

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

1 Giugno 2015

**Esercizio 1 (8 pt)** Sia dato il seguente sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Calcolare la soluzione generale in funzione delle condizioni iniziali.
- Trovare quali condizioni iniziali danno luogo ad orbite con l'origine come  $\alpha$ -limite ed  $\omega$ -limite.

**Esercizio 2 (12 pt)** Dato il potenziale

$$U(x, y) = \arctan(x^2 - 1) \arctan(1 - y^2)$$

si consideri il sistema gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -\partial U / \partial x \\ \dot{y} = -\partial U / \partial y \end{cases}$$

- Trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
- Dimostrare che il quadrato aperto  $Q = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$  è positivamente invariante.
- Dimostrare che l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e le due bisettrici ( $y = x, y = -x$ ) sono rette invarianti.
- Tracciare un disegno qualitativo delle orbite nel piano  $(x, y)$ .

**Esercizio 3 (10 pt)** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$  con asse  $y$  verticale ascendente. In questo piano si consideri un corpo puntiforme  $P$  di massa  $m$ , vincolato a muoversi su di una circonferenza centrata in  $O$  e di raggio  $R$ . Il corpo è soggetto alla forza di gravità di accelerazione  $g$  e ad una forza elastica prodotta da una molla di costante  $k$  che congiunge il corpo all'asse  $x$  mantenendosi sempre verticale. Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra  $OP$  e la direzione verticale discendente.

- a) Scrivere la lagrangiana e l'equazione di moto.
- b) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- c) Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità, in funzione del parametro  $J = (mg)/(kR)$ .
- c) Disegnare il diagramma di biforcazione.