

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

7 Settembre 2015

Esercizio 1 (8 pt) Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Trovare gli esponenti di Lyapunov e discutere la stabilità del punto di equilibrio.
- Scrivere il flusso integrale e calcolare la soluzione particolare con condizioni iniziali $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 0)$.

Esercizio 2 (12 pt) Si consideri il sistema gradiente con potenziale

$$U(x, y) = -\log(x^2 - x + 1) \log(y^2 - y + 1) .$$

- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- Dimostrare che le rette $x = 1/2$, $y = 1/2$, $y = x$, $y = 1 - x$ sono insiemi invarianti.
- Dimostrare che il quadrato aperto $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ fa parte del bacino di attrazione di un pozzo.
- Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni.

Esercizio 3 (10 pt) Sia dato un corpo puntiforme di massa m , vincolato a muoversi sulla curva di equazione

$$z = 1 - e^{-x^2/2}$$

nel piano verticale, ruotante attorno all'asse z con velocità angolare costante ω . Supponiamo che il corpo puntiforme sia soggetto ad un'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e di intensità g .

- a) Scrivere la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange utilizzando come parametro lagrangiano l'ascissa x del punto.
- b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ω .
- c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati, in funzione del parametro $J = \omega^2/g$.
- d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x) .