

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

14 Febbraio 2014

Esercizio 1: Sia dato il seguente sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto d'equilibrio.
- Trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Sia dato il sistema newtoniano ad un grado di libertà definito dall'energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{-x^4 + x^2 - 4}$$

con dissipazione $\gamma > 0$.

- Discretizzare il sistema dinamico in modo conservativo con passo $h > 0$.
- Trovare i punti fissi del sistema dinamico discreto così ottenuto e discuterne la stabilità.
- Come cambierebbero le conclusioni del punto b) nel caso $\gamma = 0$?

Esercizio 3: In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse z verticale ascendente. In questo piano sia data l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

e un punto materiale di massa m vincolato ad essa e soggetto ad un'accelerazione di gravità verso il basso di intensità g . L'intero sistema viene messo in rotazione attorno all'asse z con velocità angolare costante ω . Si utilizzi come coordinata lagrangiana la u della parametrizzazione

$$x = a \cos u \quad ; \quad z = -b \sin u .$$

- a) Scrivere la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.
- b) Scrivere la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- c) Trovare i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e discuterne la stabilità in funzione dei parametri a, b, g, ω .
- d) Tracciare il diagramma di biforcazione in funzione del parametro

$$J = \frac{gb}{\omega^2 a^2} .$$