

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani

16 Novembre 2015

Esercizio 1 (15 pt) Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -21 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = AX \quad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3$$

- a) Se ne calcolino gli esponenti di Lyapunov e si discuta la stabilità dell'origine.
- b) Si trovi la soluzione del sistema con condizione iniziale

$$X_0 = (x, y, z)^T = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right)^T$$

Si consideri ora il sistema dinamico discreto lineare $X_{k+1} = AX_k$ in \mathbb{R}^3 ;

- c) Si discuta la stabilità del punto fisso.
- d) Si scriva esplicitamente la soluzione generale con condizioni iniziali $X_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.

Esercizio 2 (15 pt) Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sqrt{2}\cos(x) + \sin(2x) - \gamma\frac{dx}{dt}.$$

Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

- a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.
- b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) , con $y = dx/dt$, e determinare le tangenti alle separatrici negli eventuali punti con linearizzato di tipo sella.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

- c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.
- d) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) , con $y = dx/dt$, ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare.
- e) Determinare il limite per $t \rightarrow +\infty$ dell'orbita con condizioni iniziali $(x, y) = (\pi, 1/2)$.