

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

22 Giugno 2015

**Esercizio 1 (8 pt)** Si consideri il sistema dinamico discreto:

$$X_{k+1} = A X_k, \quad \text{dove } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

ed in particolare la condizione iniziale  $X_0 = [1, -1, 1, 1]^T$

- Trovare la forma canonica di Jordan reale di  $A$ .
- Dimostrare che l'orbita  $X_k$ , con la condizione iniziale  $X_0$  data, tende all'infinito per  $k \rightarrow +\infty$ .

**Esercizio 2 (12 pt)** Data la funzione energia potenziale  $V(x) = x^5 - 2x^3 + x$ , si consideri il sistema newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \gamma \frac{dx}{dt}$$

Si esamini prima il caso conservativo ( $\gamma = 0$ ).

- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- Fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano  $(x, dx/dt)$ , in particolare indicando le separatrici.

Si esamini adesso il caso con  $\gamma > 0$ , supposto piccolo.

- c) Trovare i punti di equilibrio del corrispondente sistema dinamico e discuterne la stabilità.
- d) Fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano  $(x, dx/dt)$ , in particolare indicando le separatrici;
- e) Disegnare la soluzione con condizioni iniziali  $(0, 0)$ .

**Esercizio 3 (10 pt)** In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento  $Oxz$ , con asse  $z$  verticale ascendente. Si consideri un punto materiale di massa  $m$  vincolato alla curva  $z = -x^4/4$ . Il piano verticale viene fatto ruotare attorno all'asse  $z$  con velocità angolare costante  $\omega > 0$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione  $g$ , ed è presente una molla di costante elastica  $k$  che collega il punto con l'asse  $z$  mantendosi parallela all'asse  $x$ .

- a) Scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione di moto.
- b) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- c) Trovare gli equilibri del sistema dinamico dato dalle equazioni di Hamilton e studiarne la stabilità in funzione dei parametri  $k, m, g, \omega$ .
- d) Tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri in funzione di un opportuno parametro, funzione di  $k, m, g, \omega$ .