

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

15 Gennaio 2015

Esercizio 1 (6 pt) Si consideri il sistema dinamico discreto in \mathbf{R}^4 definito da $X_{k+1} = AX_k$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Studiare la stabilità del punto fisso.

Esercizio 2 (12 pt) Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 1 - \gamma \frac{dx}{dt}$$

considerato sul semipiano $x > 0$, si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$.

- Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.
- Tracciare qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia nel piano $(x, y = dx/dt)$.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

- Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.
- Tracciare qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e tratteggiare il bacino di attrazione del pozzo.

- e) Dimostrare che l'orbita con condizioni iniziali $x = 5/2, y = dx/dt = 0$ ha limite per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio 3 (12 pt) Sia dato un corpo puntiforme di massa m , vincolato a muoversi su di una curva di equazione $z = 1 - \exp(-x^2/2)$ nel piano verticale, ruotante attorno all'asse z con velocità angolare costante ω . Supponiamo che il corpo puntiforme sia soggetto sia ad un'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e di intensità g .

- a) Scrivere l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di $x, dx/dt$, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange.
- b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ω .
- c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro $J = \omega^2/g$.
- d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x) .