò significa che $t' \in tz \cup zz'$. Poiché abbiamo scelto z' nella palla di raggio $\frac{k}{2}$ centrata in z , $t' \notin zz'$ (altrimenti $d(z, z') = d(z', t') + d(t', z) \geq \frac{k}{2} + k$); quindi $t' \in tz$ e quindi $t' = t$ visto che come sopra $tz \cap xy = \{t\}$.

Quindi la mappa $\pi : X \rightarrow xy$ che manda z in $t = \pi(z)$ (il punto più vicino su xy) è ben definita, continua e anzi localmente costante su $X \setminus xy$.

Dato ora un arco continuo γ con estremi x e y , $Im(\pi \circ \gamma) \cap xy$ è connessa e contiene x e y ; dunque coincide con xy . Ogni $s \in xy \setminus Im \gamma$, del resto, sarà ovviamente diverso dagli estremi, e quindi $(\pi \circ \gamma)^{-1} \subseteq [0, 1]$ sarà non vuoto ($\pi \circ \gamma$ è surgettiva), chiuso (controimmagine di un punto) e aperto (π è localmente costante su $X \setminus xy$), quindi è tutto $[0, 1]$, contro il fatto che $\pi(\gamma(0)) = x \neq s$. \square

Lemma 3.13. *Se T è un albero reale che contiene almeno due punti, allora $\exists p \in T$ t.c. $T \setminus \{p\}$ non è connesso per archi.*

Dimostrazione: Consideriamo un arco xy fra due punti distinti. Per continuità esiste almeno un punto p in tale arco diverso dagli estremi (altrimenti questi coinciderebbe-

ro). Consideriamo $T \setminus \{p\}$. Se esistesse un arco che congiunge x e y e non passa per p esso conterrebbe una geodetica fra x e y , che però è unica in T ; assurdo. \square

3.3 Conclusione: proprietà determinate dalla topologia

Possiamo concludere con i risultati fondamentali cercati.

Proposizione 3.14. *Uno spazio topologico compatto e connesso X non ammette strutture a curvatura costante di dimensione diversa fra loro.*

Dimostrazione: Uno spazio a curvatura costante connesso è una varietà di dimensione n in quanto localmente isometrico (quindi localmente omeomorfo) M_κ^n che è una varietà C^∞ . In particolari due spazi modello compatibili sono localmente omeomorfi. Poiché varietà reali di dimensione diversa non possono essere localmente omeomorfe si conclude. \square

Teorema 3.15. *Uno spazio topologico compatto e connesso X non ammette strutture a curvatura costante di segno diverso fra loro.*

Dimostrazione: \mathbb{H}^n e \mathbb{R}^n , per $n \geq 2$, non sono quasi-isometrici perché i loro coni asintotici non sono omeomorfi, dato che $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ è connesso per ogni p , e quindi basta ricordare il Lemma 3.13.¹ Il cono asintotico della sfera, invece, è un punto, dato che essa è limitata. Quindi la curvatura positiva è incompatibile con la curvatura negativa o nulla per ogni $n \geq 1$. Del resto è immediato verificare che uno spazio illimitato, come \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n , e uno spazio limitato, come \mathbb{S}^n , non possono essere quasi-isometrici. \square

D'altra parte non sono possibili altre distinzioni dal punto di vista esclusivamente topologico, dato che

Osservazione 3.16. Ogni spazio metrico a curvatura costante può essere riscaldato in modo da ottenere uno spazio a curvatura diversa dello stesso segno. Quindi la topologia non distingue curvatures dello stesso segno.

¹Bisogna precisare che almeno un cono asintotico di \mathbb{H}^n ha più di un punto. Ma se (λ_i) è una successione di riscaldamento ($\lambda_i \neq 0$), esiste sempre una successione di punti x_i in \mathbb{H}^n con distanza rispettivamente λ_i^{-1} da e_0 ; infatti, per $p \in \mathbb{H}^n$, $d_{\mathbb{H}^n}(p, e_0) = \operatorname{arcosh}(-\langle p, e_0 \rangle_{\mathcal{M}}) = \operatorname{arcosh} p_0$, e l'arcoseno iperbolico è surgettivo su \mathbb{R}^+ . Quindi $d_\omega(e_0, x_\omega) = 1$, cioè x_ω appartiene alla componente di e_0 ma non coincide con esso.

Nota bibliografica. Per la Sezione 3.1 cfr. [Rat06], §§ 3.4,3.5. Per la Sezione 3.2 vedi [FS09], Proposizione 10 e Lemma 11. Per una dimostrazione alternativa del Teorema 3.2, che passa attraverso il prodotto di Gromov, cfr. anche [DK], Sezioni 9.1-9.4.

Bibliografia

- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [DK] C. Drutu and M. Kapovich. *Geometric Group Theory*.
<https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/ggt.pdf>.
- [FS09] R. Frigerio and A. Sisto. Characterizing hyperbolic spaces and real trees.
Geometriae Dedicata Volume 142, Issue 1, pp 139-149, 2009.
- [Rat06] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, second edition, 2006.