

La dimensione del bordo dell'insieme di Mandelbrot

Presentazione della tesi di laurea

Giovanni Mascellani

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

22 luglio 2011

Sistemi dinamici: caos e regolarità

La teoria dei sistemi dinamici discreti studia il comportamento delle iterate successive di una funzione f di un certo spazio (varietà, spazio di misura, ...) in sé. In questa esposizione considereremo solamente polinomi quadratici definiti sulla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Se z è un punto di $\text{dom } f$ chiamiamo *orbita* la successione

$$z, f(z), f^{\circ 2}(z), f^{\circ 3}(z), \dots$$

e *orbita inversa* una qualsiasi successione $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $f(z_{k+1}) = z_k$ per ogni k .

Problema

Qual è la struttura delle orbite di una certa mappa f ? In particolare, quando possiamo identificare in esse una struttura “regolare” e quando esse hanno un comportamento “caotico”?

Insiemi di Julia

Sia $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ un aperto e V una superficie di Riemann: sull'insieme delle funzioni olomorfe $f: U \rightarrow V$ consideriamo la topologia compatta-aperta ($f_n \rightarrow f$ se e solo se si ha convergenza uniforme sui compatti). Diciamo che una famiglia di funzioni è *normale* se ammette una sottosuccessione convergente oppure tale che le immagini di U escono da ogni compatto di V .

Insieme di Julia e di Fatou

L'insieme dei punti “regolari” è l'insieme di Fatou:

$$F(f) = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{esiste un intorno } U \ni z \text{ tale che } \{ f^{\circ n} \mid U \}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è normale} \right\}.$$

L'insieme di Julia è il suo complementare:

$$J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f).$$

Insieme di Mandelbrot

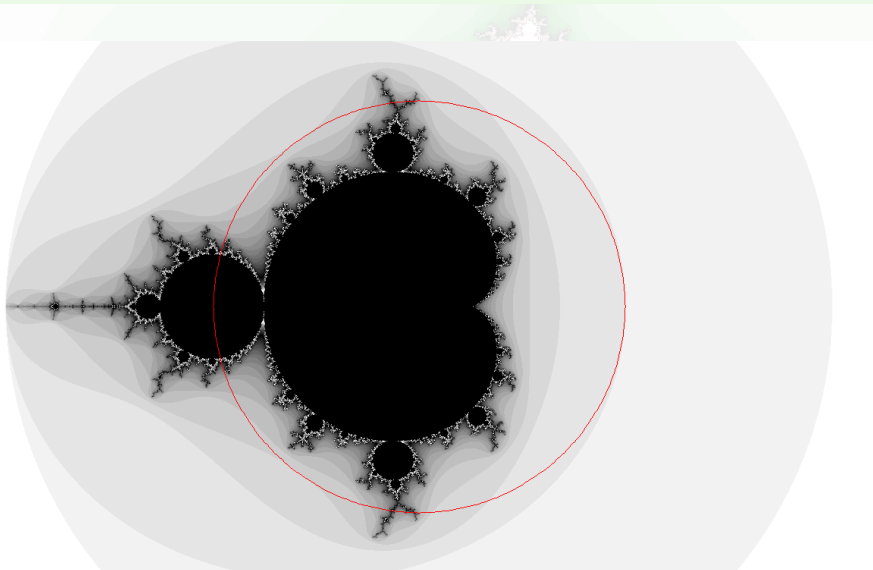
- Consideriamo i polinomi $P_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e vogliamo studiare il comportamento del loro insieme di Julia al variare di λ .
- Se f è un polinomio di $\hat{\mathbb{C}}$ di grado ≥ 2 si ha che $J(f)$ è connesso se e solo se l'orbita di tutti i punti critici finiti di f è limitata. Altrimenti $J(f)$ ha una quantità non numerabile di componenti connesse.

Insieme di Mandelbrot

Si definisce l'insieme di Mandelbrot:

$$\begin{aligned} M &= \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid J(P_\lambda) \text{ è connesso} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{l'orbita di } 0 \text{ per } P_\lambda \text{ è limitata} \}. \end{aligned}$$

Insieme di Mandelbrot: figura



Teorema principale e teorema 1

Per $X \subseteq \mathbb{C}$ indichiamo con $\text{H-dim } X$ la dimensione di Hausdorff di X .

Dimensione del bordo del Mandelbrot

$$\text{H-dim}(\partial M) = 2.$$

In effetti è vero che per qualsiasi aperto non vuoto $U \subseteq \partial M$ (secondo la topologia indotta) vale $\text{H-dim } U = 2$.

Il risultato è stato provato di Mitsuhiro Shishikura nel 1991 ed è stato pubblicato negli *Annals of Mathematics* nel 1998.

Teorema principale e teorema 1

Per $X \subseteq \mathbb{C}$ indichiamo con $\text{H-dim } X$ la dimensione di Hausdorff di X .

Dimensione del bordo del Mandelbrot

$$\text{H-dim}(\partial M) = 2.$$

In effetti è vero che per qualsiasi aperto non vuoto $U \subseteq \partial M$ (secondo la topologia indotta) vale $\text{H-dim } U = 2$.

Il risultato è stato provato di Mitsuhiro Shishikura nel 1991 ed è stato pubblicato negli *Annals of Mathematics* nel 1998.

Teorema 1

È sufficiente trovare parametri $\lambda \in \partial M$ tali che $\text{H-dim } J(P_\lambda)$ sia arbitrariamente vicino a 2.

Punti parabolici

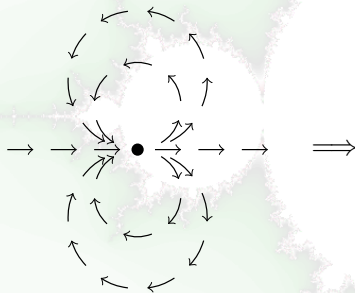
- Il punto ζ è *fisso* se $f(\zeta) = \zeta$. In tal caso $\lambda = f'(\zeta)$ è il *moltiplicatore* di f in ζ e, se $\lambda \neq 0$, il numero α tale che $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ è il *numero di rotazione* (definito modulo \mathbb{Z}).
- La *molteplicità* di un punto fisso è la molteplicità dello stesso punto come zero dell'equazione $f - Id = 0$.
- Il punto fisso ζ è *parabolico* se ha numero di rotazione razionale. In tal caso il *bacino parabolico* è l'insieme

$$\mathcal{B}_f(\zeta) = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \begin{array}{l} z \text{ possiede un intorno sul quale } f^{\circ n} \text{ è definita} \\ \text{e tende a } \zeta \text{ uniformemente per } n \rightarrow \infty \end{array} \right\}.$$

- Il punto fisso ζ è *tangente all'identità* se ha numero di rotazione 0 (ossia moltiplicatore 1).

Perturbazione di punti parabolici

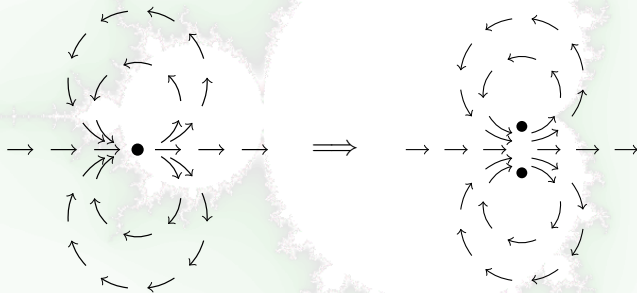
Perturbando f , uno zero di molteplicità 2 di $f - Id$ si trasforma in due zeri semplici, ossia due punti fissi della f perturbata, entrambi trasversali all'identità.



I due nuovi punti fissi possono a loro volta essere entrambi indifferenti (ossia con $|\lambda| = 1$) oppure uno attrattivo ed un repulsivo (con $|\lambda|$ maggiore di 1 per uno e minore per l'altro).

Perturbazione di punti parabolici

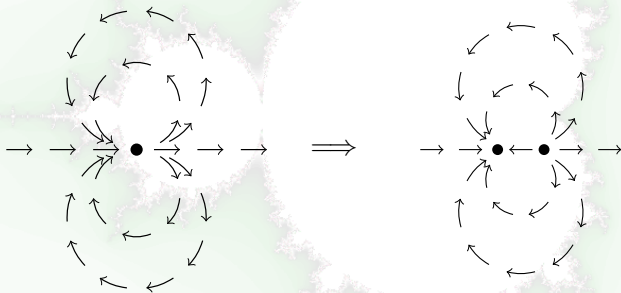
Perturbando f , uno zero di molteplicità 2 di $f - Id$ si trasforma in due zeri semplici, ossia due punti fissi della f perturbata, entrambi trasversali all'identità.



I due nuovi punti fissi possono a loro volta essere **entrambi indifferenti** (ossia con $|\lambda| = 1$) oppure uno attrattivo ed un repulsivo (con $|\lambda|$ maggiore di 1 per uno e minore per l'altro).

Perturbazione di punti parabolici

Perturbando f , uno zero di molteplicità 2 di $f - Id$ si trasforma in due zeri semplici, ossia due punti fissi della f perturbata, entrambi trasversali all'identità.



I due nuovi punti fissi possono a loro volta essere entrambi indifferenti (ossia con $|\lambda| = 1$) oppure **uno attrattivo ed un repulsivo** (con $|\lambda|$ maggiore di 1 per uno e minore per l'altro).

Teorema 2 e dimostrazione del risultato principale

Teorema 2

Supponiamo che P_λ possieda un punto fisso parabolico (dunque $\lambda \in \partial M$). Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si può prendere $\lambda' \in \partial M$ vicino a λ tale che $\text{H-dim } J(P_{\lambda'}) > 2 - \varepsilon$.

Teorema 2 e dimostrazione del risultato principale

Teorema 2

Supponiamo che P_λ possieda un punto fisso parabolico (dunque $\lambda \in \partial M$). Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si può prendere $\lambda' \in \partial M$ vicino a λ tale che $\text{H-dim } J(P_{\lambda'}) > 2 - \varepsilon$.

Prendendo $\lambda = \frac{1}{4}$, si ha che il punto $\frac{1}{2}$ è fisso e tangente all'identità per P_λ . Dunque in ∂M ci sono punti λ' tali che $\text{H-dim } J(P_{\lambda'})$ è arbitrariamente vicina a 2.

Per il Teorema 1, segue immediatamente che $\text{H-dim}(\partial M) = 2$.

Inoltre, i λ per cui P_λ possiede punti parabolici sono densi in ∂M : da questo segue la tesi per ogni aperto $U \subseteq \partial M$ non vuoto.

Mappe taglia biscotti

Diciamo che f è *taglia biscotti* (*cookie cutter*) quando esistono:

- $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ aperto, semplicemente connesso, omette almeno due punti;
- U_1, \dots, U_N aperti, semplicemente connessi e disgiunti, con $\bar{U}_i \subset U$;
- n_i tali che $f^{\circ n_i}$ è una bigezione da U_i a U .

Mappe taglia biscotti

Diciamo che f è *taglia biscotti* (*cookie cutter*) quando esistono:

- $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ aperto, semplicemente connesso, omette almeno due punti;
- U_1, \dots, U_N aperti, semplicemente connessi e disgiunti, con $\bar{U}_i \subset U$;
- n_i tali che $f^{\circ n_i}$ è una bigezione da U_i a U .

Dimensione del taglia biscotti

Sia f una mappa taglia biscotti. Allora:

$$\text{H-dim } J(f) \geq \frac{\log N}{\log \left(\max_i \sup_{U_i} |(f^{\circ n_i})'| \right)}.$$

Direzioni attrattive e repulsive

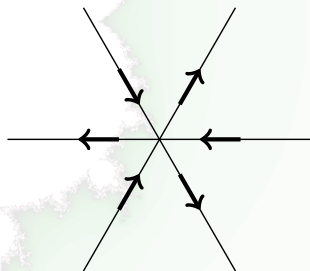
Supponiamo $\zeta = 0$ parabolico con $\lambda = 1$ (*tangente all'identità*) e molteplicità $n + 1$:

$$f(z) = z + az^{n+1} + \dots, \quad a \neq 0.$$

Vettori attrattivi e repulsivi

Siano v_0, \dots, v_{2n-1} le radici $2n$ -esime di $(na)^{-2}$: chiamiamo *vettori repulsivi* i $v_0, v_2, \dots, v_{2n-2}$ e *vettori attrattivi* i $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1}$. Allora le orbite $\{z_k\}$ che convergono a zero non banalmente vi convergono con direzione tangente ad uno dei vettori attrattivi ($\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} z_k = v_{2j+1}$).

Analogamente vale per le orbite inverse ed i vettori repulsivi.



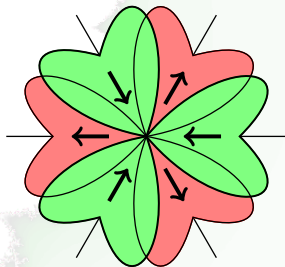
Petali e fiori di Leau-Fatou

Diciamo che una regione semplicemente connessa Ω è un *petalo* per una direzione v attrattiva se:

- Ω è f -invariante;
- un'orbita di f converge a ζ lungo la direzione v se e solo se sta definitivamente in Ω .

Teorema del fiore di Leau-Fatou

Intorno ad un punto fisso tangente all'identità ζ di molteplicità $n + 1$ si possono trovare $2n$ petali, uno per ogni direzione attrattiva o repulsiva, la cui unione è un intorno puntato di ζ e tali che l'intersezione di due petali consecutivi è una regione semplicemente connessa.



Da questo discende che un punto parabolico appartiene all'insieme di Julia.

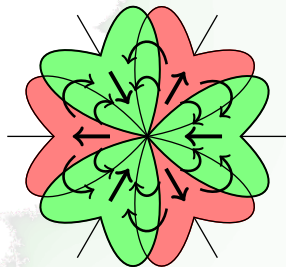
Petali e fiori di Leau-Fatou

Diciamo che una regione semplicemente connessa Ω è un *petalo* per una direzione v attrattiva se:

- Ω è f -invariante;
- un'orbita di f converge a ζ lungo la direzione v se e solo se sta definitivamente in Ω .

Teorema del fiore di Leau-Fatou

Intorno ad un punto fisso tangente all'identità ζ di molteplicità $n + 1$ si possono trovare $2n$ petali, uno per ogni direzione attrattiva o repulsiva, la cui unione è un intorno puntato di ζ e tali che l'intersezione di due petali consecutivi è una regione semplicemente connessa.



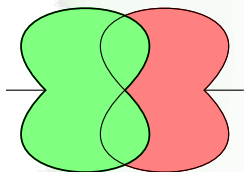
Da questo discende che un punto parabolico appartiene all'insieme di Julia.

Cilindri di Écalles

- Supponiamo ora che f abbia molteplicità 2.
- Per ogni petalo \mathcal{P} , si dice *cilindro di Écalles* la superficie

$$\mathcal{P}/\sim \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad x \sim y \iff f^{\circ n}(x) = y \text{ per qualche } n$$

- Per ciascuno dei due cilindri è possibile trovare un *dominio fondamentale* (insieme di rappresentanti delle orbite).
- Nella zona di intersezione tra i due petali è dunque indotta una mappa dal cilindro di Écalles repulsivo a quello attrattivo, che associa i punti appartenenti alla stessa orbita.
- Componendo con una corrispondenza tra i due cilindri, questa diventa un sistema dinamico definito agli estremi del cilindro uscente (*mappa di Écalles*). Prendiamo tale corrispondenza in modo che il sistema dinamico sia tangente all'identità agli estremi del cilindro.

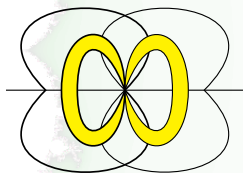


Cilindri di Écalle

- Supponiamo ora che f abbia molteplicità 2.
- Per ogni petalo \mathcal{P} , si dice *cilindro di Écalle* la superficie

$$\mathcal{P}/\sim \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad x \sim y \iff f^{\circ n}(x) = y \text{ per qualche } n$$

- Per ciascuno dei due cilindri è possibile trovare un *dominio fondamentale* (insieme di rappresentanti delle orbite).
- Nella zona di intersezione tra i due petali è dunque indotta una mappa dal cilindro di Écalle repulsivo a quello attrattivo, che associa i punti appartenenti alla stessa orbita.
- Componendo con una corrispondenza tra i due cilindri, questa diventa un sistema dinamico definito agli estremi del cilindro uscente (*mappa di Écalle*). Prendiamo tale corrispondenza in modo che il sistema dinamico sia tangente all'identità agli estremi del cilindro.

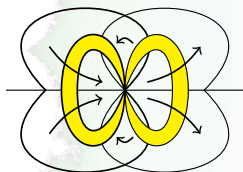


Cilindri di Écalle

- Supponiamo ora che f abbia molteplicità 2.
- Per ogni petalo \mathcal{P} , si dice *cilindro di Écalle* la superficie

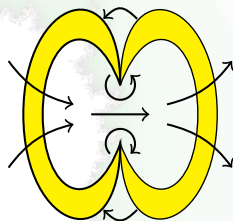
$$\mathcal{P}/\sim \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad x \sim y \iff f^{\circ n}(x) = y \text{ per qualche } n$$

- Per ciascuno dei due cilindri è possibile trovare un *dominio fondamentale* (insieme di rappresentanti delle orbite).
- Nella zona di intersezione tra i due petali è dunque indotta una mappa dal cilindro di Écalle repulsivo a quello attrattivo, che associa i punti appartenenti alla stessa orbita.
- Componendo con una corrispondenza tra i due cilindri, questa diventa un sistema dinamico definito agli estremi del cilindro uscente (*mappa di Écalle*). Prendiamo tale corrispondenza in modo che il sistema dinamico sia tangente all'identità agli estremi del cilindro.



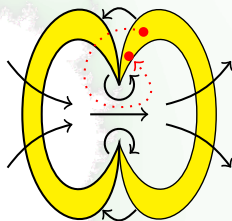
Perturbazione dei cilindri di Écalle

- Perturbando il punto parabolico le due regione fondamentali rimangono, ma tra i due nuovi punti fissi si apre una “porta” .
- Nella regione vicina ai due punti fissi, si può costruire la *mappa di ritorno*, che è a sua volta un sistema dinamico definito sugli estremi di uno dei due cilindri.



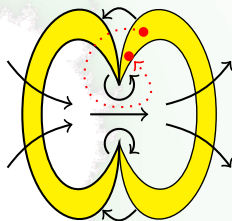
Perturbazione dei cilindri di Écalle

- Perturbando il punto parabolico le due regione fondamentali rimangono, ma tra i due nuovi punti fissi si apre una “porta” .
- Nella regione vicina ai due punti fissi, si può costruire la *mappa di ritorno*, che è a sua volta un sistema dinamico definito sugli estremi di uno dei due cilindri.

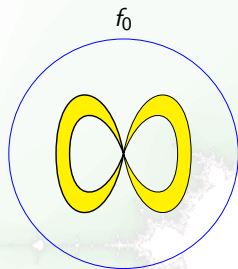


Perturbazione dei cilindri di Écalle

- Perturbando il punto parabolico le due regione fondamentali rimangono, ma tra i due nuovi punti fissi si apre una “porta” .
- Nella regione vicina ai due punti fissi, si può costruire la *mappa di ritorno*, che è a sua volta un sistema dinamico definito sugli estremi di uno dei due cilindri.
- Man mano che la perturbazione sparisce la “porta” si chiude ed il numero di iterazioni necessarie alla mappa di ritorno tende ad infinito: le mappe di ritorno tendono alla mappa di Écalle.
- La mappa di ritorno, inoltre, vista come funzione di \mathbb{C}^* , può essere estesa in modo olomorfo in 0 e ∞ , che corrispondono ai due punti fissi.

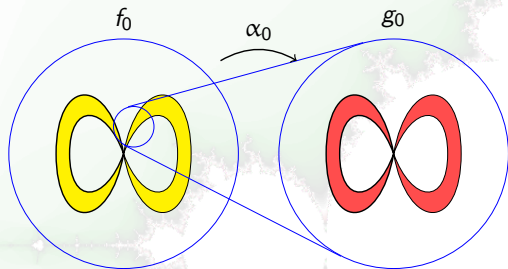


Costruzione del taglia biscotti



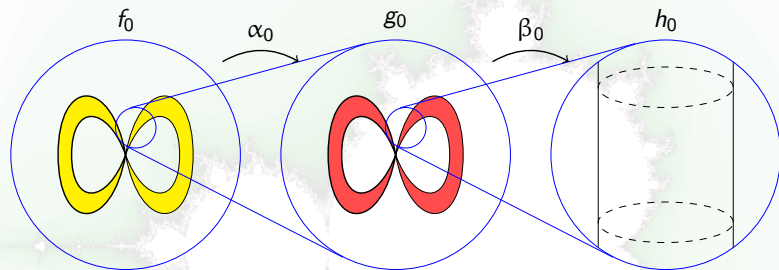
- f_0 è il sistema dinamico non perturbato, tangente all'identità e di molteplicità 2 nei pressi di $\zeta = 0$.
- Sono evidenziati i cilindri di Écalle.

Costruzione del taglia biscotti



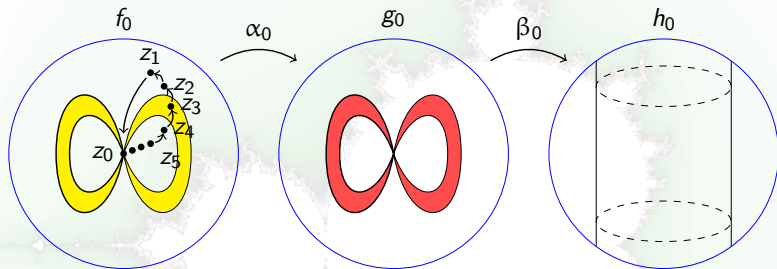
- Il cilindro uscente di f_0 è rappresentato come \mathbb{C}^* . g_0 è la mappa di Écalles di f_0 , estesa per continuità in 0.
- È a sua volta un sistema dinamico tangente all'identità e di molteplicità 2 nello zero.

Costruzione del taglia biscotti



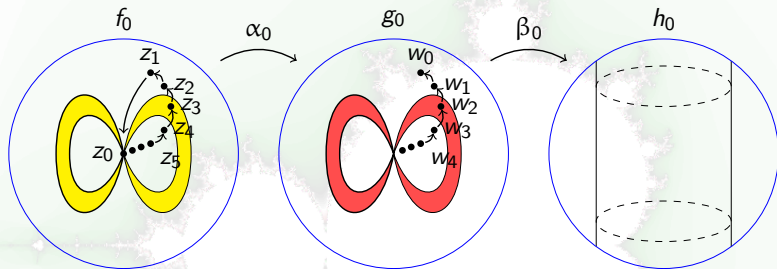
- La stessa costruzione si può ripetere su g_0 per ottenere h_0 , che vediamo come \mathbb{C}/\mathbb{Z} .
- α_0 e β_0 sono le proiezioni dallo spazio della dinamica di f_0 e g_0 al rispettivo cilindro di Écalte. Sono definite perlomeno su tutto il petalo uscente.

Costruzione del taglia biscotti



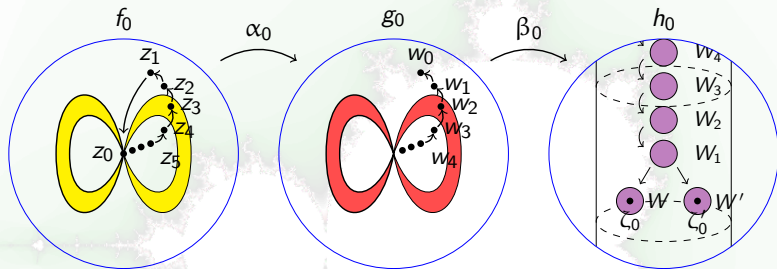
- Le controimmagini di un punto di $J(f_0)$ sono dense in $J(f_0)$. Dunque possiamo trovare un'orbita inversa $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ per f_0 tale che $z_0 = 0$ e $z_j \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$ (in maniera non banale).
- Non tutti gli z_j appartengono al petalo uscente di f_0 ; però, per definizione di petalo, questo è vero definitivamente.

Costruzione del taglia biscotti



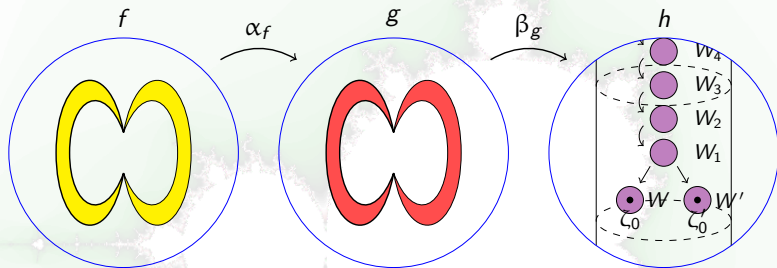
- L'orbita inversa $\{z_j\}$ corrisponde ad un punto w_0 del cilindro di Écalle.
- Poiché g_0 è un rivestimento di grado infinito, ramificato in un solo punto, è possibile trovare due orbite inverse $\{w_j\}$ e $\{w'_j\}$ per g_0 , con $w_0 = w'_0$, disgiunte (tranne che in w_0) ed infinitesime (solo un'orbita è visualizzata).

Costruzione del taglia biscotti



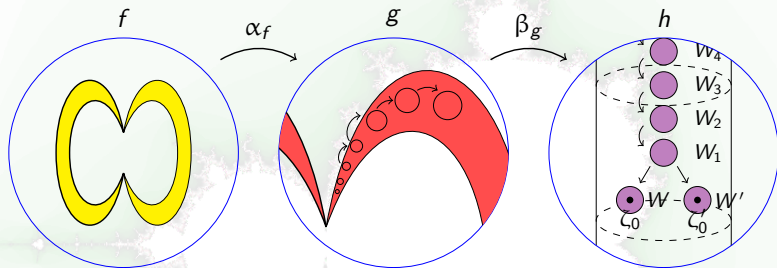
- $\{w_j\}$ e $\{w_j'\}$ corrispondono rispettivamente a ζ_0 e ζ_0' .
- Si possono allora trovare dei dischi $W \ni \zeta_0$ e $W' \ni \zeta_0'$ ed una sequenza di dischi disgiunti $\{W_j\}$ tali che W_0 è W oppure W' , h manda iniettivamente W_{j+1} su W_j ed è possibile stimare uniformemente il diametro e la distanza dei dischi e la derivata di $h^{oj}: W_j \rightarrow W_0$.

Costruzione del taglia biscotti



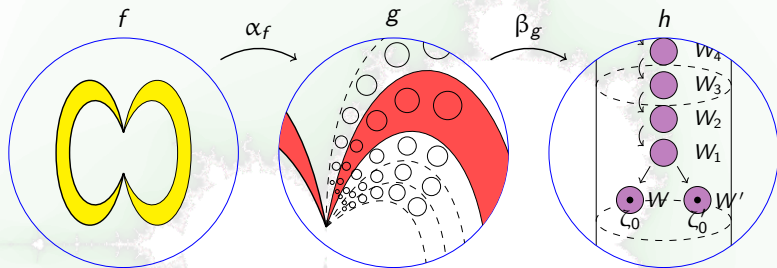
- Perturbando f_0 in f anche le mappe di Écalle si modificano nelle mappe di ritorno. Quando $f \rightarrow f_0$ si ha che $g \rightarrow g_0$, $h \rightarrow h_0$, $\alpha_f \rightarrow \alpha_0$ e $\beta_g \rightarrow \beta_0$.
- A meno di ridurre i dischi W e W' è ancora possibile scegliere dei dischi $\{W_j\}$ come prima.

Costruzione del taglia biscotti



- I dischi $\{W_j\}$ possono essere portati sul primo cilindro di Écalle con β_g^{-1} : un'iterazione di h corrisponde ad un certo numero (che tende ad infinito) di iterazioni di g .

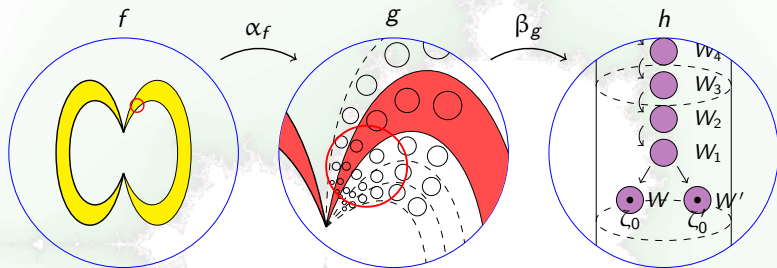
Costruzione del taglia biscotti



- Possiamo costruire le stesse controimmagini sulle regioni ottenute applicando g al dominio fondamentale (ciascuna di esse, in effetti, è a sua volta un dominio fondamentale).
- Chiamiamo V_i questi dischi.

$$\tau_0(z) = -z^{-1} \quad D(\eta) = \bar{B}_{|\eta|/4}(i\eta) \quad D'(\eta) = \bar{B}_{|\eta|/2}(i\eta).$$

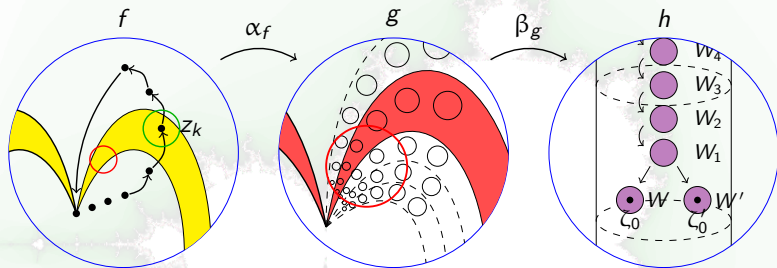
Costruzione del taglia biscotti



- $\alpha_f(\tau_0(D'(\eta)))$ è un disco che tende a zero nello spazio della dinamica di g , ma contiene al suo interno tanti V_i interi. Chiamiamo U_i le controimmagini dei V_i .

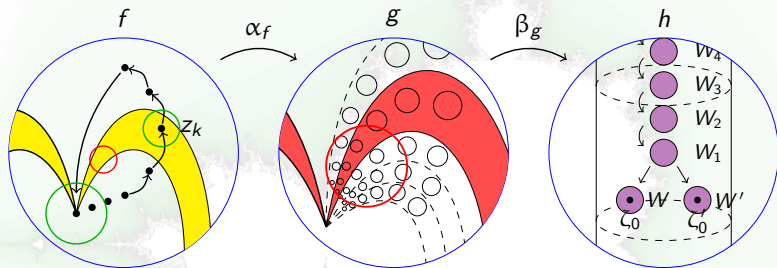
$$U_i \xrightarrow{\alpha_f} V_i \xrightarrow{\beta_g} W_{j(i)} \xrightarrow{h^{\circ j}} W_0.$$

Costruzione del taglia biscotti



- Posso allora trovare k grande ed un intorno $U \ni z_k$ molto piccolo in modo che esiste un'inversa locale di $\beta_g \circ \alpha_f$ che manda iniettivamente W e W' su un soprainsieme di U ed abbia derivata limitata. La chiamo $\alpha_f^{(-1)} \circ \beta_g^{(-1)}$.
- La costruzione si fa prima nel caso non perturbato e poi si estende sfruttando la continuità delle proiezioni.

Costruzione del taglia biscotti



- $f^{\circ k}(U)$ è un intorno di $z_0 = 0$. Dunque per η sufficientemente grande contiene $\tau_0(D'(\eta))$. Si ottiene quindi la seguente composizione:

$$U_i \xrightarrow{\alpha_f} V_i \xrightarrow{\beta_g} W_{j(i)} \xrightarrow{h^{\circ j}} W_0 \xrightarrow{\alpha_f^{(-1)} \circ \beta_g^{(-1)}} U \xrightarrow{f^{\circ k}} f^{\circ k}(U).$$

- Questa diventa iniettiva restringendo gli U_i alle controimmagini di $\tau_0(D'(\eta))$ per η grande. È un taglia biscotti!

Conclusione

Si osserva che, per un parametro η , il numero N di “biscotti” è almeno $\exp(4\pi\eta)$, mentre il termine dominante di $|(f^{\circ n_i})'|$ è $\exp(2\pi\eta)$.

In conclusione, per il teorema sulle mappe taglia biscotti, si ha che

$$\text{H-dim } J(f) \geq \frac{\log N}{\log (\max_i \sup_{U_i} |(f^{\circ n_i})'|)} \approx \frac{4\pi\eta}{2\pi\eta} \rightarrow 2.$$

Conclusione

Si osserva che, per un parametro η , il numero N di “biscotti” è almeno $\exp(4\pi\eta)$, mentre il termine dominante di $|(f^{\circ n_i})'|$ è $\exp(2\pi\eta)$.

In conclusione, per il teorema sulle mappe taglia biscotti, si ha che

$$\text{H-dim } J(f) \geq \frac{\log N}{\log (\max_i \sup_{U_i} |(f^{\circ n_i})'|)} \approx \frac{4\pi\eta}{2\pi\eta} \rightarrow 2.$$

Conclusione

Siamo in grado di costruire punti $\lambda \in \partial M$ tali che $\text{H-dim } J(P_\lambda)$ è arbitrariamente vicina a 2. Dunque, per il Teorema 1, $\text{H-dim}(\partial M) = 2$.