



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

# Approssimazione di soluzioni di problemi ellittici

Seminario di Teoria e Metodi dell'Ottimizzazione

MARCO INVERSI

21 FEBBRAIO 2020



# Indice

<b>Notazione</b>	<b>ii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Formulazione debole</b>	<b>1</b>
1.1 Definizioni . . . . .	1
1.2 Esistenza delle soluzioni . . . . .	2
1.2.1 Il lemma di Lax-Milgram . . . . .	3
1.2.2 Applicazione alle PDE ellittiche . . . . .	5
1.3 L'approssimazione di Galérkin . . . . .	6
<b>2 Metodo degli elementi finiti</b>	<b>9</b>
2.1 Elementi finiti triangolari . . . . .	9
2.2 Operatore di interpolazione . . . . .	10
2.2.1 Stima dell'errore di interpolazione . . . . .	12
<b>3 Metodo di Galérkin agli elementi finiti</b>	<b>17</b>
3.1 Approssimazione di soluzioni deboli . . . . .	17
3.2 Aspetti algoritmici . . . . .	18
3.2.1 Comportamento asintotico del numero di condizionamento . . . . .	19
<b>4 Simulazioni numeriche</b>	<b>24</b>
4.1 FreeFem++ . . . . .	24
4.2 Sperimentazione . . . . .	27
4.2.1 L'equazione di Poisson . . . . .	27
4.2.2 Un generico problema ellittico . . . . .	33
4.2.3 Un problema non-ellittico . . . . .	34
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>

# Notazione

- $\|u\|_{m;\Omega}$  è la norma di Sobolev di una funzione  $u$  in  $H^m(\Omega)$ , cioè

$$\|u\|_{m;\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

per semplicità di notazione, se necessario la norma  $L^2(\Omega)$  coincide con la norma di Sobolev  $\|\cdot\|_{0;\Omega}$ .

- $|u|_{m;\Omega}$  è la seminorma di Sobolev di una funzione  $u$  in  $H^m(\Omega)$ , cioè

$$|u|_{m;\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

- Dato un qualsiasi insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ , scriveremo per brevità  $H^s(K)$  intendendo  $H^s(K^\circ)$ .
- I gradienti sono intesi come vettori riga, in modo che si possa scrivere la chain rule come prodotto vettore-matrice.
- Dato un vettore  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , denotiamo con  $|\xi|$  la norma euclidea.
- Data una matrice  $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , denotiamo con

$$\|B\| := \sup\{|Bx| \mid x \in \mathbb{R}^d, |x| = 1\}$$

la norma matriciale indotta dalla norma euclidea.

# Introduzione

La teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali è un vastissimo capitolo dell'Analisi Matematica, ampiamente studiato e dalle infinite applicazioni in molteplici ambiti. In questa relazione vogliamo concentrarci sui problemi differenziali con condizioni al bordo omogenee di Dirichlet. La nozione classica (e anche più intuitiva) di soluzione è troppo restrittiva; inoltre, non ci sono teoremi di esistenza e unicità in questo contesto. In effetti, l'unico modo di provare che un certo problema ha soluzione in senso classico è quello di "indovinare" la funzione che soddisfa puntualmente una certa relazione differenziale. Viste queste difficoltà, occorre indebolire la nozione di soluzione: si definiscono le soluzioni deboli in un contesto molto più vasto (e sorprendentemente naturale) in cui è semplice ottenere risultati di esistenza e unicità. Questi problemi sono naturalmente ambientati negli spazi di Sobolev: si veda [2] per un'introduzione dettagliata a questa teoria. È possibile mostrare che in molti casi le soluzioni deboli sono, in realtà, soluzioni in senso classico; in ogni caso, non mostreremo questi risultati: rimandiamo, per esempio, a [1] per una presentazione esaustiva sui risultati di regolarità ellittica.

La formulazione debole dei problemi differenziali suggerisce anche un metodo per approssimare le soluzioni; questa procedura può essere tradotta in un algoritmo che è possibile implementare al calcolatore. Mostreremo questi risultati, seguendo dettagliatamente l'approccio presentato in [4]. Infine, svolgeremo alcune simulazioni numeriche per visualizzare in maniera sorprendentemente efficace i risultati teorici mostrati. Per le sperimentazioni, è stato utilizzato software open source **FreeFem++** (si veda [3]).



# Capitolo 1

## Formulazione debole

### 1.1 Definizioni

Siano dati un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni qualsiasi. Si chiama problema di Dirichlet con condizione al bordo omogenea una scrittura del tipo

$$\begin{cases} \operatorname{div}((\nabla u)A) = f & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

In questa generalità, la scrittura (1.1) è da intendere soltanto in senso formale; a seconda del contesto, può essere interpretata in maniera diversa ed è possibile dare varie nozioni di soluzione.

**Definizione 1.1.1** (Soluzione classica).

Supponiamo che  $A, f \in C^1(\Omega)$ . Si dice che  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  è soluzione in senso classico (o forte) del problema (1.1) se vale

$$\begin{cases} \operatorname{div}((\nabla u(x))A(x)) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

A differenza del problema di Cauchy, non ci sono teoremi generali che garantiscono l'esistenza di soluzioni del problema (1.1) in senso classico. Anche supponendo regolarità dei coefficienti ( $A$ ) e del termine forzante ( $f$ ), non è garantita la soluzione del problema di Dirichlet con condizioni al bordo omogenee, tranne in casi molto specifici. Inoltre, la nozione di soluzione classica è troppo restrittiva per le applicazioni, cioè non si adatta allo studio di molti problemi di natura fisica: per esempio, è vietata la presenza di singolarità, discontinuità o "angoli". Per queste ragioni, si rilassa la nozione di soluzione, dando senso alla scrittura (1.1) in un contesto molto più ampio. Procediamo in maniera euristica; data una funzione  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , moltiplichiamo l'equazione in (1.1) per  $v$  e integriamo in  $\Omega$ . Otteniamo

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((\nabla u)A) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx;$$

applicando al primo membro la formula della divergenza, otteniamo che

$$- \int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Assiomatizzando questa relazione integrale, possiamo dare una nozione diversa di soluzione del problema (1.1).

**Definizione 1.1.2** (Soluzione distribuzionale).

Supponiamo che  $A \in L^\infty(\Omega)$  e che  $f \in L^2(\Omega)$ . Si dice che  $u \in H_0^1(\Omega)$  è soluzione in senso distribuzionale (o debole) del problema (1.1) se vale

$$\int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Abbiamo verificato che una soluzione in senso classico del problema (1.1) è soluzione anche in senso distribuzionale. In questo contesto (molto più generale), il valore puntuale al bordo è interpretato in termini di traccia di funzioni di Sobolev.

*Osservazione 1.1.3.* Ricordiamo che  $H_0^1(\Omega)$  è per definizione il completamento di  $C_c^\infty(\Omega)$  rispetto alla norma di Sobolev  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ ; ricordiamo anche che  $H_0^1(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert e che la norma di Sobolev è indotta dal prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} [\langle \nabla f, \nabla g \rangle + fg] dx.$$

Per le ipotesi assunte su  $A$  e  $f$ , è immediato dedurre che se  $u \in H_0^1(\Omega)$  è soluzione debole, allora è possibile estendere la classe delle funzioni test a  $H_0^1(\Omega)$ , cioè che

$$\int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La formulazione debole del problema (1.1) è molto versatile; in questo caso è facile mostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione sotto ipotesi aggiuntive abbastanza blande. Precisiamo che in certi casi le soluzioni deboli sono anche soluzioni in senso forte; esiste una teoria vastissima che si occupa di tali questioni, che noi non indagheremo. Il problema (1.1) è il prototipo di una vasta classe di equazioni alle derivate parziali, di cui non abbiamo presentato la versione più generale possibile: si possono considerare moltissime varianti, imponendo diverse condizioni al bordo oppure la dipendenza anche dalle derivate di ordine inferiore. Ci limiteremo ad analizzare nel dettaglio il caso in esame, tralasciando ulteriori generalizzazioni.

## 1.2 Esistenza delle soluzioni

*Osservazione 1.2.1.* Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un aperto,  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  una funzione in  $L^\infty(\Omega)$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione in  $L^2(\Omega)$ . Definiamo la forma bilineare  $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\mathcal{A}(u; v) := \int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx; \tag{1.3}$$

sia, invece,  $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione lineare tale che

$$\mathcal{F}(v) := - \int_{\Omega} f v dx. \tag{1.4}$$

La ricerca di soluzioni in senso debole per il problema (1.1) è equivalente a cercare  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Applicando le disuguaglianze di Hölder e di Cauchy-Schwarz, si deduce che per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  vale che

$$|\mathcal{A}(u; v)| \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{1;\Omega} \|v\|_{1;\Omega},$$

$$|\mathcal{F}(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1;\Omega},$$

ovvero  $\mathcal{A}$  ed  $\mathcal{F}$  sono applicazioni limitate. In altri termini, il problema della ricerca di soluzioni distribuzionali è equivalente a quello della rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite una forma bilineare limitata; notiamo che se  $A$  è costantemente la matrice identica, la forma bilineare  $\mathcal{A}$  è un prodotto scalare e il problema si risolve con un'immediata applicazione del teorema di rappresentazione di Riesz. Nel caso generale, ci vuole un risultato più raffinato, che presentiamo in un contesto del tutto generale, perchè questo non adduce alcuna complicazione.

### 1.2.1 Il lemma di Lax-Milgram

Sia dato uno spazio di Hilbert  $\mathbb{H}$ .

**Definizione 1.2.2.** Sia  $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare. Si dice che  $\mathcal{A}$  è limitata se esiste una costante  $\gamma > 0$  tale che per ogni  $u, v \in \mathbb{H}$  vale che

$$|\mathcal{A}(u; v)| \leq \gamma \|u\| \|v\|. \quad (1.5)$$

Si dice che  $\mathcal{A}$  è coerciva se esiste una costante  $\alpha > 0$  tale che per ogni  $u \in \mathbb{H}$  vale che

$$\alpha \|u\|^2 \leq \mathcal{A}(u; u). \quad (1.6)$$

**Teorema 1.2.3** (Lax-Milgram).

*Siano  $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare limitata e coerciva con costanti  $\gamma, \alpha > 0$  (vedi 1.2.2) ed  $\mathcal{F} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare e continuo. Esiste un unico elemento  $u \in \mathbb{H}$  tale che*

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

*Inoltre, vale che*

$$\|u\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{H}'}. \quad (1.7)$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $u \in \mathbb{H}$  denotiamo con  $\mathcal{A}_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione lineare tale che

$$\mathcal{A}_u(v) := \mathcal{A}(u; v) \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

Notiamo che  $\mathcal{A}_u$  è continua, infatti abbiamo

$$|\mathcal{A}_u(v)| \leq \gamma \|u\| \|v\|;$$

segue che

$$\|\mathcal{A}_u\|_{\mathbb{H}'} \leq \gamma \|u\|_{\mathbb{H}}.$$

Abbiamo definito un'applicazione lineare e continua  $\Lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$  tale che  $\Lambda(u) = \mathcal{A}_u$ . La tesi è equivalente a mostrare che  $\Lambda$  è iniettiva e surgettiva, infatti cerchiamo i vettori  $u \in \mathbb{H}$  tali che  $\mathcal{A}_u = \mathcal{F}$ . Se esiste un vettore  $u$  con questa proprietà, allora  $u$  è unico: Infatti, se  $u, w$  sono tali che  $\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_w$ , allora abbiamo

$$\mathcal{A}_u(u - w) = \mathcal{A}_w(u - w),$$

da cui segue

$$0 = \mathcal{A}(u - w; u - w) \geq \alpha \|u - w\|^2$$

per la coercività di  $\mathcal{A}$ ; pertanto  $u - w = 0$ . Inoltre, se  $u$  ha la proprietà richiesta, vale che

$$\alpha \|u\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \mathcal{A}(u; u) = \mathcal{F}(u) \leq \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{H}'} \|u\|_{\mathbb{H}},$$

da cui segue la stima (1.7). Dobbiamo provare la surgettività dell'applicazione  $\Lambda$ . Ricordiamo che per il teorema di rappresentazione di Riesz, la mappa  $\mathcal{R} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$  tale che

$$\mathcal{R}_u := \langle u, \cdot \rangle$$

è un'isometria di spazi di Hilbert; allora, se mostriamo che  $\mathcal{R}^{-1} \circ \Lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  è surgettiva, otteniamo la tesi; possiamo equivalentemente provare che la sua immagine, che denotiamo con  $\mathbb{V}$ , è un sottospazio chiuso il cui ortogonale è  $\{0\}$ . Sia  $(z_n)_n$  una successione in  $\mathbb{V}$  che converge ad un elemento  $z \in \mathbb{H}$ ; per definizione esiste una successione  $(w_n)_n$  in  $\mathbb{H}$  tale che  $z_n = \mathcal{R}^{-1} \circ \Lambda(w_n)$ . Per definizione, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  per ogni  $v \in \mathbb{H}$  vale che

$$\langle z_n, v \rangle = \mathcal{A}(w_n; v).$$

Per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\| \|w_n - w_m\| &\geq \langle z_n - z_m, w_n - w_m \rangle \\ &= \mathcal{A}(w_n - w_m; w_n - w_m) \\ &\geq \alpha \|w_n - w_m\|^2. \end{aligned}$$

Segue che

$$\|w_n - w_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|z_n - z_m\|;$$

siccome  $(z_n)_n$  è una successione convergente, deduciamo che  $(w_n)_n$  è una successione di Cauchy; pertanto, esiste  $w \in \mathbb{H}$  tale che  $w_n \rightarrow w$  in  $\mathbb{H}$ . Per continuità, si ha che

$$z = \mathcal{R}^{-1} \circ \Lambda(w).$$

Proviamo che  $\mathbb{V}^\perp = \{0\}$ . Sia  $z \in \mathbb{H}$  tale che per ogni  $v \in \mathbb{H}$  vale che

$$\langle z, \mathcal{R}^{-1} \circ \Lambda(v) \rangle = 0;$$

per le definizioni date, è equivalente dire che

$$\mathcal{A}(v; z) = \mathcal{A}_v(z) = \langle \mathcal{R}^{-1} \circ \Lambda(v), z \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

Scegliendo  $v = z$ , troviamo che

$$0 = \mathcal{A}(z; z) \geq \alpha \|z\|^2,$$

da cui segue che  $z = 0$ . □

*Osservazione 1.2.4.* Il teorema di Lax-Milgram si applica anche al caso in cui  $\mathcal{A}$  è simmetrico, cioè

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{A}(v; u) \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

In questo caso,  $u \in \mathbb{H}$  ha la proprietà che

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{H}$$

se e solo se  $u$  minimizza il funzionale quadratico

$$\mathcal{J}(v) := \frac{1}{2}\mathcal{A}(v; v) - \mathcal{F}(v).$$

Supponiamo che  $u \in \mathbb{H}$  sia tale che

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{H};$$

utilizzando le proprietà di  $\mathcal{A}$ , per ogni  $w \in \mathbb{H}$  vale che

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u + w) &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(u + w; u + w) - \mathcal{F}(u + w) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}(u; u) + \mathcal{A}(u; w) + \mathcal{A}(w; u) + \mathcal{A}(w; w)) - \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(w) \\ &= \mathcal{J}(u) + \mathcal{A}(u; w) - \mathcal{F}(w) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(w; w) \\ &= \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(w; w) \\ &\geq \mathcal{J}(u); \end{aligned}$$

segue che  $u$  minimizza il funzionale  $\mathcal{J}$  e vale l'uguaglianza se e solo se  $w = 0$ . L'implicazione opposta è analoga.

## 1.2.2 Applicazione alle PDE ellittiche

Il teorema di Lax-Milgram è lo strumento essenziale per dimostrare l'esistenza e l'unicità di soluzioni deboli per equazioni alle derivate parziali ellittiche.

**Definizione 1.2.5** (Ellitticità uniforme).

Fissiamo un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Sia  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ; si dice che  $A$  è uniformemente ellittica con costante  $\nu > 0$  se per ogni  $x \in \Omega$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^d$  vale che

$$\langle \xi^T A(x), \xi \rangle \geq \nu \|\xi\|^2$$

ovvero

$$\sum_{i,j=1}^d A(x)_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \nu \|\xi\|^2.$$

**Corollario 1.2.6.** *Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un aperto limitato,  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  un'applicazione in  $L^\infty(\Omega)$  e uniformemente ellittica con costante  $\nu > 0$  (vedi 1.2.5) e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L^2(\Omega)$ . Esiste un'unica funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  che sia soluzione in senso debole del problema differenziale (1.1). Inoltre, esiste una costante  $C(\Omega; \nu)$  indipendente da  $f$  tale che*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{C} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare tale che

$$\mathcal{A}(u; v) := \int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx.$$

Sia  $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione lineare tale che

$$\mathcal{F}(v) := - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Abbiamo già osservato in 1.2.1 che  $\mathcal{A}$  è una forma bilineare limitata,  $\mathcal{F}$  è un'applicazione lineare e continua con costante di Lipschitz  $\|f\|_{L^2(\Omega)}$  e che una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  è soluzione debole di (1.1) se e solo se

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dall'ipotesi di uniforme ellitticità di  $A$  segue che per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$  vale che

$$\mathcal{A}(v; v) = \int_{\Omega} \langle (\nabla v)A, \nabla v \rangle \, dx \geq \nu \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C\nu \|v\|_{1,\Omega},$$

avendo applicato la disuguaglianza di Poincarè (infatti  $\Omega$  è limitato e la costante  $C$  dipende soltanto da  $\Omega$  e non da  $f$ ). In altri termini, la forma bilineare è coerciva con costante  $C(\nu; \Omega)$ . La tesi segue dal teorema di Lax-Milgram (vedi 1.2.3).  $\square$

### 1.3 L'approssimazione di Galèrkin

Abbiamo mostrato l'esistenza di soluzioni deboli per il problema differenziale con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee (nel caso uniformemente ellittico e globalmente limitato); la dimostrazione non è costruttiva e non dà alcuna informazione sul profilo della soluzione. Vogliamo mostrare che è possibile ridurre il problema ad una successione di problemi ambientati in spazi di dimensione finita, che possiamo risolvere esplicitamente, e ottenere la soluzione come limite delle soluzioni dei problemi approssimanti. Anche in questo caso, mostriamo una procedura molto generale; in una seconda fase, ci concentreremo sullo studio degli operatori ellittici.

Siano dati uno spazio di Hilbert  $\mathbb{H}$ , una forma bilineare  $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e coerciva con costanti  $\gamma, \alpha > 0$  (vedi 1.2.2) e un'applicazione lineare e continua  $\mathcal{F} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lemma 1.3.1** (Cèa).

*Sia  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{H}$  un sottospazio chiuso. Esiste ed è unico un vettore  $w \in \mathbb{W}$  tale che*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w; v) &= \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{W} \\ \|w\|_{\mathbb{H}} &\leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{H}'} \end{aligned} \tag{1.8}$$

*Detto  $u \in \mathbb{H}$  l'unico elemento tale che*

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{H},$$

*vale la stima*

$$\|u - w\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v \in \mathbb{W}} \|u - v\|.$$

*Dimostrazione.* Siccome  $\mathbb{W}$  è un sottospazio chiuso, eredita da  $\mathbb{H}$  la struttura di spazio di Hilbert. Allora l'esistenza di  $w$  e la stima (1.8) seguono dal teorema 1.2.3, così come l'esistenza di  $u$ . Per costruzione, abbiamo che

$$0 = \mathcal{A}(u; v) - \mathcal{A}(w; v) = \mathcal{A}(u - w; v) \quad \forall v \in \mathbb{W}. \tag{1.9}$$

Allora, per ogni  $v \in \mathbb{W}$  vale che

$$\begin{aligned} \alpha \|u - w\|^2 &\leq \mathcal{A}(u - w; u - w) \\ &= \mathcal{A}(u - w; u - (w + v)) \\ &\leq \gamma \|u - w\| \|u - (w + v)\|; \end{aligned}$$

notando che al variare di  $v \in \mathbb{W}$ ,  $v + w$  descrive tutti gli elementi di  $\mathbb{W}$ , otteniamo la tesi.  $\square$

*Osservazione 1.3.2.* Nel caso in cui  $\mathcal{A}$  è anche simmetrica, la relazione (1.9) ha un'interpretazione geometrica: infatti, nelle nostre ipotesi,  $\mathcal{A}$  definisce un prodotto scalare su  $\mathbb{H}$  (che induce una norma equivalente a quella di  $\mathbb{H}$ ). Allora,  $w$  è la proiezione ortogonale di  $u$  sul sottospazio chiuso  $\mathbb{W}$  rispetto al prodotto scalare definito da  $\mathcal{A}$ . Questa relazione è nota come *ortogonalità di Galèrkin*.

*Osservazione 1.3.3.* Il lemma di Cèa (vedi 1.3.1) è particolarmente significativo nel caso in cui  $\mathbb{W}$  sia un sottospazio di dimensione finita (in questo caso,  $\mathbb{W}$  è sempre chiuso). Sia  $\{w_1; \dots; w_n\}$  una base di  $\mathbb{W}$ ; per la linearità degli operatori  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{F}$ , un vettore  $w \in \mathbb{W}$  è tale che

$$\mathcal{A}(w; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{W}$$

se e solo se

$$\mathcal{A}(w; w_i) = \mathcal{F}(w_i) \quad \forall i \in \{1; \dots; n\}. \quad (1.10)$$

Scriviamo un generico vettore  $w \in \mathbb{W}$  come combinazioni lineari degli elementi della base, cioè

$$w = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i;$$

allora  $w$  soddisfa la relazione (1.10) se e solo se

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \mathcal{A}(w_i; w_j) = \mathcal{F}(w_j) \quad \forall j \in \{1; \dots; n\}. \quad (1.11)$$

Siano  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice tale che

$$A_{i,j} := \mathcal{A}(w_j; w_i),$$

$\mathbb{F} \in \mathbb{R}^n$  il vettore tale che

$$F_j := \mathcal{F}(w_j),$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$  il vettore delle coordinate di  $w$  rispetto alla base  $\{w_1; \dots; w_n\}$ ;  $w$  soddisfa la relazione (1.11) se e solo se

$$\mathbb{A}\xi = \mathbb{F}. \quad (1.12)$$

Dunque, la ricerca di  $w$  è equivalente alla risoluzione di un sistema lineare;  $\mathbb{A}$  è chiamata *matrice di rigidità*. Per il teorema di Lax-Milgram (vedi 1.2.3), il sistema (1.12) ha sempre soluzione, pertanto la matrice  $\mathbb{A}$  è invertibile. Possiamo verificare che  $\mathbb{A}$  è definita positiva; dato  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , sia  $w = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i$ ; dalla coercività di  $\mathcal{A}$  segue che

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}\xi, \xi \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i A_{i,j} \xi_j = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \mathcal{A}(w_j; w_i) \xi_j \\ &= \mathcal{A}(w; w) \geq \alpha \|w\|^2 \geq \alpha C |\xi|^2, \end{aligned}$$

dove  $C > 0$  è una costante indipendente da  $\xi$  legata al fatto che il passaggio in coordinate è un'applicazione lineare tra spazi di dimensione finita, pertanto è continua.

Precisiamo anche che, se  $\mathcal{A}$  è simmetrica, la matrice  $\mathbb{A}$  è simmetrica; in tal caso, tutti i suoi autovalori sono strettamente positivi.

Sia data una famiglia  $(\mathbb{V}_h)_{h>0}$  di sottospazi di dimensione finita; per ogni  $h > 0$  sia  $u_h$  l'unico elemento in  $\mathbb{V}_h$  tale che

$$\mathcal{A}(u_h; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_h;$$

sia  $u \in \mathbb{H}$  l'unico elemento tale che

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_h.$$

L'esistenza e l'unicità di  $(u_h)_{h>0}$  e di  $u$  seguono dal teorema di Lax-Milgram (vedi 1.2.3). Se i sottospazi  $\mathbb{V}_h$  danno una "buona approssimazione" di  $\mathbb{H}$ , è lecito sperare che  $u_h \rightarrow u$  in qualche senso.

**Teorema 1.3.4.** *Nella notazione appena introdotta, supponiamo che esista un denso  $\mathcal{V}$  in  $\mathbb{H}$  tale che per ogni  $v \in \mathcal{V}$  vale che*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\| \right) = 0.$$

Allora il metodo di Galërkin è convergente, cioè la successione  $(u_h)_h$  converge a  $u$  rispetto alla norma di  $\mathbb{H}$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $v \in \mathcal{V}$ ; dal lemma di Cèa (vedi 1.3.1), segue che

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\| \\ &\leq \frac{\gamma}{\alpha} [\|u - v\| + \|v_h - v\|] \\ &= \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\| + \frac{\gamma}{\alpha} \|v_h - v\|. \end{aligned}$$

Passando al limite superiore, troviamo che

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|;$$

essendo  $\mathcal{V}$  denso in  $\mathbb{H}$ , deduciamo che

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| \leq 0.$$

□

*Osservazione 1.3.5.* Nel contesto del teorema 1.3.4, supponiamo che  $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  sia una base di Hilbert di  $\mathbb{V}$ ; è naturale scegliere come sottospazio

$$\mathbb{V}_n := \text{Span}(e_1; \dots; e_n)$$

e come sottoinsieme denso

$$\mathcal{V} := \text{Span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si verifica facilmente che  $\mathcal{V}$  verifica le ipotesi del teorema 1.3.4.

# Capitolo 2

## Metodo degli elementi finiti

In questo capitolo, denoteremo con  $\Omega$  un aperto connesso limitato con bordo lipschitziano e tale che  $\bar{\Omega}$  sia unione finita di poliedri; in dimensione 2, per esempio,  $\partial\Omega$  è una spezzata. Denoteremo con  $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)$  lo spazio vettoriale dei polinomi nelle variabili  $x_1, \dots, x_d$  di grado al più  $k$  nelle variabili  $x_1, \dots, x_d$ .

Vogliamo decomporre  $\Omega$  in  $d$ -simplessi (triangoli, se  $d = 2$ ) e capire come questa decomposizione permetta di approssimare le funzioni di Sobolev in  $\Omega$ . La scelta dei  $d$ -simplessi non è l'unica possibile; tuttavia, ci limitiamo a questo caso per semplicità. Analizzeremo nei dettagli il caso bidimensionale e quello tridimensionale. Precisiamo anche che la ricerca di elementi finiti per produrre "buone partizioni" dei domini è un problema molto importante nelle questioni di discretizzazione di PDE.

### 2.1 Elementi finiti triangolari

**Definizione 2.1.1** ( $d$ -simpleso di riferimento).

Si chiama  $\hat{K}$  il  $d$ -simpleso unitario in  $\mathbb{R}^d$ , ovvero il simpleso avente per vertici l'origine e i versori della base canonica.

*Osservazione 2.1.2.* Se  $d = 2$ , il 2-simpleso unitario è il triangolo di vertici  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ . Se  $d = 3$ , il 3-simpleso unitario è il tetraedro di vertici  $(0; 0; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(0; 0; 1)$ .

**Definizione 2.1.3** (Triangolazione).

Una famiglia finita  $\mathcal{T}_h$  di  $d$ -simplessi è detta triangolazione di  $\Omega$  di diametro  $h$  se valgono le seguenti proprietà:

- ogni elemento  $K$  in  $\mathcal{T}_h$  è immagine di una mappa affine  $T_K : \hat{K} \rightarrow K$  che denoteremo come  $T_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$ , con  $B_K$  che è una matrice invertibile;
- se  $K_1, K_2$  sono elementi distinti di  $\mathcal{T}_h$ , allora  $K_1^\circ \cap K_2^\circ = \emptyset$ ;
- se  $K_1, K_2$  sono elementi distinti di  $\mathcal{T}_h$ , allora  $K_1 \cap K_2$  è una faccia, un lato o un vertice comune a  $K_1$  e  $K_2$ ;
- $\text{diam}(K) \leq h$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Le figure 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 mostrano delle triangolazioni ammissibili.

Nel seguito supporremo sempre l'esistenza di una triangolazione  $\mathcal{T}_h$  per  $\Omega$ .

**Definizione 2.1.4** (Polinomi a tratti).

Fissiamo  $k \in \mathbb{N}^+$ ; denotiamo con

$$\mathbb{X}_h^k := \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

$\mathbb{X}_h^k$  è chiamato sottospazio degli elementi finiti triangolari di grado  $k$  relativi alla triangolazione  $\mathcal{T}_h$ .

**Proposizione 2.1.5.** *Una funzione  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è in  $H^1(\Omega)$  se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

- $v|_K \in H^1(K)$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$ ;
- per ogni faccia comune  $F = K_1 \cap K_2$  le tracce di  $v|_{K_1}$  e di  $v|_{K_2}$  su  $F$  coincidono.

*Dimostrazione.* Se  $u \in H^1(\Omega)$ , le condizioni richieste sono ovviamente verificate.

Per quanto riguarda l'altra implicazione, ragionando per induzione è immediato ricondursi al caso in cui  $\mathcal{T}_h = \{K_1; K_2\}$  e  $K_1, K_2$  hanno una faccia in comune, diciamo  $F$ . Definiamo

$$w(x) := \begin{cases} \nabla v|_{K_1}(x) & x \in K_1; \\ \nabla v|_{K_2}(x) & x \in K_2. \end{cases}$$

Ovviamente,  $w$  è una funzione in  $L^2(\Omega)$ ; data  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , utilizzando la formula di Gauss-Green (che vale con la traccia delle funzioni di Sobolev), si trova che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{K_1} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{K_2} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \int_{K_1} \varphi \frac{\partial v|_{K_1}}{\partial x_i} dx + \int_F v|_{K_1 \cap F} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \nu_1^i d\mathcal{H}^{d-1} \\ &\quad - \int_{K_2} \varphi \frac{\partial v|_{K_2}}{\partial x_i} dx + \int_F v|_{K_2 \cap F} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \nu_2^i d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= - \int_{\Omega} \varphi w_i dx, \end{aligned}$$

avendo posto  $\nu_1^i$  l' $i$ -esima componente delle normale esterna a  $K_1$  su  $F$  e  $\nu_2^i$  l' $i$ -esima componente delle normale esterna a  $K_2$  su  $F$ ; notiamo che i termini di bordo si cancellano perchè le tracce di  $v|_{K_1}$  e di  $v|_{K_2}$  su  $F$  coincidono per ipotesi e perchè  $\nu_1^i = -\nu_2^i$ .  $\square$

**Corollario 2.1.6.** *Per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ , lo spazio  $\mathbb{X}_h^k$  è contenuto in  $H^1(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalla definizione 2.1.4 e dalla proposizione 2.1.5.  $\square$

## 2.2 Operatore di interpolazione

Sia  $k \in \mathbb{N}^+$  fissato;  $\mathbb{X}_h^k$  è evidentemente uno spazio vettoriale di dimensione finita. Vogliamo trovare una base di tale spazio che sia facile da descrivere.

**Teorema 2.2.1** (Nodi di interpolazione).

*Esistono dei punti  $\{p_1; \dots; p_{N_h}\}$  detti nodi interpolazione tali che la mappa di valutazione in  $p_1, \dots, p_{N_h}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali tra  $\mathbb{X}_h^k$  e  $\mathbb{R}^{N_h}$ .*

*Dimostrazione.* Non vogliamo dare una dimostrazione completa di questo teorema; ci limitiamo al caso in cui  $d = 2$  e  $k = 1, 2, 3$ , in cui la costruzione è del tutto esplicita.

**1)** Supponiamo  $k = 1$ . In questo caso, possiamo scegliere come nodi di interpolazione i vertici dei triangoli. L'applicazione di valutazione in tali nodi è certamente ben definita ed è lineare. Per l'iniettività, è sufficiente notare che se un polinomio in due variabili di grado 1 si annulla in tre punti, allora tale polinomio è nullo. Per la surgettività, invece, data una  $N^h$ -upla  $\eta$ , esiste una funzione  $v \in \mathbb{X}_h^1$  tale che  $v(p_i) = a_i$ . Per ciascun triangolo  $K$ , esiste un polinomio in due variabili di grado 1 che assume i valori prescritti nei vertici del triangolo che denotiamo con  $v_K$ ; notiamo che la giunzione avviene in maniera continua, perchè due polinomi in due variabili di grado 1 che coincidono in due punti, sono uguali nel segmento congiungente i due punti.

**2)** Se  $k = 2$ , bisogna prendere 6 nodi di interpolazione per ciascun triangolo; con ragionamenti del tutto analoghi al caso precedente, si verifica che è possibile scegliere come nodi di interpolazione i vertici dei triangoli e i punti medi dei lati.

**3)** Se  $k = 3$ , bisogna scegliere 10 nodi di interpolazione per ciascun triangolo; argomentando come in precedenza, si verifica che è possibile scegliere come nodi di interpolazione i vertici dei triangoli, due punti intermedi in ciascun lato e il baricentro di ogni triangolo.  $\square$

**Corollario 2.2.2** (Shape functions).

Siano  $\{p_1; \dots; p_{N_h}\}$  i nodi di interpolazione relativi alla triangolazione  $\mathcal{T}_h$  e al grado  $k$ , come nel teorema 2.2.1. Per ogni  $i \in \{1; \dots; N_h\}$ , sia  $\varphi_i \in \mathbb{X}_h^k$  tale che

$$\varphi_i(p_j) := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Le funzioni  $\{\varphi_1; \dots; \varphi_{N_h}\}$  formano una base di  $\mathbb{X}_h^k$  e sono chiamate *shape functions*.

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dal teorema 2.2.1.  $\square$

**Definizione 2.2.3** (Operatore di interpolazione).

Siano  $\{p_1; \dots; p_{N_h}\}$  i nodi di interpolazione relativi alla partizione  $\mathcal{T}_h$  e al grado  $k$ ; siano  $\{\varphi_1; \dots; \varphi_{N_h}\}$  le relative shape functions (vedi 2.2.1 e 2.2.2). Si chiama operatore di interpolazione relativo alla partizione  $\mathcal{T}_h$  e al grado  $k$  la mappa  $\pi_h^k : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{X}_h^k$  tale che

$$\pi_h^k(v) := \sum_{i=1}^{N_h} v(p_i) \varphi_i.$$

*Osservazione 2.2.4.* Nel contesto della definizione 2.2.3,  $\pi_h^k(v)$  è l'unica funzione in  $\mathbb{X}_h^k$  che coincide con  $v$  nei nodi di interpolazione.

Possiamo anche definire un operatore di interpolazione locale.

**Definizione 2.2.5** (Operatore di interpolazione locale).

Fissiamo un elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ . Siano  $\{p_1; \dots; p_{N_h}\}$  i nodi di interpolazione relativi alla partizione  $\mathcal{T}_h$  e al grado  $k$  e  $\{\varphi_1; \dots; \varphi_{N_h}\}$  le relative shape functions (vedi 2.2.1 e 2.2.2). Denotiamo con  $\{p_{i_1}; \dots; p_{i_m}\}$  l'insieme dei nodi di interpolazione appartenenti a  $K$ . L'operatore  $\pi_K^k : C(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)$  tale che

$$\pi_K^k(v) := \sum_{j=1}^m v(p_{i_j}) \varphi_{i_j}$$

è chiamato operatore di interpolazione locale in  $K$  relativo al grado  $k$ .

*Osservazione 2.2.6.* Dalle definizioni 2.2.3 e 2.2.5 segue banalmente che per ogni  $v \in C(\overline{\Omega})$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$  vale che

$$(\pi_h^k(v))|_K = \pi_K^k(v).$$

## 2.2.1 Stima dell'errore di interpolazione

Vogliamo stimare l'errore di interpolazione  $v - \pi_h^k(v)$  in termini di qualche norma (o seminorma) di Sobolev. La strategia è quella di ottenere stime nel  $d$ -simpleso di riferimento  $\hat{K}$  e poi di derivare stime analoghe in ogni elemento  $K$  di  $\mathcal{T}_h$ . Abbiamo definito gli operatori di interpolazione sulle funzioni continue; ricordiamo che se  $d = 2, 3$  lo spazio  $H^s(\Omega)$  si immerge in maniera continua in  $C(\overline{\Omega})$  per  $s \geq 2$ : in tal caso, ha senso definire gli operatori di interpolazione su  $H^s(\Omega)$  (oppure  $H^s(K)$  nel caso locale). Abbiamo anche verificato che  $\mathbb{X}_h^k \subseteq H^1(\Omega)$  (vedi 2.1.6); per costruire un'interpolazione in  $H^2(\Omega)$  bisogna "raccordare" in maniera continua anche le derivate prime. In ogni caso, ci limiteremo all'interpolazione in  $H^1(\Omega)$ . Per queste considerazioni, se  $d = 2, 3$  e  $s \geq 2$  ha senso pensare gli operatori di interpolazione come applicazioni lineari da  $H^s$  in  $H^1$  e cercare stime in questi spazi; lavoreremo sotto queste assunzioni su  $d$  ed  $s$ . Precisiamo che alcuni dei seguenti risultati possono essere generalizzati; tuttavia, avendo in mente il nostro obiettivo, ne daremo una formulazione più semplice ma sufficiente ai nostri scopi.

**Lemma 2.2.7.** *Sia  $K \in \mathcal{T}_h$  un elemento fissato; denotiamo con  $T_K : \hat{K} \rightarrow K$  la mappa affine tale che  $T_K(\hat{x}) = B_K x + b_K$ , con  $B_K$  una matrice invertibile (vedi 2.1.3). Fissiamo  $l \in \mathbb{N}^+$ ; per ogni  $v \in H^1(K)$ , la funzione  $\hat{v} := v \circ T_K$  è in  $H^1(\hat{K})$  ed esiste una costante  $C(d; l)$  indipendente da  $v$  e da  $K$  tale che vale che*

$$|\hat{v}|_{l; \hat{K}} \leq C \|B_K\|^l |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{l; K}, \quad (2.1)$$

$$|v|_{l; K} \leq C \|B_K^{-1}\|^l |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{l; \hat{K}}. \quad (2.2)$$

*Dimostrazione.* Svolgiamo la dimostrazione solo nel caso in cui  $l = 1$ ; il caso generale si tratta in maniera analoga, con alcune complicazioni nei calcoli. Data  $v \in H^1(K)$ ,  $\hat{v} \in H^1(\hat{K})$  perchè la composizione di una funzione in  $H^1$  con una affine è ancora una funzione in  $H^1$  e vale la chain rule: allora

$$\nabla \hat{v}(\hat{x}) = [(\nabla v) \circ T_K](\hat{x}) B_K.$$

Passando alla norma euclidea, abbiamo che

$$|\nabla \hat{v}(\hat{x})| \leq \|B_K\| |(\nabla v) \circ T_K(\hat{x})|,$$

usando la definizione di norma matriciale indotta. Deduciamo che

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{1; \hat{K}}^2 &= \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 dx \\ &\leq \int_{\hat{K}} \|B_K\|^2 |(\nabla v) \circ T_K|^2 dx \\ &= \|B_K\|^2 \int_K |\nabla v|^2 |\det(B_K^{-1})| dy \\ &= |\det(B_K)|^{-1} \|B_K\|^2 |v|_{1; K}^2. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la stima (2.1); per ottenere (2.2) si procede in maniera analoga scambiando  $K$  con  $\hat{K}$  e  $T_K$  con  $T_K^{-1}$ .  $\square$

Adesso vogliamo stimare  $\|B_K\|$  e  $\|B_K^{-1}\|$  in termini di qualche quantità geometrica legata a  $K$ .

**Definizione 2.2.8.** Dato  $K \in \mathcal{T}_h$ , denotiamo con

$$h_K := \text{diam}(K),$$

$$\rho_K := \sup\{\text{diam}(S) \mid S \subseteq K \text{ è una palla}\}.$$

Denotiamo con  $\hat{h}$  e  $\hat{\rho}$  le stesse quantità relative al  $d$ -simpleso di riferimento  $\hat{K}$ .

**Lemma 2.2.9.** *Nelle notazioni del lemma 2.2.7, vale che*

$$\|B_K\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}}, \quad (2.3)$$

$$\|B_K^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K}. \quad (2.4)$$

*Dimostrazione.* Per definizione di norma matriciale indotta (e per continuità), vale che

$$\|B_K\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup\{|B_K\xi| \mid |\xi| < \hat{\rho}\}.$$

Sia  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tale che  $|\xi| < \hat{\rho}$ ; per costruzione esistono due punti  $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{K}$  tali che  $\hat{x} - \hat{y} = \xi$ . Siccome

$$B_K\xi = T_K\hat{x} - T_K\hat{y}$$

e  $K$  è convesso, deduciamo che

$$|B_K\xi| \leq h_K;$$

allora otteniamo la stima (2.3); per la disuguaglianza (2.4) si ragiona allo stesso modo.  $\square$

**Lemma 2.2.10** (Bramble-Hilbert).

*L'operatore  $\pi_{\hat{K}}^k : H^s(\hat{K}) \rightarrow H^1(\hat{K})$  è lineare e continuo; inoltre, per ogni  $\hat{v} \in H^s(\hat{K})$  vale che*

$$\|\hat{v} - \pi_{\hat{K}}^k(\hat{v})\|_{1;\hat{K}} \leq \|I - \pi_{\hat{K}}^k\|_{\mathcal{L}(H^s(\hat{K});H^1(\hat{K}))} \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{s;\hat{K}}. \quad (2.5)$$

*Dimostrazione.* Essendo  $s \geq 2$  e  $d = 2, 3$ , possiamo ben definire  $\pi_{\hat{K}}^k : H^s(\hat{K}) \rightarrow H^1(\hat{K})$ ; per il teorema di immersione in  $C(\hat{K})$ , possiamo stimare la norma  $L^\infty$  di una funzione in  $H^s(\hat{K})$  con la norma di Sobolev  $\|\cdot\|_{s;\hat{K}}$ ; segue che  $\pi_{\hat{K}}^k$  è continuo come operatore da  $H^s(\hat{K})$  in  $H^1(\hat{K})$ ; essendo  $s \geq 2$ , anche l'identità è continua da  $H^s(\hat{K})$  in  $H^1(\hat{K})$ . Denotiamo con  $\hat{\lambda} := I - \pi_{\hat{K}}^k$ . Osserviamo che  $\hat{\lambda}$  si annulla sui polinomi in  $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)$  per costruzione. Data  $\hat{v} \in H^s(\hat{K})$ , per ogni  $\hat{p} \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)$  vale che

$$\|\hat{\lambda}(\hat{v})\|_{1;\hat{K}} = \|\hat{\lambda}(\hat{v} + \hat{p})\| \leq \|\hat{\lambda}\|_{\mathcal{L}(H^s(\hat{K});H^1(\hat{K}))} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{s;\hat{K}},$$

da cui segue immediatamente la disuguaglianza (2.5).  $\square$

**Lemma 2.2.11** (Deny-Lions).

Per ogni  $l \in \mathbb{N}$  esiste una costante  $C(d; l; \hat{K})$  tale che per ogni  $\hat{v} \in H^{l+1}(\hat{K})$  vale che

$$\inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_l(\mathbb{R}^d)} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{l+1; \hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{l+1; \hat{K}}. \quad (2.6)$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto mostriamo che esiste una costante  $C(d; l; \hat{K}) > 0$  tale che per ogni  $\hat{v} \in H^{l+1}(\hat{K})$  vale che

$$\|\hat{v}\|_{l+1; \hat{K}} \leq C \left\{ |\hat{v}|_{l+1; \hat{K}} + \sum_{|\alpha| \leq l} \left( \int_{\hat{K}} D^\alpha \hat{v} \, dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Procediamo per assurdo; supponiamo che esista una successione  $(\hat{v}_j)_j \subseteq H^{l+1}(\hat{K})$  tale che

$$\|\hat{v}_j\|_{l+1; \hat{K}} = 1, \quad |\hat{v}_j|_{l+1; \hat{K}} + \sum_{|\alpha| \leq l} \left( \int_{\hat{K}} D^\alpha \hat{v}_j \, dx \right)^2 \leq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Ricordiamo che l'immersione  $H^{l+1}(\hat{K}) \rightarrow H^l(\hat{K})$  è compatta; allora a meno di passare a sottosuccessioni, possiamo assumere che  $\hat{v}_j \rightarrow \hat{w}$  fortemente in  $H^l(\hat{K})$ . Nel nostro caso, però,  $|\hat{v}_j|_{l+1; \hat{K}} \rightarrow 0$ ; deduciamo che  $(\hat{v}_j)_j$  è una successione di Cauchy in  $H^{l+1}(\hat{K})$ ; per completezza, abbiamo che  $\hat{w} \in H^{l+1}(\hat{K})$  e  $\hat{v}_j \rightarrow \hat{w}$  fortemente in  $H^{l+1}(\hat{K})$ . Abbiamo anche che  $|\hat{w}|_{l+1; \hat{K}} = 0$  e  $\|\hat{w}\|_{l+1; \hat{K}} = 1$ ; per il lemma di Du Bois-Reymond deduciamo che  $\hat{w}$  è un polinomio di grado al più  $l$ . Siccome vale anche che

$$\int_{\hat{K}} D^\alpha \hat{w} \, dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq l,$$

è immediato dedurre che  $\hat{w} = 0$ . Questo è assurdo perchè  $\|\hat{w}\|_{l+1; \hat{K}} = 1$ . Abbiamo ottenuto la stima (2.7).

Fissiamo  $\hat{v} \in H^{l+1}(\hat{K})$ . Esiste un unico polinomio  $\hat{q} \in \mathbb{P}_l(\mathbb{R}^d)$  tale che

$$\int_{\hat{K}} D^\alpha \hat{q} \, dx = - \int_{\hat{K}} D^\alpha \hat{v} \, dx;$$

infatti, se scriviamo un generico polinomio  $\hat{p} \in \mathbb{P}_l(\mathbb{R}^d)$  come

$$\hat{p}(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha x^\alpha,$$

il numero di parametri da determinare coincide con quello delle condizioni da imporre e si mostra facilmente per induzione su  $l$  che il sistema lineare che si ottiene ha sempre una soluzione unica. Applichiamo la stima (2.7) alla funzione  $\hat{v} + \hat{q}$ ; otteniamo che

$$\inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_l(\mathbb{R}^d)} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{l+1; \hat{K}} \leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{l+1; \hat{K}} \leq C |\hat{v} + \hat{q}|_{l+1; \hat{K}} = C |\hat{v}|_{l+1; \hat{K}},$$

che è la disuguaglianza (2.6). □

Possiamo finalmente presentare il risultato principale di questa sezione.

**Teorema 2.2.12.** *Siano  $k \in \mathbb{N}^+$  e  $l = \min\{k; s - 1\} \geq 1$ . Esiste una costante  $C(\hat{K}; \pi_{\hat{K}}^k; k; s; d) > 0$  tale che per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$  per ogni  $v \in H^{l+1}(K)$  vale che*

$$|v - \pi_K^k(v)|_{1;K} \leq C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K} |v|_{l+1;K}, \quad (2.8)$$

dove  $h_K$  e  $\rho_K$  sono stati definiti in 2.2.8.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $K \in \mathcal{T}_h$  e  $v \in H^{l+1}(K)$  (notiamo che  $l + 1 \geq 2$ ). Supponiamo che  $K = T_K(\hat{K})$  e  $T_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$ , con  $B_K$  una matrice invertibile. Applicando i lemmi 2.2.7 e 2.2.9, si ha che

$$|v - \pi_K^k(v)|_{1;K} \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K} |\det(B_K)|^{\frac{1}{2}} |\hat{v} - \pi_{\hat{K}}^k(\hat{v})|,$$

avendo posto  $\hat{v} := v \circ T_K \in H^1(\hat{K})$ . Dall lemma di Bramble-Hilbert (vedi 2.2.10) segue che esiste una costante  $C > 0$  tale che per ogni  $\hat{v} \in H^s(\hat{K})$  vale che

$$|\hat{v} - \pi_{\hat{K}}^k(\hat{v})|_{1;\hat{K}} \leq C \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_i(\mathbb{R}^d)} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{s;\hat{K}}.$$

Supponiamo  $s - 1 < k$ ; in tal caso, si ha  $l = s - 1$ . A meno di rinominare la costante  $C$  (indipendente da  $v$  e da  $K$ ) si ha che per ogni  $v \in H^{l+1}(v)$ , posto  $\hat{v} = v \circ T_K \in H^{l+1}(\hat{K})$ , vale che

$$|\hat{v} - \pi_{\hat{K}}^k(\hat{v})|_{1;\hat{K}} \leq C \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_i(\mathbb{R}^d)} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{s;\hat{K}} \quad (2.9)$$

$$\leq C |\hat{v}|_{l+1;\hat{K}} \quad (2.10)$$

$$\leq C \|B_K\|^{l+1} |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{l+1;K} \quad (2.11)$$

$$\leq C \frac{h_K^{l+1}}{\hat{\rho}^{l+1}} |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{l+1;K}. \quad (2.12)$$

In (2.9) abbiamo usato il lemma di Bramble-Hilbert (vedi 2.2.10), in (2.10) il lemma di Deny-Lions (vedi 2.2.11), in (2.11) il lemma 2.2.7 e in (2.12) il lemma 2.2.9. Segue che

$$|v - \pi_K^k(v)|_{1;K} \leq \frac{\hat{h} h_K^{l+1}}{\rho_K \hat{\rho}^{l+1}} |v|_{l+1;K} = C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K} |v|_{l+1;K}.$$

Se  $s - 1 \geq k$ , allora abbiamo  $k = l$ ; applicando il lemma di Bramble-Hilbert (vedi 2.2.10) all'operatore lineare e continuo  $I - \pi_{\hat{K}}^k : H^{k+1}(\hat{K}) \rightarrow H^1(\hat{K})$ , otteniamo che per ogni  $\hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K})$  vale che

$$|\hat{v} - \pi_{\hat{K}}^k(\hat{v})|_{1;\hat{K}} \leq C \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1;\hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{l+1;\hat{K}}.$$

La tesi segue come nel caso precedente.  $\square$

Possiamo finalmente stimare l'errore di approssimazione globale.

**Definizione 2.2.13** (Triangolazioni regolari).

Una famiglia di triangolazioni  $(\mathcal{T}_h)_h$  si dice regolare se esiste  $\sigma \geq 1$  tale che

$$\sup_{h>0} \left( \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \right) \leq \sigma.$$

**Teorema 2.2.14.** *Sia data una famiglia regolare di triangolazioni  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ ; siano  $s \geq 2$  e  $k \in \mathbb{N}^+$ . Poniamo  $l = \min\{k; s - 1\} \geq 1$ . Esiste una costante  $C > 0$  indipendente da  $h$  tale che per ogni  $v \in H^s(\Omega)$  vale che*

$$|v - \pi_h^k(v)|_{1;\Omega} \leq Ch^l |v|_{l+1;\Omega}. \quad (2.13)$$

*Dimostrazione.* Dati  $h > 0$  e  $v \in H^s(\Omega)$ , possiamo localizzare la stima:

$$|v - \pi_h^k(v)|_{1;\Omega} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \pi_h^k(v)|_{1;K}.$$

Fissato  $K \in \mathcal{T}_h$ , dal teorema 2.2.12 e dall'ipotesi di regolarità di  $\mathcal{T}_h$  deduciamo che

$$\begin{aligned} |v - \pi_h^k(v)|_{1;K} &\leq C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K} |v|_{l+1;K} \\ &\leq Ch_K^{l+1} \sigma h_K^{-1} |v|_{l+1;K} \\ &= Ch^l |v|_{l+1;K}. \end{aligned}$$

Notiamo che la costante  $C$  (che cambia da linea a linea) è indipendente da  $v, h, K$ ; sommando su  $K \in \mathcal{T}_h$ , si ottiene la disuguaglianza (2.13).  $\square$

**Corollario 2.2.15.** *Nel contesto del teorema 2.2.14, esiste una costante  $C > 0$  indipendente da  $h$  tale che per ogni  $v \in H^s(\Omega)$  vale che*

$$\|v - \pi_h^k(v)\|_{1;\Omega} \leq Ch^l |v|_{l+1;\Omega}. \quad (2.14)$$

*Dimostrazione.* La tesi segue immediatamente dal teorema 2.2.14 e dalla disuguaglianza di Poincarè.  $\square$

# Capitolo 3

## Metodo di Galärkin agli elementi finiti

Abbiamo presentato in un contesto astratto il metodo di Galärkin e abbiamo introdotto lo spazio degli elementi finiti triangolari; abbiamo definito un operatore di interpolazione, di cui abbiamo dato stime negli spazi di Sobolev opportuni. Vogliamo mostrare come questi metodi siano efficaci per l'approssimazione di soluzioni deboli dei problemi ellittici con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee.

Fissiamo  $d = 2, 3$ ,  $s \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un aperto connesso limitato con bordo lipschitziano, che sia unione finita di poliedri. Supponiamo che sia data una famiglia di triangolazioni  $(\mathcal{T}_h)_h$  per  $\Omega$ . Sia data  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  di classe  $L^\infty(\Omega)$  e uniformemente ellittica in  $\Omega$  con costante  $\nu$ ; sia  $f \in L^2(\Omega)$ . Denotiamo con  $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare limitata e coerciva definita da  $A$  e con  $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione lineare e continua definita da  $f$ , cioè

$$\mathcal{A}(u; v) = \int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx, \quad \mathcal{F}(v) = - \int_{\Omega} f v dx.$$

Per quanto mostrato in 1.2.6, esiste un'unica  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\mathcal{A}(u; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Definizione 3.0.1.** Denotiamo con

$$\mathbb{V}_h := \mathbb{X}_h^k \cap H_0^1(\Omega) = \{v_h \in \mathbb{X}_h^k \mid v_h(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega\}.$$

Ricordiamo che  $\mathbb{V}_h$  è un sottospazio di dimensione finita di  $H_0^1(\Omega)$ , quindi è chiuso. Per il lemma di Cèa (vedi 1.3.1), esiste un'unica  $u_h \in \mathbb{V}_h$  tale che

$$\mathcal{A}(u_h; v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_h;$$

inoltre vale la stima

$$\|u - u_h\|_{1;\Omega} \leq C \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{1;\Omega} \tag{3.1}$$

per una costante  $C(A; \Omega, f)$ , indipendente da  $u$  e da  $h$ .

### 3.1 Approssimazione di soluzioni deboli

Possiamo finalmente mostrare che le soluzioni dei problemi finito dimensionali convergono alla soluzione del problema su  $H_0^1(\Omega)$ .

**Teorema 3.1.1.** *Con la notazione introdotta, la successione  $(u_h)_h$  converge ad  $u$  nella norma di  $H_0^1(\Omega)$ ; in altri termini, il metodo di Galèrkin con l'approssimazione agli elementi finiti triangolari è convergente. Inoltre, se la soluzione esatta  $u \in H^s(\Omega)$ , posto  $l = \min(k; s - 1)$ , esiste una costante  $C > 0$  tale che per ogni  $h > 0$  vale che*

$$|u - u_h|_{1;\Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1;\Omega}.$$

*Dimostrazione.* Notiamo che per ogni  $v \in C_c^\infty(\Omega)$  vale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|v - v_h\|_{1;\Omega} \right) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|v - \pi_h^k(v)\|_{1;\Omega} = 0,$$

per il corollario 2.2.15. Siccome  $C_c^\infty(\Omega)$  è denso in  $H_0^1(\Omega)$ , possiamo applicare il teorema 1.3.4 per dedurre che  $u_h \rightarrow u$  in norma  $H_0^1(\Omega)$ . Supponiamo che  $u \in H^s(\Omega)$  (ricordiamo che stiamo assumendo  $s \geq 2$ ); per il teorema di immersione di Sobolev ( $d = 2, 3$ ), abbiamo che  $u \in C^0(\Omega)$ , pertanto la funzione  $\pi_h^k(u)$  è ben definita per ogni  $h > 0$ . Notiamo che  $\pi_h^k \in \mathbb{V}_h$ : infatti è polinomiale a tratti, continua e si annulla su  $\partial\Omega$ . Abbiamo provato nel teorema 2.2.14 che esiste una costante  $C$  tale che per ogni  $h > 0$  vale che

$$|u - \pi_h^k(u)|_{1;\Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1;\Omega}$$

Ricordando che

$$\|u - u_h\|_{1;\Omega} \leq C \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{1;\Omega}$$

per una costante  $C(A; \Omega, f)$  indipendente da  $u$  e da  $h$ , deduciamo la tesi.  $\square$

## 3.2 Aspetti algoritmici

Eseguendo l'approssimazione agli elementi finiti, l'incognita  $u_h \in \mathbb{V}_h$  è univocamente determinata dai valori puntuali nei nodi di interpolazione  $\{p_1; \dots; p_{N_h}\}$ . Data la base di shape functions  $\{\varphi_1; \dots; \varphi_{N_h}\}$ , possiamo scrivere

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_h(p_j) \varphi_j.$$

Denotiamo  $\xi_{fe}$  il vettore in  $\mathbb{R}^{N_h}$  tale che

$$(\xi_{fe})_j := u_h(p_j),$$

$\mathbb{A}_{fe}$  in  $\mathbb{R}^{N_h \times N_h}$  tale che

$$(\mathbb{A}_{fe})_{i,j} := \mathcal{A}(\varphi_j; \varphi_i) = \int_{\Omega} \langle (\nabla \varphi_j) A, \nabla \varphi_i \rangle dx,$$

$\mathbb{F}_{fe}$  il vettore in  $\mathbb{R}^d$  tale che

$$(\mathbb{F}_{fe})_j := \mathcal{F}(\varphi_j) = - \int_{\Omega} f \varphi_j dx.$$

Allora  $u_h$  è univocamente determinato dalla condizione

$$\mathbb{A}_{fe} \xi_{fe} = \mathbb{F}_{fe}.$$

Abbiamo già osservato (vedi 1.3.3) che  $\mathbb{A}_{fe}$  è una matrice definita positiva e che, se  $\mathcal{A}$  è simmetrica, allora anche  $\mathbb{A}_{fe}$  è simmetrica. Queste proprietà valgono in generale per il metodo di Galërkin; ciò che è peculiare dell'approssimazione con gli elementi finiti è che la matrice  $\mathbb{A}_{fe}$  è sparsa: infatti, le funzioni  $\varphi_i, \varphi_j$  hanno "quasi sempre" supporti disgiunti; in ogni caso, i loro supporti sono "molto piccoli" rispetto a  $\Omega$ : quando il parametro  $h$  (che indica la taglia degli elementi della griglia in cui si suddivide  $\Omega$ ) è vicino a zero, il numero di nodi di interpolazione aumenta e i supporti delle shape functions diventano piccoli. Naturalmente, la struttura della matrice  $\mathbb{A}_{fe}$  dipende profondamente da come si sceglie di numerare i nodi di interpolazione; in ogni caso, sono a disposizione metodi molto efficaci per la risoluzione di sistemi lineari con matrici definite positive, simmetriche e sparse; inoltre è possibile ottenere  $\mathbb{A}_{fe}$  con ottime proprietà di struttura.

### 3.2.1 Comportamento asintotico del numero di condizionamento

Vogliamo dare una stima asintotica del numero di condizionamento (rispetto alla norma matriciale indotta dalla norma euclidea) della matrice  $\mathbb{A}_{fe}$  in relazione alla taglia  $h$  della triangolazione. Limitiamoci al caso in cui  $A$  è una forma bilineare simmetrica; allora anche  $\mathbb{A}_{fe}$  è simmetrica; essendo anche definita positiva, tutti i suoi autovalori sono reali e positivi.

**Definizione 3.2.1** (Numero di condizionamento).

Si definisce il numero di condizionamento di  $\mathbb{A}_{fe}$  rispetto alla norma matriciale indotta dalla norma euclidea come

$$\chi(\mathbb{A}_{fe}) := \|\mathbb{A}_{fe}\| \|\mathbb{A}_{fe}^{-1}\|.$$

Ricordiamo che il numero di condizionamento di una matrice è una quantità in grado di stimare l'errore che si compie nella risoluzione di sistemi lineari con metodi iterativi (ad esempio). Una matrice è ben condizionata se ha numero di condizionamento vicino ad 1.

*Osservazione 3.2.2.* Detto  $\rho(\mathbb{A}_{fe})$  il raggio spettrale di  $\mathbb{A}_{fe}$ , nel nostro caso, vale che

$$\|\mathbb{A}_{fe}\| = \rho(\mathbb{A}_{fe}) = \lambda_{max}(\mathbb{A}_{fe}),$$

dove  $\lambda_{max}(\mathbb{A}_{fe})$  indica il massimo autovalore di  $\mathbb{A}_{fe}$ ; analogamente, si trova che

$$\|\mathbb{A}_{fe}^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_{min}(\mathbb{A}_{fe})},$$

dove  $\lambda_{min}(\mathbb{A}_{fe})$  è il più piccolo autovalore di  $\mathbb{A}_{fe}$ . Segue che

$$\chi(\mathbb{A}_{fe}) = \frac{\lambda_{max}(\mathbb{A}_{fe})}{\lambda_{min}(\mathbb{A}_{fe})}. \quad (3.2)$$

Il nostro obiettivo è mostrare che, sotto certe ipotesi ragionevoli su  $(\mathcal{T}_h)_h$  vale che

$$\chi(\mathbb{A}_{fe}) = \mathcal{O}(h^{-2}); \quad (3.3)$$

per ottenere la stima (3.3), vista la relazione (3.2), dobbiamo stimare dall'alto e dal basso gli autovalori di  $\mathbb{A}_{fe}$ .

**Definizione 3.2.3** (Quasi-uniformità).

Una famiglia di triangolazioni  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  è detta quasi uniforme se è regolare ed esiste  $\tau > 0$  tale che

$$\inf_{h>0} \left( \frac{1}{h} \min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \right) \geq \tau.$$

*Osservazione 3.2.4.* Dal punto di vista geometrico, una triangolazione regolare è tale che preso un nodo qualsiasi, il numero di elementi che lo condividono (in una fissata triangolazione) è uniformemente limitato in  $h$ .

**Proposizione 3.2.5.** Sia  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  una famiglia quasi-uniforme di triangolazioni (vedi 3.2.3). Esistono due costanti  $C_1, C_2 > 0$  tali che per ogni  $h > 0$  per ogni  $v \in \mathbb{V}_h$ , detta  $\{\varphi_1; \dots; \varphi_{N_h}\}$  una base di shape functions di  $\mathbb{V}_h$ , vale che

$$C_1 h^d |\eta|^2 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 h^d |\eta|^2,$$

dove  $\eta \in \mathbb{R}^{N_h}$  è il vettore delle coordinate di  $v$  rispetto alla base di shape functions, cioè

$$v = \sum_{i=1}^{N_h} \eta_i \varphi_i.$$

*Dimostrazione.* Siccome  $(\mathcal{T}_h)_h$  è regolare, preso un nodo qualsiasi, il numero di elementi che lo condividono è uniformemente limitato in  $h$  (vedi 3.2.4). Dalla quasi-uniformità, segue che esiste  $\tau > 0$  tale che  $h_K \geq \tau h$  per ogni  $h > 0$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$ . Proviamo che esistono costanti  $C_1^*, C_2^* > 0$  indipendenti da  $h > 0, v \in \mathbb{V}_h$  e  $K \in \mathcal{T}_h$  tali che

$$C_1^* h_K^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2 \leq \int_K v^2 dx \leq C_2^* h_K^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2, \quad (3.4)$$

avendo numerato da 1 a  $M$  i nodi di  $\mathcal{T}_h$  in  $K$ ,  $\{\varphi_1; \dots; \varphi_M\}$  le relative shape functions e

$$v|_K = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i.$$

Se proviamo la stima (3.4), otteniamo immediatamente la tesi, sommando su  $K \in \mathcal{T}_h$  e utilizzando le considerazioni fatte. Innanzitutto, proviamo che la stima (3.4) vale nel  $d$ -simpleso di riferimento  $\hat{K}$ . Sia  $T_K : \hat{K} \rightarrow K$  la mappa affine che definisce  $K$ , cioè  $T_K(\hat{x}) = B_K(\hat{x}) + b_K$ , con  $B_K$  invertibile. Sia

$$v|_K := \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i.$$

Poniamo  $\hat{v}|_{\hat{K}} := v|_K \circ T_K$ , ovvero

$$\hat{v}|_{\hat{K}} = \sum_{i=1}^M \eta_i \hat{\varphi}_i,$$

avendo posto  $\hat{\varphi}_i = \varphi_i \circ T_K$ . Per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ , definiamo

$$\psi(\eta) := \frac{1}{|\eta|^2} \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 dx.$$

La funzione  $\psi$  è strettamente positiva e continua; inoltre  $\psi(t\eta) = \psi(\eta)$  per ogni  $t > 0$  per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ . Da queste considerazioni segue che  $\psi$  ha massimo e minimo (possiamo limitarci a cercarli sulla sfera unitaria, che è compatta). Segue che esistono  $C_1^{**}, C_2^{**} > 0$  indipendenti da  $\hat{v}_{|\hat{K}}$  tali che

$$C_1^{**} |\eta|^2 \leq \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 dx \leq C_2^{**} |\eta|^2. \quad (3.5)$$

Scrivendo  $v|_K = \hat{v}_{|\hat{K}} \circ T_K^{-1}$ , troviamo che

$$\int_K v^2 dx = \int_K (\hat{v} \circ T_K^{-1})^2 dx = \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 |\det(B_K)| dx.$$

Scegliendo, ad esempio,  $v \equiv 1$ , troviamo che

$$|\det(B_K)| = \frac{\mathcal{L}(K)}{\mathcal{L}(\hat{K})} \leq C' h_K^d,$$

per una costante opportuna  $C' > 0$  indipendente da  $K$ . Siccome  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  è una triangolazione regolare, si deduce anche che esiste una costante  $C'' > 0$  tale che per ogni  $h > 0$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$  vale che

$$|\det(B_K)| = \frac{\mathcal{L}(K)}{\mathcal{L}(\hat{K})} \geq C'' \rho_K^d \geq C'' h_K^d.$$

Segue la tesi. □

**Proposizione 3.2.6.** *Sia  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  una famiglia quasi-uniforme di triangolazioni. Esiste una costante  $C > 0$  tale che per ogni  $h > 0$  per ogni  $v \in \mathbb{V}_h$  vale che*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 h^{-2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.6)$$

*Dimostrazione.* Ragionando come nella proposizione (3.2.5), è sufficiente mostrare che esiste una costante  $C_3^* > 0$  tale che per ogni  $h > 0$  per ogni  $v \in \mathbb{V}_h$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$  vale che

$$\int_K |\nabla v|^2 dx \leq C_3^* h_K^{-2} \int_K v^2 dx. \quad (3.7)$$

Iniziamo trovando una stima nel simpleso di riferimento  $\hat{K}$ . Utilizzando le stesse notazioni della proposizione precedente, per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ , definiamo

$$\psi^*(\eta) = \frac{\int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 dx}{\int_{\hat{K}} \hat{v}^2 dx},$$

avendo posto

$$\hat{v} := \sum_{i=1}^M \eta_i \hat{\varphi}_i.$$

La funzione  $\psi^*$  è ben definita in  $\mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ , continua e non negativa (può valere 0); inoltre vale che  $\psi^*(t\eta) = \psi^*(\eta)$  per ogni  $t > 0$  per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ . Deduciamo che  $\psi^*$  è limitata dall'alto (infatti ha massimo nella sfera unitaria, che è compatta). Allora esiste una costante  $C > 0$  tale che per ogni  $\hat{v} = \sum_{i=1}^M \eta_i \hat{\varphi}_i$  vale che

$$\int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 dx \leq C \int_{\hat{K}} |\hat{v}|^2 dx.$$

Ponendo  $v = \hat{v} \circ T_K$ , abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \int_K |\nabla v|^2 \, dx &= \int_K |[(\nabla \hat{v}) \circ T_K^{-1}] B_K^{-1}|^2 \, dx \\
 &\leq \|B_K^{-1}\|^2 \int_K |(\nabla \hat{v}) \circ T_K^{-1}|^2 \, dx \\
 &= \|B_K^{-1}\|^2 \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 |\det(B_K)| \, dx \\
 &\leq C \|B_K^{-1}\|^2 |\det(B_K)| \int_{\hat{K}} |\hat{v}|^2 \, dx \\
 &= C \|B_K^{-1}\|^2 |\det(B_K)| \int_{\hat{K}} |v \circ T_K|^2 \, dx \\
 &= C \|B_K^{-1}\|^2 \int_K |v|^2 \, dx.
 \end{aligned}$$

Per il lemma 2.2.9, ricordiamo che

$$\|B_K^{-1}\|^2 \leq \frac{\hat{h}^2}{\rho_K^2};$$

dall'ipotesi di quasi-uniformità, segue che

$$\|B_K^{-1}\|^2 \leq \frac{\hat{h}^2}{\rho_K^2} \leq \frac{C}{h^2},$$

per una costante  $C > 0$  indipendente da  $h$ ,  $K$  e  $v$ . Segue la tesi.  $\square$

Sotto le ipotesi di coercività, limitatezza e simmetria, la forma bilineare  $\mathcal{A}$  definisce un prodotto scalare in  $H_0^1(\Omega)$  che induce una norma equivalente a quella di  $H^1(\Omega)$ . Siano  $\alpha, \gamma > 0$  tali che

$$\alpha \|v\|_{1;\Omega}^2 \leq \mathcal{A}(v; v) \leq \gamma \|v\|_{1;\Omega}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Teorema 3.2.7.** *Ogni autovalore  $\lambda$  di  $\mathbb{A}_{fe}$  è tale che*

$$\alpha C_1 h^d \leq \lambda \leq C C_2 h^d (1 + h^{-2} C_3), \quad (3.8)$$

dove le costanti  $C_1, C_2, C_3$  sono quelle delle proposizioni 3.2.5 e 3.2.6. In particolare,  $\chi(\mathbb{A}_{fe}) \in \mathcal{O}(h^{-2})$ .

*Dimostrazione.* Denotiamo con  $v = \sum_{i=1}^{N_h} \eta_i \varphi_i$ . Vale che

$$\alpha \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \alpha \|v\|_{1;\Omega}^2 \leq \mathcal{A}(v; v) \leq \gamma \|v\|_{1;\Omega}^2 = \gamma \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Dalla proposizione 3.2.5 segue che

$$\alpha \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{|\eta|^2} \geq \alpha C_1 h^d;$$

applicando le proposizioni 3.2.6 e 3.2.5, si trova che

$$\frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2}{|\eta|^2} \leq \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 (1 + C_3 h^{-2})}{|\eta|^2} \leq C_2 h^d (1 + h^{-2} C_3).$$

Si deduce che per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\}$  vale che

$$\alpha C_1 h^d \frac{\langle \mathbb{A}_{fe} \eta, \eta \rangle}{|\eta|^2} \leq \gamma C_2 h^d (1 + h^{-2} C_3). \quad (3.9)$$

La disuguaglianza (3.8) segue immediatamente. Ricordando la formula (3.2), segue immediatamente che  $\chi(\mathbb{A}_{fe}) \in \mathcal{O}(h^{-2})$ .  $\square$

*Osservazione 3.2.8.* A margine del teorema 3.2.7, precisiamo che nella risoluzione del sistema lineare

$$\mathbb{A}_{fe} \xi_{fe} = \mathbb{F}_{fe}$$

conviene rimpiazzare la matrice  $\mathbb{A}_{fe}$  con  $\frac{1}{h^d} \mathbb{A}_{fe}$ , i cui autovalori non diventano troppo piccoli (in un certo senso, è una normalizzazione dei coefficienti).

# Capitolo 4

## Simulazioni numeriche

Abbiamo provato a risolvere numericamente alcuni problemi differenziali di tipo ellittico nel piano: ricordiamo che per garantire la continuità delle funzioni di Sobolev in dimensione 2, è sufficiente lavorare nello spazio  $H^2$ ; per questa ragione, possiamo definire gli operatori di interpolazione (vedi 2.2.5 e 2.2.3) sulle funzioni in  $H^2$  ed è possibile dare una descrizione più completa (e visivamente più efficace) di ciò che accade.

Nel seguito, illustriamo brevemente i risultati ottenuti. Per la sperimentazione, abbiamo utilizzato il software open source **FreeFem++**, che è possibile scaricare gratuitamente dal link <https://freefem.org/>.

### 4.1 FreeFem++

Il software **FreeFem++** è un solver di PDE sviluppato in oltre 30 anni di lavoro. Supponiamo di voler risolvere numericamente il problema differenziale

$$\begin{cases} \operatorname{div}((\nabla u)A) = f & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Abbiamo descritto la formulazione variazionale di questo problema e spiegato perchè risulta molto conveniente rispetto a quella classica. Inoltre il metodo di Galèrkin agli elementi finiti (triangolari), fornisce un algoritmo per approssimare numericamente la soluzione. Abbiamo anche mostrato che nel caso di problemi uniformemente ellittici, tale metodo è convergente alla soluzione distribuzionale del problema, che appartiene a qualche spazio di Sobolev. Il software **FreeFem++** è uno strumento in cui è implementata questa procedura. L'utente deve inserire la descrizione dell'aperto  $\Omega$  in cui vuole risolvere la PDE e dichiarare il tipo di elementi finiti che vuole utilizzare per decomporre il dominio. Abbiamo studiato il caso delle triangolazioni, che non è l'unico possibile (pur essendo particolarmente efficace). **FreeFem++** decompone automaticamente  $\Omega$  in triangoli: la "buona riuscita" di questa operazione dipende ovviamente dalla forma di  $\Omega$ . Riportiamo sotto alcuni esempi. Nelle figure 4.1, 4.2 e 4.3 sono presenti triangolazioni abbastanza "grossolane" del quadrato, del cerchio e del cerchio bucato rispettivamente, in cui l'ordine di grandezza è di qualche centinaio di elementi finiti. Nella figura 4.4 presentiamo un raffinamento della triangolazione riportata nella figura 4.3, in cui l'ordine di grandezza degli elementi finiti è di qualche migliaio. In questo caso, sul bordo del cerchio, la triangolazione è talmente fine che è impossibile distinguere gli elementi finiti.

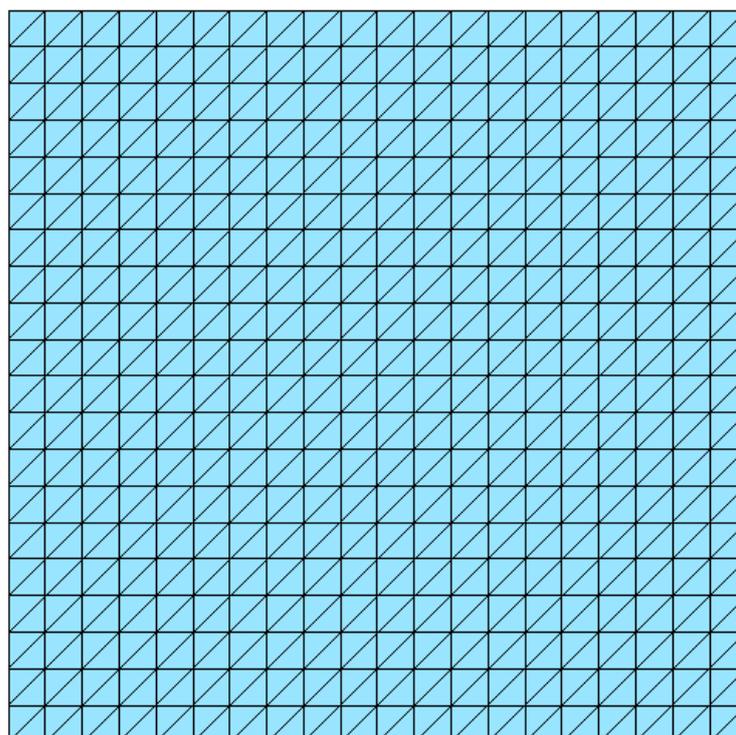


Figura 4.1: Triangolazione del quadrato.

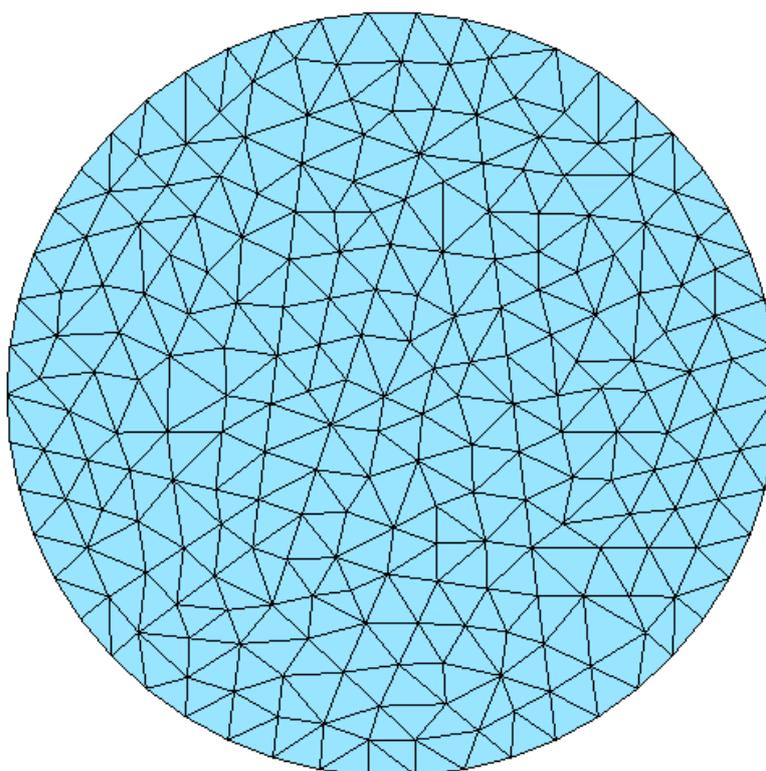


Figura 4.2: Triangolazione del cerchio.

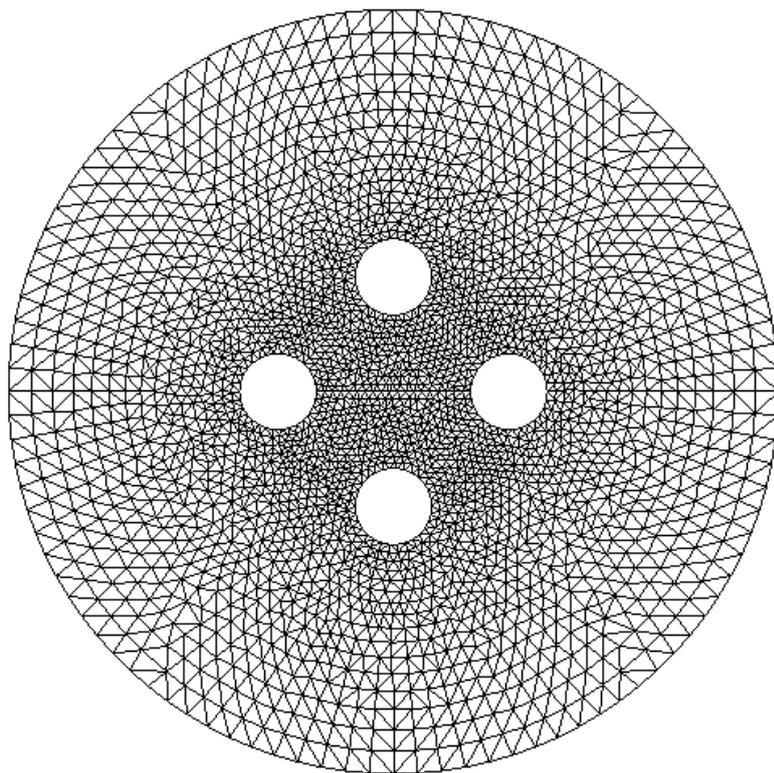


Figura 4.3: Triangolazione del cerchio bucato.

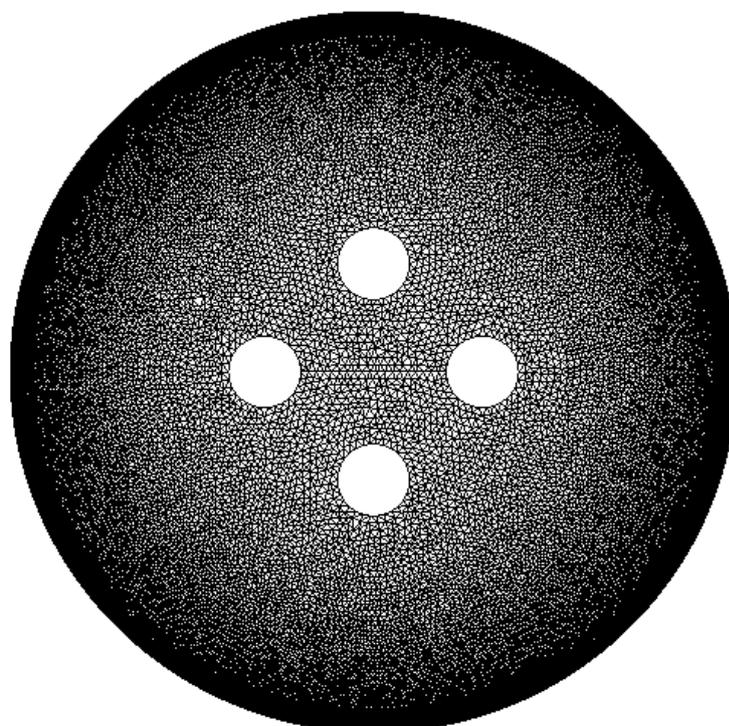


Figura 4.4: Triangolazione fine del cerchio bucato.

Eseguita la triangolazione, bisogna scrivere il problema differenziale che vogliamo risolvere, di cui è richiesta la formulazione debole. Come ampiamente discusso, cerchiamo  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nello spirito del teorema di Lax-Milgram (vedi 1.2.3), il software richiede di definire una forma bilineare

$$\mathcal{A}(u; v) := \int_{\Omega} \langle (\nabla u)A, \nabla v \rangle dx$$

e un'applicazione lineare

$$\mathcal{F}(v) := - \int_{\Omega} f v dx.$$

Bisogna dichiarare il tipo di interpolazione che si vuole eseguire: la scelta fatta, che è anche quella più naturale, consiste nell'interpolazione con polinomi di grado 1 in ciascun triangolo. La sintassi del software **FreeFem++** consente di dichiarare in maniera molto semplice queste informazioni.

Il problema è ricondotto alla soluzione di un sistema lineare, che il software esegue in maniera abbastanza efficiente, viste le buone proprietà della matrice di rigidità.

## 4.2 Sperimentazione

Dall'implementazione del problema in **FreeFem++** otteniamo un grafico che dobbiamo interpretare. Ricordiamo che nel caso di operatori uniformemente ellittici il problema differenziale con condizioni al bordo di Dirichlet ha soluzione distribuzionale unica (vedi 1.2.6) e che il metodo di Galérkin agli elementi finiti converge alla soluzione del problema (vedi 3.1.1). La teoria della regolarità dice anche che la soluzione (distribuzionale) è molto regolare. Inoltre, molti problemi di natura fisica di modellizzano tramite equazioni alle derivate parziali uniformemente ellittiche; in questi casi, la soluzione rappresenta una particolare configurazione che "deve" esistere in virtù di qualche principio fisico.

In sintesi, nel caso **uniformemente ellittico** l'intuito dice che la soluzione del problema esiste, i metodi numerici danno risultati sorprendenti e la matematica supporta fortemente queste affermazioni. Riportiamo di seguito alcuni esempi.

### 4.2.1 L'equazione di Poisson

L'equazione di Poisson è l'esempio più semplice di problema uniformemente ellittico:

$$\begin{cases} \Delta u = f & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Dal punto di vista variazionale, cerchiamo  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = - \int_{\Omega} v f dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.2)$$

L'equazione (4.1) rappresenta la configurazione all'equilibrio di una membrana vincolata al bordo di  $\Omega$  nella situazione in cui in ogni punto  $(x; y)$  sia applicata una forza  $f(x; y)$ .

*Esempio 4.2.1.* Nel caso in cui  $\Omega$  sia il quadrato unitario e  $f \equiv 1$  (cioè la forza applicata è costante) si ottengono le figure 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8.

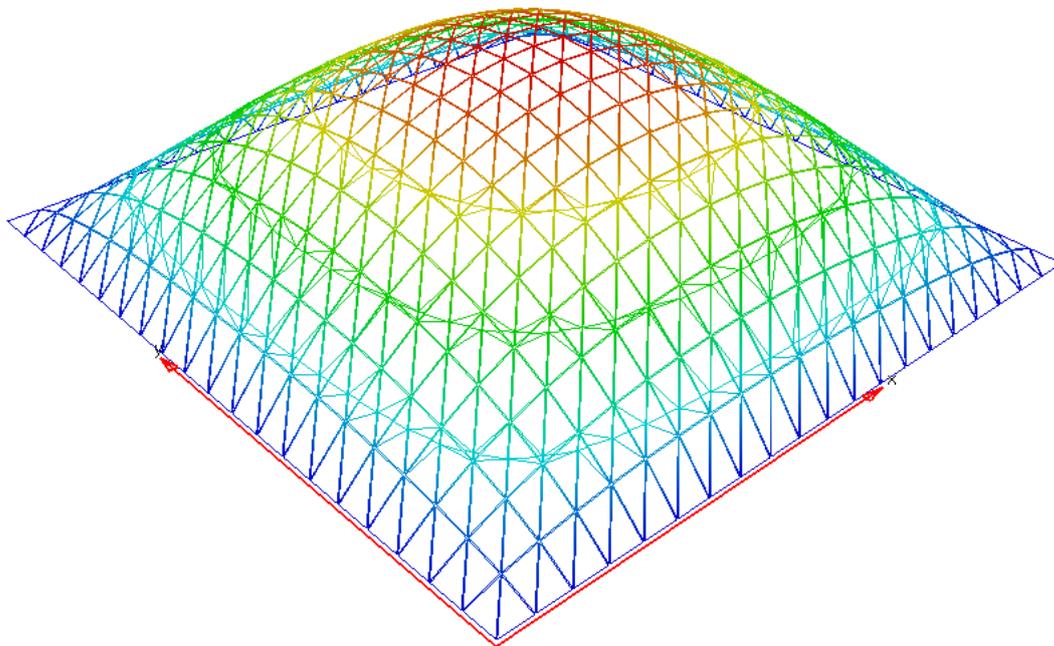


Figura 4.5: Soluzione di  $\Delta u = 1$  nel quadrato con 800 triangoli.

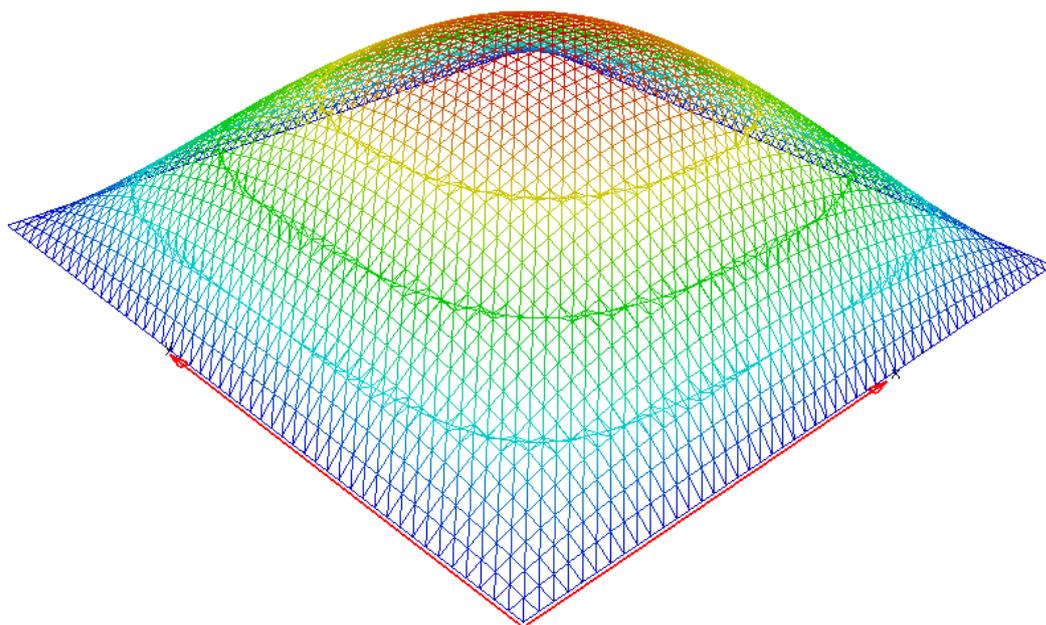


Figura 4.6: Soluzione di  $\Delta u = 1$  nel quadrato con 5000 triangoli.

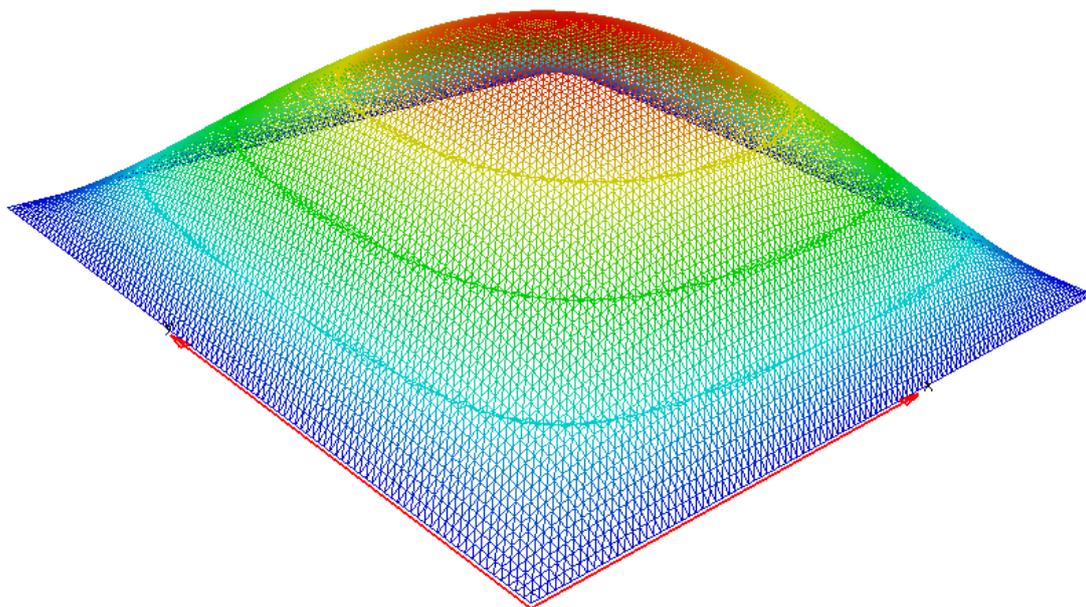


Figura 4.7: Soluzione di  $\Delta u = 1$  nel quadrato con 20000 triangoli.

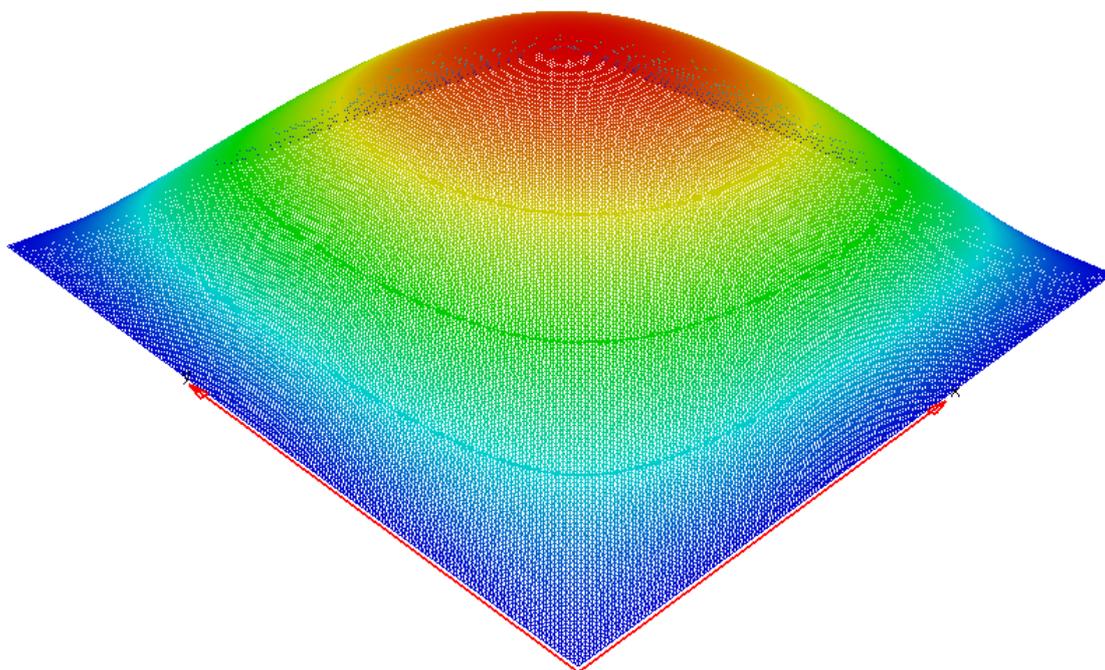


Figura 4.8: Soluzione di  $\Delta u = 1$  nel quadrato con 80000 triangoli.

*Esempio 4.2.2.* Possiamo considerare anche casi più generali, in cui la forza non è costante. Le figure 4.9 e 4.10 rappresentano la soluzione dell'equazione 4.1 nel quadrato con termine forzante

$$f(x; y) := \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

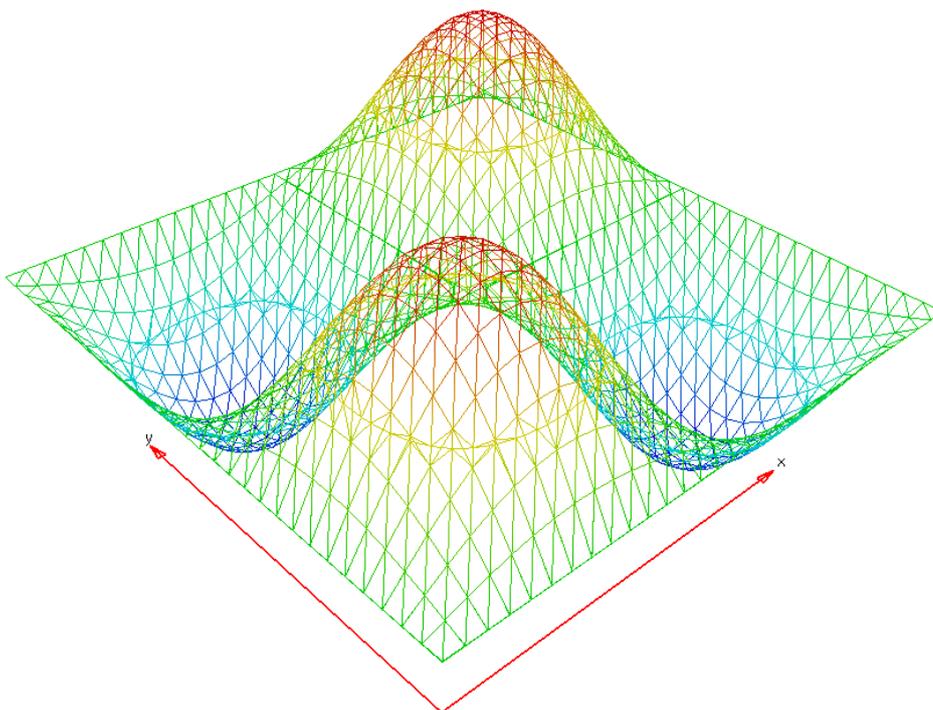


Figura 4.9: Soluzione di  $\Delta u = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$  nel quadrato con 1800 triangoli.

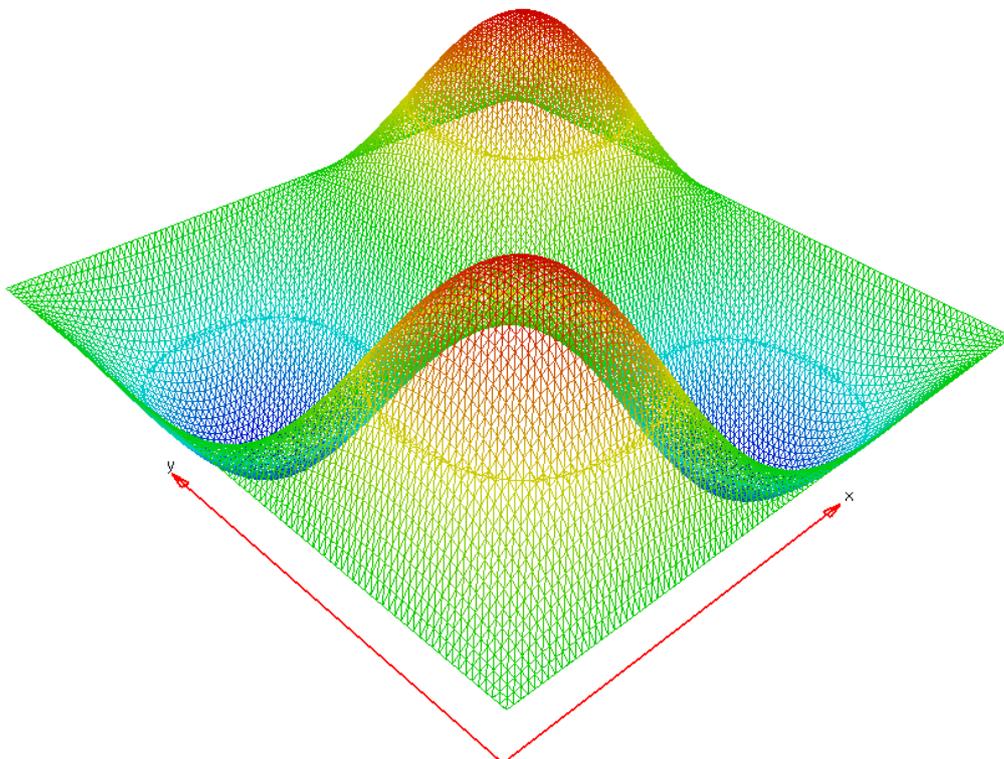


Figura 4.10: Soluzione di  $\Delta u = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$  nel quadrato con 20000 triangoli.

*Esempio 4.2.3.* Le figure 4.11 e 4.12 rappresentano la soluzione approssimata dell'equazione di Poisson (vedi (4.1)) nel cerchio unitario con termine forzante

$$f(x; y) := 1 + 10x^2 + 10y^2.$$

Come è lecito aspettarsi, è evidente che le soluzioni trovate hanno simmetria radiale.

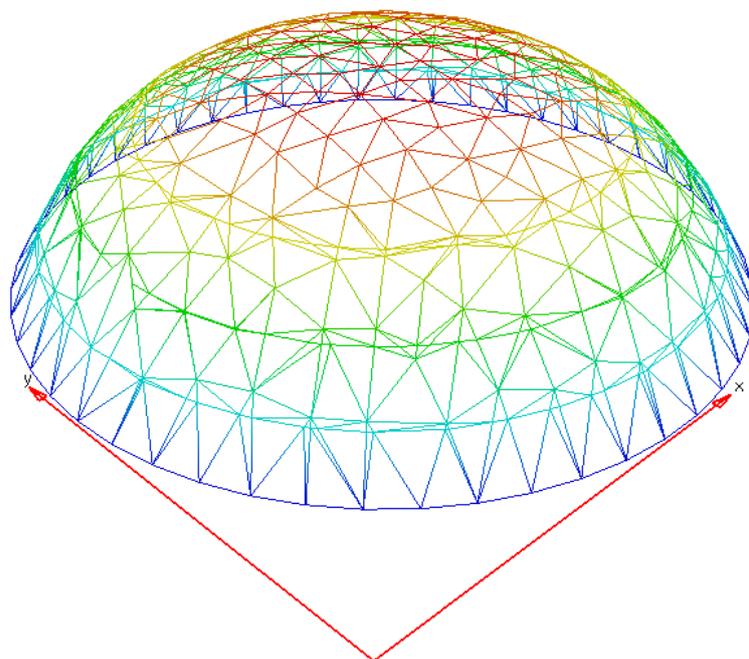


Figura 4.11: Approssimazione della soluzione di  $\Delta u = 1 + 10x^2 + 10y^2$  nel cerchio.

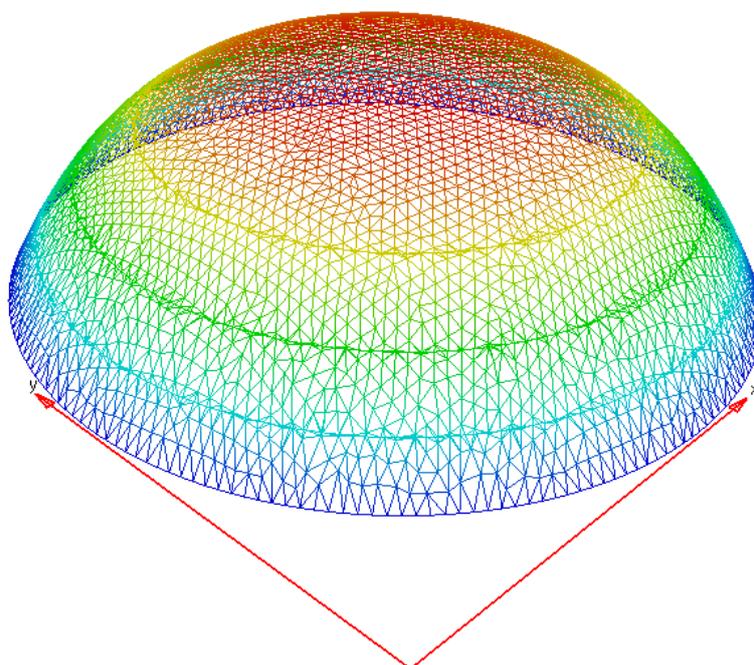


Figura 4.12: Approssimazione della soluzione di  $\Delta u = 1 + 10x^2 + 10y^2$  nel cerchio.

*Esempio 4.2.4.* Le figure 4.13 e 4.14 rappresentano la soluzione dell'equazione di Poisson nel cerchio bucato con termine forzante

$$f(x; y) := 1 + 10x^2 + 10y^2.$$

Vista la natura di  $f$  e del dominio  $\Omega$ , è evidente che la soluzione trovata ha simmetria radiale.

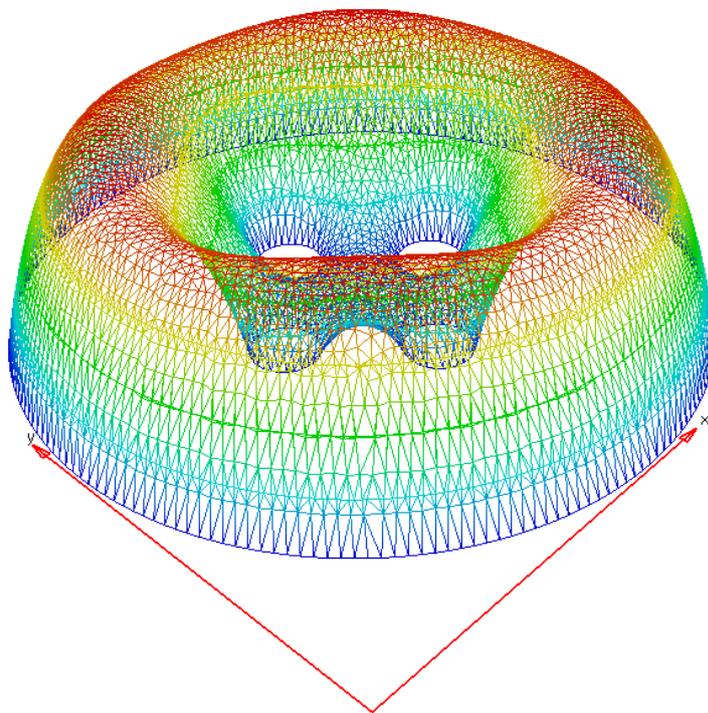


Figura 4.13: Approssimazione di  $\Delta u = 1 + 10x^2 + 10y^2$  nel cerchio bucato.

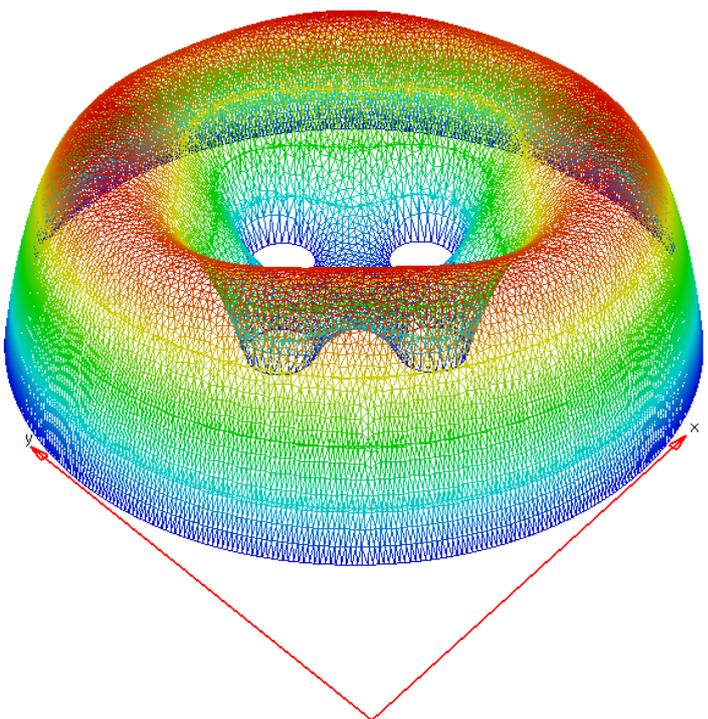


Figura 4.14: Approssimazione di  $\Delta u = 1 + 10x^2 + 10y^2$  nel cerchio bucato.

## 4.2.2 Un generico problema ellittico

*Esempio 4.2.5.* La figura 4.15 rappresenta la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 + 10x^3 - 5y^2 & (x; y) \in \Omega, \\ u = 0 & (x; y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

dove  $\Omega$  è il cerchio unitario a cui sono stati rimossi quattro cerchi. Dal punto di vista variazionale, approssimiamo una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \left( 6\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = - \int_{\Omega} v f dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.4)$$

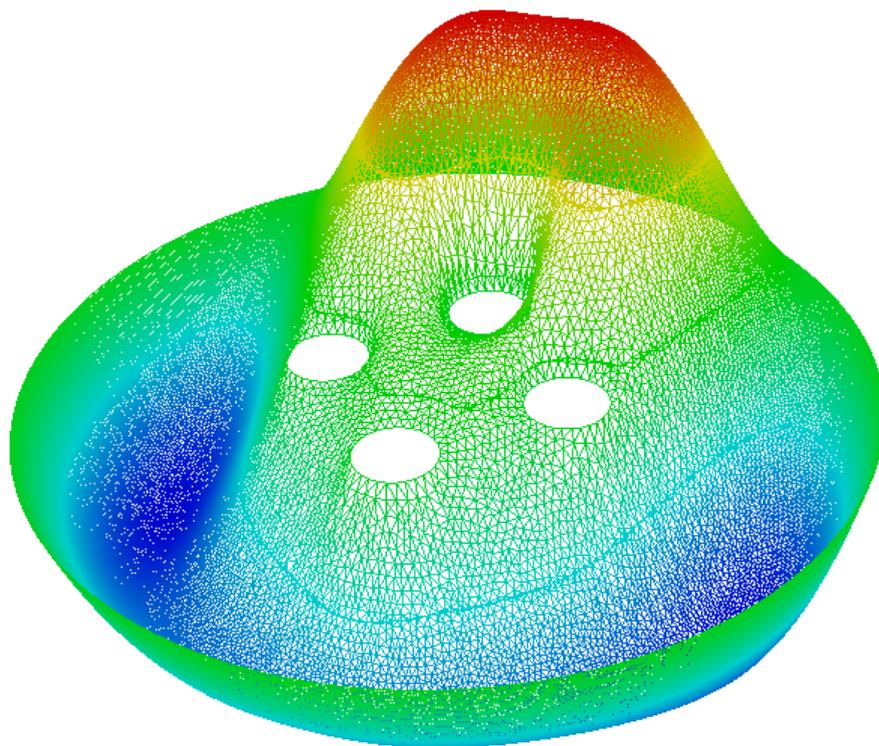


Figura 4.15: Approssimazione della soluzione dell'equazione (4.3) nel cerchio bucatato.

*Esempio 4.2.6.* La figura 4.16 rappresenta la soluzione approssimata dell'equazione

$$\begin{cases} \operatorname{div}((\nabla u(x; y))A(x; y)) = (x - 1)(y - 1)(x - y) & (x; y) \in \Omega \\ u(x; y) = 0 & (x; y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

dove  $\Omega$  è il cerchio unitario a cui sono stati rimossi quattro cerchi e  $A(x; y)$  è la matrice

$$A(x; y) := \begin{pmatrix} 2 + x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 + y \end{pmatrix}$$

Dal punto di vista variazionale, cerchiamo  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx dy = - \int_{\Omega} v f dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Notiamo che la matrice  $A(x; y)$  è uniformemente ellittica in  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ; infatti, per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^2$  per ogni  $(x, y) \in \Omega$  vale che

$$\begin{aligned} \xi^T A(x; y) \xi &= (2 + x)\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + (3 + y)\xi_2^2 \\ &\geq 2\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + 3\xi_2^2 \geq \xi_1^2 + \xi_2^2 = |\xi|^2. \end{aligned}$$

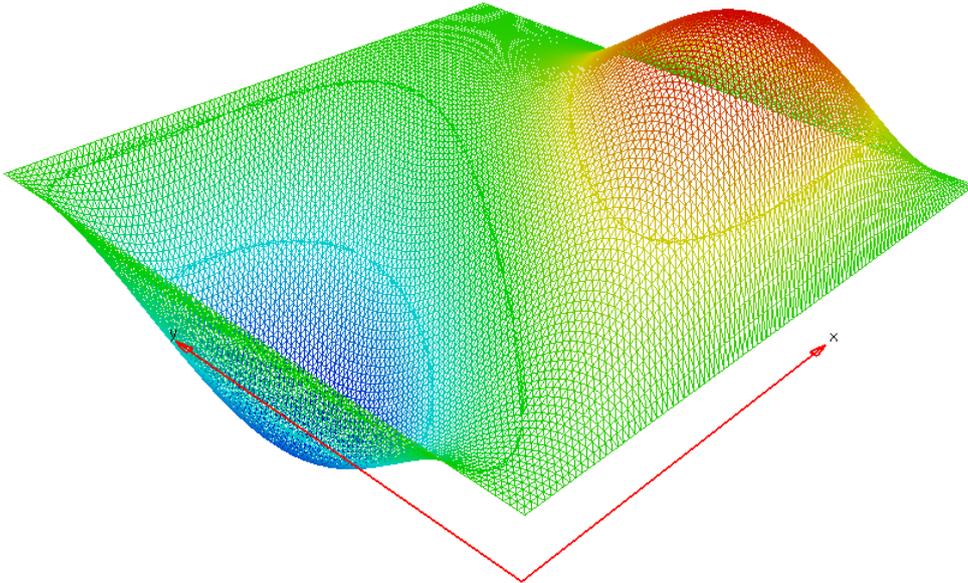


Figura 4.16: Soluzione del problema ellittico (4.5) nel quadrato con 20000 triangoli.

### 4.2.3 Un problema non-ellittico

Nel caso di operatori che non siano ellittici, possiamo certamente fare sperimentazioni numeriche, tuttavia i grafici che otteniamo sono profondamente diversi. Infatti, in questo caso tutta la teoria sviluppata fallisce: non è nemmeno chiaro se la soluzione esista in qualche senso.

*Esempio 4.2.7.* Sia  $\Omega$  il cerchio unitario a cui sono stati rimossi quattro cerchi. La figura 4.17 rappresenta la soluzione dell'equazione di Poisson

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 & (x; y) \in \Omega, \\ u = 0 & (x; y \in \partial\Omega); \end{cases} \quad (4.7)$$

la figura 4.18 rappresenta la griglia in cui è stato suddiviso lo spazio e le linee di livello corrispondenti a tale soluzione.

La figura 4.19 rappresenta il risultato dell'approssimazione numerica della soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 & (x; y) \in \Omega, \\ u = 0 & (x; y \in \partial\Omega); \end{cases} \quad (4.8)$$

la figura 4.20 rappresenta le linee di livello corrispondenti a funzione.

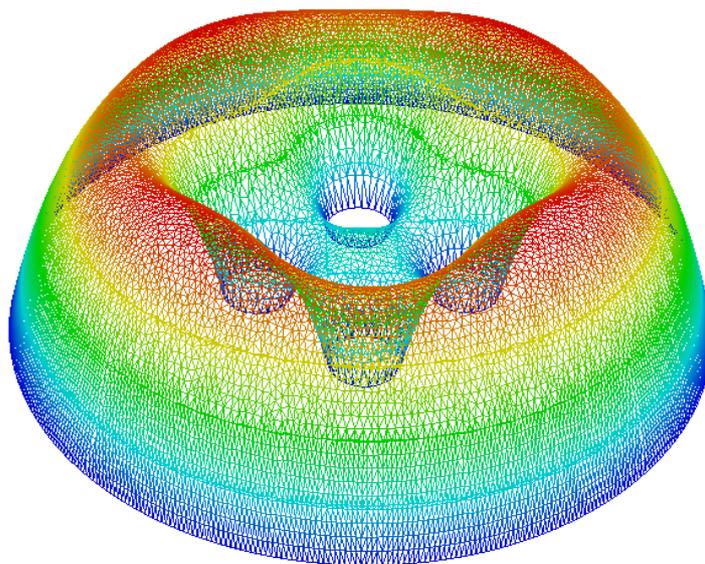


Figura 4.17: Soluzione di  $\Delta u = 1$  nel cerchio bucato.

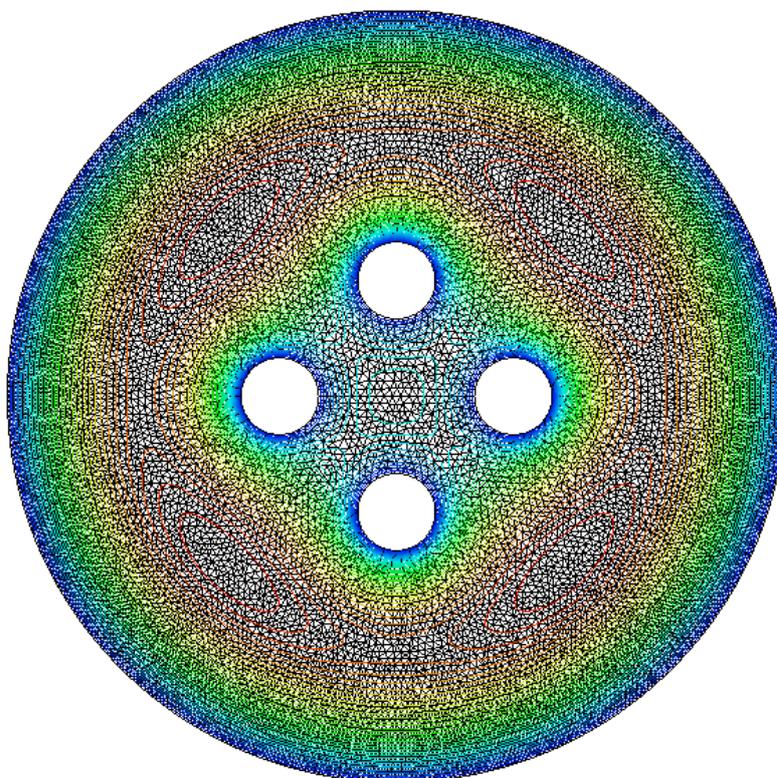


Figura 4.18: Linee di livello della soluzione di  $\Delta u = 1$  nel cerchio bucato.

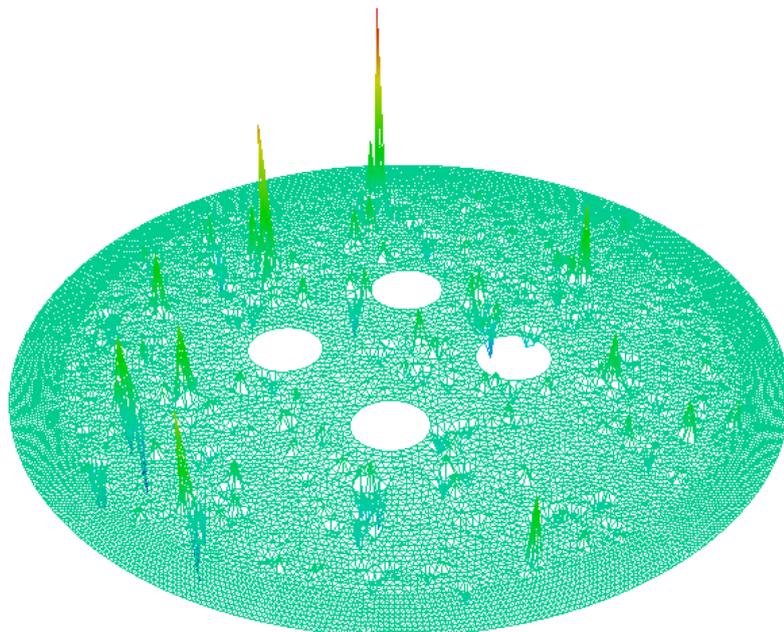


Figura 4.19: *Approssimazione* del problema 4.8 nel cerchio bucato.

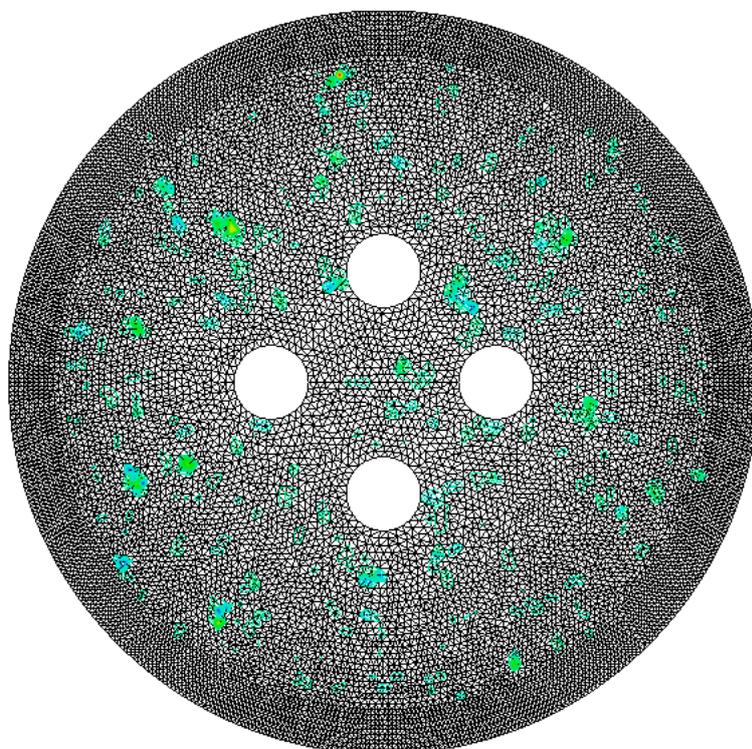


Figura 4.20: Linee di livello dell'*approssimazione* del problema 4.8 nel cerchio bucato.

L'operatore che definisce l'equazione (4.8) non è ellittico, quindi le sperimentazioni numeriche non sono supportate da alcuna argomentazione di carattere matematico: infatti, otteniamo un risultato decisamente deludente; tuttavia, in questo caso, non è chiaro "quale funzione" dovremmo approssimare, poichè il problema potrebbe non avere soluzione nemmeno in senso debole. Vale la pena di notare che le figure 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20 sono state ottenute con la stessa discretizzazione del dominio: allora, le differenze nei risultati ottenuti sono ancora più significative.



# Bibliografia

- [1] AMBROSIO, L.; CARLOTTO, A., AND MASSACCESI, A. *Lectures on Elliptic Partial Differential Equations*. Volume 18. Edizioni della Normale, 2018.
- [2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 2010.
- [3] HECHT, F. *New development in FreeFem++*, vol. 20. 2012.
- [4] QUARTERONI, A.; VALLI, A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, vol. 23. Springer, 1994.