Analisi Matematica 1 - Dispensa sul Calcolo Integrale [Prima bozza incompleta]

Luca Lombardo

Aggiornata al 15/06/2020

Questo capitolo si basa sulla definizione di integrale di Riemann che dipende fortemente dalla struttura ordinata della retta reale. La teoria dell'integrazione risponde ad una duplice esigenza: risolvere il *problema della misura* (dare metodi generali per il calcolo di aree e volumi) e risolvere il *problema della primitiva* (che consiste nel cercare una funzione avente come derivata la funzione assegnata).

1 Integrale di Riemann

Considero una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata

DEFINIZIONE 1.1 Decomposizione Si chiama *decomposizione* (*o partizione, suddivisione*) di $[a, b]$ un insieme finito

$$D = \{x_0, x_1, ..., x_p\}$$

Tale che $a = x_0 < x_1 < ... < x_p = b$

Si denota con $\mathbb{D}([a, b])$ la somma di tutte le decomposizioni di $[a, b]$

DEFINIZIONE 1.2 Finezza di una decomposizione Date due decomposizioni D', D'' dell'intervallo $[a, b]$ diremo che D'' è *più fine* di D' se $D' \subset D''$

Quindi, se D'' è più fine di D', la decomposizione D'' è ottenuta intercalando altri punti fra i punti di D''; perciò ogni intervallo di D' si spezza in un numero finito di intervalli, che fanno parte della suddivisione D''

La relazione di finezza (che viene a coincidere con una relazione di inclusione fra insiemi) è evidentemente una relazione d'ordine. Inoltre, date due decomposizioni D', D'' ne esiste sempre una più fine entrambe: basti considerare $D' \cup D''$ per esempio. Le decomposizioni di un insieme $[a, b]$ vanno a costituire un *insieme diretto (o filtrante)*

DEFINIZIONE 1.3 Ampiezza di una decomposizione Data una decomposizione $D = \{x_0, ..., x_p\}$ di $[a.b]$, si dice *ampiezza* D il numero:

$$|D| = \max_{1 \le i \le p} (x_i - x_{i-1})$$

DEFINIZIONE 1.4 Somma inferiore Sia $D \in \mathbb{D}([a, b])$. Poniamo:

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Che sappiamo appartenere ai reali poiché la funzione è limitata

Il numero reale:

$$s(D, f) = (x_1 - x_0)m_1 + ... + (x_p - x_{p-1})m_p = \sum_{i=0}^{p} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Si dice somma inferiore relativa alla decomposizione D

DEFINIZIONE 1.5 Somma superiore Sia $D \in \mathbb{D}([a, b])$. Poniamo:

$$M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Il numero reale:

$$S(D, f) = (x_1 - x_0)M_1 + ... + (x_p - x_{p-1})M_p = \sum_{i=0}^{p} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Si dice somma superiore relativa alla decomposizione D

Considero ora i due insiemi:

$$A = \{s(D, f) : \ D \in \mathbb{D}([a, b])\} \qquad B = \{S(D, f) : \ D \in \mathbb{D}([a, b])\}$$

I valori $supA$ e $infB$ prendono rispettivamente il nome di *integrale inferiore* e *integrale superiore* di f in $[a, b]$

OSSERVAZIONE 1.1 Dato che $m_i \le M_i \ \forall \ i = 1, 2, ..., p$ e inoltre $(x_i - x_{i-1}) > 0 \ \forall i = 1, 2, ..., p$ allora:

$$s(D, f) \le S(D, f) \quad \forall D \in \mathbb{D}([a, b])$$

In altre parole: una qualunque somma inferiore è minore uguale di una qualunque somma superiore.

OSSERVAZIONE 1.2 Notiamo che $S(D, f)$ e $s(D, f)$ sono numeri reali ben definiti grazie al fatto che stiamo supponendo f limitata: altrimenti qualcuno fra i numeri M_i e m_i potrebbe essere infinito. Ci aspettiamo infatti che infittendo sempre di più i nodi, le somme superiori ed inferiori forniscano una approssimazione sempre più accurata dell'area della regione che ci interessa

LEMMA 1.1 PROPOSIZIONE: Sia $D \in \mathbb{D}([a, b])$, con $D = \{x_0, x_1, ..., x_p\}$ e sia $x^* \in]x_{i-1}, x_i[$. Poniamo $D^* = D \cup \{x^*\}$. Allora:

$$s(D, f) \leq s(D^*, f) \quad (1)$$
$$S(D, f) \geq S(D^*, f) \quad (2)$$

DIMOSTRAZIONE (1)

Considero la differenza:

$$s(D, f) - s(D^*, f) = [(x^* - x_{i-1})\bar{m}_i + (x_i - x_{i-1})\bar{\bar{m}}_i]$$

Dove:

$$\bar{m}_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x^*]\}$$

$$\bar{\bar{m}}_i = inf\{f(x) : x \in [x^*, x_i]\}$$

Poiché

$\bar{m}_i \geq m_i, \ \bar{\bar{m}}_i \geq m_i$ e considerando che $[x_{i-1}, x^*] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$ e $[x^*, x_i] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$ allora:

$$s(D, f) - s(D^*, f) \geq [(x^* - x_{i-1})m_i + (x_i - x_{i-1})] - (x_i - x_{i-1})m_i = 0$$

Da cui:

$$s(D, f) \leq s(D^*, f)$$

□

OSSERVAZIONE 1.3 Il lemma appena dimostrato ci dice dunque che la funzione *somma inferiore* definita nell'insieme ordinato delle suddivisioni, è non decrescente. Mentre la funzione *somma superiore* è non crescente

TEOREMA 1.1

Siano gli insiemi A e B come prima

IPOTESI: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ limitata

TESI: $\sup A \leq \inf B$

DIMOSTRAZIONE:

Voglio dimostrare che:

$$s(D', f) \leq S(D'', f) \qquad \forall D', D'' \in \mathbb{D}([a, b])$$

Si hanno due casi:

- $D' = D'' = D = \{x_0, x_1, ..., x_p\}$

Allora:

$$s(D', f) = s(D, f) = \sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(D, f) = S(D'', f)$$

Il che implica:

$$s(D', f) \leq S(D'', f)$$

Passiamo ora al secondo caso

- $D' \neq D''$

Sia D^* la decomposizione di $[a, b]$ ottenuta considerando sia i punti appartenenti a D' sia i punti appartenenti a D'' Avremo allora che:

$$D' \subseteq D^* \qquad\qquad D'' \subseteq D^*$$

otteniamo quindi rispettivamente che

$$s(D', f) \leq s(D^*, f) \qquad\qquad S(D'', f) \geq S(D^*, f)$$

Ne segue:

$$s(D', f) \leq s(D*, f) \leq S(D^*, f) \leq S(D'', f)$$

Cioè la tesi cercata:

$$s(D', f) \leq S(D'', f) \qquad \forall D', D'' \in \mathbb{D}([a, b])$$

$\square$

1.1 Funzione Reimann Integrabile

Dati come prima i due insiemi:

$$A = \{s(D,f) : \ D \in \mathbb{D}([a,b])\} \qquad B = \{S(D,f) : \ D \in \mathbb{D}([a,b])\}$$

Sia $f[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. La funzione si dice integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ quando:

$$\sup A = \inf B$$

Si pone[1] $\int_{[a,b]} f(x)dx = supA = infB$

Il senso del simbolo $\int$ è quello di ricordarci che si fa il limite di somme finite di aree di rettangolini, la cui base è un intervallo dell'asse delle x centrato nel punto x di ampiezza *piccolissima* pari a dx, e la cui altezza è un intervallo dell'asse y di lunghezza pari $|f(x)|$, presa col segno di $f(x)$

DEFINIZIONE 1.6 Sia $f[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Allora l'insieme:

$$R_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Si dice *rettangoloide* individuato a f. Se f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, allora poniamo per definizione

$$area(R_f) = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

Chiamiamo *plurirettangoli* l'unione della famiglia finita di rettangoli con i lati paralleli agli assi, non sovrapposti.

Allora la somma inferiore relativa ad una certa decomposizione $D' = \{x'_0, ..., x'_p\}$ rappresenta l'area di un plurirettangolo R' contenuto in R_f; i rettangoli che lo compongono hanno come base gli intervalli $[x'_{i-1}, x'_i]$ e, fra quelli contenuti in R_f, hanno altezze massime. Un plurirettangolo con queste caratteristiche si dice *iscritto* in R_f.

Analogamente la somma superiore relativa dalla decomposizione $D'' = \{x''_0, ..., x''_p\}$ rappresenta l'area di un plurirettangolo R'' che contiene R_f. Tra i plurirettangoli con basi $[x''_{i-1}, x''_i]$, R'' è il minimo plurirettangolo contente R_f; esso prende il nome di plurirettangolo *circoscritto* a R_f. Si ha dunque $R' \subset R_f \subset R''$.

[1]Scrivere $\int_{[a,b]} f(x)dx$ è solo una maniera leggermente più elegante di scrivere $\int_a^b f(x)dx$

Quanto detto afferma che si possono trovare due plurirettangoli, uno circoscritto ed uno iscritto, le cui aree differiscono fra loro meno di un valore molto piccolo ϵ. Dunque se f è una funzione integrabile risulta ragionevole attribuire a R_f un area uguale all'elemento separatore delle classi numeriche descritte dalle aree dei plurirettangoli iscritti e circoscritti, cioè uguale all'integrale di f

TEOREMA 1.2 Condizione caratteristica per l'integrabilità

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:

1. f integrabile secondo Riemann in $[a, b]$
2. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ D_\epsilon \in \mathbb{D}([a, b]) : S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$

DIMOSTRAZIONE $(1 \Rightarrow 2)$

Per ipotesi sappiamo che

$$supA = infB = I \in \mathbb{R}$$

Fisso $\epsilon > 0$. Dal fatto che $supA = I$ ottengo che (per la seconda proprietà del sup):

$$\exists\ D' \in \mathbb{D}([a, b]) : s(D', f) > I - \frac{\epsilon}{2}$$

Da $infB = I$ ottengo (per la seconda proprietà dell'inf):

$$\exists\ D'' \in \mathbb{D}([a, b]) : S(D'', f) < I + \frac{\epsilon}{2}$$

Considero $D_\epsilon = D' \cup D''$. Per il Lemma 1.1 otteniamo che

$$s(D_\epsilon, f) \geq s(D', f) > I - \frac{\epsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad -s(D_\epsilon) < -I + \frac{\epsilon}{2}$$

$$S(D_\epsilon, f) \leq S(D'', f) < I + \frac{\epsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad S(D_\epsilon) < I + \frac{\epsilon}{2}$$

Sommando membro a membro si ottiene che:

$$S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$$

DIMOSTRAZIONE $(2 \Rightarrow 1)$

Sappiamo che $supA \leq infB$, per ottenere la tesi cercata dobbiamo provare che $supA = infB$. Basta quindi dimostrare che:

$$0 \leq infB - supA \leq \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

Fisso $\epsilon > 0$. Per ipotesi so che

$$\exists\ D_\epsilon \in \mathbb{D}([a, b]) : \ S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$$

Da questo sappiamo pure che:

$$S(D_\epsilon, f) \geq infB \qquad \text{per la prima proprietà dell'}inf$$

$$s(D_\epsilon, f) \leq supA \qquad \text{per la prima proprietà dell'}sup$$

Questo implica che:

$$-s(D_\epsilon, f) \geq -supA$$

Allora otteniamo che:

$$infB - supA \leq S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$$

Cioè la tesi cercata:

$$infB - supA < \epsilon$$

□

COROLLARIO 1.1

La condizione appena espressa nel Teorema 2 può essere riscritta utilizzando la definizione di *oscillazione* di una funzione in un intervallo.

PROPOSIZIONE: Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ se e solo se $\exists D \in \mathbb{D}([a,b])$ $D = \{x_0, ..., x_n\}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} osc[x_{i-1}, x_i], f(x_{i-1}, x_i) < \epsilon$$

OSSERVAZIONE 1.4 Funzione di Dirichlet Non tutte le funzioni sono Reimann integrabili però, un esempio famoso è quello della funzione di Dirichelt: poiché in ogni intervallo (non degenere) vi sono sia punti razionali che punti irrazionali.

Considero $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se $D = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ è una delle decomposizione di $[a,b]$ allora:

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$$

Poichè $[x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Mentre

$$M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$$

Poichè $[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Dunque:

$$s(D_\epsilon, f) = 0 \qquad \text{mentre} \qquad S(D_\epsilon, f) = b - a$$

Allora avremo che:

$$A = \{0\} \Rightarrow supA = 0 \qquad\qquad B = \{b - a\} \Rightarrow infB = b - a$$

Cioè:

$$supA < infB$$

Di conseguenza, per la condizione necessaria per la Reimann-integrabilità, la *funzione di Dirichlet non è Riemann integrabile*

1.2 Proprietà dell'integrale di Riemann (da rivedere e ampliare)

Consideriamo una funzione $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Sappiamo che $\forall\ [\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ risulta $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Si pone quindi per definizione:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \alpha = \beta \\ \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx & \alpha < \beta \\ \displaystyle -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx & \alpha > \beta \end{cases}$$

TEOREMA 1.3 Proprietà distributiva

IPOTESI: Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e siano $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$

TESI: Sia $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ e risulta

$$\int_{[a,b]} (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_{[a,b]} f_1(x)dx + c_2 \int_{[a,b]} f_2(x)dx$$

Equivale a dimostrare che $\mathcal{R}([a,b])$ è uno spazio vettoriale

TEOREMA 1.4 Positività

IPOTESI: Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ con $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

TESI: $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)dx \geq 0$

DIMOSTRAZIONE:

Dato che $f \geq 0$ in $[a,b]$ allora

$$\forall D \in \mathbb{D}([a,b]),\ \text{con}\ D = \{x_0, x_1, ..., x_p\}$$

Si ha che:

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \geq 0 \qquad \forall i = 0, 1, ..., p$$

E allora

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Per definizione di integrale di Riemann segue che

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = supA \geq s(D,f) \geq 0$$

□

TEOREMA 1.5 Proprietà additiva

IPOTESI: Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e sia $c \in]a,b[$

TESI: Considero $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{R}([c,b])$ allora si ha:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,c]} f(x)dx + \int_{[c,b]} f(x)dx$$

TEOREMA 1.6 Proprietà di monotonia

- CASO 1

IPOTESI: Siano $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ tale che $f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a,b]$

TESI: $\int_{[a,b]} f(x)dx \leq \int_{[a,b]} g(x)dx$

DIMOSTRAZIONE:

Per la proprietà distributiva si ha che

$$\int_{[a,b]} (g(x) - f(x))dx = \int_{[a,b]} g(x)dx - \int_{[a,b]} f(x)dx$$

Dato che $g(x) - f(x) \geq 0$ per ipotesi, allora pure $\int_{[a,b]} (g(x) - f(x))dx \geq 0$. Ne segue che

$$\int_{[a,b]} g(x)dx - \int_{[a,b]} f(x)dx \geq 0$$

□

- CASO 2

IPOTESI: Siano $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ tale che per $x \to b^-$ si abbia $f/g \to 0$

TESI: Allora risulta che se l'integrale di g è convergente allora anche l'integrale di f è convergente mentre se l'integrale di f è divergente anche l'integrale di g è divergente.

DIMOSTRAZIONE:

Il fatto che per $x \to b^-$ si abbia $f/g \to 0$ implica che $\exists\ c \in [a,b[$ tale che $\forall x \in [c,b[$ si ha $f/g \leq 1$ cioè $f(x) \leq g(x)$. Dunque per il caso precedente e per l'additività dell'integrale possiamo affermare che

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b g = \int_a^c f + \int_a^b g - \int_a^c g$$

Sappiamo che gli integrali di f e g su $[a, c]$ sono convergenti in quanto f e g sono limitate appartengono a $\mathcal{R}([a, c])$. Dunque se l'integrale da a a b di $g(x)$ converge anche quello di $f(x)$ lo farà, lo stesso per il viceversa.

$\square$

- Caso 3

Ipotesi: Siano $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ tale che per $x \to b^-$ si abbia $f/g \to 1$

Tesi: Allora risulta che i seguenti integrali hanno lo stesso carattere

$$\int_a^b f(x)d(x) \qquad \int_a^b g(x)dx$$

Dimostrazione:

Il fatto che per $x \to b^-$ si abbia $f/g \to 1$ implica che $\exists\ c \in [a, b[$ tale che

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2 \qquad \forall x \in [c, b[$$

Si avrà quindi

$$f(x) \leq 2g(x), \qquad g(x) \leq 2f(x)$$

e si procede come nel caso precedente

$\square$

OSSERVAZIONE 1.5 Nei casi più freqeunti questa proprietà si applica confrontando la funzione con una potenza del tipo

$$(x - x_0)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

TEOREMA 1.7 Proprietà di isotomia

Ipotesi: Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$ con $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$

Tesi: $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ risulta $f \in R([\alpha, \beta])$ con

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \geq \int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx$$

TEOREMA 1.8 Proprietà di simmetria

Proposizione: Sia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Allora se f è pari si ha che

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Se invece f è dispari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Dimostrazione: (funzione pari)

Per la *proprietà additiva* sappiamo che

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Per ipotesi sappiamo che f è pari e che quindi $\forall x \in [-a, a]$ si ha $f(x) = f(-x)$. Applicando un semplice cambio di variabile si ottiene che

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)d((-x) = -\int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

Abbiamo così ottenuto il risultato cercato per integrali di funzioni pari in intervalli *simmetrici*

Dimostrazione: (funzione dispari)

Questa dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella precedente: basti notare che, per definizione di funzione dispari, abbiamo che $\forall x \in [-a, a]$ allora $-f(x) = f(-x)$. Da qui in poi si procede come prima.

TEOREMA 1.9

Siano $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ e sia $c \in]a, b[$. Consideriamo la funzione $h(x)$ così definita

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, c[\\ g(x) & x \in [c, b] \end{cases}$$

Allora si ha

$$\int_{a}^{b} h(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} g(x)dx$$

1.3 Teoremi della media

DEFINIZIONE 1.7 Valore medio Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$ il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

viene detto *media* o *valore medio* di f in $[a, b]$

TEOREMA 1.10 Teorema della media

IPOTESI: Sia $f \in R([a.b])$ e siano rispettivamente il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore:

$$M = sup\{f(x) : x \in [a.b]\} \qquad m = inf\{f(x) : x \in [a.b]\}$$

TESI: $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Vogliamo quindi provare che il valore medio di f è compreso fra il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore.

DIMOSTRAZIONE

Per definizione abbiamo che $\int_a^b f(x)dx = supA = infB$. considero allora una decomposizione $D \in \mathbb{D}([a, b])$ tale che $D = \{a, b\}$. Avremo allora che:

$$s(D, f) = (b-a)m \ \in A$$

$$S(D, f) = (b-a)M \ \in B$$

Segue che:

$$s(D, f) \leq supA \Longrightarrow (b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$S(D, f) \geq infB \Longrightarrow (b-a)M \geq \int_a^b f(x)dx$$

Cioè la tesi cercata:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

□

OSSERVAZIONE 1.6 Da un punto di vista geometrico il concetto è molto semplice: se $f > 0$ in $[a, b]$ allora sappiamo che $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta l'area del rettangoloide sotteso al grafico.

Se consideriamo i due rettangoli

$$\Delta_1 = [a, b] \times [0, m] \qquad \qquad \Delta_2 = [a, b] \times [0, M]$$

Avremo che

- $Area(\Delta_1) = (b - a)m$
- $Area(\Delta_2) = (b - a)M$
- $Area(\mathbb{R}_f) = \int_a^b f(x)dx$

Con

$$Area(\Delta_1) \leq Area(R_f) \leq Area(\Delta_2)$$

TEOREMA 1.11

Ipotesi: Sia $f \in C^0([a, b])$ una funzione Riemann integrabile

Tesi: $\exists\ c \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

Dimostrazione:

Dal teorema di Weierstrass sappiamo che la funzione f ammette massimo e minimo:

$$M = max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$
$$m = min\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Dal teorema della media abbiamo che:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Adesso posto $\delta = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)$ per il Teorema dei valori intermedi otteniamo che:

$$\exists\ c \in [a, b] : \delta = f(c)$$

$\square$

2 Classi di funzioni integrabili

Denotiamo con $\mathcal{R}([a,b])$ la famiglia delle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$

2.1 Integrabilità delle funzioni monotone

TEOREMA 2.12

Ipotesi: Sia $f(a,b) \to \mathbb{R}$ monotona

Tesi: $f \in \mathcal{R}([a,b])$

Dimostrazione

Supponiamo ad esempio che sia monotona crescente, gli altri casi sono analoghi.

Per avere la tesi devo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \; D_\epsilon \in \mathbb{D}([a,b]) : S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e scegliamo $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ il quale è positivo dato che $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Considero la decomposizione $D_\epsilon \in \mathbb{D}([a,b])$ con $D_\epsilon = \{x_1, ..., x_p\}$ tale che

$$a = x_0 < ... < x_p = b \quad \text{e} \quad x_i - x_{i-1} < \delta_\epsilon \quad \forall i = 1, ..., p \qquad (1)$$

Si ha allora:

- $m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1})$ poiché f monotona crescente.
- $M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)$ poiché f monotona crescente.

Dunque

$$s(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) = \sum_{n=1}^{p} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{n=1}^{p} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})$$

Utilizzando la (1) otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{p} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{n=1}^{p} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} =$$

$$\frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{n=1}^{p} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_p) - f(x_0)) = \epsilon$$

Da cui segue la tesi:

$$S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$$

$\square$

2.2 Integrabilità delle funzioni continue

TEOREMA 2.13

Ipotesi: Sia $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$

Tesi: $f \in \mathcal{R}([a,b])$

Dimostrazione

Per ottenere la tesi devo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \ D_\epsilon \in \mathbb{D}([a,b]) : S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) < \epsilon$$

Fisso $\epsilon > 0$. Per il *Teorema di Weierstrass* sappiamo che la funzione è limitata in $[a,b]$. Grazie a questo, per il *Teorema di Cantor*, f è uniformemente continua in $[a.b]$.

In corrispondenza a $\dfrac{\epsilon}{b-a} > 0, \ \ \exists \ \delta_\epsilon > 0 : \forall x', x'' \in [a,b]$ con $[x' - x''] < \delta_\epsilon$ risulta:

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad (1)$$

Scelgo $D_\epsilon \in \mathbb{D}([a,b])$ con $D_\epsilon = \{x_1, ..., x_p\}$ tale che

$$a = x_0 < ... < x_p = b \quad \text{e} \quad x_i - x_{i-1} < \delta_\epsilon \quad \forall i = 1, ..., p \qquad (2)$$

Allora per il teorema di Weierstrass:

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(\alpha_i) \quad \text{con } \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(\beta_i) \quad \text{con } \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Dunque

$$S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) = \sum_{n=1}^{p} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{n=1}^{p} (f(\beta_i) - f(\alpha_i))(x_i - x_{i-1}) \qquad (3)$$

Dato che $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ allora $|\alpha_i - \beta_i| \leq |x_i - x_{i-1}|$. Mentre grazie alla (2) si ha $x_i - x_{i-1} < \delta_\epsilon$.

Per quanto detto sopra abbiamo che $|\alpha_i - \beta_i| < \delta_\epsilon$ e possiamo usare la (1) per ottenere che:

$$|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| = f(\beta_i) - f(\alpha_i)$$

Poiché $f(\beta_i) > f(\alpha_i)$. Andiamo a sostituire nella (3) quanto ottenuto fin ora:

$$S(D_\epsilon, f) - s(D_\epsilon, f) = \sum_{n=1}^{p} (f(\beta_i) - f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{n=1}^{p} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{n=1}^{p} (b-a) = \epsilon$$

$\square$

COROLLARIO 2.2

IPOTESI: Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e poniamo $M = \sup_{[a,b]} f$ e $m = \inf_{[a,b]} f$. Considero la funzione $\Gamma : [m, M] \to \mathbb{R}$ continua.

TESI: $\Gamma \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$

2.3 Integrabilità delle funzioni generalmente continue

DEFINIZIONE 2.8 Generale continuità Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, denotiamo con D_f l'insieme dei punti di discontinuità di f. La funzione f si definisce *generalmente continua* se il derivato di D_f è uguale all'insieme vuoto; ovvero se in ogni sotto-intervallo limitato di $[a,b]$ ammette al più un numero finito di punti di discontinuità.

Ad esempio la funzione $[x]$ (*parte intera*) è generalmente continua perché discontinua solo nei numeri interi.

Una caratteristica come quella della generale continuità è una caratteristica di tipo *puntuale*, cioè soddisfatta *quasi ovunque*. Si faccia attenzione a non confondere questa dicitura con *ad eccessione al più di un insieme di misura nulla*.

TEOREMA 2.14

IPOTESI: Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e generalmente continua in $[a,b]$. Allora essa ammette un numero finito di punti di discontinuità che chiamiamo $c_1, ..., c_n$

TESI: Allora $f \in \mathcal{R}([a,b])$ se lo è in ogni intervallo (c_k, c_{k-1}) $\forall k = 0, 1, ..., n$ ove abbiamo posto $c_0 = a$ e $c_n = b$. In tal caso si pone:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$$

OSSERVAZIONE 2.7 Questo teorema mette in luce un importante proprietà dell'integrale (sugli intervalli limitati), quella di invarianza: se una funzione limitata e integrabile viene alterata in un numero finito di punti, la funzione ottenuta è ancora limitata ed integrabile ed il valore dell'integrale rimane invariato.

Se invece l'intervallo considerato fosse una semiretta del tipo $(a, +\infty)$ allora si può decomporre in un numero finito o un in un'infinità numerabile di intervalli aperti $I_n = (a_k, a_{k+1})$ in ciascuno dei quali f è continua. In tal caso allora si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$$

La funzione sarà integrabile se $\sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx < \infty$ dove la sommatoria è fatta su un numero finito di addenti (allora sarà ovvia la risposta) o su un numero infinito di addendi.

DEFINIZIONE 2.9 **Trascurabile** Consideriamo un insieme $E \subset \mathbb{R}$, esso si definisce trascurabile [2] se

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \{I_i\}_{i \in \mathbb{N}} \ \text{ dove } \ \{I_i\} = (\alpha_i, \beta_i) \quad \text{con} \quad E \subset \bigcup_i I_i$$

Tale che

$$\sum_n (b_i - a_i) \leq \epsilon$$

OSSERVAZIONE 2.8 Se l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ è numerabile allora E è ovviamente trascurabile, basti pensare

$$E = \{x_1, ..., x_n, ...\} \qquad I_k = (x_k - \frac{\epsilon}{2^{k+\gamma}}, x_k + \frac{\epsilon}{2^{k+\gamma}})$$

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$$

Una volta introdotta la definizione di *trascurabile* possiamo enunciare un importante teorema. Nel 1907 *Giuseppe Vitali* e *Henri Lebesgue*, indipendentemente uno dall'altro, trovarono che si possono caratterizzare in modo elegante le funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura di Lebesgue. Grosso modo, le funzioni integrabili secondo Riemann sono quelle i cui punti di discontinuità formano un insieme di misura nulla secondo Lebesgue, e per loro l'integrale secondo Riemann e secondo Lebesgue coincidono.

[2] Ha misura nulla secondo Lebesque

TEOREMA 2.15 Teorema di Vitali - Lebesque

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata[3]. Allora sono equivalenti

- f integrabile secondo Riemann
- L'insieme dei punti di discontinuità di f è trascurabile per la misura di Lebesgue.

Se valgono le condizioni, allora f è misurabile e integrabile anche secondo Lebesgue e gli integrali secondo Riemann e secondo Lebesgue coincidono.

OSSERVAZIONE 2.9 L'insieme di Cantor Il fatto che un insieme al più numerabile sia di misura nulla non implica che non possano esistere insiemi di misura nulla più che numerabili, l'esempio più famoso è *L'insieme di Cantor*

Cerchiamo di definirlo molto velocemente:

Consideriamo due funzioni[4] $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definite:

$$f(x) = \frac{x}{3} \qquad g(x) = 1 - \frac{1-x}{3} = \frac{x+2}{4} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Introduciamo la successione $\{C_n\}$ e l'insieme di Cantor C ponendo

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = f(C_n) \ \cup \ g(C_n) \qquad \text{con} \ \ n \in \mathbb{N} \qquad \text{tale che} \ \ C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

L'insieme C [5] ha alcune proprietà molto interessanti:

- C è chiuso
- C ha misura nulla secondo Peano - Jordan
- C è più che numerabile

DA CONTINUARE

[3]Il teorema appena enunciato può essere visto sotto un occhio ancora più generale, considerando una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitata e nulla al di fuori del limitato

[4]Per essere precisi sono delle *omotetie*

[5]A volte viene suggestivamete chiamato *polvere di Cantor*

2.4 Integrabilità del valore assoluto

TEOREMA 2.16

IPOTESI: Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$

TESI: $|f| \in R([a.b])$ e risulta $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

DIMOSTRAZIONE

- CASO 1: $f \geq 0$ in $[a,b]$

Questo caso è particolarmente banale in quanto essendo $|f| = f$ e $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$

- CASO 2: $f \leq 0$ in $[a,b]$

In questo caso abbiamo $|f| = -f$; quindi, dato che $f \in \mathcal{R}([a,b])$, per la *proprietà distributiva* si ha che $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ il che implica $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

Inoltre:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int_a^b -f(x)dx\right| = \left|-\int_a^b |f(x)|dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$$

- CASO 3: f cambia di segno in $[a,b]$

Iniziamo questo caso dando la definizione di *parte positiva* e *parte negativa* di una funzione:

$$f^+ = max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$f^- = max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Osserviamo che hanno della particolari proprietà:

1. $f^+ + f^- = |f|$
2. $f^+ - f^- = f$
3. $0 \leq f^+ \leq |f|$
4. $0 \leq f^- \leq |f|$

Proviamo per prima cosa che $f^+ \in \mathcal{R}([a,b])$ cioè che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ D_\epsilon \in \mathbb{D}([a,b]) : S(D_\epsilon, f^+) - s(D_\epsilon, f^+) < \epsilon$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e cerchiamo D_ϵ che soddisfi la mia tesi. Per ipotesi sappiamo che

$$\exists\ D_\epsilon^* \in \mathbb{D}([a,b]) : S(D_\epsilon^*, f) - s(D_\epsilon^*, f) < \epsilon$$

Poniamo allora $D_\epsilon = D_\epsilon^* = \{x_0, ..., x_p\}$ tale che $a = x_0 < ... < x_p = b$. Siano adesso:

$$m_i' = inf\{f^+(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad M_i' = sup\{f^+(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Allora risulta:

$$f \leq f^+ \quad \Longrightarrow \quad m_i \leq m_i' \quad \Longrightarrow \quad -m_i' \leq -m_i$$

Resta da provare che $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i \quad \forall i = 1, ..., p \qquad (1)$

(i) Se $M_i > 0 \Rightarrow \exists$ punti di $[x_{i-1}, x_i]$ in cui $f > 0 \Rightarrow M_i = M_i' \Rightarrow M_i' < m_i' \leq M_i - m_i$ cioè $-m_i' \leq -m_i$ che ci restituisce la (1)

(ii) Se $M_i \leq 0 \Rightarrow f \leq 0$ in $[x_{i-1}, x_i]$ e allora $M_i' - m_i' = 0 - 0 = 0 \leq M_i - m_i$ che ci restituisce a sua volta la (1)

Dunque da quanto detto otteniamo che :

$$S(D_\epsilon, f^+) - s(D_\epsilon, f^+) = \sum_{i=1}^{p} (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1})$$

Ma dalla (1) sappiamo che

$$\sum_{i=1}^{p} (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(D_\epsilon^*, f) - s(D_\epsilon^*, f) < \epsilon$$

Abbiamo quindi dimostrato che $f^+ \in \mathcal{R}([a,b])$; la dimostrazione per f^- è analoga.
Concludiamo questa dimostrazione provando la disuguaglianza della tesi fornendoci di quanto detto fino ad ora:

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| = \Big| \int_a^b (f^+ - f^-)dx \Big| = \Big| \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx \Big| \leq \Big| \int_a^b f^+(x)dx \Big| + \Big| \int_a^b f^-(x)dx \Big|$$

$$\int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx = \int_a^b (f^+ - f^-)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

Dunque:

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$\square$

OSSERVAZIONE 2.10 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Il fatto che $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ non implica che $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Basti pensare alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & \text{per } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Come si può ben vedere si ha $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$, ma $f \neq \mathcal{R}([a,b])$

TEOREMA 2.17 Teorema del Confronto

Ipotesi: Siano $f, g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in ogni intervallo $[a,c] \subset [a,+\infty[$ e supponiamo che sia g non negativa e sommabile su $[a,+\infty[$. Inoltre vale la la disuguaglianza $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \geq a$

Tesi: Allora anche f è sommabile su $[a,+\infty[$ e risulta

$$\Big|\int_a^{+\infty} f(x)dx\Big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Dimostrazione:

Supponiamo $f \geq 0$:, allora per ogni $c > a$, grazie alla monotonia dell'integrale, si ha

$$0 \leq \int_a^{c} |f(x)|dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Poichè f, essendo non negativa, ha certamente integrale improprio pari al pari di g, al limite per $c \to \infty$ troviamo

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

dato che g è sommabile allora anche f lo sarà.

Consideriamo ora f di segno variabile. Da quanto vista prima sappiamo che $|f|$ è sommabile in $[a,+\infty[$. Possiamo allora scrivere $\forall c > a$

$$\Big|\int_a^{c} f(x)dx\Big| \leq \int_a^{c} |f(x)|dx \leq \int_a^{c} g(x)dx$$

Resta da provare che f è sommabile in $[a,+\infty[$, una volta fatto ciò la stima precedente, passando al limite per $c \to \infty$ ci darà:

$$\Big|\int_a^{+\infty} f(x)dx\Big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Per verificarlo è sufficiente notare che

$$f(x) = |f(x)| - (|f(x)| - f(x))$$

ma allora, anche $|f| - f$ è sommabile visto che $0 \leq |f| - f \leq 2|f|$. Quindi la tesi.

$\square$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

DEFINIZIONE 3.10 Funzione integrale Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e sia $x_0 \in [a,b]$ fissato. Consideriamo la funzione $F : [a.b] \to R$ così definita

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

La funzione F è quindi ben definita[6] perché $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e prende il nome di *funzione integrale*

DEFINIZIONE 3.11 Primitiva Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua in $[a,b]$ e con $D_f = \{c_1, c_2, ..., c_p\}$ con $p < \infty$.

La funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di f quando:

- F è continua in $[a,b]$
- F è derivabile in $[a,b] \setminus \{c_1, c_2, ..., c_p\}$
- $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \ [a,b] \setminus \{c_1, c_2, ..., c_p\}$

TEOREMA 3.18 Teorema fondamentale del calcolo integrale

IPOTESI: Siano $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$; $\quad x_0 \in [a,b]$; $\quad F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$

TESI: Allora F è una primitiva di f, ovvero F è derivabile in $[a,b]$ e risulta

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\bar{x} \in [a,b]$, dobbiamo provare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x})$$

Si ha che

$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt\Big] = \frac{1}{h}\Big[\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt\Big]$$

Semplificando otteniamo

$$\frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt = \frac{1}{h}(\bar{x}+h-\bar{x})f(\gamma_h) = f(\gamma_h)$$

[6] Si noti che non è lecito scrivere $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, la variabile di integrazione non va confusa con gli estremi dell'intervallo di integrazione

Dove γ_h è un valore compreso tra $\bar{x}$ e $\bar{x}+h$. Dunque per quanto detto

$$\frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h}=f(\gamma_h)$$

Andando al limite per $h\to 0$ si ha che $\bar{x}+h\to\bar{x}$ e quindi di conseguenza $\gamma_h\to\bar{x}$. Dato che f è continua in $\bar{x}$ risulta

$$\lim_{h\to 0} f(\gamma_h)=f(\bar{x})$$

Da cui

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})}{h}=f(\bar{x})$$

Vale a dire

$$F'(\bar{x})=f(\bar{x})$$

□

Nota Bene: Il teorema andrebbe dimostrato per f generalmente continua ma per questioni di semplicità lo abbiamo dimostrato considerando f continua.

COROLLARIO 3.3

Ipotesi: Siano $F,G:(a,b)\to\mathbb{R}$ due primitive di $f(x)$

Tesi: $\exists\ c\in\mathbb{R}: G(x)=F(x)+c$

Dimostrazione

Sia $H(x)=G(x)-F(x)\quad\forall x\in(a,b)$. Dato che F e G sono due primitive di f allora:

- F e G sono derivabili in (a,b)
- $F'=G'=f$

Dunque anche $H(x)$ è derivabile in (a,b) e risulta $H'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$
Allora $H'(x)=0\quad\forall x\in(a,b)$ e si ha, per un *corollario del teorema di Lagrange*

$$H(x)=c\qquad\forall x\in(a,b)$$

□

La dimostrazione appena svolta ci dice, più in generale che se f ha una primitiva F, allora ogni altra primitiva G di f è della forma $G(x)=F(x)+c$. Il altre parole, se F è una primitiva assegnata di f si ha

$$\int f(x)dx=\{F+c:c\in\ R\}$$

Dunque per calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ occorre determinare una primitiva di f per poi calcolarla agli estremi dell'intervallo considerato; il che corrisponde a fare praticamente un azione inversa a quella della derivata.

TEOREMA 3.19 Formula fondamentale del calcolo integrale

IPOTESI: Sia $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ e sia $G(x)$ una primitiva di f

TESI: $\forall \alpha, \beta \in [a,b]$ risulta

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha) = G(x)\Big|_\alpha^\beta$$

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

è una primitiva di f.

Dunque, considero $F(x)$ e $G(x)$ due primitive di $f(x)$. Per il corollario precedente otteniamo che

$$\forall c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c \qquad \forall x \in (a,b)$$

Otteniamo quindi che

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c \qquad\qquad G(\beta) = F(\beta) + c$$

Dunque facendo la differenza

$$G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{x_0}^\beta f(t)dt - \int_{x_0}^\alpha f(t)dt = \int_{x_0}^\beta f(t)dt + \int_\alpha^{x_0} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

Abbiamo così ottenuto la nostra tesi:

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

□

In conclusione: l'integrale di una funzione continua f esteso ad un intervallo orientato (a,b) è dato dall'incremento di una qualsiasi primitiva nel passare da a a b

OSSERVAZIONE 3.11 Il calcolo di un integrale definito per mezzo di un primitiva fornisce un esempio significativo di problema che viene risolto mediante il passaggio ad un problema generale: conoscere una primitiva equivale a conoscere l'integrale definito esteso ad un qualsiasi intervallo.

Questo corollario è uno strumento che viene utilizzato operativamente per il calcolo degli integrali definiti. In molti casi, la determinazione esplicita è impossibile; ad esempio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Si noti però che le primitive di funzioni come questa considerata, non sono esprimibili in termini di funzioni elementari ma esistono per il teorema fondamentale del calcolo integrale.

COROLLARIO 3.4 Cambiamento di variabile per integrali finiti

Supponiamo di voler calcolare il seguente integrale

$$\int_a^b \Phi(f(x))f'(x)dx$$

A questo punto la maniera migliore [7] per procedere sarà per sostituzione ponendo $y = f(x)$; non basta però fare solo questo passaggio, bisogna attenzionare pure gli estremi dell'intervallo di integrazione. Il nostro integrale diventerà

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)dy$$

[7] In alternativa si può sempre calcolare la primitiva esprimendola in funzione di x. In tal caso allora non sarà necessario modificare gli estremi di integrazione

4 Integrali generalizzati

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua e sia D_f l'insieme dei punti di discontinuità di f. Supponiamo ovviamente che f non sia limitata in $[a, b]$

- Caso 1: $D_f = \{c\}$ con $c \in [a, b]$

  - Caso 1.1: $c = a$

  Sia $\epsilon \in]0, b-a[$ allora f è continua in $[a+\epsilon, b]$ e quindi ha senso calcolare $\displaystyle\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$. Allora f si dice *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b]$ quando esiste finito il limite:

  $$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

  In tal caso si pone

  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

  - Caso 1.2 $c = b$

  Sia $\epsilon \in]0, b-a[$ allora f è continua in $[a, b-\epsilon]$ e quindi ha senso calcolare $\displaystyle\int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$. Allora f si dice *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b]$ quando esiste finito il limite:

  $$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

  In tal caso si pone

  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

  - Caso 1.3 $c \in]a, b[$

  f si dice *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b]$ quando lo è in $[a, c]$ e in $[b, c]$. In tal caso allora si pone:

  $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

  Con i relativi accorgimenti del caso 1.1 e 1.2

- CASO 2: $D_f = \{c_1, ...c_p\}$ con $p < \infty$ In questa situazione si decompone $[a, b]$ in p intervalli, ciascuno dei quali contiene un solo punto di discontinuità. f allora si dice *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b]$ quanto lo è in ogni intervallo $[a_i, b_i]$. In tal caso allora si pone

  $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$$

5 Criteri di integrabilità

LEMMA 5.1 Ipotesi: Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ generalmente continue in $[a, b]$ con

$$0 \leq f \leq g \quad \text{in} \quad [a, b]$$

e sia g integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$

Tesi: f integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ e risulta

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

TEOREMA 5.20

Ipotesi: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua e non limitata con $|f|$ integrabile in senso generalizzato.

Tesi: f integrabile in senso generalizzato e risulta

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Dimostrazione:

Considero la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- della mia funzione f definite in questo modo:

$$f^+ = max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \qquad \forall x \in [a, b]$$
$$f^- = max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \qquad \forall x \in [a, b]$$

Osserviamo che hanno della particolari proprietà in $[a, b]$:

1. $f^+ + f^- = |f|$
2. $f^+ - f^- = f$
3. $0 \leq f^+ \leq |f|$
4. $0 \leq f^- \leq |f|$

Per ipotesi sappiamo che $|f|$ è integrabile in senso generalizato. Mentre per il Lemma 5.1 e per le proprietà 3. e 4. sappiamo che f^+ e f^- sono integrabili in senso generalizzato.

Per la proprietà distributiva $f = f^+ + f^-$ è integrabile in senso generalizzato. Resta quindi da dimostrare solamente che

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| = \Big|\int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx\Big| \leq \Big|\int_a^b f^+(x)dx\Big| + \Big|\int_a^b f^-(x)dx\Big| =$$

$$= \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

$\square$

TEOREMA 5.21 Criterio di integrabilità

Ipotesi: Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua in $[a.b]$ con $D_f = \{c\}$. Sappiamo pure che

$$\exists\ \alpha < 1 :\ \lim_{x\to c} |f(x)||x-c|^\alpha = l \qquad \text{con } l \in \mathbb{R}_0^+$$

Tesi: f è assolutamente integrabile (e quindi integrabile) in $[a, b]$

Dimostrazione: (nel caso in cui $c \in]a, b[$)

In corrispondenza a

$$l + 1 > l \quad \exists\ \delta > 0 \text{ (piccolo) : } |f(x)||x-c|^\alpha < l + 1$$

Cioè:

$$|f(x)| < \frac{l+1}{|x-c|^\alpha} \qquad \forall x \in\ ]c-\delta, c+\delta[$$

Considero ora $M = \max\{|f(x)| : x \in [a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]\}$ che sappiamo esistere per il Teorema di Weiestrass; consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} M & \text{per } x \in [a, c-\delta] \cup [c+\delta, b] \\ \dfrac{l+1}{|x-c|^\alpha} & \text{per } x \in\ ]c-\delta, c+\delta[\end{cases}$$

Il che implica per costruzione che $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

La funzione g è generalmente continua in $[a, b]$ e con $D_g = \{c-\delta, c+\delta\}$. La tesi si ottiene quindi provando che g è integrabile in $[a, b]$. Si ha:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{c-\delta} M dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{l+1}{|x-c|^\alpha} dx + \int_{c+\delta}^b M dx =$$

$$= M(c - \delta - a + b - c - \delta) + \int_{c-\delta}^{c} \frac{l+1}{|x-c|^\alpha} dx + \int_c^{c+\delta} \frac{l+1}{|x-c|^\alpha} dx =$$

$$= M(b-a-2\delta) + \lim_{\epsilon\to 0^+}(l+1)\frac{(c-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{c-\delta}^{c-\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0^+}(l+1)\frac{(x-c)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{c+\epsilon}^{c+\delta} =$$
$$= M(b-a-2\delta) - \frac{l+1}{1-\alpha}\lim_{\epsilon\to 0^+}(\epsilon^{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}) + \frac{l+1}{1-\alpha}$$

Dato che $\alpha < 1 \Longrightarrow 1-\alpha > 0$ si ha che

$$M(b-a-2\delta) + \frac{l+1}{1-\alpha}\delta^{1-\alpha} + \frac{l+1}{1-\alpha}\delta^{1-\alpha} < +\infty$$

$\square$

TEOREMA 5.22 Criterio di non integrabilità

Ipotesi: Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua in $[a.b]$ con $D_f = \{c\}$. Sia f di segno costante in $[a,b]$, ad esempio $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a.b]$. Sappiamo inoltre che

$$\exists\ \alpha \geq 1 : \lim_{x\to c} f(x)|x-c|^{\alpha} = l \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

Tesi: f non è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$

Dimostrazione:

Dimostrazione analoga a quella del teorema precedente

OSSERVAZIONE 5.12 L'importanza del segno costante Se f non fosse a segno costante non potremo utilizzare il *criterio di non integrabilità*, ma dovremmo utilizzare il *criterio di integrabilità*. Questi criteri sono analoghi a quelli per sulle serie (In particolare esiste anche il confronto asintotico per gli integrali): non sono altro che un caso particolare del confronto asintotico con la funzione caratterizzante la serie armonica generalizzata.

5.1 Integrali impropri

Sia $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora sappiamo che $\forall t > a$ risulta $f \in \mathcal{C}^0([a, t])$. Ha senso considerare allora il seguente integrale:

$$\int_a^t f(x)dx$$

DEFINIZIONE 5.12 Integrale improprio La funzione f si dice *integrale in senso improprio* in $[a, +\infty[$ quando esiste finito il limite

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Analogo è il caso in cui $f :] - \infty, b] \to \mathbb{R}$ continua in $] - \infty, b]$, si ha

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_t^b f(x)dx$$

TEOREMA 5.23 Condizione necessaria

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, +\infty[$, allora per potere essere *integrabile in senso improprio*, cioè affinché esista

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

si deve avere che fissato un $\epsilon > 0$, allora esista $\gamma : \forall\gamma_1, \gamma_2$ con $\gamma \leq \gamma_1 < \gamma_2$ si abbia

$$\Big| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx\Big| < \epsilon$$

Una volta chiarita la definizione di *integrale improprio* possiamo ampliare a questo caso i criteri di integrabilità visti nella sezione precedente.

TEOREMA 5.24 Criterio di assoluta integrabilità

IPOTESI: Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua in $[a, +\infty[$. Sappiamo inoltre che

$$\exists\ \alpha > 1 : \lim_{x\to+\infty} |f(x)||x|^\alpha = l \in \mathbb{R}_0^+$$

TESI: f integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$

Sostanzialmente abbiamo appena detto che una funzione f continua in $[a, b[$ avente in b un infinito di un ordine non superiore all'ordine misurato da un numero $\alpha > 1$ ammette integrale improprio.

TEOREMA 5.25 Criterio di assoluta non integrabilità

IPOTESI: Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua in $[a, +\infty[$ e di segno costante. Sappiamo inoltre

$$\exists\ \alpha \leq 1 : \lim_{x\to+\infty} |f(x)||x|^{\alpha} = l \in \bar{\mathbb{R}}^{+}$$

TESI: f non è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$

6 Complementi

Siano $M \in \mathbb{N}$ e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente. Allora valgono le disuguaglianze:

$$\int_{M}^{+\infty} f(x+1)\ dx \leq \sum_{u=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{M}^{+\infty} f(x)\ dx$$

Dove con un cambio di variabili sulla prima otteniamo

$$\int_{M+1}^{+\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{u=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{M}^{+\infty} f(x)\ dx$$

Analogamente:

$$\int_{M}^{+\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{u=M}^{+\infty} f(n) \leq f(M) + \int_{M}^{+\infty} f(x)\ dx$$

TEOREMA 6.26 Confronto serie integrali

PROPOSIZIONE: Siano $M \in \mathbb{N}$ e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$. Sappiamo che

1. f è debolmente crescente
2. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq M$

Allora

$$\sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \text{ si comporta come } \int_{M}^{\infty} f(x)dx$$

DIMOSTRAZIONE: (idea)

Per dimostrare la disuguaglianza di confronto in maniera formale dovrei definire una nuova funzione

$$g(x) = f(\lceil x \rceil)$$

e osservare che

$$f(x-1) \leq g(x) \leq f(x)$$

da cui

$$\int_M^{+\infty} g(x)dx = \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$

e quindi concludere con la monotonia dell'integrale[8]

[8] Dove ho usato che $f(x)$ è debolmente crescente? Se non lo fosse la disuguaglianza di sopra non sarebbe ovvia

Riferimenti bibliografici

[1] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mladinska Knjiga, McGraw-Hill, 1976,

[2] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mladinska Knjiga, McGraw-Hill, 1970, ISBN 0-07-054234-1.

[3] Giovanni Prodi, *Analisi Matematica*, Bollati Boringhieri, 1977

[4] Paolo Acquistapace, *Appunti di analisi matematica 1*

[5] Georg Cantor, *Sulla potenza degli insiemi perfetti di punti (De la puissance des ensembles parfaits de points)*, Acta Mathematica vol. 2 (1884)

ED ALTRI ANCORA DA AGGIUNGERE