Esercizio 3:

(i) $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irriducibile $\deg f(x) = n$ $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ = dispari con $\mathbb{L}$ c.d.s. di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$. Dim che f ha solo radici reali

Dim: Se $f(x)$ ha radici complesse allora ce le ha a coppie (perché $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ dunque se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è tale che $f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$

$|Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})| = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ dispari

Però se f ha radici complesse l'automorfismo

$$\varphi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}, \quad x \longmapsto \bar{x}$$

Appartiene al gruppo di Galois $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$: φ tiene fisso il campo base e inoltre manda radici in radici per quanto osservato.

Ma φ è un automorfismo di ordine 2. Dunque $2 \mid |Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})| = [\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$

Assurdo

(ii) $f(x)$ irriducibile $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_n)$ con r_i radici di $f(x)$

Supponiamo che $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ sia Abeliano. Dobbiamo dimostrare che $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(r_i)$

Dim:

$$Gal\left(\begin{array}{c} \mathbb{L} \\ | \\ \mathbb{Q}(r_i) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}\right)$$

$Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$. Dato che $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ è abeliano, allora ogni suo sottogruppo è normale. Dunque $\exists\, H \lhd Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ tale che $Fix\, H = \mathbb{Q}(r_i)$

Per teo di corrispondenza di Galois

Dato che H è normale, allora $\mathbb{Q}(r_i)/\mathbb{Q}$ è di Galois sempre per teo corrispondenza. Ma allora $\mathbb{Q}(r_i)/\mathbb{Q}$ è NORMALE come estensione. Dunque i $\mathbb{Q}(r_i)$ ha tutte le radici del polinomio minimo di r_i che è proprio $f(x)$ poiché $f(x)$ è irriducibile

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \mathbb{Q}(r_i)$$

Esercizio 2

(i) $\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+1,\ y^2-2x)$ è Dominio?

NO $\quad \mathbb{Z}[x,y]/(x^2+1,\ y^2-2x) \overset{\text{III teo}}{\cong} \dfrac{\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+1)}{(x^2+1,\ y^2-2x)/(x^2+1)} \cong$

$$\mathbb{Z}[i][y]/(y^2-2i) = A$$

Nel momento in cui dico

$$\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$$

$$\mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$$
$$x \longmapsto i$$
$$p(x) \longmapsto p(i)$$

Dunque il "nuovo" anello è dominio?

Se mostro che y^2-2i è $\boxed{\text{RIDUCIBILE}}$ in $\mathbb{Z}[i][y]$, allora l'ideale (y^2-2i) NON è primo e dunque A non è dominio

$2i$ è un quadrato in $\mathbb{Z}[i]$ $\qquad (1+i)^2 = 1-1+2i = 2i$

$$(y^2-2i) = (y-(1+i))\,(y+(1+i))$$

Dunque A NON è un dominio.

(ii) A anello con unità $\qquad X$ insieme "a caso"

$$X_A = \{ f : X \longrightarrow A \} \quad \text{insieme}$$

$(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

È un anello

$\exists\ \varphi : A \longrightarrow X_A$ morfismo iniettivo?

Sì: $f_a : X \longrightarrow A$, $x \longmapsto a$ Funzione costante su a

$$\varphi : A \longrightarrow X_A, \quad a \longmapsto f_a$$

- φ è morfismo di anelli? $\forall a,b \in A\ \forall x \in X$

$$\varphi(a+b)(x) = f_{a+b}(x) = a+b = f_a(x) + f_b(x) = [\varphi(a)+\varphi(b)](x)$$

- φ è iniettivo?

Sia $a \in \ker\varphi$, allora $\varphi(a) = 0$ $\varphi(a)(x) = 0$ $\forall x$ cioè

$f_a(x) = 0$ $\forall x$ cioè $a = 0$

(iii) A commutativo $\Rightarrow X_A$ commutativo?

$\boxed{\text{Sì}}$ $\forall f,g \in X_A$ voglio mostrare che $fg = gf$

$$fg(x) = f(x)g(x) \overset{A \text{ comm}}{=} g(x)\cdot f(x) = gf(x)$$

(iv) Se A UFD $\Rightarrow X_A$ è UFD?

NO Se A è UFD è un dominio $\not\Rightarrow$ X_A sia Dominio

$\mathbb{Z} = A$ $X = \{x, y\}$

$$f : X \longrightarrow \mathbb{Z},\ x \longmapsto 1,\ y \longmapsto 0 \qquad g : X \longrightarrow \mathbb{Z},\ x \longmapsto 0,\ y \longmapsto 1$$

$fg = 0$ ma né f, né g sono 0

Dunque X_A <u>NON</u> è un dominio $\Rightarrow$ X_A <u>NON</u> è UFD

Esercizio 1:

G gruppo Risolubile

$G = G_0 \supset G_1 \supset \_\_\_\_ \supset G_n = \{e\}$

Catena <u>FINITA</u> tale che G_i / G_{i+1} Abeliano $\forall i = 0, \_, n-1$

<u>Oss</u>: Se G abeliano è risolubile $\qquad \mathbb{Z}/_{10} > \{0,5\}$

$G \rhd \{e\}$

$\{0,2,4,6,8\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\mathbb{Z}/_{10} \rhd \{e\} \qquad\qquad \mathbb{Z}/_{10} \rhd \mathbb{Z}_5 \rhd \{e\}$

(i) Se G e K sono risolubili, allora $G \times K$ è risolubile

<u>Dim</u>: $G = G_0 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$ Catena per G

$K = K_0 \supset \_\_\_\_ \supset K_m = \{e\}$ Catena per K

Considero la seguente catena

$G \times K = G_0 \times K_0 \supset G_1 \times K \supset \dots \supset G_n \times K \cong [K \supset$

$\supset K_1 \supset \dots \supset K_m = \{e\}$

[Questa catena (in maniera sensata, nell'ordine giusto) funziona anche per $G \rtimes K$.]

$G_i \times K / G_{i+1} \times K$ è abeliano

e questo è sufficiente in quanto da K in poi è già una catena corretta

$F: G_i \times K \longrightarrow G_i / G_{i+1}$

$(x, k) \longmapsto x G_{i+1} = \overline{x}$

$\ker F = \{(x,k) \mid xG_{i+1} = G_{i+1}\} = \{(x,k) \mid x \in G_{i+1},\ k \in K\} = G_{i+1} \times K$

Quindi $\dfrac{G_i \times K}{G_{i+1} \times K} \simeq \underset{G_i/G_{i+1}}{\mathrm{Im}F \shortparallel}$, ma $\mathrm{Im}F <$ Abeliano $\Rightarrow \mathrm{Im}F$ Abeliano

cioè $\dfrac{G_i \times K}{G_{i+1} \times K}$ è abeliano

(ii) $H < G$, allora H è risolubile

$G = G_0 \supset G_1 \supset \_\_\_\_\_ \supset G_n = \{e\}$

Voglio costruire una Catena per H. Prendo

$H = H \cap G_0 \supset H \cap G_1 \supset \ldots \supset H \cap G_n = \{e\}$

Dobbiamo dimostrare che $H \cap G_i / H \cap G_{i+1}$ è gruppo abeliano

$$F: H \cap G_i \longrightarrow G_i/G_{i+1} \qquad F: H \cap G_i \hookrightarrow G_i \longrightarrow G_i/G_{i+1}$$

$$x \longmapsto xG_{i+1} = \bar{x}$$

$\ker F = \{x \in H \cap G_i \mid xG_{i+1} = G_{i+1}\} = \{x \in H \cap G_i \mid x \in G_{i+1}\} \overset{G_i \supset G_{i+1}}{\boxed{=}} \{x \in H \cap G_{i+1}\} = H \cap G_{i+1}$

$$\frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i+1}} \simeq \mathrm{Im}F$$

e ho finito perché $\mathrm{Im}F < G_i/G_{i+1}$ che è abeliano.

(iii) G risolubile $\Longleftrightarrow [G,G]$ è risolubile ($[G,G]$ = commutatori)

$\boxed{\Rightarrow}$ Deriva da (ii) in quanto $[G,G]$ è sottogruppo di G.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si usa il fatto che $G/[G,G]$ è abeliano

$[G,G] = G_0 \supset \_\_\_\_\_ \supset G_n = \{e\}$ $\rightarrow$ ce l'ho per ipotesi

$$[G,G] = G_0 \supset \_\_\_\_ \supset G_n = \{e\}$$ → ce l'ho per ipotesi

$$\Downarrow$$

$$G \supset [G,G] \supset G_1 \supset \_\_\_\_ \supset G_n = \{e\}$$

e questa è catena per G

(iv) G risolubile $\iff$ G è risolubile per commutatori

G è ris. per commutatori se

$$G \supset [G,G] = G_1 \supset [G_1, G_1] = G_2 \supset \_\_\_\_ \supset [G_{n-1}, G_{n-1}] = G_n = \{e\}$$

è una catena finita che arriva a $\{e\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se è risolubile per commutatori, allora $\exists$ una catena per G. Dunque G è risolubile

$\boxed{\Rightarrow}$ So che G è risolubile

$$G = G_0 \supset \_\_\_\_ \supset G_n = \{e\}$$

Per induzione su n = lunghezza della catena. ris con lungh n ⇒ ris per com con lungh n

$\boxed{n=1}$ $G_0 \supset G_1 = \{e\}$

Se ho una catena lunga 1, allora $G = G_0$ è abeliano perché

$$G_0/G_1 = G_0/\{e\} = G_0 \text{ abeliano.}$$

⇒ È risolubile per commutatori

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

$$G = G_0 \supset G_1 \_\_\_\_ \supset G_{n+1} = \{e\}$$ catena di risolubilità.

G_1 è risolubile con catena lunga n. Dunque G_1 è risolubile per commutatori. Dunque

$$G_1 \supset [G_1, G_1] = H_1 \supset [H_1, H_1] = H_2 \supset \_\_\_\_ \supset H_n = \{e\}$$

è la catena per G_1 dei commutatori.

$$G_0 \supset G_1 \supset H_1 \supset \_\_\_ \supset H_n$$

$$G_1 \supset [G_0, G_0]$$

$\Rightarrow [G_0, G_0]$ è risolubile, la sua catena è lunga n perché la ottengo come detto in (ii). Ma allora $[G_0, G_0]$ è ris per commutatori di lungh n.

Prendo $G_0 \supset [G_0, G_0] \supset \ldots \supset \{e\}$.

Osserviamo che effettivamente la catena per commutatori trovata ha lungh $n+1$

2-Sylow di S_n

Approccio Induttivo.

$S_1 = \{e\}$ $\quad \{e\} = A_0$

$S_2 \cong \mathbb{Z}/2$ $\quad \mathbb{Z}/2 = A_1 \quad (1,2)$

S_3 la più grande pot. di 2 che divide $3! = 6$ è 2 dunque il 2-sylow $\cong \mathbb{Z}/2$

$\langle (1,2) \rangle < S_3 \qquad A_1 \times A_0$

$S_4 \quad |S_4| = 24$ ma il 2-sylow ha # 8

$$\underset{\substack{\wr\wr \\ A_1}}{\langle (1,2) \rangle} \times \underset{\substack{\wr\wr \\ A_1}}{\langle (3,4) \rangle}$$

Aggiungo il sottogruppo che scambia i due A_1

Aggiungo $\langle (1,3)(2,4) \rangle = B \qquad (A_1 \times A_1) \rtimes B = A_2$

$S_5 \quad |S_5| = 120 \rightsquigarrow$ 2-sylow ha # 8

$$A_2 \times A_0$$

$S_6 \quad \# = 16 \qquad \underset{(1,2,3,4)}{A_2} \times A_1$ ↖ utilizzando $(5,6)$

S_7 $\# = 16$ $A_2 \times A_1 \times A_0$

S_8 $\# = 16 \cdot 8$ $(\overset{8}{A_2} \times \overset{8}{A_2}) \rtimes \overset{2}{B}$ $B = \langle (15)(2,6)(3,7)(4,8) \rangle$

$(1,2,3,4)$ $(5,6,7,8)$

$\shortparallel$ A_3

S_9 $\# = 16 \cdot 8$ $A_3 \times A_0$

S_{10} $A_3 \times A_1$

S_{11} $A_3 \times (A_1 \times A_0)$

S_{12} $A_3 \times A_2$

S_{13} $A_3 \times A_2 \times A_0$

S_{14} $A_3 \times A_2 \times A_1$

S_{15} $A_3 \times (A_2 \times (A_1 \times A_0))$ $\{1, \ldots, 8\}$ $\{9, \ldots, 16\}$ $A_3 \times A_3$ $B = \langle (1,9)(2,10)(3,11) \ldots (8,16) \rangle$

S_{16} A_4

$10 = 1010$

$n \rightsquigarrow$ lo scrivo in base 2 e prendo $\times_{i \in I} A_i$

$I = \{$ Le cose $\neq 0$ nelle scritture in base 2 $\}$

$A = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue $($ Anello

- $M_\gamma = \{ f \mid f(\gamma) = 0 \}$ è Massimale? Si
-

Prendo $g \notin M_\gamma$ $(M_\gamma, g) = A$

$g^2 + (x-\gamma)^2 > 0$ Sempre $\Rightarrow$ C'è l'inverso quindi è Suriettiva

$y^2 + (x-\gamma)^2 > 0$ Sempre $\Rightarrow$ C'è l'inverso, quindi è scoppiato

Definisco $\mathcal{F} = \{ I \subset A \mid I \neq M_\gamma \}$ per Zorn l'elemento max