

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

15 Novembre 2013

Esercizio 1: Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$\begin{bmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ 2 & h & -1/2 \\ 3 & 1/2 & h \end{bmatrix}$$

con h parametro reale.

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = A X \quad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3$$

- Calcolare gli esponenti di Lyapunov e discutere, al variare del parametro reale h , gli equilibri del sistema dinamico e la loro stabilità.
- Sia $h = 2$, scrivere il flusso integrale e trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali $X_0 = (x, y, z)^T = (1, 1, -1)^T$.

Si consideri adesso il sistema dinamico discreto lineare in \mathbf{R}^3

$$X_{k+1} = A X_k$$

e si supponga che $h \neq 1$.

- Discutere, al variare del parametro h , la stabilità del punto fisso.
- Sia $h = 0$ ed il dato iniziale valga $X_0 = (x, y, z)^T = (0, -1, 1)^T$: trovare l' ω -limite dell'orbita.

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^3 - x - \gamma \frac{dx}{dt}$$

si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$:

- a) si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità;
- b) si traccino qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia;
- c) si descrivano l'insieme α -limite e quello ω -limite dell'orbita con condizioni iniziali $x = 1/2, y = dx/dt = 0$.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo:

- d) si determini la stabilità dei punti di equilibrio;
- e) si traccino qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e si tratteggi il bacino di attrazione del pozzo;
- f) si dimostri che l'orbita con condizioni iniziali $x = 1/2, y = dx/dt = 0$ ha limite per $t \rightarrow +\infty$.