INTRODUZIONE

27/09/2023

- **Campo** = insieme numerico (reali, complessi...)
  NO NATURALI
- **Spazio vettoriale** = astrazione matematica, definito in termini assiomatici
  ↓
  Insieme di elementi che verificano una lista di assiomi

VETTORI GEOMETRICI → segmenti orientati che possono essere sommati, moltiplicati per uno scalare...

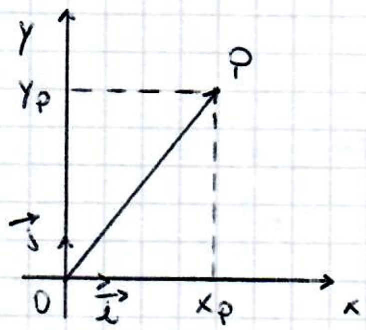
- **Relazioni** tra questi oggetti
  ↓
  $f: A \to B$ dove A e B possono essere spazi vettoriali

es. spazio $\mathbb{R}^n$ → insieme delle n-uple di numeri reali
$\mathbb{R}^2$ → coppie di numeri reali

- **Dimensione** = intuitivamente sono i "gradi di libertà", numero di parametri necessari per individuare un punto, coordinate

- **Riferimento** o **base dello spazio vettoriale** = ⊛

Dati 2 vettori unitari $\vec{i}$ e $\vec{j}$ voglio scrivere

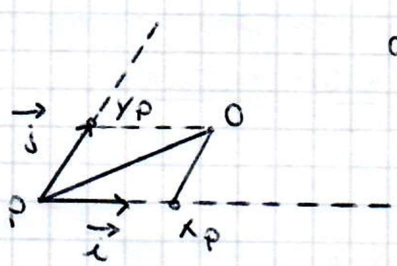


una somma che individui il punto P, dato da $\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j}$$

↳ COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ non sono necessariamente ⊥ per individuare delle coordinate



non in senso proprio

⊛ insieme di vettori mediante i quali posso esprimere ogni altro vettore (tale sviluppo deve essere unico)
Se nel piano prendo 1 vettore non riesco a sviluppare qualunque vettore, con 3 invece lo sviluppo non è

unico. → ciò suggerisce, in modo informale, che la dimensione è 2

(es)

V: spazio dei vettori geometrici

SOMMA: $\underline{v} + \underline{w}$ (con la regola del parallelogramma)

↓ gode di — $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ vale che

- ASSOCIATIVITÀ $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$

- ELEMENTO NEUTRO $\underline{0}$ per il quale non è definita una direzione (sommato a altri vettori li lascia inalterati)

$\forall \underline{v} \in V : \underline{v} + 0 = \underline{v}$

- VETTORE OPPOSTO

$\forall \underline{v} \in V \ \exists \ \underline{w}$ tale che $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$

↳ opposto di $\underline{v}$

- COMMUTATIVITÀ

$\forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

Cos'è un'operazione?

$\underbrace{+}_{\text{operazione somma}} : \underbrace{V \times V}_{\text{prodotto cartesiano di } V \text{ per } V} \to V$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

moltiplicazione: relazione $\mathbb{R} \times V \to V$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$ $\to \alpha \underline{v}$ "prodotto esterno"

Anche la moltiplicazione verifica una serie di assiomi

$(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$
$\alpha(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha\underline{v} + \alpha\underline{w}$
} prop. DISTRIBUTIVA

$\alpha(\beta\underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}$ prop. ASSOCIATIVA

$1\underline{v} = \underline{v}$ esiste l'ELEMENTO NEUTRO della moltiplicazione

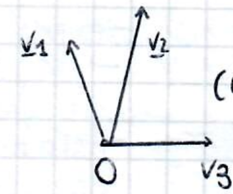
Volendo sviluppare qualsiasi vettore in $\mathbb{R}^3$ posso prendere 3 vettori base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{z}$ a patto che siano NON COMPLANARI

altrimenti la loro somma sarà sempre nello stesso piano.

$\underline{v} : (x, y, z)$

$\downarrow$

coordinate del vettore $\underline{v}$ rispetto al riferimento $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$



(nello spazio)

Esiste una corrispondenza biunivoca tra vettori e coordinate

$\underline{v}(x, y, z)$
$\underline{w}(X, Y, Z)$ $\rightarrow$ $\underline{v} + \underline{w} = (x + X)\underline{v}_1 + (y + Y)\underline{v}_2 + (z + Z)\underline{v}_3$

$\alpha \underline{v} = \alpha x \underline{v}_1 + \alpha y \underline{v}_2 + \alpha z \underline{v}_3$

↳ somma e prodotto si comportano bene rispetto alle coordinate

Prodotto scalare $\langle\,\rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$\langle \underline{v} \cdot \underline{w} \rangle = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos \alpha$

↳ angolo compreso dai vettori

assiomi del prodotto scalare

\# $\langle (\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{u} \rangle = \langle \underline{u} \cdot \underline{v} \rangle + \langle \underline{w} \cdot \underline{u} \rangle$ oppure \# $\langle \alpha \underline{v}_1 \underline{v}_2 \rangle = \alpha \langle \underline{v}_1 \underline{v}_2 \rangle$

il prodotto scalare può essere visto come il prodotto dei moduli di $\underline{v}$ e la proiezione di $\underline{u}$ sulla retta di $\underline{v}$

$\downarrow$

$\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = |\underline{v}| \cdot pr_{\underline{v}}(\underline{w}) =$
$= |\underline{w}| \cdot pr_{\underline{w}}(\underline{v})$

distributività rispetto alla somma tra vettori

associatività rispetto al prodotto per uno scalare

\# $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \rightarrow$ commutatività

CAMPI, VETTORIALI E ASSIOMI

28/09/2023

V insieme dei vettori geometrici

$+ : V \times V \to V$
$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (prodotto esterno)

$\mathbb{K}$ campo → insieme in cui sono definite due operazioni — somma, prodotto

$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ somma
$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ prod.

Assiomi di campo

ADD.
1) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{K}$
2) $\exists 0 : \quad 0+x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$
3) $\forall x \; \exists y \mid \quad x+y=0 \quad \forall x,y \in \mathbb{K}$
4) $x+y = y+x \quad \forall x,y \in \mathbb{K}$

ASSIOMI DI GRUPPO (1–3)

MOL.
5) $(xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{K}$
6) $\exists 1 \in \mathbb{K} \mid \quad 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$
7) $\forall x \in \mathbb{K} - \{0\} \; \exists y \in \mathbb{K} \mid \quad xy = 1$
8) $xy = yx \quad \forall x,y \in \mathbb{K}$
9) $x(y+z) = xy + xz \quad x,y,z \in \mathbb{K}$

ASSIOMI DI ANELLO (4–6, 9)

GRUPPO $(G,+)$ — associativa, el. neutro, inverso

ANELLO $(G,+,\cdot)$ — gruppo comm., • associativa, • distributiva, • el. neutro

se il prodotto è commutativo → ANELLO COMMUTATIVO

(es)

$\mathbb{K} = \{0;1\}$ → si può verificare che questo piccolo campo verifica tutti gli assiomi

$1+1=0$
$1+0=1=0+1$
$0 \cdot 1 = 0 = 1 \cdot 0$
$1 \cdot 1 = 1$

$0+0=0$
$0 \cdot 0 = 0$

(es) Fisso $n \in \mathbb{Z}$ e introduco una relazione di equivalenza $(\sim)$

$a \sim b \iff n \mid (a-b)$

a e b sono in → Relazione binaria
- riflessiva
- simmetrica
- transitiva

Se $n=3$ avrò solamente 3 classi di equivalenza
Se n non è un numero primo non riesco a costruire un campo
ci sarebbero divisori dello 0
$\mathbb{Z}_6 : 2 \cdot 3 = 0$ e non tutti gli elementi sarebbero invertibili rispetto alla molt.

Una relazione di equivalenza introduce classi di equivalenza (sottoinsiemi) in cui tutti gli elementi sono

equivalenti rispetto alla relazione

$\mathbb{Z}$ non è un campo, non vale l'assioma 7, è un ANELLO (gli anelli possono essere commutativi oppure no)

$\mathbb{K}$ campo

$\mathbb{K}^n \rightarrow$ n-uple di numeri nel campo

$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$

$\mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}\}$

$(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\underline{v} = (x_1, \dots, x_n)$

$\alpha \underline{v} \overset{def}{=} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

$\mathbb{K}$ campo / V insieme

$+ : V \times V \rightarrow V$

$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$

Uno spazio vettoriale è un insieme sul quale sono definiti prodotto esterno e addizione che verificano i seguenti assiomi

V: V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$

Assiomi di spazio vettoriale

1) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$
2) $\exists\, \underline{0} \in V \mid \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \quad \forall\, \underline{v} \in V$
3) $\forall\, \underline{v} \in V \;\exists\, \underline{w} \in V \mid \underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$
4) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v} \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$

GRUPPO COMMUTATIVO

5) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \alpha(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha\underline{v} + \alpha\underline{w}$
6) $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, \underline{v} \in V$
7) $\alpha(\beta\underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}$

nel campo

nello spazio

nello spazio

rispetto al campo non c'è l'inverso della moltiplicazione

8) $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \mid 1 \cdot \underline{v} = \underline{v} \quad \forall\, \underline{v} \in V$

Sia $\mathbb{K}$ un campo, verificare gli assiomi per $\mathbb{K}^n = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$

$\underline{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ volte}} \rightarrow$ elemento neutro

elemento opposto

$\underline{v} = (x_1, \dots, x_n) \qquad -\underline{v} = (-x_1, \dots, -x_n)$ etc...

$V = \mathbb{R}[x]$

sto dimostrando che l'insieme dei polinomi è un campo vettoriale

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad n < m$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$

- $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots + b_m x^m$

valgono commutatività e associatività
(dovrei verificare anche gli altri assiomi)

- Ammette un elemento neutro rispetto alla somma: polinomio a coeff. nulli

(?) manca una parte

$V = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{\text{allora}} (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

funzione nulla $f(x) = 0$

funzione opposta $(-f)(x) = -f(x)$

---

1) • Dimostrare, usando gli assiomi che esiste un solo vettore nullo

2) • Dimostrare che esiste un unico vettore opposto

1)

$\underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}$ (per l'assioma 2 applicato a $\underline{0}'$)

$\underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'$ (" " applicato a $\underline{0}$)

$\downarrow$

$\underline{0} = \underline{0}'$

(in breve: $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'$)

2) Se esistessero due opposti $\underline{u}$ e $\underline{w}$ di $\underline{v}$

$\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$

$\underline{w} + \underline{v} = \underline{0}$ $\to$ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w} + \underline{v}$

$\underline{z} + \underline{v} = \underline{0}$

$\downarrow$ per associatività

$\underline{u} + \underbrace{(\underline{v} + \underline{z})}_{= \underline{0}} = \underline{w} + \underbrace{(\underline{v} + \underline{z})}_{= \underline{0}}$

$\to \underline{u} = \underline{w}$

3) ~~Esiste~~ Legge di annullamento del prodotto (esterno)

Ip: $0 \cdot \underline{v} = 0$ $\quad 0 = (0+0)$

$0 \cdot \underline{v} = (0 \cdot 0) \cdot \underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$

$\downarrow$ +a sommo l'inverso rispetto alla somma $a = -0\underline{v}$

$\underbrace{0\underline{v} - 0\underline{v}} = (0\underline{v} + \underline{v}0) + a = \underbrace{0\underline{v} + (0\underline{v} + a)}$

$0 = 0\underline{v} + 0 = 0\underline{v} \rightarrow 0 = 0\underline{v}$ (ciò dimostra anche che lo 0 non è invertibile rispetto alla moltiplicazione $0\underline{v} = 0 \neq 1$)

4) L'opposto di $\underline{v}$ si ottiene moltiplicando per (-1)

up: $-\underline{v} = (-1)\underline{v}$

equivale a dimostrare che $+\underline{v} + (-1)\underline{v} = \underline{0}$

per precedente dimostrazione

$1 \cdot \underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

posso moltiplicarlo perché dall'assioma 8 so che è l'elemento neutro della moltiplicazione

---

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

def: $W \subset V$ si dice **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** se è dotato delle stesse operazioni $+$ (somma) e $\cdot$ (prodotto esterno) di V (che soddisfano gli stessi assiomi)

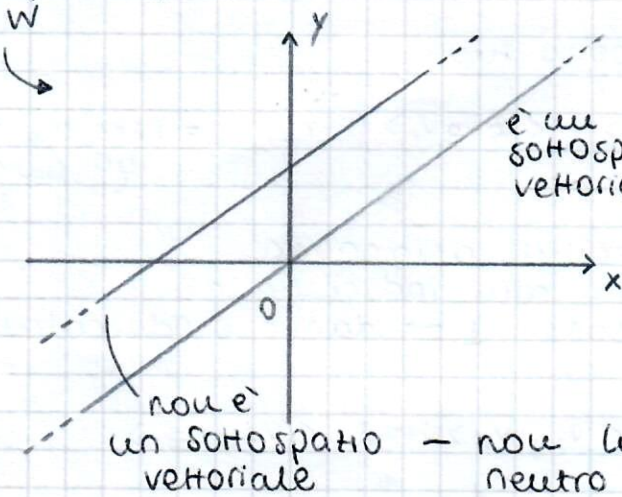
$V = \mathbb{R}^2$

$W = \{\alpha\underline{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\alpha\underline{v} + \beta\underline{v} = (\alpha+\beta)\underline{v} \rightarrow$ la somma è interna

$\underline{0} \in W$

(andrebbe verificato tutto il resto)



Prop: $W \subset V$ sottoinsieme, $W \neq \emptyset$

W è un sottospazio vettoriale SE

[operazioni interne + elemento neutro]

- $\forall\ \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W,\ \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$ (se le altre prop. sono verificate in V lo sono sicuramente anche in V)
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha\underline{w}_i \in W$ (implica che ogni vettore ha un inverso nel sottospazio $(\alpha = -1)$)
- $\underline{0} \in W$

$W = \{\underline{0}\}$ è un sottospazio banale

Tutte le rette passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$

Tutti i piani passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (così come le rette passanti per l'origine e $\underline{0}$)

PRODOTTO SCALARE

02/10/2023

(1) $< \underline{v}, \underline{u} > = ||\underline{v}|| \cdot ||\underline{u}|| \cdot \cos(\widehat{\underline{v}, \underline{w}})$

$< \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} > = < \underline{u}, \underline{w} > + < \underline{v}, \underline{w} >$

$< \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} > = < \underline{u}, \underline{w} > + < \underline{u}, \underline{v} >$ (*)

+ commutatività

} prendiamo queste proprietà come se le avessimo dimostrate

Dati 3 vettori non complanari $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$\forall \underline{v}$ c'è un unico sviluppo

$$\underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Prendo $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ORTONORMALI (≡ versori)

$||\underline{v}_i|| = 1$

$< v_i, v_j > = 0$ per $i \neq j$ (cioè sono a 2 a 2 $\perp$)

Posso scrivere il prodotto scalare usando le coordinate?

$||\underline{v}|| = \sqrt{< \underline{v}; \underline{v} >}$ per la (1)

$< \underline{v}, \underline{v} > = < x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 ; x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 >$

Sfruttiamo la prop. (*) + la prop.: $< \alpha\underline{v}, \underline{w} > = \alpha < \underline{v}, \underline{w} >$

$< xv_1 + yv_2 + zv_3 ; xv_1 > + < xv_1 + yv_2 + zv_3 ; yv_2 > +$

$+ < xv_1 + yv_2 + zv_3 ; zv_3 > =$

li porto fuori

$= x(< xv_1, v_1 > + < yv_2, v_1 > + < zv_3, v_1 >) + \dots =$ (stessa cosa con gli altri termini)

$\downarrow$

dei 9 termini rimangono solo quelli con indici uguali (gli altri sono $\perp \rightarrow$ danno prod. scalare nullo)

$$= x^2 \underbrace{< v_1 ; v_1 >}_{=1} + y^2 \underbrace{< v_2 ; v_2 >}_{=1} + z^2 \underbrace{< v_3 ; v_3 >}_{=1}$$

$$< \underline{v} ; \underline{v} > = x^2 + y^2 + z^2$$

$\underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

$\underline{w} = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3$

$< \underline{v} ; \underline{w} > = < x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 ; x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3 >$

Ripetendo lo stesso procedimento ottengo

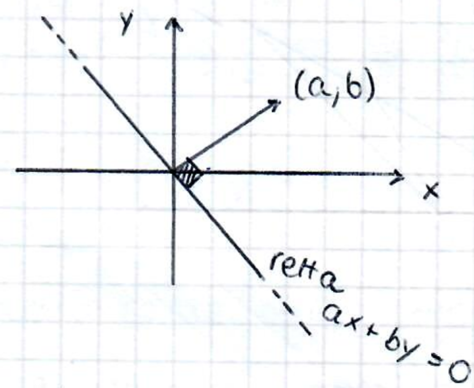
$< \underline{v} ; \underline{w} > = xx' + yy' + zz'$

$ax + by = c$ è una retta

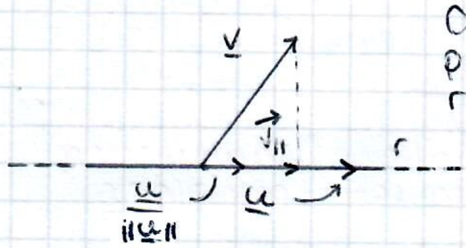
$ax + by = 0 \rightarrow$ retta // che passa per $(0;0)$

$\downarrow =$

$\langle (a;b) ; (x;y) \rangle = 0$



$\langle (a;b) ; (x;y) \rangle = c \Rightarrow |(a,b)| \cdot pr_{(a,b)}(x,y) = c$



Come faccio la proiezione di $\underline{v}$ su r mediante il prodotto scalare?

$\langle \underline{v} ; \frac{\underline{u}}{\|u\|} \rangle = \vec{v}_{//}$

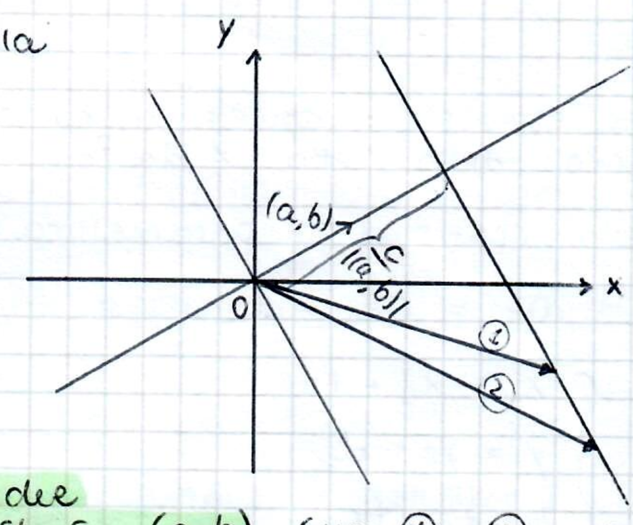
$\hookrightarrow$ lo trasformo in versore della retta

$\langle (a,b) ; (x;y) \rangle = c$

$\langle \frac{(a,b)}{\|(a;b)\|} ; (x;y) \rangle = \frac{c}{\|(a;b)\|}$

$\downarrow$

proiezione di $(x;y)$ su $(a;b)$



Tutti i vettori (x,y) che hanno proiezione cost su (a,b) (tipo 1 e 2 nella figura)

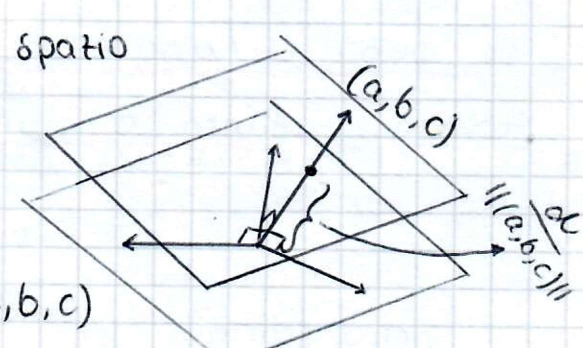
$ax + by + cz = d$ piano nello spazio

$ax + by + cz = 0$

$\langle (a,b,c) ; (x,y,z) \rangle = 0$

$\downarrow$

tutti i vettori $\perp$ ad (a,b,c) occupano un piano

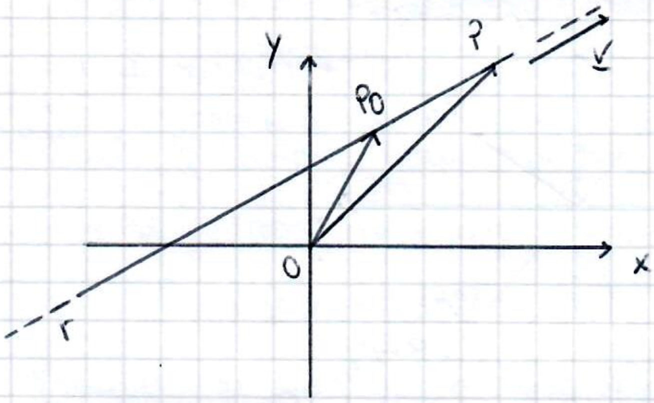


$ax + by + cz = d$

$\hookrightarrow$ vettori la cui proiezione su (a,b,c) è un valore fisso pari a $d / \|(a,b,c)\|$

$ax + by + cz = d$ equazione cartesiana di un piano (spazio)

$ax + by = c$ equazione cartesiana della retta (piano)



Conosco della retta un punto e un vettore dimensione (P_0 e $\underline{v}$)

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$

$\overrightarrow{P_0P} = t\underline{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v}$ equazione parametrica della retta nel piano

$\downarrow$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$

dove
$\underline{v} = (a, b)$
$\overrightarrow{OP_0} = (x_0; y_0)$
$\overrightarrow{OP} = (x; y)$

Tale espressione non è unica, posso usare multipli di $\underline{v}$ o un punto della retta $\neq$ da P_0

Nello spazio l'eq. parametrica della retta

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v}$ $\qquad \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

$\underline{v} = (a, b, c)$

Per passare dalla forma cartesiana a quella parametrica si può eliminare t dal sistema, al contrario basta trovare 1 punto e un vettore direzione

$\downarrow$

per una retta $y = mx + q$

$\underline{v} = (1; m)$

nello spazio:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

in generale la soluzione del sistema è una retta (a meno che i piani siano //)

sono // <=> (a,b,c) e (a',b',c') sono multipli
(se d è multiplo di d' i piani coincidono)

In questo caso per passare alla forma parametrica

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

posso usare una variabile come parametro

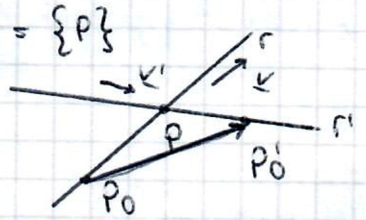
POSIZIONI RELATIVE DI 2 PIANI NELLO SPAZIO

- coincidenti : (a,b,c,d) multiplo di (a',b',c',d')
- // non coincidenti : (a,b,c) multiplo di (a',b',c')
- incidenti in una retta r : (a,b,c) non multiplo di (a',b',c')

" " DI 2 RETTE NELLO SPAZIO

- coincidenti ($\underline{v}, \underline{v}'$ e $\overrightarrow{P_0P_0'}$ sono tutti multipli)
- // non coincidenti ($\underline{v}, \underline{v}'$ sono multipli ma $\overrightarrow{P_0P_0'}$ non lo è)
- sghembe ($\underline{v}$ e $\underline{v}'$ non multipli, $\underline{v}, \underline{v}'$ e $\overrightarrow{P_0P_0'}$ non complanari)
- incidenti

$r \cap r' = \{P\}$



r e r' sono complanari

$\underline{v}, \underline{v}'$ non multipli, $\overrightarrow{P_0P_0'}$ appartiene al piano di $\underline{v}$ e $\underline{v}'$

PRODOTTO VETTORIALE

$\underline{v} \times \underline{w}$ è un vettore avente lunghezza $\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot \sin \widehat{\underline{v},\underline{w}}$

direzione $\perp$ al piano individuato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$ (supposti non //)

verso dato dalla regola della mano DX

- NON COMMUTATIVO $\underline{v} \times \underline{w} = - \underline{w} \times \underline{v}$
- DISTRIBUTIVO RISPETTO ALLA SOMMA $(\underline{u} + \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{u} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{w}$
  $\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}$
- $(\alpha \underline{u}) \times \underline{w} = \alpha(\underline{u} \times \underline{w})$

$\underline{w} \times \underline{w} = - \underline{w} \times \underline{w} \rightarrow \underline{w} \times \underline{w} = 0$

$\langle \underline{v}_i , \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & se\ i=j \\ 0 & se\ i\neq j \end{cases}$ prodotto scalare tra versori

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sistema ortonormale

$\underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

$\underline{u} = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3$

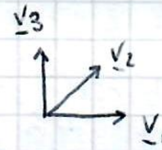
$(x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3) \times (x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3)$

Questa volta di 9 prodotti ne rimangono 6, quelli con indici diversi

$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \underline{v}_3 = -\underline{v}_2 \times \underline{v}_1$

$\underline{v}_2 \times \underline{v}_3 = \underline{v}_1$

$\underline{v}_3 \times \underline{v}_1 = \underline{v}_2$



$\rightarrow (xy' - yx')\underline{v}_3 + (-xz' + zx')\underline{v}_2 + (yz' - zy')\underline{v}_1$

riordinando

$(yz' - zy')\underline{v}_1 + (zx' - xz')\underline{v}_2 + (xy' - yx')\underline{v}_3$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \underline{v}_1 - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \underline{v}_2 + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \underline{v}_3$$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

PRODOTTO MISTO $\langle \overset{\text{altezza}}{\underline{u}}, \underbrace{\underline{v} \times \underline{w}}_{\text{area di base}} \rangle$

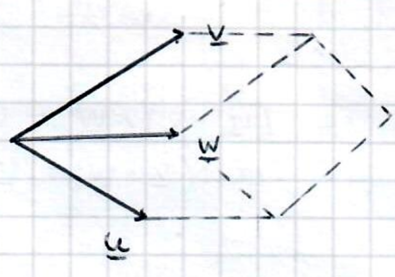
$\underline{u} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

$\underline{v} = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3$

$\underline{w} = x''\underline{v}_1 + y''\underline{v}_2 + z''\underline{v}_3$

$$\boxed{\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}}$$

$\rightarrow$ se questo determinante viene 0 i vettori sono complanari



Il determinante misura il volume di questo parallelogramma

$\| \underline{v} \times \underline{w} \|$ = area della base

$\| \underline{u} \| \cdot \cos \widehat{\underline{u}, \underline{v} \times \underline{w}}$ = altezza

04/10/2023

Sottospazio vettoriale

$W \subset V$ (con stesse operazioni)
$W \neq \emptyset$
è sottospazio

$\Updownarrow$

1. $\underline{v} + \underline{u} \in W, \ \forall \underline{v}, \underline{u} \in W$
2. $\alpha \underline{v} \in W, \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall \underline{v} \in W$

↳ $\underline{0}$ deve appartenere a W perché $0 \cdot \underline{v}$ deve essere interno

(=>) in questo verso non c'è nulla da dimostrare, deriva dalla definizione

(<=) in questo verso bisogna verificare tutti gli assiomi ma derivano subito dal fatto che valgono per i vettori di V e quindi, in particolare, per quelli di W

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$

$$\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \{ \underline{v} \in V \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \}$$

$$= \{ \underline{v} = \underbrace{\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n}_{\text{combinazione lineare dei vettori } \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n}, \ \alpha_i \in \mathbb{K} \} \equiv \text{SOTTOSPAZIO GENERATO DA } \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$$

= insieme di tutte le comb. lineari

prop. $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è un sottospazio di V

1. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \qquad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$

   $\underline{w} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$

   $\underline{v} + \underline{w} = (\alpha_1 + \beta_1) \underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \underline{v}_n$ => la somma è interna

   in questo passaggio in realtà ho usato le prop. associativa, commutativa e distributiva

2. $\alpha \in \mathbb{K} \ \ \underline{v} \subset \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \Rightarrow \alpha \underline{v} \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

   $\alpha \underline{v} = \alpha(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = (\alpha\alpha_1) \underline{v}_1 + \dots + (\alpha\alpha_n) \underline{v}_n$ □

- $\text{Span}(\underline{v}) = \{ \underline{v} = \alpha \underline{v}_1 \mid \alpha \in \mathbb{K} \}$

  ↳ tutti i multipli di $\underline{v}$

$\text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \{ \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \}$

se sono multipli → retta
se non lo sono → piano che contiene $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$

$A \subset V$ sottoinsieme di vettori

$$\text{Span}(A) = \{ \underline{v} \in V \mid \exists\, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in A,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \}$$

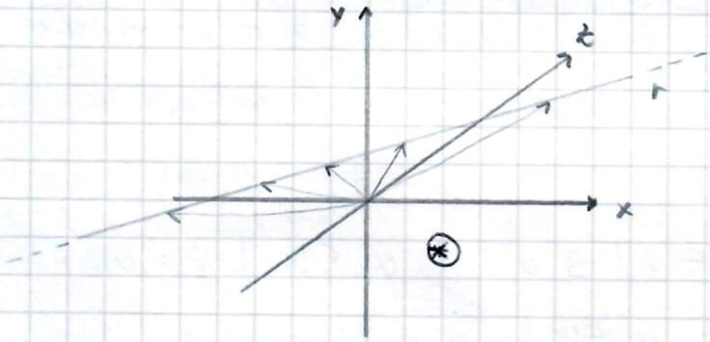
es.

1) $V = \mathbb{K}[x]$ / vedi lezione del 28/09/2023

$A \subset \mathbb{K}[x] \quad A = \{1, x^2, x^4, \dots\}$

$\text{Span}(A) = \{ a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_n x^{2n} \}$

2) Sottospazio generato da una retta in $\mathbb{R}^3$ non passante per l'origine $\Rightarrow$ piano passante per la retta e per l'origine



- $\text{Span}(A) \supset A \quad \forall A \subset V$

  ↳ $\underline{v} \in A \quad \underline{v} = 1 \cdot \underline{v}$ → comb. di elementi di A, per cui $\in \text{Span}(A)$

  contenuto o uguale

- $A \supset B \Rightarrow \text{Span}(A) \supset \text{Span}(B)$

⊛ Se prendo due vettori, o tutti lo Span è uguale anche se i sottoinsiemi iniziali sono uno strettamente contenuto nell'altro

- $\text{Span}(\text{Span}(A)) = \text{Span}(A)$
- $W \subset V$ sottospazio

$\text{Span}(W) = W$

↳ perché contiene tutte le sue combinazioni lineari

$v_1 \in W,\ \alpha_1 \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 \in W$

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 \in W$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ non complanari

$\underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

Voglio
1) poter sviluppare ogni vettore
2) che ogni sviluppo sia unico

1) V : $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dicono generatori dello spazio se ogni altro vettore si sviluppa tramite questi

$V = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

$\forall \underline{v} \in V \quad \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

2) Def : $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dicono linearmente indipendenti se

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0 \in \mathbb{K}$

Prendo un singolo vettore $\underline{v}_1$

- se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ $\quad \alpha \underline{v}_1 = \underline{0}$

  per assurdo

  se $\alpha \neq 0$ $\quad \alpha^{-1}\alpha = 1$

  $\alpha^{-1}(\alpha \underline{v}_1) = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$

  $\underline{v}_1 = \underline{0} \rightarrow$ imp $\quad$ per cui $\alpha = 0$

  $\underline{v}_1$ è linearmente indipendente

  se $v_1 \neq 0$ è linearmente indipendente

- se $\underline{v}_1 = \underline{0}$ non è linearmente indipendente

ESISTE UN UNICO SVILUPPO

OSS se $\underline{v}_1, \underbrace{}_{v_2, \dots, v_n}$ sono linearmente indipendenti e generatori

$\Rightarrow \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

Dim:

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n v_n - (\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n v_n) = \underline{0}$

$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \underline{v}_n = \underline{0}$

$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$

$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti se

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$A \subset V$ sottoinsieme

è linearmente dipendente se $\exists$ una comb. $\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$

con $\underline{v}_i \in A$ e qualche $\alpha_i \neq 0$

Def Una base dello spazio V è un insieme linearmente indipendente di generatori di V

$\mathbb{R}^n$ base canonica:

$$\underline{a}_1 = (\underbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ coordinate}})$$

$$\underline{a}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a_i ha 1 al posto i, ha 0 altrove

$\underline{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\underline{v} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_n \underline{a}_n$

→ verifica che ogni vettore si sviluppa

$\alpha_1 \underline{a}_1 + \ldots + \alpha_n a_n = \underline{0}$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \underline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

↓

allora tutti gli α_i sono nulli

→ verifica che sono lin. indipendenti

Allora ho verificato che si tratta di una base. $\square$

$V = \mathbb{K}[x]$ (polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$)

non è finitamente generato

dim.

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$

$\alpha_1 p_1(x) + \ldots + \alpha_n p_n(x)$ ha grado $\leq$ al massimo dei gradi degli $p_i(x)$

$\deg[\alpha_1 p_1(x) + \ldots + \alpha_n p_n(x)] \leq \max[\deg(p_1(x)), \ldots, p_n(x))]$

base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, \ldots\}$

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \iff a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$

e 2 . polinomi sono uguali se hanno coeff. uguali

$\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \}$ base di V

$V \ni \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \ldots + x_n \underline{v}_n$ ogni $\underline{v} \in V$ si sviluppa unicamente come combinazione di vettori di $\mathcal{B}$

$$\underline{v} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

(coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$

OSS • $[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } V}}{\underline{v} + \underline{w}}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{K}^n}}{+} [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$

$\left.\begin{array}{l} \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \ldots + x_n \underline{v}_n \\ \underline{w} = y_1 \underline{v}_1 + \ldots + y_n \underline{v}_n \end{array}\right\}$ somma: $(x_1 + y_1)\underline{v}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\underline{v}_n$

• $[\alpha \underline{v}]_{\mathcal{B}} = \alpha [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{K}$

$A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ $A + A' = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} = \alpha A$$

base canonica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\shortparallel$

E^{11} E^{12} E^{21} E^{22} riga e colonna dell'1

$A = aE^{11} + bE^{12} + cE^{21} + dE^{22}$

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$M_n(\mathbb{K})$ = matrici quadrate $n \times n$

↓

la sua base canonica sarà formata da n^2 matrici

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

05/10/2023

Sia $X \neq \emptyset$ un insieme, il prodotto cartesiano $X \times X =$
$= \{ (a,b) \mid a, b \in X \}$ insieme delle coppie di numeri in X

Un $R \subset X \times X$ è una relazione binaria su X
└ sottoinsieme di $X \times X$

Se $(x,y) \in R$ diciamo che x è in R-relazione con y, si scrive $x \sim_R y$

$X = \{a, b, c\}$

	a	b	c	
	(a,a)	(b,a)	(c,a)	a
	(a,b)	(b,b)	(c,b)	b
R	(a,c)	(b,c)	(c,c)	c

↓

$a \sim_R c, \; b \sim_R b, \; c \sim_R a$

(es.) $X = \mathbb{N}$ $\quad x$ e $y \in \mathbb{N}$

$x \sim y \iff$
1) $x > y$
2) $x \leq y$
3) $|-y+x| = 1$
...

esempi di relazioni binarie

4) $x+y$ è pari → coppie pari/pari o disp/disp
5) $|x-y|$ è multiplo di 3

1)

	0	1	2	3	...
0		#	#	#	
1			#	#	
2				#	
⋮					

- 0 non è in relazione con nulla
- $1 \sim_R 0$
- $2 \sim_R 0 \quad 2 \sim_R 1$

...

Una relazione R su X si dice:

- RIFLESSIVA se $\forall x \in X \quad x \sim_R x$
- SIMMETRICA se $\forall x,y \in X \quad y \sim_R x$ e $x \sim_R y$
- ANTISIMMETRICA se $\forall x,y \in X$, se $y \sim_R x$ e $x \sim_R y \Rightarrow x = y$
- TRANSITIVA se $\forall x,y,z \in X$, $x \sim_R y$ e $y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$

1) non è riflessiva (0 non in relazione con 0)

- non simmetrica $1 \sim 0$ ma non $0 \sim 1$
- è antisimmetrica → non ci sono elementi in relazione nei 2 sensi (dalle up false si deduce tutto)
- è transitiva: se $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$

Una relazione riflessiva antisimmetrica e transitiva si dice una RELAZIONE D'ORDINE (come la 2) O ORDINAMENTO

↓ es

Y insieme $\quad X = \mathcal{P}(Y)$

insieme delle parti

2 sottoinsiemi di X

$A, B \in \mathcal{P}(Y)$

Definiamo questa relazione:

$A \sim B \Leftrightarrow A \subset B$

- riflessiva $A \subset A$
- antisimmetrica $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$
- transitiva $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Non è un ordinamento totale ma ha un elemento minimo, l'insieme vuoto $\emptyset$.

$a \sim b \ \vee \ b \sim a$ ($\forall a, b$ una delle due è necessariamente vera)

Una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è una RELAZIONE DI EQUIVALENZA

R relazione di equivalenza su X, $\quad x \in X$

la CLASSE DI EQUIVALENZA DI x è

$$[x]_R = \{ y \in X \mid x \sim_R y \} \subset X$$

sottoinsieme di X

oss: $x \in [x]_R$

Dato che la relazione è TRANSITIVA, le varie classi di equivalenza sono necessariamente disgiunte.

Questa è una PARTIZIONE di X, $\quad P \subset \mathcal{P}(X)$

P è un insieme di sottoinsiemi di $X \Rightarrow P$ è contenuto nell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$

1) $\forall\, U \in P \quad U \neq \emptyset$
2) $U_1, U_2 \in P$ diversi $\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset$
3) $\bigcup_{U \in P} U = X \ \rightarrow \ U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n = X$

$$\forall x \in X \ \exists\, U \in P \mid x \in U$$

$x, y \in X, \quad [x] = [y] \iff x \sim y$

Dim $\cdot\ y \in [y] = [x] \Rightarrow y \sim x$ se $(\Rightarrow)$

$\cdot\ z \in [y] \Rightarrow y \sim z, \quad x \sim y$

per la transitività $x \sim z$

$\Downarrow$

$z \in [x]$ e solo se $(\Leftarrow)$

e viceversa scambiando x con y e usando la simmetria

$[x] \subset [y]$ e $[y] \subset [x] \Rightarrow [x] = [y]$

LEMMA per dimostrare che le rel di equivalenza danno una partizione e viceversa

Le classi di eq. danno una partizione

Dim: $\forall x \in X, \quad x \in [x] \neq \emptyset$ → dimostra le prop. 1 e 3

Prop. 2:

Se $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$ allora $\exists\, z \in [x_1] \cap [x_2] \Rightarrow$ $x_1 \sim z$, $x_2 \sim z$ $\downarrow$ $z \sim x_2$

per cui $x_1 \sim x_2$

$[x_1] = [x_2]$ per precedente dimostrazione

Una partizione di X da una rel. di equivalenza su X

$x, y \in X, \quad x \sim_P y \iff \exists\, U \in P \mid x, y \in U$ x e y sono in relazione se appartengono allo stesso insieme della partizione

Riflessiva → $\forall x\ \exists\, U \mid x \in U$, allora è riflessiva

Simmetrica → per definizione

Transitiva → $x \sim y, \ y \sim z$

$\downarrow \qquad \searrow$

$x, y \in U_1 \in P \qquad y, z \in U_2 \in P$

$y \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

allora per la prop. 2 $\Rightarrow U_1 = U_2 \ni z, x \Rightarrow x \sim z$

<u>insieme quoziente</u> = insieme delle classi di equivalenza

R relazione di eq. su X

$X/_\sim = \{ [x] \mid x \in X \} \subset \mathcal{P}(X)$

↑

insieme quoziente

$\pi : X \to X/\sim$ è la PROIEZIONE A QUOZIENTE

$x \to [x]$ (surgettiva, $\pi(x) = \pi(y) \iff x \sim y$)

(es).

$X \in \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$ $x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Z}$

$y - x = n \in \mathbb{Z}$

$y = x + n$ con $n \in \mathbb{Z}$

$\underset{0 \quad\quad 1}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}$ contiene un elemento $\forall$ classe di equivalenza che sono tutti non equivalenti tranne 0 e 1

$[0] = [1]$

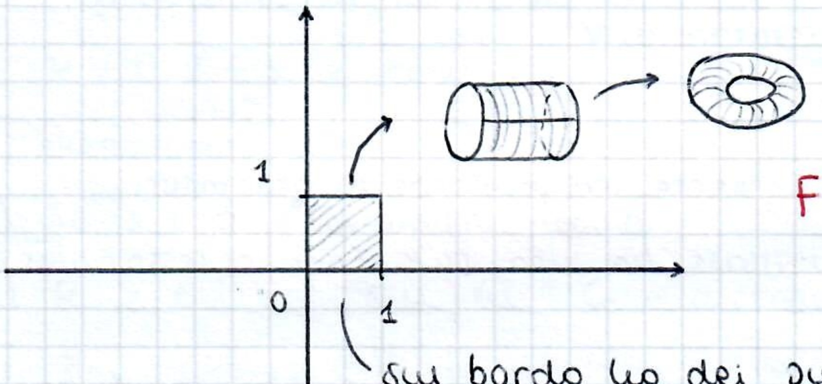
$= S^1$

$\pi : \mathbb{R} \to S^1$

"arrotola" $\mathbb{R}$ lungo la circonferenza

(es.2) Sia R una rel. di equivalenza su X

$X = \mathbb{R}^2$ $(x_1, y_1) \sim_R (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ mette in relazione i punti su una griglia a quadretti



"Arrotolo $\mathbb{R}^2$ su una ciambella"

FACCIO UNA CIAMBELLA!

sul bordo ho dei punti equivalenti

$\mathbb{N} \to$ 2 operazioni $+, \cdot$

associativa
commutativa
el. neutro
distributiva

Vale la legge di cancellazione (non banale)

Ha delle pecche: mancano gli opposti e gli inversi

$\downarrow$ vari ampliamenti

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

09/10/2023

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

vettori linearmente indipendenti / generatori

Esercizio 1

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti $\iff$ nessun $\underline{v}_i$ è combinazione dei rimanenti

$\Rightarrow$ se fosse $\underline{v}_1 - \lambda_2 \underline{v}_2 - \lambda_3 \underline{v}_3 - \dots - \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$\downarrow$

contraddice il fatto che sono linearmente indipendenti

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

$\Leftarrow$ Ammettiamo che non siano lin. dipendenti:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ con α_i non tutti nulli

allora $\alpha_i \underline{v}_i = -\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ → nega l'ip.

divido per α_i

Esercizio 2

se $\underline{0} \in \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$ dipendenti $\Rightarrow$ $\underline{0}$ comb. non banale $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ c'è un $\underline{v}_i = \underline{0}$ comb. dei rimanenti

$Span(\underline{v}_1)$ → è una retta se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$

$Span(\underline{v}_1) \subsetneq Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \subsetneq Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \iff \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti

---

Siano $v_1, \dots, v_n$ generatori di V

$Span(v_1, \dots, v_n) = V$

BASE = insieme linearmente indipendente di generatori

TEO 1.0: Ogni spazio vettoriale ha una base (non necessariamente finita)

Lo dimostriamo sotto l'ip che V sia FINITAMENTE GENERATO

TEO 1.1 (LEMMA): $\mathcal{B} \subset V$ è una base $\iff$ $\mathcal{B}$ è un sottoinsieme <u>indipendente massimale</u>

$\mathcal{B} \subsetneq C$

↳ qualunque soprainsieme di $\mathcal{B}$ non è linearmente indipendente

$\Rightarrow$ È indipendente per def. di base, devo dimostrare che è massimale

coincide con il dimostrare che ogni soprainsieme di $\mathcal{B}$ non è indipendente

$\equiv$ $C \supsetneq \mathcal{B}$ non è indipendente

Sia $\underline{v} \in C$, $\underline{v} \notin \mathcal{B}$ cioè $\underline{v} \in C - \mathcal{B}$

Facciamo vedere che $C = \mathcal{B} \cup \{\underline{v}\}$ è DIPENDENTE

Siccome $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori posso sviluppare $\underline{v}$

↳ $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$ $\quad v_i \in \mathcal{B} \quad x_i \in \mathbb{K}$

Se $\underline{v}$ è nullo si vede facilmente che C è dipendente

$\underline{v} - x_1 \underline{v}_1 + \dots + (-x_n \underline{v}_n) = \underline{0}$ => combinatione non banale, C è dipendente

OSS: Se A è dipendente, $\mathcal{B} \supset A$ è dipendente

qualunque insieme che contiene A

segue che ↳ qualunque C è dipendente che contiene strettamente una base

$\underline{v} \in C - \mathcal{B}$

$C \supset \mathcal{B} \cup \{\underline{v}\} \supsetneq \mathcal{B}$

lin. dip. per l'osservazione

dipendente

$C \not\supset \mathcal{B}$

$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B} \cup \{\underline{v}\} \subset C$

(<=) Devo dimostrare che $\mathcal{B}$ indipendente massimale è una base

Una base è

- lin. indipendente → già nell'hp.
- generatrice di tutti i vettori

voglio quello che mostrare

$\forall\, \underline{v} \in V$, $\underline{v}$ è comb. lineare di vettori di $\mathcal{B}$

Prendiamo $\underline{v} \in V$

1) Se $\underline{v} \in \mathcal{B}$ è ovviamente comb.

2) Se $\underline{v} \notin \mathcal{B}$ → $\mathcal{B} \cup \{\underline{v}\} = C$ è linearmente dipendente (perché $\mathcal{B}$ per hp. è massimale)

$\exists\, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathcal{B}$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ |

$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n + x\underline{v} = \underline{0}$ con x_i non tutti nulli

$x \neq 0$ altrimenti contraddirrei l'indipendenza di $\mathcal{B}$

(se $x = 0$ dovrebbero essere nulli anche tutti gli altri)

$\underline{v} = -x_1 x^{-1} \underline{v}_1 + \dots + (-x_n x^{-1}) \underline{v}_n$

↳ ogni vettore può essere generato $\square$

se $x \neq 0$ e gli altri sono nulli allora $x\underline{v} = 0$; $\underline{v} = \underline{0}$ e può essere generato

\#

TEO 1.2: Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset V$ è una base <=> $\mathcal{B}$ è un sottoinsieme minimale di generatori (per esercizio)

OSS: Se un certo insieme A non genera, allora $C \subsetneq A$ non genera

* Tornando al teo. principale (FINITO) → OGNI SPAZIO VETTORIALE HA UNA BASE, (NON NECESSARIAMENTE FINITA)

(trattiamo solo il caso di spazi finitamente generati)

$\exists$ un sottoinsieme ✓ $\mathcal{A} \subset V$ di generatori (male che va $\mathcal{A} = V$)

Dimostriamo che $\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ che è una base

Se $V = \{\underline{0}\}$ per convenzione $\mathcal{B} = \emptyset$

Se $V \neq \{\underline{0}\}$ allora $\mathcal{A}$ contiene vettori $\neq \underline{0}$ (per generare vettori non nulli serve almeno 1 vettore non nullo)

(l'insieme degli insiemi)

$\Rightarrow$ la collezione degli insiemi indipendenti di $\mathcal{A}$ è non vuota

$\{\underline{v}\}$, $\underline{v} \in \mathcal{A}$ e $\underline{v} \neq \underline{0}$ è indipendente — serve per dire che $\mathcal{B}$ esiste

Prendiamo $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ INDIPENDENTE MASSIMALE

Se $\mathcal{A}$ fosse già indipendente allora $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ sarebbe una base, altrimenti:

ORA MOSTRO COME SCEGLIERE $\mathcal{B}$:

Numeriamo i vettori di $\mathcal{A}$: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$

$\underline{v}_1 \neq 0$ è indipendente

se $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ è ind. lo tengo, altrimenti scarto v_2

Continuo in questo modo fino a $\underline{v}_n$

Otteniamo $\mathcal{B}$ con questo algoritmo e devo dimostrare che è una base (è indipendente ✓ è generatrice?)

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$

$\forall v_j$ con $j > k$ è comb. lineare di $\mathcal{B}$ (perché $\mathcal{B}$ è massimale)

comb. lineare nulla non banale

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda \underline{v}_n + \lambda_j v_j = \underline{0}$ $\qquad v_j \in A \setminus B$

$\lambda_j \neq 0 \rightarrow$ ricavo v_j da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$

Sia $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k + \alpha_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$, $\underline{v} \in V - \mathcal{A}$

Basta adesso sostituire a $v_{k+1}, \dots, v_n$ espressioni in termini dei $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$

$\underline{v}_{k+1} = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n$

$\vdots$

$v_n = z_1 \underline{v}_1 + \dots + z_n \underline{v}_n$

Sostituendo e associando otterrò:

$\underline{v} = (\alpha_1 + \alpha_{k+1} y_1 + \dots + \alpha_n z_n) \underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \dots) \underline{v}_n$ $\square$

TEO: Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V hanno lo stesso numero di elementi
(per essere + generali: sono in bigezione) ↳ nel caso finito

Def. La **dimensione** di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \text{num. di elementi in una base}$$

es. • $V = \mathbb{K}^n \rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$

• $V = \mathbb{K}_n[x]$ $\deg \leq n$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n+1$ $\qquad \{1, x, \dots, x^n\}$

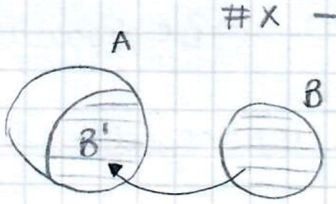
LEMMA: algoritmo di scambio

esempio in $\mathbb{R}^2$
$A = \{(0,1), (1,0)\}$
$\mathcal{B} = \{(0,2), (2,0)\}$

HP.
V spazio vett. su $\mathbb{K}$ finitamente generato
sia $A = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ linearmente indipendente $\Rightarrow$ base di $\text{Span}(A)$
e $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ lin. ind. con $\mathcal{B} \subset \text{Span}(A)$

TH.
Allora $\exists\, \mathcal{B}' \subset A$ con $\qquad \# X \rightarrow$ num. di elementi di X

$\# \mathcal{B}' = \# \mathcal{B}$



$A' = (A - \mathcal{B}') \cup \mathcal{B}$ è ancora linearmente indipendente e
$\text{Span}(A') = \text{Span}(A)$

Prendiamo $\underline{w}_1$, so che $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{w}_1$, c'è qualche
$\alpha_i \neq 0$. Posso supporre, a meno di riordinare gli indici, che
↳ perché $\underline{w}_1$ è indipendente $\Rightarrow \underline{w}_1 \neq 0$
$\alpha_1 \neq 0$.

sia $A_1 = A - \{\underline{v}_1\} \cup \{\underline{w}_1\}$
↓ è
linearmente indipendente? $\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$

$$\lambda_1 \underline{w}_1 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$$
$$\downarrow$$
$$\lambda_1 (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$$
$$\lambda_1 \alpha_1 \underline{v}_1 + (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2) \underline{v}_2 + \dots + (\lambda_1 \alpha_k + \lambda_k) \underline{v}_k = \underline{0}$$
$$\lambda_1 \alpha_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0$$
$$\dots$$
ottengo $\lambda_i = 0 \quad \forall i$

$Span(A_1) = Span(A)$?

Consideriamo ogni combinazione lineare di vettori di A_1:
possibile

$$\lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = 0$$
$$\parallel$$
$$\lambda_1(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k v_k) + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_u \underline{v}_u \in Span(A)^{(*)}$$

$$Span(A_1) \subset Span(A)$$

<u>viceversa</u>

da $\underline{v}_1 = \frac{1}{\alpha_1}(\underline{w}_1 - \alpha_2 \underline{v}_2 - \dots - \alpha_k \underline{v}_k)$

dice che $\underline{v}_1, \dots, v_k$ è comb. di $\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ → $Span(A)$ (**) $\cap$ $Span(A_1)$

Procedo così anche per gli altri vettori

$A = \{v_1, \dots, v_k\}$ $\quad B = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_u\}$ $\quad$ (*) + (**) → $Span(A) = Span(A_1)$

$A_1 = \underline{w}_1, v_2, \dots, v_k$ → faccio la stessa cosa con un vettore di A_1 e uno di B, uno tra $\underline{w}_2, \dots, \underline{w}_u$
$\exists$ per l'indipendenza

$B \subset Span(A_1)$

continuo...

<u>Esercizi per casa della lezione del 09/10/2023</u>

\# Es. 2

$Span(v_1) \subsetneq Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \subsetneq \dots \subsetneq Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_u) \iff \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_u$ linearmente indipendenti

($\Leftarrow$) Per quanto dimostrato nell' es. 1

$\underline{v}_i \in \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_u\}$ non è comb. lineare di $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_u\} \setminus \{\underline{v}_i\}$

$\Rightarrow \underline{v}_i \notin Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_u)$

Inoltre $Span(v_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_u) \subset Span(v_1, \dots, v_u) =$
$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_u v_u$, $\alpha_1, \dots, \alpha_u \in \mathbb{K}$ poiché può essere ottenuto ponendo $\alpha_i = 0$.

Dato che un sottoinsieme di un insieme lin. indipendente è anch'esso lin. indipendente si possono ripetere questi ragionamenti eliminando ~~aggiungendo~~ 1 vettore alla volta.

($\Rightarrow$) $Span(v_1) \subsetneq Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ allora $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tali che
$\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 \notin Span(\underline{v}_1)$

Se non fossero lin. indipendenti

$\alpha' \underline{v}_1 + \beta' \underline{v}_2 = \underline{0}$ $\quad (\alpha', \beta') \neq (0,0)$

per l'es. 1 posso scrivere $\underline{v}_2$ come comb. lineare di $\underline{v}_1$

$\underline{v}_2 = x v_1$

allora $span(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = x_1 \underline{v}_1 + \underline{v}_2 x_2 = x_1 \underline{v}_1 + x x_2 \underline{v}_1 = (x_1 + x x_2) \underline{v}_1 =$

$= Span(v_1)$ → nega l'hp.

Si può iterare il ragionamento aggiungendo un vettore alla volta.

□

Teorema 1.2

→ B base $\Rightarrow$ B sottoinsieme minimale di generatori

B è un insieme di generatori per definizione, è minimale?

Se togliessimo un vettore v_i da B

$B - \{\underline{v}_i\}$

$B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_k\} \cup \{\underline{v}_i\}$

Allora è impossibile generare v_i, perché $\underline{v}_i$ è indipendente dagli altri => non può essere scritto come comb. lineare dei rimanenti

→ B sottoinsieme minimale di generatori $\Rightarrow$ B base

I vettori di B sono generatori per hp. e devo mostrare che sono linearmente indipendenti.

Sia $\underline{v}_i$ un vettore di B: se esso fosse linearmente dipendente potrei scriverlo come comb. lineare dei rimanenti e $B \setminus \{v_i\}$ genererebbe ancora tutto lo spatio, negando l'ipotesi che il sottoinsieme sia minimale.

continuo... (alg. di scambio)

Sostanzialmente faccio lo stesso ragionamento fatto su A e B ma su A_1 e B e via dicendo

$A_1 = \underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, v_K$

sono linearmente indipendenti e $\mathrm{span}\, A_1 = \mathrm{span}\, A$
$B \subset \mathrm{span}\, A \Rightarrow B \subset \mathrm{span}(A_1)$

$\underset{\neq \underline{0}}{\underline{w}_2} = \beta_1 \underline{w}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_K \underline{v}_K$

<u>OSS</u> Notiamo che uno tra $\beta_2, \dots, \beta_K$ è $\neq 0$ altrimenti $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ sarebbero dipendenti. Si può supporre a meno di riordinamenti $\beta_2 \neq 0$

$\Rightarrow A_2 = \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_K$

Iterando lo stesso ragionamento riesco a sostituirli tutti $\square$

<u>Corollario</u> $\# B \leq \# A$

11/10/2023

TEO Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V hanno la stessa cardinalità

$\mathcal{B}$ genera $\Rightarrow$ $\mathcal{B}' \subset Span\, \mathcal{B} = V$

$\# \mathcal{B}' \leq \# \mathcal{B}$

$\mathcal{B}'$ genera $\Rightarrow$ $\mathcal{B} \subset Span\, \mathcal{B}' = V$

$\# \mathcal{B} \leq \# \mathcal{B}'$

$\Rightarrow \# \mathcal{B} = \# \mathcal{B}'$

$V = M_n(\mathbb{K})$ matrici quadrate $(n \times n)$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Base : $E^{(i,j)} \in V$ — i righe, j colonne

$$\underbrace{\left(E^{(i,j)}\right)_{pq}}_{\text{elemento della matrice } E^{(i,j)} \text{ che occupa il posto di riga p e colonna q}} = \begin{cases} 1 & \text{se } p = i \wedge q = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$

$W \subset M_n(\mathbb{K})$

$= \{ A\,(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall i,j \;\; a_{ij} = a_{ji} \}$

MATRICI SIMMETRICHE — si dimostra che è un sottospazio vettoriale

Base di matrici simmetriche

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 1 & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & 1 & & \\ & & & \end{bmatrix}, \ldots$$

(column i and row i on the first matrix; positions (i,j) and (j,i) on the second)

esercizio: dimostrare che sono una base delle matrici simmetriche

$$\boxed{\text{Dim } W = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{base}} \underset{S_{11}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{S_{22}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, \underset{S_{12}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$A = aS_{11} + bS_{12} + cS_{22}$

MATRICI ANTISIMMETRICHE

$W = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = (-a_{ji}) \}$ → si verifica che è uno spazio

Che dimensione ha?

generico elemento della diagonale

$\Rightarrow 2 a_{ii} = 0$

$(1+1) a_{ii} = 0$

se 2 è $\neq 0$ nel campo a_{ii} non è necessariamente $= 0$

se $2 \neq 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ← Gli elementi della base hanno diagonale nulla e -1 e 1 in due posizioni simmetriche

$\dim W = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - n$ ($-n$ rispetto a quelle simmetriche perché la diagonale è nulla)

Come si comporta la dimensione rispetto ai sottospazi?

OSS. $A \subset V$ linearmente indipendente $\Rightarrow A$ si estende a una base

Sia $\mathcal{B}$ una base, allora $A \subset \mathrm{Span}(\mathcal{B})$

$\exists A' \subset \mathcal{B} \mid (\mathcal{B} - A') \cup A$ è una base per l'algoritmo di scambio

$\# A = \# A'$

Prop. $W \subset V$ sottospazio

$\Downarrow$

$\dim W \leq \dim V$ e vale l'uguale $\Leftrightarrow W = V$

Dimostrazione:

Sia $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ base di W, sono indipendenti in V per definizione di base

Per l'osservazione $\exists$ una base di V che li contiene

da cui $\dim V \geq \dim W$

Se $W = V \Rightarrow \dim W = \dim V$ è ovvia

(Se $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$:

$m = \dim W = \dim V$, allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ è una base di V ← per l'algoritmo di scambio

$W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m) = V$

Esercizi / osservazioni

1) V di dimensione n (per tutti gli esercizi)

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow m \leq n$

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ si estende a base $\Rightarrow m \leq n$

2) n vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti sono una base.

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si estendono a una base $\rightarrow$ insieme di n elementi

$\hookrightarrow$ coincide con una base

3) Ogni insieme di cardinalità $\geq n+1$ è dipendente (stesse argomentazioni)

4) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ generatori $\Rightarrow k \geq n$

Ogni insieme di generatori contiene una base (di n elementi)

5) $n-1$ vettori non generano lo spazio

6) n vettori che generano sono una base (corrispondente del 2)

7) $U, W \subset V$ sono sottospazi vettoriali

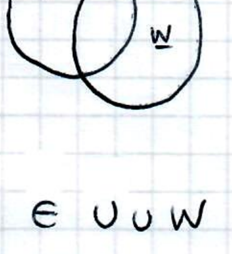
$U \cap W$ è sottospazio

- non vuoto perché contiene $\underline{0}$
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in U \cap W \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in U$ e $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in U \cap W$

8) $U \cup W$, $\overbrace{U, W \subset V}^{\text{sottospazio}}$ è sottospazio $\Leftrightarrow U \subset W$ o $W \subset U$

($\Leftarrow$) ovvia

($\Rightarrow$)



$\exists\, \underline{u} \in U \setminus W$

$\exists\, \underline{w} \in W \setminus U$

Se $\underline{u} + \underline{w} \in U \cup W$ oppure a W (caso 2)

allora $\underline{u} + \underline{w} = \underline{v} \in U \Rightarrow \underline{w} = \underline{v} - \underline{u} \in U$, assurdo

(perché so che U è sottospazio, la somma è interna)

Caso 2: $\underline{u} + \underline{w} = \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{u} = \underline{v} - \underline{w} \in W$, assurdo (caso 1)

$U+W = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \underline{u} + \underline{w},\ \underline{u} \in U, \underline{w} \in W \}$

$\underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}'$

- $\underline{v} + \underline{v}' = \underline{u} + \underline{w} + \underline{u}' + \underline{w}' = \underbrace{(\underline{u} + \underline{u}')}_{\in U} + \underbrace{(\underline{w} + \underline{w}')}_{\in W}$

- $\alpha \underline{v} = \underbrace{\alpha \underline{u}}_{\in U} + \underbrace{\alpha \underline{w}}_{\in W}$
- $\underline{0} = \underbrace{\underline{0}}_{\in U} + \underbrace{\underline{0}}_{\in W}$.

=> somma interna, prodotto esterno interno e contiene lo zero => U+V e uno spazio vettoriale

Se U e W sono rette passanti per l'origine nello spazio

U+W
- piano che contiene le rette se $U \neq W$
- la retta stessa se coincidono

$U \cap W$
- $\underline{0}$ se non sono coincidenti
- la retta stessa se coincidono

$U \cup W$ non è un sottospazio se non coincidono.

(es.) In $\mathbb{R}^4$ consideriamo

$V_1 = \text{span}\{(3, 11, 5, 2), (1, 5, 2, 1), (1, 1, 1, 0)\}$

$V_2 = \text{span}\{(1, 3, 2, 2), (1, 3, 4, 1), (2, 6, 2, 5)\}$

- Trovare le dimensioni di V_1 e V_2

Quella di V_1 è ≤ 3 (è = a 3 se sono indipendenti)

↓

Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ linearmente indipendenti <=> $\dim \text{span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k) = k$

(=>) Per definizione di span essi sono generatori e sono indipendenti per definizione => sono una base e la dim. è il loro numero

(<=) Un insieme di generatori contiene una base

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ contiene una base di k elementi

⇓

coincidono con la base

16/10/2023

$A \subset V$ sottospazio

Il più piccolo sottospazio che contiene A è $\operatorname{Span} A$

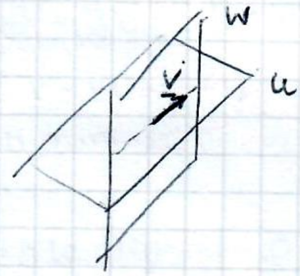
$$\operatorname{Span}(U \cup W) = U + W \overset{def}{=} \{ \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \mid \underline{u} \in U \text{ e } \underline{w} \in W \}$$

$\supseteq$ ← ovvia

$\subseteq$ ← per esercizio

I vettori di questo sottospazio possono essere scomposti come somma di vettori di U e di W

Tale decomposizione è unica? NO (a meno che U e W siano in somma diretta => guarda pag seguenti)



$\underline{v} \in U \cap W$

$$\underline{v} = \underset{\in U}{\underline{v}} + \underset{\in W}{\underline{0}} = \underset{\in U}{\underline{0}} + \underset{\in W}{\underline{v}}$$

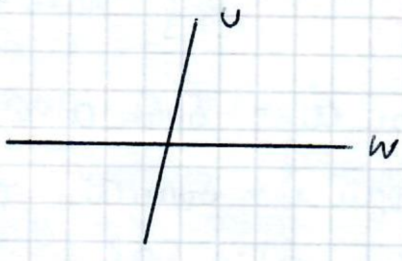
I sottospazi U e W si dicono in SOMMA DIRETTA se $U \cap W = \{\underline{0}\}$

equivalentemente:

$Z = U + W$ è SOMMA DIRETTA di U e W se $U \cap W = \{\underline{0}\}$

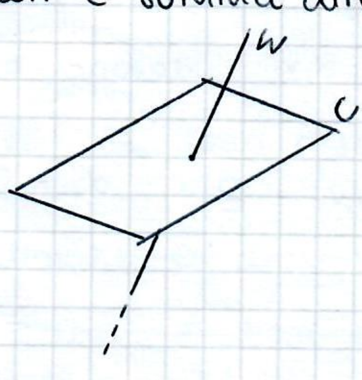
$$Z = U \oplus W$$

$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ (rette)



$\mathbb{R}^3 = U + W$ (piani) → non è somma diretta (due piani nello spazio non possono intersecarsi in un punto)

$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (U piano, W retta)



Prop: $Z = U \oplus W \iff$ ogni vettore $\underline{v} \in U+W$ si scrive in modo unico come $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{u} \in U$ e $\underline{w} \in W$

($\Rightarrow$) hp: $Z = U+W$, $U \cap W = \{\underline{0}\}$ $\rightarrow$ th: non ci sono due scritture $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w} = \underline{u}' + \underline{w}'$

Devo dimostrare $\underline{u} = \underline{u}'$ e $\underline{w} = \underline{w}'$

$\underline{v} = \underline{v}$ $\quad \underline{u} + \underline{w} = \underline{u}' + \underline{w}'$

$\underbrace{\underline{u} - \underline{u}'}_{\text{appartiene ancora a } U} = \underline{w} - \underline{w}'$ appartiene a W $\qquad \underline{u}, \underline{u}' \in U \quad \underline{w}, \underline{w}' \in W$

$x = \underline{u} - \underline{u}' = \underline{w} - \underline{w}'$

$x \in U \cap W \iff \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{u} = \underline{u}'$, $\underline{w} = \underline{w}'$

(*) Dim Ale-Laura alternativa

$U \cap W = \{\underline{0}, \underline{v}\}$

$\underline{v} = \underline{0} + \underline{v}$

$2\underline{v} \in U$ (perché sono spazi vettoriali)

$-\underline{v} \in W$

$\underline{v} = 2\underline{v} - \underline{v}$

2 scritture diverse

($\Leftarrow$) (*) se $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$, cioè $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0} \mid \underline{v} \in U \cap W$

$\underline{v} = \underline{v} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}$

↳ la scrittura non sarebbe unica

ESERCIZIO

$a = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ lin. indipendente

$a = a' \quad a''$

$a' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h\}$ $\quad a'' = \{\underline{v}_{h+1}, \dots, \underline{v}_k\}$

Dimostrare che $\operatorname{span} a = \operatorname{span} a' \oplus \operatorname{span} a''$

1) $\operatorname{span} a = \operatorname{span} a' + \operatorname{span} a''$ $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=n+1}^{h} \alpha_i \underline{v}_i$

2) $\operatorname{span} a' \cap \operatorname{span} a'' = \{\underline{0}\}$

generico elemento dello span

$\sum_{i=1}^{h} \alpha_i \underline{v}_i = \sum_{i=h+1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$ devono essere $\underline{0}$

$\sum_{i=1}^{h} \alpha_i \underline{v}_i - \sum_{i=h+1}^{h} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$ $\qquad \alpha_i = \underline{0}\ \forall i \rightarrow$ perché i $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti

L'intersezione è $\underline{0}$

ESERCIZIO

Sono equivalenti:

i) U, W somma diretta

generatori e indipendenti

ii) Se $\mathcal{B}$ è base di U e $\mathcal{B}'$ di W $\Rightarrow$ è base di $U+W$

la lista degli elementi di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$

iii) $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Devo dimostrare che $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ sono generatori e indipendenti

- generatori

generico elemento di $U+W$, mi chiedo se posso generarlo con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \qquad \underline{u} \in U, \ \underline{w} \in W$

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$

$\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1', \dots, \underline{w}_j'\}$

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \qquad \underline{w} = \sum_{h=1}^{j} \beta_h \underline{w}_h'$$

Sostituendo $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j$ $\rightarrow$ combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$

- indipendenti

in questo primo pezzo non uso che U e W sono in somma diretta ma se non lo fossero potrebbero non essere indipendenti

comb di $\mathcal{B}$ — comb di $\mathcal{B}'$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j = \underline{0}$$

(devo far vedere che tutti i coeff. sono 0)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}_{\text{in } U} = \underbrace{- \sum_{j=1}^{h} \beta_j w_j}_{\text{in } W} = \underline{x} \Rightarrow \underline{x} \in U \cap W \overset{\text{per hp.}}{\Rightarrow} \underline{x} = \underline{0}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} &\rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \\ \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j = \underline{0} &\rightarrow \beta_j = 0 \ \forall j \end{aligned}\right\} \text{per l'indipendenza dei vettori di } \mathcal{B} \text{ e di } \mathcal{B}'$$

Inoltre dato che U e W sono in somma diretta: $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$\# \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \# \mathcal{B} + \# \mathcal{B}'$ se sono disgiunti

Condizione aggiuntiva tra ii e iii $\rightarrow$ ~~$\forall$ base $\mathcal{B}$ di U, $\forall$ base $\mathcal{B}'$ di W~~

~~$\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è base di $U+W$~~.

(Vedi continuo sul quaderno degli esercizi)

Teorema di Grassmann

RIASSUNTO:
Estendo a base di U e poi a base di W la base di $U \cap W$
Faccio vedere che l'unione di queste due basi (che ha dimensione voluta) genera ed è indipendente
easy
meno easy

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

dimostrazione:

base di $U \cap W$ $\quad B_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q\}$

la estendo a base di U

$$B_2 = \{\underline{v}_1, \dots, v_q, v'_{q+1}, \dots, \underline{v}'_n\}$$

$\dim U = n$

Estendo B_1 a base di W $\to \{\underline{v}_1, \dots, v_q, \underline{v}''_{q+1}, \dots, v''_p\}$

$\dim W = p$

$B = B_2 \cup B_3 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, v'_{q+1}, \dots, v'_n, v''_{q+1}, \dots, v''_p\}$

$\# B = n + p - q = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

devo far vedere che è una base di U+W: genera, è indip.

- genera U+W

$\underset{\text{comb. di } B_2}{\underline{v} = \underline{u}} + \underset{\text{comb di } B_3}{\underline{w}} \Rightarrow \underline{v}$ è combinazione di $B_2 \cup B_3 = B$

- linearmente indipendenti

• scrivo una comb. lineare nulla dei vettori di B

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=q+1}^{n} \alpha'_i \underline{v}'_i + \underbrace{\sum_{i=q+1}^{p} \alpha''_i \underline{v}''_i}_{B_3 \setminus B_1} = \underline{0}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=q+1}^{n} \alpha'_i \underline{v}'_i}_{B_2} = - \sum_{i=q+1}^{p} \alpha''_i \underline{v}''_i = \underline{x}$$

vettore scritto in 2 modi diversi

I membro $\in$ a U, II membro $\in$ a W

$\underline{x} \in U \cap W$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$ sono base di $U \cap W \to \underline{x}$ può essere scritto come una loro combinazione ($\underline{v}'_{q+1}, \dots, v'_n \notin \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, v_q)$)

$\Rightarrow \alpha'_{q+1} = \dots = \alpha'_n = 0$ perché l'espressione di ogni vettore è unica

$\to$ il $\underbrace{\text{secondo addendo}}$ è nullo

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{q} \alpha_i v_i + \sum_{i=q+1}^{p} \alpha_i'' v_i'' = \underline{0}$$

$\hookrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_q = \alpha''_{q+1} = \dots = \alpha''_p = 0$

perche' sono base di W ▨

$V = M_n(\mathbb{K})$

U = Matrici triangolari superiori $= \{ A = a_{ij} \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i > j \}$

sottospazio

es. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

W = m. triang. inferiori $= \{ A = a_{ij} \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j \}$

$U \cap W$ = m. diagonali $= \{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \overset{\neq 0}{\vee} \text{ se } i = j \}$ (la diagonale non e' vincolata)

$\dim U = \frac{n(n+1)}{2} = \dim W$

$\dim(U \cap W) = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\dim U} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\dim W} - \underbrace{n^2}_{\dim(U+W)} = n$

es. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 7 & 20 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

V spazio vett. $U \subset V$ sottospazio

Def un SUPPLEMENTARE di U in V e' un sottospazio W t.c. $U \oplus W = V$

OSS $\dim W = \dim V - \dim U$ — caso particolare del teorema di Grassmann

$\dim[\{\underline{0}\}] = 0$ (per convenzione)

il supplementare non e' unico (ma tutti hanno stessa dim.)

- Supplementare della retta u nel piano $\Rightarrow$ ogni retta incidente esclusa u (nello $\underline{0}$)

$V = \mathbb{K}^3[x]$ "polinomi di grado 3 a coeff. in $\mathbb{K}$"

$U = \{ p(x) \mid p(0) = p(1) = 0 \}$

$W = \{ p(x) \mid p(2) = p(3) = 0 \}$

sottospazi

$r(x) = p(x) + q(x)$ (r, p, q sono polinomi in U)

$r(0) = p(0) + q(0) = 0$

$r(1) = p(1) + q(1) = 0$

la somma e' interna

$(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = 0$ il prodotto è interno

Similmente per W

Sono i polinomi aventi questa forma:

$p(x) = x(x-1)\,p'(x)$ → (quelli di U)

$x(x-1)\boxed{(1)}$ $x(x-1)\boxed{(x)}$

base di U → $x(x-1),\ x^2(x-1)$

base di W → $(x-2)(x-3),\ x(x-2)(x-3)$

Che dimensione ha $U \cap W$?

$$U \cap W = \{ p(x) \mid p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0 \}$$

↳ solo il polinomio nullo
(non può avere + radici del suo grado)

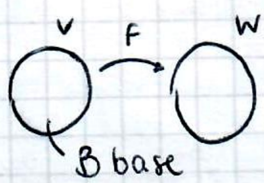
$\Rightarrow U \cap W = \{0\}$

$\dim(U \cap W) = 0$

Infatti polinomi di grado minore o uguale a 3 hanno dimensione 4 = 2 + 2

APPLICAZIONI LINEARI

18/10/2023



V, W, spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$

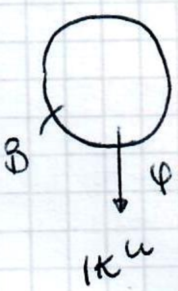
def.

$f: V \to W$ applicazioni lineari

1) $f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\underline{v} \in V$, $f(\underline{w}) \in W$

2) $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in V,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$



φ_B - passaggio alle coordinate

$\mathbb{K}^n$

$\underline{v} \to [\underline{v}]_B$

è una applicazione da V in $\mathbb{K}^n$, è
- lineare
- $[\underline{v} + \underline{w}]_B = [\underline{v}]_B + [\underline{w}]_B$
- $\alpha [\underline{v}]_B = [\alpha \underline{v}]_B$

↓

questa applicazione è bigettiva (anche se ciò non è necessario) affinché sia lineare

def

Un ISOMORFISMO $f: V \to W$ è una APPLICAZIONE LINEARE BIGETTIVA

Matrici

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \to \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{\text{matrice incompleta associata al sistema}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}}_{\text{matrice completa}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\langle (a,b,c), (a',b',c') \rangle = aa' + bb' + cc'$$

$$\langle \underbrace{(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)}_{\text{in } \mathbb{K}^n} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Applicazione da $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ riga-i-esima : $A_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$

colonna-j-esima : A^j

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

- Prodotto tra matrici "MOLTIPLICAZIONE RIGA PER COLONNA"

$$A \cdot B = C = C_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Posso moltiplicare se # colonne A = # righe B

$A \in M_{m,n}[\mathbb{K}]$ $B \in M_{n,p}[\mathbb{K}]$

allora $\to C \in M_{mp}[\mathbb{K}]$

$c_{11} = A_1 B^1 = [a_{11}, \dots, a_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}$

$c_{ij} = A_i B^j = [a_{i1}, \dots a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = b_{1j}a_{i1} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Generico elemento della matrice $C = A \cdot B$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

ESEMPIO

$n = \#$ colonne di $A =$
$= \#$ righe di B

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In $M_n[\mathbb{K}]$ è una operazione interna (ciò fa delle matrici quadrate un anello non commutativo)

$\llcorner$ matrici quadrate

Proprietà

1) $\underbrace{(A+B)}_{\text{stesso tipo } (m,n)}\underbrace{C}_{(n,p)} = AC + BC$ (anche a dx $A(B+C) = AB + AC$)

=> il prodotto riga per colonna è
- associativo (rispetto a se stesso e rispetto al prodotto esterno)
- distributivo rispetto alla somma
- tale che ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

2) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

3) $(AB)C = A(BC)$

A ${}^tA$

Matrice trasposta
↓
trasformo le colonne in righe (o viceversa)
riflessione rispetto a una diagonale

$A \in M_{m,n} \rightarrow {}^tA \in M_{n,m}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$A(a_{ij})$ ${}^tA(b_{ij})$

$a_{ij} = b_{ji}$

4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

$M_n(\mathbb{K})$ $+, \cdot$ ANELLO NON COMMUTATIVO $AB \neq BA$ (in generale)

neutro della somma $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

neutro del prodotto $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

isomorfo

$n=1$: $M_1(\mathbb{K})$ è un campo $\cong \mathbb{K}$

$n=2$: non è un campo
- non commuta
- non tutti gli elementi $\neq 0$ sono invertibili (*)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix}$$

non commuta

la matrice identità I commuta con tutte le altre

$$AI = IA = A$$

cerco l'inversa di $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(*)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall z,t$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ con $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ invertibili

A e B invertibili $\overset{(?)}{\Rightarrow}$ AB invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Rightarrow$ il prodotto di matrici invertibili è invertibile

dim

$$(B^{-1}A^{-1})AB \overset{?}{=} I$$

$$(B^{-1}(A^{-1}A)B) = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I \quad ✓$$

---

dimostriamo $\underset{m,n}{(A}\underset{n,p}{B)}\underset{p,q}{C} = A(BC)$

vd quaderno esercizi (l'ho scritta per bene)

$\underset{m,p}{AB = D} = (d_{ij}) \qquad d_{ij} = A_i B^j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$\underset{m,q}{DC = E} = (e_{rs}) \qquad e_{rs} = \sum_{h=1}^{p} d_{rh}c_{hs}$

$r = 1, \dots, m$
$s = 1, \dots, q$

equivalente

$$= \sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{ks}\right)c_{hs}$$

$$a_{rk}b_{kh}c_{hs}$$

Per l'associatività tra numeri ~~nello stesso~~ nell'altro senso ottengo la stessa cosa.

ESERCIZIO

$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\} = W$

W è sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$x = (x_1, \ldots, x_4)$ è sol.

$y = (y_1, \ldots, y_4)$ è sol.

$\Rightarrow x + y$ è sol.

$= (x_1 + y_1, \ldots, x_4 + y_4)$

↓

metto le componenti nell'equazione e con associatività, commutatività, distributività vedo che fa ancora 0

Similmente per il prodotto

dim W = ?

$x \in \mathbb{R}^4 \to \dim W \in \{\cancel{0}, 1, 2, 3, \cancel{4}\}$

non è 0 perché ci sono altre soluzioni oltre a quella nulla

non è 4 perché non tutti i vettori sono soluzione

assegno x_2, x_3, x_4 e ricavo x_1

↓

$1, 0, 0 \Rightarrow x_1 = 1$ $\quad \underline{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$

$0, 1, 0 \Rightarrow x_1 = -2$ $\quad \underline{v}_2 = (-2, 0, 1, 0)$

$0, 0, 1 \Rightarrow x_1 = 3$ $\quad \underline{v}_3 = (3, 0, 0, 1)$

↓

ho trovato 3 vettori indipendenti, dato che 3 è la dim. massima possibile sono una base

dim W = 3

Dimostrazione che sono indipendenti:

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 \overset{(?)}{\Rightarrow} \underline{0}$

$=$

$[\underbrace{x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}_{\text{devono essere tutti 0}}]$

$W = \{ \underline{x} \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \}$ almeno un $a_i \neq 0$

ESERCIZIO

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo (=0)

$\underline{x}$ soluzione

formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

2^a eq $\to$ 2^a eq $- 2 \times 1^a$ eq. (per)

$\downarrow$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

assegnando x_3 e x_4 trovo unicamente x_1 e x_2

let's do it!

OSS questo sistema è equivalente al precedente

se $\underline{x}$ risolve la 1^a e la 2^a risolve anche la $1^a - 2 \times 2^a$

$1^a(\underline{x}) = 0$, $2^a(\underline{x}) = 0$ $\to (1^a - 2 \times 2^a)(\underline{x}) = 0$

x_3	1	0
x_4	0	1
x_1	$-1/3$	$+2/3$
x_2	$5/3$	$(-3/7)^{-1} = -7/3$

$\to$ si dimostra come prima che sono indipendenti

$\Downarrow$

$\dim W \geq 2$

$$x_2 = \frac{1}{3}(5x_3 - 7x_4)$$

$$x_1 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4$$

si scrivono entrambi tramite x_3 e x_4

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7/3 \\ +2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{generano} \quad \dim W = 2$$

Potevo escludere l'hp $\dim W = 3$ perché non è vero che tutte le soluzioni della 1^a eq. sono anche sol. della seconda.

---

esercizio:

SUPPLEMENTARE DI W

$U \mid U \oplus W = V$ dimostrare che U, U' sono supplementi di $W \Rightarrow U \cong U'$ (TROVARE UN ISOMORFISMO)

Costruzione di $\mathbb{Z}$ da $\mathbb{N}$

19/10/2023

Su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consideriamo la relazione

$$\underset{a-b}{(a,b)} \sim \underset{c-d}{(c,d)} \Rightarrow a+d=b+c$$

l'idea e' considerare la differenza

È una relazione di equivalenza e $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\sim$

- Riflessiva:

$(a,b) \sim (a,b)$? $\quad a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{N}$ ✓

commutatività su $\mathbb{N}$

- Simmetrica

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$?

$$\left.\begin{aligned} a+d &= b+c \\ c+b &= d+a \end{aligned}\right) \text{equivalenti}$$

- Transitiva

$(a,b) \sim (c,d)$, $(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

$$\begin{cases} a+d=b+c \\ c+f=d+e \end{cases}$$

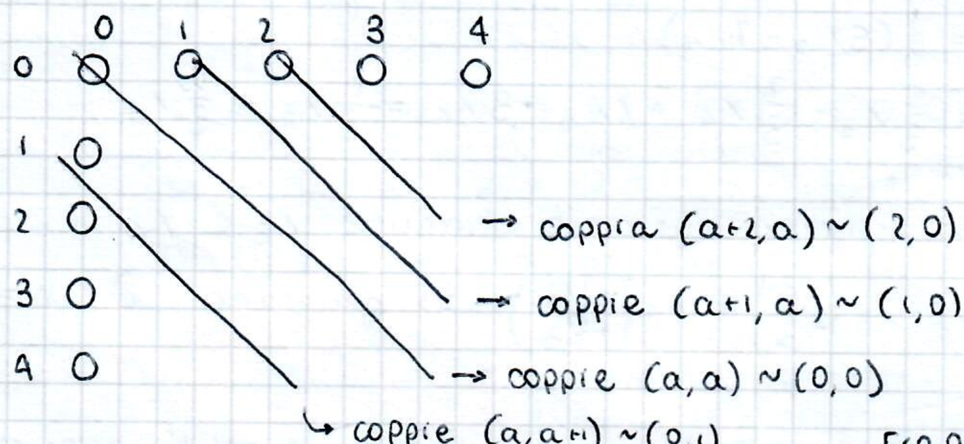
$a+d+f = b+c+f = b+(c+f) = b+d+e$

(associatività)

$(a+f)+\cancel{d} = (b+e)+\cancel{d}$

Ho usato commutatività e associatività

su $\mathbb{N}$ non posso sottrarre ma vale la legge di cancellazione



$[(1,0)] = [(2,1)] = [(3,2)] = \dots$

$$\begin{cases} [(0,0)] = \{(a,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ t.c. } a \in \mathbb{N}\} \\ [(1,0)] = \{\dots \end{cases}$$

Prendo quelli cerchiati come rappresentanti

$$\mathbb{Z} = \{\underset{\substack{\shortparallel \\ a}}{[(a,0)]} \mid a \in \mathbb{N}\} \cup \{\underset{\substack{\shortparallel \\ -a}}{[(0,a)]} \mid a \in \mathbb{N}^*\}$$

Operazioni

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ $\qquad \alpha = [(a,b)]$, $\beta = [(c,d)]$

$\alpha + \beta = [(a+c, b+d)]$

$\downarrow$ è ben definita?

$\alpha = [(a',b')]$, $\beta = [(c',d')]$

$$[(a'+c', b'+d')] \stackrel{?}{=} [(a+c, b+d)]$$

$$\Updownarrow$$

$$(a'+c', b'+d') \sim (a+c, b+d)$$

$$(a'+c') + (b+d) \stackrel{?}{=} (a+c) + (b'+d')$$

$$(a'+b) + (c'+d) = (a+b') + (c+d')$$

$+$ su $\mathbb{Z}$ è associativa e commutativa e ha elemento neutro

$+$ inversi $\Rightarrow [(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, a+b)] = [(0,0)]$

$-[(a,b)] = [(b,a)]$

$$[(a,b)] = \underbrace{[(a,0)]}_{= a} + \underbrace{[(0,b)]}_{= -b} = a + (-b) = a - b$$

$\alpha \cdot \beta = (a-b)(c-d) = ac + bd - (ad + bc) =$

$= [(ac+bd, ad+bc)]$ – ben definita

- associativa
- commutativa
- elemento neutro $[(1,0)]$
- distributivo sulla somma

$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \Rightarrow$ anello commutativo

Le classi del tipo $(a,0)$ (copia di $\mathbb{N}$)

$$[(a,0)] + [(b,0)] = [(a+b, 0+0)] \stackrel{\subset \mathbb{Z}}{=} [(a+b, 0)]$$

$$[(a,0)] \cdot [(b,0)] = [(ab + 0 \cdot 0, 0 \cdot a + 0 \cdot b)] = [(ab, 0)]$$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ estende $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Costruzione di $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{Z}$

Su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ consideriamo la relazione

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

È una relazione di equivalenza e $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_\sim$

$\alpha = [(a,b)]$ $\beta = [(c,d)]$

$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = [(ad+bc, bd)] \\ \alpha \cdot \beta = [(ac, bd)] \end{array}\right)$ ben definite

$\Downarrow$

Rendono $\mathbb{Q}$ un anello commutativo.

$(0 = [(0,1)] = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{Z}^*\}$

$1 = [(1,1)] = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}^*\})$

Se $[(a,b)] \neq 0$, cioè $a \neq 0$, allora $[(a,b)][(b,a)] =$
$= [(ab, ab)] = 1$ perché $[(a,b)]^{-1} = [(b,a)] \Rightarrow \mathbb{Q}$ è un campo.

Le classi $\{[(a,1)] \mid a \in \mathbb{Z}\}$ danno una copia di $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Le operazioni ristrette a tale campo sono le stesse di $\mathbb{Z}$

$[(a,1)] + [(b,1)] = [(a+b,1)]$ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ estende $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$[(a,1)] \cdot [(b,1)] = [(ab,1)]$

OSS La costruzione funziona $\forall$ anello commutativo $(A, +, \cdot)$ privo di divisori dello 0, e produce il campo delle frazioni di A

I computer lavorano su campi finiti (non sa fare la somma di numeri molto grandi, esce negativa)

Fissato $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, su $\mathbb{Z}$ consideriamo la relazione
$a \sim b \Leftrightarrow a-b$ è multiplo di $n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid b-a = kn$

È una rel. di equivalenza

I multipli si indicano con $\{n\}$ o $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$

$\mathbb{Z}/_n = \mathbb{Z}/_{\{n\}} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ n elementi

$[a] + [b] = [a+b]$
$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ $\rightarrow$ sono ben poste (indipendenti dai rappresentanti) vd appunti di aritmetica

$\Rightarrow$ Produce $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ anello commutativo

es. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{[0], [1]\}$

$0+0=0$
$0+1 = 1+0 = 1$
$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$
campo !!! :)

$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ campo $\Leftrightarrow$ n è primo

Costruzione di $\mathbb{C}$ da $\mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}[x]$, $a = x^2+1$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)}$

$p \in \mathbb{R}[x]$

$[p] \rightarrow$ classe di eq. di un polinomio

$[p]+[q] = [p+q]$

$[p][q] = [pq]$

$0 = [0]$

$1 = [1]$

$[x^2+1] = [0]$

$\hookrightarrow [x^2]+[1] \Rightarrow [x^2] = [-1]$

$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$p = [a_0] + [a_1 x] - [a_2] - [a_3 x] + \dots = [ax+b]$

ognuno rappresenta una classe

$\mathbb{C} = \{[ax+b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$\hookrightarrow b+ai$ $\quad$ $\hookrightarrow$ in bigezione con $\mathbb{R}^2$

$b+ai \mapsto (b,a)$

$[x] = i$

$[x^2] = [-1] = i^2 = -1$

$(a+bi)+(c+di) = \underbrace{(a+c)}_{\text{parte reale}} + \underbrace{(b+d)}_{\text{parte immaginaria}} i$

$0+0i = 0 \rightarrow$ el. neutro della somma

$-(a+bi) = -a-bi$

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

el. neutro del prodotto $1 = 1+0i$

I num. complessi del tipo $\underset{a}{a+0i}$ (copia di $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

mantengono stessa somma e prodotto dei reali

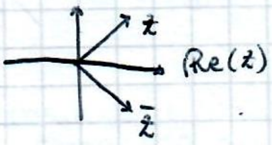
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ estende $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

OPERAZIONI

$\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to \bar{z}$

$z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$ (coniugio)

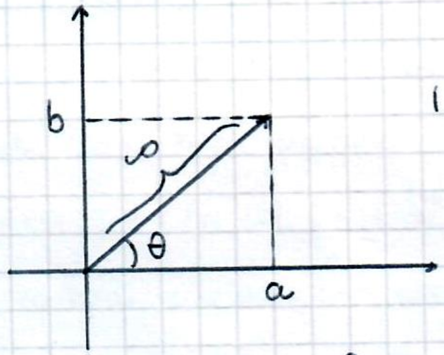


$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}$



$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo

$\theta \in [0, 2\pi]$ argomento

$|z| = 0 \iff z = 0$

$a = \rho \cos\theta$
$b = \rho \sin\theta$

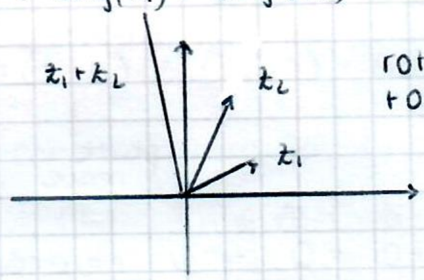
notazione trigonometrica

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$

$= \rho_1\rho_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$



rotazione
+omotetia

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + \cancel{iba} - \cancel{iba} - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Se $z \neq 0$

$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \rightarrow$ l'inverso moltiplicativo di z è $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

$\mathbb{C}$ è un campo! :)

ed è ALGEBRICAMENTE CHIUSO $\rightarrow$ ogni polinomio ammette radice

$z_0 \in \mathbb{C}$ soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z^n = z_0$

$z_0 = 0 \Rightarrow z = 0$

$|z|^n = |z_0| \qquad |z| = \sqrt[n]{|z_0|}$

$z = \rho \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{e^{i\theta}} = \rho e^{i\theta} \qquad |e^{i\theta}| = 1$

$\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}$

$$\begin{cases} \rho^n = \rho_0 \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0} \\ n\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$k = 0 \rightarrow \theta = \dfrac{\theta_0}{n}$

$k = 1 \rightarrow \theta = \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

$\vdots$

$k = n-1 \rightarrow \dfrac{\theta_0}{n} + (n-1)\dfrac{2\pi}{n}$

$k = n \rightarrow \dfrac{\theta_0}{n} + 2\pi = \dfrac{\theta_0}{n}$

$k = n+1 \rightarrow \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2\pi}{n} + 2\pi = \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

ciclano

Sul piano complesso le radici sono i vertici di un n-agono regolare inscritto in una circonferenza avente centro nell'origine

23/10/2023

$$\left.\begin{array}{l} A \in M_{(m,n)}(\mathbb{K}) \\ B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot B \in M_{mp}(\mathbb{K})$$

$$\underbrace{(AB)_{ij} = A_i \cdot B^j = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}}_{\text{recap prodotto tra matrici}}$$

incognite → manda n valori in m ← equazioni

ASSIMILABILE A UN SISTEMA

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ induce una applicazione lineare

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \qquad \underline{x} \longmapsto A\underline{x}$

↳ f_A è lineare:

1) $f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
2) $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$

NOTA f lineare $\Leftrightarrow$ conserva le combinazioni lineari

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\underline{v}_i)$$

1) $f_A(\underline{x} + \underline{y}) = A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = f_A(\underline{x}) + f_A(\underline{y})$

2) $f_A(\alpha \underline{x}) = A(\alpha \underline{x})$

SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \xrightarrow{\text{posti}}$$

- $A(a_{ij})$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ coeff.
- $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ vett. dei termini noti $\in \mathbb{K}^m$
- $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vett. delle variabili $\in \mathbb{K}^n$

si riscrive come

$\overset{m,n}{A}\ \overset{n,1}{\underline{x}} = \underline{b}$

[prodotto riga per colonna]

$\Updownarrow$

$f_A(\underline{x}) = \underline{b} \qquad f_A : \underset{\underline{x}}{\overset{\cup\!\!\!\!|}{\mathbb{K}^n}} \to \underset{\underline{b}}{\overset{\cup\!\!\!\!|}{\mathbb{K}^m}}$

OSS

$$A\underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$= x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n$ il vettore dei termini noti è (comb. lineare delle colonne della matrice)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ → intersezione tra due rette

$$x\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$ → coefficienti della combinazione lineare delle colonne necessari a ottenere il vettore noto

Conseguenza:

$A\underline{x} = \underline{b}$ risolubile $\iff$ $\underline{b}$ è comb. lineare delle colonne di A

CASO OMOGENEO

$A\underline{x} = \underline{0}$ $\quad$ $\underline{0}$ è soluzione

$\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = S_0 \neq \emptyset$

OSS S_0 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

- $A\underline{x} = \underline{0}$, $A\underline{y} = 0$ $\Rightarrow A(\underline{x}+\underline{y}) = \underline{0}$ $\quad$ $A(\underline{x}) + A(\underline{y})$ (applicazione lineare)
- $A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x} = \underline{0}$

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$\underline{x} \to A\underline{x}$ $\quad$ $S_0 = \{\underline{x} \mid f_A(\underline{x}) = \underline{0}\}$

DEF Data $f: V \to W$ lineare, definisco nucleo della applicazione lineare

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}\}$$

Kernel di f (o nucleo di f)

$$\mathrm{Im}(f) = \{\underline{w} \in W \mid \exists \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{w}\}$$

Immagine di f

PROP Ker(F) e Im(f) sono sottospazi vettoriali, rispettivamente di V e di W

dim. che Ker è un sottospazio:

- $f(\underline{u}) = \underline{0}$ e $f(\underline{v}) = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $f(\underline{u}+\underline{v}) \overset{\text{f. lineare}}{=} f(\underline{v}) + f(\underline{u}) = 0$ (somma interna)
- $f(\alpha\underline{u}) \underset{\text{f lineare}}{=} \alpha f(\underline{u}) = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$ (prodotto esterno interno)
- $\underline{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ $\quad$ $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$ $\quad$ $f(\underline{0}) = f(\underline{0}+\underline{0}) = f(\underline{0}) + f(\underline{0})$ (contiene $\underline{0}$)

sommo $-f(\underline{0})$ a entrambi i membri

Le soluzioni di un sistema omogeneo sono il nucleo della

applicazione lineare indotta dalla matrice
moltiplicazione della matrice.

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mostrare che è lineare

$(x,y,z) \to (x,y,0)$

$\mathrm{Im}(f) = \{\text{piano } x\text{-}y\}$

$\mathrm{Ker}(f) = \{\text{asse } z\} = f^{-1}(\underline{0})$

controimmagine, non inversa

Tornando a $A\underline{x} = \underline{b}$

è risolubile $\iff \underline{b} \in \mathrm{Im}(f_A)$

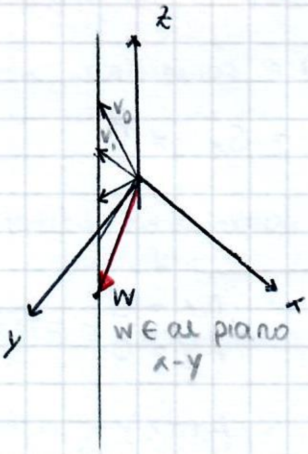
colonne

$\mathrm{Im}(f_A) = \{y \in \mathbb{K}^m \mid y = A\underline{x} = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n\}$

$= \mathrm{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$

$f^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{v} \mid f(\underline{v}) = \underline{w}\}$

tutti i vettori che proiettati sul piano x-y danno $\underline{w}$



$f(\underline{v_0}) = \underline{w}$

$f(\underline{v_1}) = \underline{w}$

$\Downarrow$

$f(\underline{v_0}) - f(\underline{v_1}) = \underline{0}$

$f(\underbrace{\underline{v_0} - \underline{v_1}}_{\in \, \mathrm{Ker}(f)}) = \underline{0}$

è nel nucleo

$\underline{v_1} = \underline{v_0} + (\underline{v_1} - \underline{v_0})$

(una volta che ne ho uno posso trovare tutti gli altri aggiungendo i vettori del nucleo)
(o loro multipli)

$f^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{v} \mid f(\underline{v}) = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}(f)$

TRASLAZIONE

$f^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{v} \mid f(\underline{v}) = \underline{w}\}$

$f^{-1}(\underline{w}) = \underline{v_0} + \mathrm{Ker}(f) \equiv \{\underline{v_0} + \underline{v}' \mid \underline{v}' \in \mathrm{Ker}(f)\}$

qualsiasi vettore che va in w

Se $v_0 \notin \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f^{-1}(\underline{w})$ non è un sottospazio
non può contenere 0

$A\underline{x} = \underline{b}$ soluzioni $= f_A^{-1}(\underline{b})$

se $\underline{b} \in \mathrm{Im}(f_A)$ tutte le soluzioni si scrivono a partire da una soluzione particolare $\hat{x}$ a cui si sommano tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

DEF $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, RANGO di A : $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A)$

(dimensione dello Span delle colonne linearmente ind.)

TEOREMA (delle dimensioni)

$f: V \to W$ lineare $\longrightarrow$ IDEA: estendo la base del kernel a base di V e faccio vedere che i vettori che ho aggiunto sono base dell'immagine

$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

corollario:

$$\dim \{ \underbrace{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}}_{\text{Kernel}} \} = n - rg(A)$$

DIM. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ base di $\ker(f)$

$v_1, \dots, v_k$ base dei vettori di V che vanno in $\underline{0}$

Possiamo estenderla a base di V

$\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, v_n \qquad n = \dim V$

Sia $\underline{w}_{k+1} = f(\underline{v}_{k+1}), \dots, w_n = f(\underline{v}_n) \quad \in \mathrm{Im} f$

(I primi k vettori vanno a $\underline{0}$)

Voglio mostrare che $\{\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$

- GENERATORI

  $\underline{w} \in \mathrm{Im}(f)$

  $\exists \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{w}$

Esprimo $\underline{v}$ tramite la base: $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ ✓

$$\underline{w} = f(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) \underset{\text{applicazione lineare}}{=} \underbrace{\alpha_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_k f(\underline{v}_k)}_{\text{questa parte si annulla}} + \alpha_{k+1} f(\underline{v}_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n)$$

per def. $\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = \alpha_{k+1} \underline{w}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$ ✓

- LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\alpha_{k+1} \underline{w}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{w}_n = \underline{0}$

$\alpha_{k+1} f(\underline{v}_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = \underline{0}$

$\downarrow$ linearità di f

$f(\alpha_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in \ker(f)$ e posso esprimerli mediante la base di $\ker f$

$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k$

$\Rightarrow$ tutti gli α_i sono $\underline{0}$

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots \alpha_k \underline{v}_k - \alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1} + \dots - \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$\downarrow$

sono in una base $\Rightarrow$ tutti gli α_i sono $= a\ 0$.

(es.)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\dim(\text{soluzioni}) = 3 - rg(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

$C_3 = C_1 + C_2$

25/10/2023

TEOREMA (Rouché - Capelli)

$A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\iff$ $rg(A) = rg(\hat{A})$

$rg(A)$: matrice incompleta

$\hat{A} = [A \mid \underline{b}]$: matrice completa (o aumentata)

$A\underline{x} = \underline{b}$ risolubile $\iff \underline{b} \in Span\{A^1, \dots, A^n\}$

$rg\, A = \dim Span\{A_1, \dots A^n\}$

$rg\, \hat{A} = \dim Span\{A^1, \dots, A^n, \underline{b}\}$

(rg) = numero delle colonne linearmente indipendenti

($\Rightarrow$) se $b \in Span\{A^1, \dots, A^n\} = Span\{A^1, \dots, A^n, \underline{b}\}$

($\Leftarrow$) se $Span\{A^1, \dots, A^n\} = Span\{A^1, \dots, A^n, \underline{b}\}$

allora $\underline{b} \in Span\{A^1, \dots, A^n\}$

e il sistema ha soluzione

(intuitivamente)
esercizio:
$v \in Span(A^1, \dots, A^n)$
$\iff Span(A^1, \dots, A^n) = Span(A^1, \dots, A^n, \underline{v})$

$Span\{A^1, \dots, A^n\} = Span\{A^1, \dots, A^n, \underline{b}\}$
equivale a $rg(A) = rg(\hat{A})$

26/10/2023

METODO DI RIDUZIONE A SCALA DI GAUSS

↳ modificare il sistema in uno equivalente, più semplice

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI $\hat{A} = [A \mid \underline{b}]$

I) Scambio le righe $\hat{A}_i \leftrightarrow \hat{A}_j$

II) Moltiplico una riga per un numero $\neq 0$

$$\hat{A}_i \to \lambda \hat{A}_i \qquad \lambda \neq 0$$

III) Sommare alla riga $\hat{A}_i$ un multiplo di un'altra $\hat{A}_j$

$$\hat{A}_i \to \hat{A}_i + \lambda \hat{A}_j, \qquad i \neq j, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

Prop. 1 Le 3 operazioni lasciano invariate le soluzioni (il sistema equivalente ha lo stesso insieme di soluzioni)

dim

I) Chiaro.

II) $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ elementi della riga i-esima.

$\underbrace{a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n}_{=K} \iff \underbrace{\lambda a_{i1}x_1 + \dots + \lambda a_{in}x_n}_{=\lambda K}$

III) $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ e $a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$

$\iff a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + \dots a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j$

Prop. 2 Le 3 operazioni non cambiano lo Span delle righe

(*) (N.B! in generale lo span delle colonne cambia)

Algoritmo di riduzione a scala

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

usando le operazioni elementari:

se $a_{11} \neq 0$, "uccido" quello che sta sotto a_{11} con operazioni elementari

$$A_2 \to A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} A_1 = [0, *, *, \dots, *]$$

$$A_3 \to A_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} A_1 = [0, *, *, \dots, *]$$

ottengo una matrice della forma
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Faccio lo stesso per la 2ª colonna, utilizzando il primo elemento non nullo della 2ª riga.

Procedo fino ad avere una matrice a scala

(Potrei avere $a_{11} = 0$ ma in questo caso basta scambiare le righe)

$$\begin{array}{cccccccccc} & & j_1' & & j_2' & j_3' & & j_k' & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & p_1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & 0 \cdots 0 & & p_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & 0 & p_3 & \cdots & * \\ & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 0 & p_k & \cdots * \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix}$$

Gli "scalini" sono di lunghezza possibilmente diversa

Gli scalini corrispondono a certe colonne $j_1' < j_2' < j_3' < \dots < j_k'$;

Gli elementi $p_1 = S_{1, j_1'}$; ...; $p_k = S_{k j_k'}$ sono detti PIVOT

riga colonna

Notiamo che le colonne contenenti i pivot sono "a scala"
$$\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} * \\ p_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}^{(k)} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ p_k \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\underline{v}^{(i)}$ ha tutti 0 a partire dalla posizione $i+1$.

(*) <u>dim. della prop. 2</u>

I) chiaro

II) $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \lambda \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_n)$ se $\lambda \neq 0$

III) $\text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i + \lambda \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_n)$ se $i \neq j$

II) $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda}\alpha_i(\lambda \underline{v}_i) + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

III) $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i \underline{v}_i + \dots + \alpha_j \underline{v}_j + \dots + \alpha_n \underline{v}_n =$

$= \alpha_1 v_1 + \dots (\alpha_i - \frac{1}{\lambda}\alpha_j) v_i + \dots + \frac{1}{\lambda}\alpha_j (v_i + \lambda v_j) + \dots + \alpha_n v_n$

Esempio numerico:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A_2 &\rightsquigarrow A_2 - \frac{3}{2}A_1 \\ A_3 &\rightsquigarrow A_3 + \frac{1}{2}A_1 \\ A_4 &\rightsquigarrow A_4 - 2A_1 \end{aligned}$$

(o scambio prima e terza così mi escono coefficienti interi) ⊛

$$⊛ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 7 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ora uso questi}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} =$$

1° pivot, 2° pivot

diff. tra A_3 e A_4

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3° pivot

non è un pivot, sono sempre $\neq 0$

ESERCIZI

- Data $f: V \to W$ lineare, f iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\underline{0}\}$ ✓

  ($\Rightarrow$) $\underline{v} \in Ker(f)$, $\underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0} = f(\underline{0}) \to$ negazione dell'iniettività

  ($\Leftarrow$) Devo mostrare che se $f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$

  $f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = 0 \Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = f(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{0}$

  $f(\underline{v} - \underline{w}) \in Ker(f)$

  $\Downarrow$

  $\underline{v} - \underline{w} = \underline{0}$, $\underline{v} = \underline{w}$ ✓

- f iniettiva $\Leftrightarrow \dim Im(f) = \dim V$
- f iniettiva $\Rightarrow \dim W \geq \dim V$ ✓
- f surgettiva $\Rightarrow \dim W \leq \dim V$ ✓
- $f: V \to W$, $\dim V = \dim W$ ✓

  $\cdot$ f è iniettiva $\Leftrightarrow f$ è surgettiva $\Leftrightarrow f$ è isomorfismo

  f iniettiva $\dim Im(f) = \dim V \underset{\text{ip.}}{=} \dim W \Rightarrow W = Im(f)$

LEMMA

i vettori a scala sono sempre linearmente indipendenti

dim. $\alpha_1 \underline{v}^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$ perché la k-esima coordinata si riduce a $\alpha_k p_k = 0$ (e $p_k \neq 0$ per hp.)

$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_{k-1} v^{(k-1)} = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = 0$ per la stessa motivazione. Così via per tutti gli altri coefficienti. ☑

COROLLARIO 1

$rg(S) = k$ ← numero di pivot

dim. Le colonne dei pivot $S^{j_1}, \dots, S^{j_k}$ sono linearmente indipendenti per il lemma precedente. $(rg(S) \geq k)$

Sia $W_k = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m \mid y_i = 0 \text{ per } i > k \right\} = \text{span}\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$

($\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ sono i primi k vettori della base canonica di $\mathbb{K}^m$)

dim $W_k = k \Rightarrow$ le colonne dei pivot sono una base per W_k. Poiché ogni colonna di S è contenuta in W_k si conclude.

COROLLARIO 2

$$\underbrace{rg(A)}_{\text{non ridotta a scala}} = \underbrace{rg(S)}_{\text{ridotta a scala}} (= k)$$

dim. Consideriamo il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, siccome le operazioni elementari non cambiano le soluzioni, si ha:

$$\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \mid S\underline{x} = \underline{0}\}$$

Ma si è visto che dim $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = n - rgA$

e allo stesso modo dim $\{\underline{x} \mid S\underline{x} = \underline{0}\} = n - rgS$

$\Rightarrow rgA = rgS$

Def. Definiamo **RANGO PER RIGHE** di una matrice A come

$$\widehat{rg}(A) = \dim(\text{span(righe)}) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_m))$$

TEOREMA

Per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$rg(A) = \underbrace{rg(S)}_{\text{qualsiasi ridotta a scala}} = n° \text{ pivot di } S = \widehat{rg}(A)$$

dim. Abbiamo appena visto le prime due uguaglianze. Rimane da dimostrare $\underbrace{rg(A)}_{\text{per colonne}} = \underbrace{\widehat{rg}(A)}_{\text{per righe}}$, $\forall$ matrice $M_{m,n}(\mathbb{K})$

Se S è una matrice a scala, allora è vero: $rg\, S$ = (n° di righe $\neq 0$ di S). Ma queste righe sono ridotte a scala e quindi sono linearmente indipendenti e quindi $\hat{rg}(S)$ = (n° righe $\neq 0$ di S) = $rg(S)$

Allora dalla proposizione 2 ($\equiv$ le operazioni elementari non cambiano lo span delle righe) si ha

$$\text{span (righe di } A) = \text{span (righe di } S)$$

$$\Rightarrow \hat{rg}(A) = \hat{rg}(S) = rg(S) = rg(A)$$ $\boxtimes$

OSS. Per matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$, il $rg\,A$ può assumere tutti i valori compresi tra 0 e $\min\{m,n\}$.

esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ $\dim(\text{span}([1\ 3\ 5\ 7],[2\ 4\ 6\ 8])) =$
$= \dim\left(\text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}\right)\right)$

COROLLARIO

$$rg\,A = rg\,{}^tA \qquad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$, $\hat{A} = [A \,|\, b]$, allora si riduce a scala $\hat{A}$: $\hat{S} = [S \,|\, c]$

Allora il sistema è risolubile $\Leftrightarrow$ $rg\,A = rg\,\hat{A}$ $\Leftrightarrow$ $rg\,S = rg\,\hat{S}$ $\Leftrightarrow$ $c_{k+1} = 0$

teo. di Rouché - Capelli

termine noto della 1ª riga che non contiene pivot

Variabili "libere" = variabili che corrispondono a colonne che non contengono pivot

Variabili "di pivot" = variabili che corrispondono a colonne che contengono pivot

OSS. assegnando in qualunque modo le variabili libere, quelle di pivot sono unicamente determinate.

Per trovare una base di soluzioni basta assegnare le variabili libere in modo che siano tutte $= 0$ tranne ~~1~~ una, tante volte quanto il num. di variabili libere. In questo modo si ottengono vettori linearmente indipendenti.

30/10/2023

Quando una matrice viene ridotta a scala, le colonne che contengono pivot erano indipendenti anche nella matrice originale e quindi sono una base di Span(colonne di A)

Infatti $\{\underline{x} \mid A\underline{x} = 0\} = \{\underline{x} \mid S\underline{x} = 0\}$ —— allora segue

la RIDUZIONE A SCALA mantiene l'indipendenza delle colonne $\Rightarrow$ il rango della matrice rimane uguale.

(rango per righe = rango per colonne)

CONSEGUENZA data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, di rango $rg(A) = k$, ogni ridotta a scala di A ha k righe $\neq 0$ e le posizioni dei pivot sono univocamente determinate.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_1 & \cdots \\ & & & \end{bmatrix} \qquad S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_1' & \cdots \\ & & & & \end{bmatrix}$$

la 3^a colonna è indipendente in S e dipendente in S' $\rightarrow$ imp.

Almeno la prima posizione deve essere =

Supponiamo p_h, p_h' in posizioni a e b $\neq$

$a < b$

Stesso ragionamento di prima, la stessa colonna non può essere prima indipendente e poi dipendente.

Oltre ad atterrare ció che è sotto i pivot, posso atterrare anche la parte sopra, lasciando solamente i pivot uguali a 1. in ogni colonna che contiene i pivot:

esempio:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema associato si risolve facilmente

Mettendo 0 nelle variabi libere, per quelle dei pivot ottengo esattamente i termini noti \ quelle delle colonne che non hanno pivot

(e anche le altre 2 operazioni)

Lo scambio tra righe può essere interpretato come una moltiplicazione tra particolari matrici, quale?

$$A\underline{x} = \underline{0} \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{j1} \\ 0 \\ \vdots \\ x_{jk} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

PONGO A 0 TUTTE LE VARIABILI LIBERE

perché le x_{je} si completano a soluzione del sistema ponendo $x_{j\ell}'' = 0$, $\ell = 1, \dots, n-k$

$$x_{j1} A^{j1} + \dots + x_{jk} A^{jk} = \underline{0} \iff x_{j1} S^{j1} + \dots + x_{jk} S^{jk} = \underline{0}$$

(comb. nulla di colonne indipendenti)

NOTA: lo stesso ragionamento dice che, in generale, la risolutione a scala mantiene l'indipendenza lineare (o la dipendenza) delle colonne: se certe colonne di A sono indipendenti [dipendenti] allora le corrispondenti colonne di S sono indipendenti [dipendenti]. Quindi $rgA = rgS$ (che da un'altra dimostrazione che non usa la formula delle dimensioni del fatto che rg righe = rg colonne)

LE OPERAZIONI DI RIGA CORRISPONDONO A MOLTIPLICARE A SX PER UNA CERTA MATRICE:

- Scambio $A_i \longleftrightarrow A_j$: moltiplicare per

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = S_{ij}$$

(matrice identità con le righe i e j scambiate)

- moltiplicare per un numero $\lambda \neq 0$ la riga i-esima:

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

- $A_i \rightarrow A_i + \lambda A_j$ $(j \neq i)$ si ottiene moltiplicando per

$L_{ij} = I + \lambda E_{ij}$ ← indice 1 al posto (i,j) e 0 altrove

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \lambda A_j + A_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(con λ nella colonna j)

Quindi $\exists L \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \mid LA = S$

esercizio: tutte le matrici per cui moltiplico sono invertibili per cui L è invertibile

⊛

GRUPPO $GL_n(\mathbb{K})$ e δ-equivalenza

Def. $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ invertibile}\} := GL_n(\mathbb{K})$

$\hookrightarrow$ sono un gruppo rispetto alla moltiplicazione riga per colonna

$GL_1(\mathbb{K}) = [a] \quad a \neq 0 \qquad GL_1(\mathbb{K}) \longleftrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\} := \mathbb{K}^*$

(*) $GL_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ invertibili} \right\}$ es. $\begin{bmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{bmatrix}$ non è invertibile

(vedremo che A invertibile $\Longleftrightarrow$ $rg(A) = n$)

Def. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sono δ-equivalenti se $\exists$ una matrice $T \in GL_m(\mathbb{K}) \mid B = TA$

è una <u>relazione di equivalenza</u> su $M_{m,n}(\mathbb{K})$

- riflessiva: $A = IA$
- simmetrica: $B = TA \Rightarrow A = T^{-1}B$
- transitiva: $B = TA,\ C = T'B \Rightarrow C = (T'T)A$

È vero che qualunque matrice invertibile $T \in GL_n(\mathbb{K})$ è prodotto delle "matrici elementari" che abbiamo usato per le operazioni di riga?

Se è vero questo, allora A e B sono δ-equivalenti $\Longleftrightarrow$ B si ottiene da A per operazioni riga elementari

$\Leftarrow$ già visto

$\Rightarrow$ $B = TA \quad T \in GL_m(\mathbb{K})$, $\exists$ matrici elementari $\delta_1, \dots, \delta_k \mid$

$T = \delta_1 \cdots \delta_k$

$B = TA = (\delta_1 \cdots \delta_k) A = (\delta_1 \cdots \delta_{k-1})(\delta_k \cdot A) =$ operazione elementare su A

$= (\delta_1 \cdots \delta_{k-2})(\delta_{k-1}(\delta_k \cdot A)) = \dots$ ▨

Sia $T \in GL_n(\mathbb{K})$ di rango n (massimo)

allora $T \sim \delta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

Def. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sono $\mathcal{S}$-equivalenti se $\exists$ una matrice $T \in GL_m(\mathbb{K})$ | $B = TA$

è una <u>relazione di equivalenza</u> su $M_{m,n}(\mathbb{K})$

- riflessiva: $A = IA$
- simmetrica: $B = TA \Rightarrow A = T^{-1}B$
- transitiva: $B = TA$, $C = T'B \Rightarrow C = (T'T)A$

È vero che qualunque matrice invertibile $T \in GL_n(\mathbb{K})$ è prodotto delle "matrici elementari" che abbiamo usato per le operazioni di riga?

Se è vero questo, allora A e B sono $\mathcal{S}$-equivalenti $\Leftrightarrow$ B si ottiene da A per operazioni riga elementari

$\Leftarrow$ già visto

$\Rightarrow$ $B = TA$ $\quad T \in GL_m(\mathbb{K})$, $\exists$ matrici elementari $S_1, \dots, S_k$ |
$T = S_1 \cdots S_k$

operazione elementare su A

$$B = TA = (S_1 \cdots S_k)A = (S_1 \cdots S_{k-1})(S_k \cdot A) =$$

$$= (S_1 \cdots S_{k-2})(S_{k-1}(S_k \cdot A)) = \dots \qquad \blacksquare$$

Sia $T \in GL_n(\mathbb{K})$ di rango n (massimo)

allora $T \sim \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

Perché dato che il rango è n posso ridurre T a scala completa ottenendo l'identità, per questo $\exists$ matrici elementari $S_1 \cdots S_k$ | $(S_1 \cdots S_k)T = I$

$$T = (S_1 \cdots S_k)^{-1} = S_k^{-1} \cdots S_1^{-1}$$

ma S_i^{-1} è anch'essa elementare (visto sopra)

\+ parte finale incomprensibile della "nota 30/10/2023" su elearning.

02/11/2023

$\mathbb{K}$ campo, $\mathbb{K}^n : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$ n-uple di numeri in $\mathbb{K}$

Struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$:

Se $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

- Ogni spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n è isomorfo a $\mathbb{K}^n$
- In $\mathbb{K}^n$ possiamo usare metodi numerici (sistemi lineari, matrici, rango...)

DESCRIZIONE DI SOTTOSPAZI DI $\mathbb{K}^n$

$W \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio

1. descrizione parametrica (tramite generatori)
2. descrizione cartesiana (tramite equazioni)

1. $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ generatori di W. $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) =$

$= \{ \lambda_1 \underline{w}_1 + \dots + \lambda_k \underline{w}_k \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \}$

↑ parametri che descrivono W

- Se $U \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio

$W \subset U \iff \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in U$ (per verificare l'inclusione si può usare un algoritmo finito)

- Da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ si può estrarre una base di W
- Se $U = \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h)$, $U + W = \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$

⚠ I generatori possono essere sovrabbondanti

- $\text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w}) = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) \iff \underline{w} \in \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$

$(\Rightarrow)$ $\underline{w} \in \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w}) \rightarrow$ (per cui appartiene anche a $\text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$ che è uguale)

$\underline{w} = 0\underline{w}_1 + \dots + 0\underline{w}_k + 1 \cdot \underline{w}$

$(\Leftarrow)$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \mid \underline{w} = \lambda_1 \underline{w}_1 + \dots + \lambda_k \underline{w}_k$

$\supset \rightarrow$ questa inclusione è ovvia

$\underbrace{\underline{w}_1, \dots \underline{w}_k}_{\text{base di Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)} \in \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w})$

$\subset \rightarrow$ $\underline{v} \in \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w})$

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \ldots + \alpha_k \underline{w}_k + \alpha \underline{w} =$

$= \alpha_1 \underline{w}_1 + \ldots + \alpha_k \underline{w}_k + \alpha(\lambda_1 \underline{w}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{w}_k)$

2.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \right\} = \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

$= \{$soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}\}$

- Facile stabilire se un vettore fissato $\mathbb{K}^n$ appartiene a W
- $\dim W = n - rg(A)$
- $U = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid B\underline{x} = \underline{0}\} \qquad B \in M_{e,n}(\mathbb{K})$

$U \cap W = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{0} \text{ e } B\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}\}$

⚠ Le equazioni possono essere sovrabbondanti (ridurre la matrice a scala risolve il problema)

In $\mathbb{R}^3$, $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$\underline{x} \in W \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = a + 2b - c \\ y = a + c \\ z = -a + b - 2c \end{cases}$$

<u>Ob: eliminare i parametri</u>

$$\begin{cases} a = y - c \\ x = y - c + 2b - c = y + 2b - 2c \\ z = c - y + b - 2c = -c - y + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = y - c \\ b = z + c + y \\ \cancel{z = c - y + z + c} \; x \end{cases}$$

$\to c$ è sparito

$x = y - \cancel{c} + 2(z + \cancel{c} + y) - \cancel{c} = 3y + 2z$

$W \subset \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y - 2z = 0\right\}$

$(1 \;\; -3 \;\; -2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

ma potevo togliere anche un altro qualsiasi dei 3 (dimostralo)

$\dim W = 2$

in $\mathbb{R}^5$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ 2x-2y+z+t=0 \\ x+5y+5z-t=0 \end{array} \right\}$

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = -y-2z \\ 2(-y-2z)-2y+z+t=0 \\ -y-2z+5y+5z-t=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=-y-2z \\ -4y-3z+t=0 \\ 4y+3z+t=0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x=-y-2z \\ t=4y+3z \\ 0=0 \end{cases}$$

elimino quante più variabili possibile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-2z \\ y \\ z \\ 4y+3z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y,z \in \mathbb{R}$$

$$W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \qquad \dim W = 2$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineare
$\quad x \longmapsto A\underline{x}$

$A = (A^1 | \cdots | A^n) \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A\underline{x} = x_1A^1 + \ldots + x_nA^n \in \mathbb{K}^m$

$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{span}(A^1, \ldots, A^n)$, $\quad \ker f_A = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$

$\dim(\operatorname{Im} f_A) = \operatorname{rg}(A)$ che si calcola con la riduzione a scala di Gauss (per ora)

La descrizione parametrica

$W = \operatorname{span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k)$ esprime W come immagine di f_B con $B = (\underline{w}_1 | \cdots | \underline{w}_k)$

colonne

La descrizione cartesiana

$W = \{\underline{x} \in W \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ esprime W come nucleo di f_A

V spazio su $\mathbb{K}$ $\quad U, W \subset V$ sottospazi di dimensione finita

$U \subset W$, $\dim U = \dim W \Rightarrow U = W$

(Per dimostrare l'uguaglianza se si conosce che la dimensione è uguale basta una sola delle due inclusioni)

dim $\quad \dim U = k = \dim W$

$\exists\ \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k \in U$ base di U $\left\langle \begin{array}{l} \text{indipendenti} \\ \text{generatori} \end{array} \right.$

$\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_k \subset W$ sono indipendenti e in numero pari a $k = \dim W \Rightarrow$ sono una base

$$W = \mathrm{span}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_k) = U$$

$W = \mathrm{span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) \qquad \underline{w}_i \in \mathbb{K}^n$

$$\underline{w} \in W \iff \mathrm{span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) = \mathrm{span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w})$$

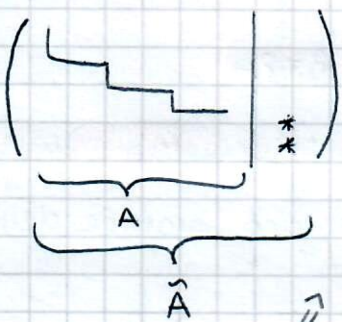
tra i due questa inclusione "$\subset$" è ovvia

(già dimostrato in modo diverso qualche lezione fa)

allora possiamo confrontare le dimensioni

$$\mathrm{rg}\big(\overbrace{(\underline{w}_1 | \dots | \underline{w}_k | \underline{w})}^{\tilde{A}}\big) = \mathrm{rg}\big(\overbrace{(\underline{w}_1 | \dots | \underline{w}_k)}^{A}\big)$$

$\downarrow$ riduco a scala (questa riduzione riduce anche la seconda matrice)



$$\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \begin{cases} \mathrm{rg}(A) \iff \text{gli elementi } * \text{ sono } 0 \\ \mathrm{rg}(A) + 1 \end{cases}$$

$\mathrm{span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) = \mathrm{span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w})$

$\Updownarrow$

$$\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \mathrm{rg}(A) \iff \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \underline{w} \in W$$

- ESERCIZIO (da descrizione parametrica a cartesiana)

$$\mathbb{R}^4 \supset W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

la riduco a scala

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 4 & 3 & t \end{array}\right) \xRightarrow{R_2 = R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 0 & -2 & x+y \\ 0 & 1 & z \\ 4 & 3 & t \end{array}\right) \xRightarrow{R_4 = R_4 + 4R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 0 & -2 & x+y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -5 & t+4x \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{R_3 = 2R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 0 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 2z + x + y \\ 0 & -5 & t+4x \end{array}\right) \xRightarrow{R_4 = 2R_4 - 5R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 0 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 2z + x + y \\ 0 & 0 & 2t + 8x - 5x - 5y \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 0 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 2z + x + y \\ 0 & 0 & 2t + 3x - 5y \end{array}\right)$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2z + x + y = 0 \\ 2t + 3x - 5y = 0 \end{array} \right\}$$

$W \subset U$ (sostituisco i generatori nel sistema)

$\overset{?}{=}$ span iniziale? Abbiamo una inclusione, possiamo confrontare la dim.

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in \mathbb{K}^n$ sono indipendenti $\iff \dim(\overset{\text{span}}{\vee}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)) = k$

$\iff rg((\underline{w}_1 | \cdots | \underline{w}_k)) = k$

$$\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} +1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non sono linearmente indipendenti $\qquad rg(A) = 2$

↓

<u>le colonne con i pivot sono una base dello spazio</u>

06/11/2023

$M_{m,n}(\mathbb{K})$

$A \underset{s}{\sim} B \iff \exists$ matrice $P \in GL_m(\mathbb{K}) \quad B = PA$ $\qquad \boxed{*}$

$\iff B$ si ottiene da A per operazioni elementari sulle righe

Nella classe di equivalenza di A c'è una matrice della forma

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} j_1 & j_2 & & & & j_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & 0 \\ & & & & \cdots & 1 \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$k = rg(A)$ righe $\neq 0$

Per simmetria posso operare per colonna

riduco completamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ trovo k colonne $\neq 0$

Operazioni elementari di colonna: moltiplicare a dx la matrice A per una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\begin{array}{c} \quad a_i \\ [0 \dots 0\, 1\, 0 \dots 0]\, A = A_i \end{array}$$

$$1 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} A = A^j \to j\text{-esima colonna}$$

• SCAMBIO TRA 2 COLONNE

$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = [A^2 | A^1 | A^3 | \cdots | A^n]$$

matrice identità con le colonne scambiate

$\boxed{**}$

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ $\quad A \underset{\delta}{\sim} B \iff \exists$ matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K}) \mid B = AQ$

$\iff$ B si ottiene da A per operazioni elementari sulle colonne

$\boxed{* + ** :=}$

$A \underset{\delta S}{\sim} B \iff \exists P \in GL_m(\mathbb{K}),\ Q \in GL_n(\mathbb{K}) \mid B = PAQ$

(queste classi di equivalenza sono più estese)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & \end{array}\right]$$

tutti 0

Due matrici A e B sono SD-equivalenti $\iff$ $rgA = rgB$

il rango caratterizza completamente la classe di equivalenza

CONGETTURA

Due matrici A e B sono S-equivalenti $\iff$ le colonne dei pivot della matrice A sono le stesse colonne dei pivot della matrice B

S-equivalenti e D-equivalenti $\Rightarrow$ SD-equivalenti

SD-equivalenti $\not\Rightarrow$ S-equivalenti e D-equivalenti

---

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$\mathcal{L}(V,W)$ insieme di tutte le applicazioni lineari di V in W

$$\boxed{\mathcal{L}(V,W) = \{f : V \to W,\ f \text{ lineare}\}}$$

NOTAZIONE:

A, B insiemi $\quad A^B = \{f : B \to A\}$ (tutte le applicazioni)

A spazio vettoriale su $\mathbb{K} \Rightarrow A^B$ è spazio vettoriale

$f : B \to V$

$\quad (f+g) : B \to V$

$g : B \to V$

(Devo definire la somma e il prodotto esterno)

$b \in B$

definizione

$(f+g)(b) := f(b) + g(b) \quad \forall b \in B$

$(\alpha f)(b) := \alpha f(b) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall b \in B$

Verificare gli assiomi su A^B.

Teorema

Fissata una base $\mathcal{B}$ di V, l' applicazione (funzione) che associa a $f \in \mathcal{L}(V,W)$ la restrizione $f|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to W$ è una bigezione $|_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(V \to W) \to W^{\mathcal{B}}$.

In altri termini, f lineare $f: V \to W$ è determinata univocamente da $f|_{\mathcal{B}}$ (dove $\mathcal{B}$ è una base fissata di V)

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$f: V \to W$ determinata da $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1, \dots, f(\underline{v}_n) = \underline{w}_n$

iniettiva { Se $f, g: V \to W$ sono t.c. $f(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i)\ \forall \underline{v}_i \in \mathcal{B} \Rightarrow f = g$

suriettiva { inoltre se fisso una lista $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ in W, esiste unica $f: V \to W$ t.c. $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad 1 \le i \le n$.

che non è necessariamente una base

dim.

1°) $f(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i), \quad i = 1, \dots, n$ voglio dimostrare $f = g$
cioè
$f(\underline{v}) = g(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$

sia $\underline{v} \in V$, essendo $\mathcal{B}$ una base, posso scrivere in modo unico

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

$$f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\underline{v}_i)$$

uguali per ip.

$$g(\underline{v}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(\underline{v}_i)$$

$\Rightarrow f(\underline{v}) = g(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$

2°) Prendiamo una lista $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$

devo far vedere che $\exists f: V \to W$ lineare $\mid f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i,\ i = 1, \dots, n$

(tale f sarà unica per il 1° punto)

Devo estendere $f: \mathcal{B} \to W$ a tutto V. Devo definire $f(\underline{v})\ \forall \underline{v}$.

Usiamo lo sviluppo di $\underline{v}$

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ (scrittura unica)

$f(\underline{v}) := \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$ (gli $f(\underline{v}_i)$ sono già assegnati)

Devo far vedere che è lineare

se $\underline{v} = \underline{v}_i$ $\quad \underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + \dots + 1\underline{v}_i + \dots + 0\underline{v}_n$

$\Rightarrow f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \Rightarrow$ questa f estende effettivamente quella data

f è LINEARE $\Rightarrow$ Posso usare solo la mia definizione di f, non le def. delle operazioni su $\mathcal{L}(V,W)$

$\underline{v}' = \alpha_1' \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n' \underline{v}_n$

- $f(\underline{v}+\underline{v}') = f\big((\alpha_1+\alpha_1')\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n+\alpha_n')\underline{v}_n\big) = (\alpha_1+\alpha_1')\underline{w}_1 + \dots + (\alpha_n+\alpha_n')\underline{w}_n =$
  $= (\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n) + (\alpha_1' \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n' \underline{w}_n) \underset{\text{per def.}}{=} f(\underline{v}) + f(\underline{v}')$
- $f(\alpha\underline{v}) = \alpha\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha\alpha_n \underline{w}_n = \alpha(\alpha_1\underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n) \underset{\text{per def.}}{=} \alpha f(\underline{v})$

$\square$

$V \xrightarrow{f} W$ $\quad f$ lineare

Fissiamo basi $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \in V$ e $B' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\} \in W$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & W \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\ \mathbb{K}^n & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

passaggio a coordinate

$\underline{v} \xmapsto{\varphi_B} [\underline{v}]_B \in \mathbb{K}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\underline{w} \xmapsto{\varphi_{B'}} [\underline{w}]_{B'} \in \mathbb{K}^m$

$\underline{v} \in V$, $\quad \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n \quad [\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$f(\underline{v}) = x_1 f(\underline{v}_1) + \dots + x_n f(\underline{v}_n)$ $\rightarrow$ uguaglianza di vettori in W

$\downarrow$ passo a coordinate

$[f(\underline{v})]_{B'} = [x_1 f(\underline{v}_1) + \dots + x_n f(\underline{v}_n)]_{B'}$

coordinate di $\underline{v}$ in V

Il passaggio a coordinate è lineare

combinazione di colonne di coordinate

$[f(\underline{v})]_{B'} = \dots = x_1 [f(\underline{v}_1)]_{B'} + \dots + x_n [f(\underline{v}_n)]_{B'}$

Introduciamo una matrice $M^B_{B'}(f) = \big[[f(\underline{v}_1)]_{B'} \,|\, [f(\underline{v}_2)]_{B'} \,|\, \dots \,|\, [f(\underline{v}_n)]_{B'} \big]$

↳ ha per colonne le coordinate dei vettori della base dello spazio di partenza

$M^B_{B'}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

m: dim. spazio di arrivo; n: dim. spazio di partenza

$[f(\underline{v})]_{B'} = \dots = \underset{m \times n}{M^B_{B'}(f)} \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} \Rightarrow m \times 1$

$$\boxed{[f(\underline{v})]_{B'} = M^B_{B'}(f)\,[\underline{v}]_B}$$

↳ coordinate dell'immagine di $\underline{v}$ $\qquad$ ↳ coordinate di $\underline{v}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & W \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^B_{B'}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

esempio

$V = M_2(\mathbb{R}) = W$

$B = \left\{ E^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E^{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E^{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = B'$

$f(X) = AX - XA$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) f è lineare

$f(X+Y) = f(X) + f(Y)$?

$f(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA =$

$= AX - XA + AY - YA = f(X) + f(Y)$

$f(aX) =$

$= AaX - aXA = a(AX - XA) = af(X)$

2) Trovare la matrice $M_B^B(f) \in M_4(\mathbb{R})$

$f(E^{11}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= 0E^{11} - 1E^{12} + 1E^{21} + 0E^{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

prima colonna di $M_B^B(f)$

Le altre colonne si calcolano allo stesso modo

...

$$M_B^B(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcolare la base di ker f
- Calcolare la base di Im f

Il passaggio alle coordinate è un isomorfismo

induce un isomorfismo tra $\ker f \cong \ker M_B^B(f)$ e $\operatorname{Im} f \cong \operatorname{Im} M_B^B(f)$

basta calcolare il rango

$\operatorname{rg} M_B^B(f) = 2 = \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f \quad \dim \ker f = 4 - 2 = 2$

base di Im f $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

bastano 2 vettori indipendenti, per comodità prendiamo le Imm di E^{11} ed E^{12} calcolate prima

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (ridotta a scala di $M_B^B(f)$)

(*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -b & 1-a \\ a-1 & b \end{bmatrix}$

deve essere nulla $\Rightarrow b=0, a=1$
$[1,0,0,1]$
(idem per l'altra)

$S\underline{x} = \underline{0}$

variabili libere:

$x_4 = 1$
$x_3 = 0$ $\Rightarrow [1\ 0\ 0\ 1]$ (*), $[0, 1, 1, 0]$

Base di Ker f $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

08/11/2023

1) $f, g : V \to W$ lineari $\Rightarrow$ $f+g$ è lineare
λf è lineare

def $f+g : V \to W$, $(f+g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v})$

$\lambda f : V \to W$, $(\lambda f)(\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$

allora:

$$(f+g)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \overset{?}{=} (f+g)(\underline{v}_1) + (f+g)(\underline{v}_2) \ ?$$

$\downarrow$ def

$$f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \overset{\text{lineari}}{=} f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) + g(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2) =$$

$$= f(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) + g(\underline{v}_2) \underset{\text{def.}}{=} (f+g)(\underline{v}_1) + (f+g)(\underline{v}_2) \qquad \square$$

$$\lambda(f+g)(\underline{v}) = (f+g)(\lambda\underline{v})$$

| def

$$\lambda f(\underline{v}) + \lambda g(\underline{v}) \overset{\text{lineare}}{=} f(\lambda\underline{v}) + g(\lambda\underline{v}) \overset{\text{def}}{=} (f+g)(\lambda\underline{v}) \qquad \square$$

Invece, per λf:

$(\lambda f)(\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ per definizione

$(\lambda f)(\alpha\underline{v}) = \alpha(\lambda f)(\underline{v})$?

$$(\lambda f)(\alpha\underline{v}) \underset{\text{def.}}{=} \lambda f(\alpha\underline{v}) \underset{\text{linearità di } f}{=} \alpha\lambda f(\underline{v}) \underset{\text{def.}}{=} \alpha(\lambda f)(\underline{v})$$

Nello spazio delle applicazioni lineari posso introdurre somma e prodotto esterno appena definiti. Devo dimostrare che è uno spazio vettoriale verificando tutti gli assiomi.

esempio, - associatività:

$$(f+g)+h = f+(g+h) \iff ((f+g)+h)(\underline{v}) = (f+(g+h))(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$$

$$((f+g)+h)(\underline{v}) = (f+g)(\underline{v}) + h(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v}) + h(\underline{v}) =$$

$$= f(\underline{v}) + (g(\underline{v}) + h(\underline{v})) = f(\underline{v}) + (g+h)(\underline{v}) = (f+(g+h))(\underline{v}) \quad \square$$

2) f, g lineari da V in W

$\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ ← span dell'unione — $= f(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2)$ con $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

$\underline{w} \in \mathrm{Im}(f+g)$

$$\Rightarrow \exists \underline{v} \mid \underline{w} = (f+g)(\underline{v}) \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{f(\underline{v})}_{\in \mathrm{Im}f} + \underbrace{g(\underline{v})}_{\in \mathrm{Im}g} \quad \square$$

3) $\dim \mathrm{Im}(f+g) \leq \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Im}g)$

$\dim \underbrace{\mathrm{Im}(f+g)}_{}$ $\leq \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g)$ per Grassmann

contenuto in $\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ per il punto precedente

$\dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Im}g) \geq$
$\geq \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g)$

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim(U) + \dim(W)$$

4) $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$$

$\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) = \dim \mathrm{Im}(f_A)$ — $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$\dim \mathrm{Im}(f_A + f_B) \leq \dim \mathrm{Im}(f_A) + \dim \mathrm{Im}(f_B)$ — $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$

$$f_{A+B}(\underline{x}) = (A+B)\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{x} = f_A(\underline{x}) + f_B(\underline{x})$$

$$\dim \mathrm{Im}(f_A + f_B) = \dim \mathrm{Im}(f_{A+B})$$

→ **COROLLARIO**

Se $M^{(1)}, \dots, M^{(k)}$ sono matrici di rango 1, allora $\mathrm{rg}(M^{(1)} + \dots + M^{(k)}) \leq k$

COROLLARI

- $M^{(1)}, \dots, M^{(k)}$ matrici di rango 1
  $\Rightarrow$ se le sommo il rango è $\leq k$

- Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è somma di matrici di rango 1

$$\overset{\neq 0}{A} = [A^1 | \cdots | A^n] = [A^1 | \underline{0} | \cdots | \underline{0}] + \dots + [\underline{0} | \underline{0} | \cdots | \underline{0} | A^n]$$

↑ sono tutte matrici di rango 1 (o nulle)

Continua sull'altro quaderno...

continuo della lezione dell' 08/11/2023

TEOREMA

Il rango della matrice A è il

$$\min \{ h \in \mathbb{N} \mid A = M^{(1)} + \dots + M^{(h)}, \quad rg\, M^{(i)} = 1 \}$$

dim. Supponiamo $rgA = k$. Ci sono k colonne linearmente indipendenti e le rimanenti sono combinazione di queste.

WLOG Supponiamo che queste colonne siano le prime k: $A^1, \dots, A^k$,

allora $A^{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+1,j} A^j$, $A^{k+2} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+2,j} A^j, \dots, A^n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j} A^j$

ogni altra colonna può essere scritta come comb lineare delle prime k

$$M^1 = [\,\underbrace{A^1 | 0 | \cdots | 0}_{k} | a_{k+1,1} A^1 | \cdots | a_{n,1} A^1\,]$$

$$M^2 = [\,0 | A^2 | \cdots | 0 | a_{k+1,2} A^2 | \cdots | a_{n,2} A^2\,]$$

$$\vdots$$

$$M^k = [\,0 | 0 | \cdots | A^k | a_{k+1,k} A^k | \cdots | a_{n,k} A^k\,]$$

si ha che $rg\, M^{(i)} = 1, \quad i = 1, \dots, k$ e $A = \sum_{i=1}^{k} M^{(i)}$

Inoltre A non può essere somma di $h < k$ matrici di rango 1, per il corollario precedente $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$
$M^1, \dots, M^h$ di rango 1 $\Rightarrow rg(M^1 + \dots + M^h) \leq h$

$rg A = 1$, se $A^1 \neq \underline{0}$ allora tutte le altre colonne sono multiple di A^1:

$$A^2 = b_2 A^1, \ A^3 = b_3 A^1, \ \dots, \ A^n = b_n A^1 \qquad b_i \in \mathbb{K}$$

$$B_1 = [1, b_2, \dots, b_n]$$

$$A = A^1 B_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{m \times 1} \underbrace{[\,1 \ b_2 \ \cdots \ b_n\,]}_{1 \times n} \Rightarrow m \times n$$

In generale, siano $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [\,v_1 \cdots v_n\,] = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & & u_mv_n \end{bmatrix} = C = (c_{ij})$$

$c_{ij} = u_i v_j$ Nota: le colonne sono multiple di $\underline{u}$
le righe sono multiple di $\underline{v}$ quindi $rgC = 1$

LEMMA Tutte le matrici $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango 1 hanno questa forma (cioè $\exists\ \underline{u} \in \mathbb{K}^m, \underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid c_{ij} = u_i v_j$)

dim. Supponiamo $C^i \neq \underline{0}$, allora $C^j = v_j C^i$, $j \neq i$ $\quad v_j \in \mathbb{K}$
che ci sia una colonna non nulla — per ogni $j \neq i$

Poniamo

$^t\underline{v} = [v_1 \cdots v_n] \qquad \underline{u} = C^i$

Allora: $C = \underline{u} \cdot {}^t\underline{v} = \begin{bmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{bmatrix} [v_1 \quad v_{i-1} \quad 1 \quad v_{i+1} \cdots v_n]$

NB! $rg\, C = 1$, $C = \underline{u} \cdot {}^t\underline{v}$ non è unica (cioè $\underline{u}$ e $\underline{v}$ non sono unici: se moltiplico $\underline{u}$ per $\alpha \neq 0$ e $\underline{v}$ per α^{-1}.

$\underline{u}' = \alpha \underline{u}$, $\underline{v}' = \alpha^{-1} \underline{v} \Rightarrow \underline{u}' \, {}^t\underline{v}' = \underline{u} \cdot {}^t\underline{v}$)

esercizio

Se $\underline{u}, \underline{u}' \in \mathbb{K}^m$, $\underline{v}, \underline{v}' \in \mathbb{K}^n$ sono tali che $\underline{u}\, {}^t\underline{v} = \underline{u}'\, {}^t\underline{v}' \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{K} \mid \underline{u}' = \alpha \underline{u}$, $\underline{v}' = \alpha^{-1} \underline{v}$

(vedi esercizi di teoria su notability)

Corollario rango per righe = rango per colonne ???

dim. Sia rg_c il rango per colonne e rg_r il rango per righe

si ha $rg_c(M) = 1 \Leftrightarrow rg_r(M) = 1$ perché in entrambi i casi si ottiene una matrice della forma $c_{ij} = u_i v_j$.

In $V = \mathbb{K}^n$ siano $U = Span\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$, $W = span\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$

Sia $\underline{u}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ $i = 1, \dots, k$

$\underline{w}_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn})$ $j = 1, \dots, h$

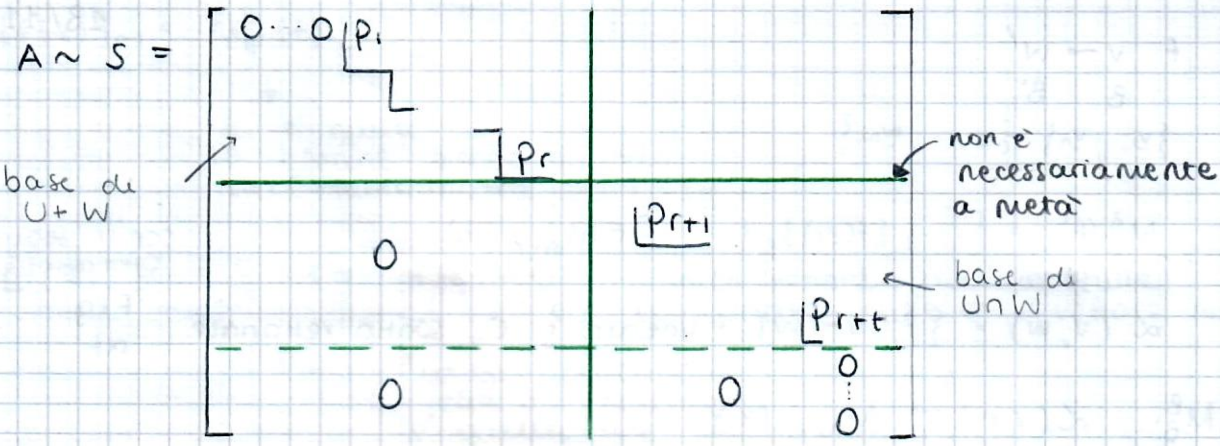
ALGORITMO PER IL CALCOLO SIMULTANEO DI UNA BASE PER $\boxed{U+W}$ e PER $\boxed{U \cap W}$

span dell'unione

Sia $A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{h1} & \cdots & b_{hn} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \in M_{k+h,2n}(\mathbb{K})$

le righe sono le coordinate dei vettori della base di uno degli spazi

Si riduce A a scala per righe



La colonna di p_r è di indice $\leq n$, quella di p_{r+1} è di indice $> n$.
Siano $S_1', \dots, S_r'$ le "mezze righe" di S ottenute prendendo la prima metà delle righe $S_1, \dots, S_r$ di S. Siano $S_{r+1}'', \dots S_{r+t}''$ le mezze righe di S ottenute prendendo la seconda metà delle righe $S_{r+1}, \dots, S_{r+t}$

Allora: $S_1', \dots, S_r'$ è una base di $U+W$
$S_{r+1}'', \dots, S_{r+t}''$ è una base di $U \cap W$.

dim.
Consideriamo i sottospazi di $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ ($\cong \mathbb{K}^{2n}$)
$\hat{U} = \{(\underline{u}, \underline{u}) \mid \underline{u} \in U\}$ e $\hat{W} = \{(\underline{w}, \underline{0}) \mid \underline{w} \in W\}$ (verificare che sono sottospazi)

Notiamo che le prime k righe di A sono della forma $(\underline{u}_i, \underline{u}_i)$ e questi vettori generano $\hat{U}$. Similmente le altre righe di A generano $\hat{W}$. $\Rightarrow$ Tutte le righe di A generano il sottospazio
$$Z = \hat{U} + \hat{W} = \left\{(\underline{u}, \underline{u}) + (\underline{w}, \underline{0}) = (\underline{u}+\underline{w}, \underline{u}) \;\middle|\; \begin{matrix}\underline{u} \in U \\ \underline{w} \in W\end{matrix}\right\}$$
Sia $\pi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la proiezione sul primo fattore:
$\pi(\underline{v}', \underline{v}) = \underline{v}'$ Allora $\pi|_Z : Z \to \mathbb{K}^n$
$(\underline{u}+\underline{w}, \underline{u}) \longmapsto \underline{u}+\underline{w}$ per cui
$\operatorname{Im} \pi|_Z = U+W$ Inoltre, $\operatorname{Ker} \pi|_Z = \{(\underline{u}+\underline{w}, \underline{u}) \mid \underline{u}+\underline{w} = \underline{0}\}$
$= Z \cap (\underline{0} \times \mathbb{K}^n) = \underline{0} \times (U \cap W)$ ($\cong U \cap W$)

Infatti $\underline{u}+\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{u} = -\underline{w} \in U \cap W$ (e $\forall \underline{u} \in U \cap W$ c'è un unico vettore $(\underline{0}, \underline{u}) = (\underline{u}-\underline{u}, \underline{u}) \in Z \cap \underline{0} \times (U \cap W)$). Dalla formula delle dim. segue: $\dim Z = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$.

Siccome le righe di A generano Z, quelle della ridotta S formano una base di Z. Sia A' la sottomatrice di A formata dalle prime n colonne e S' la sottomatrice di S formata dalle prime n colonne.
↳ riduzione a scala di S

Ma le righe di A' generano $U+W$, quindi le righe $\neq 0$ di S' $(S_1', \dots, S_r')$ sono una base di $U+W$. Le righe $S_{r+j} = (\underline{0}, S_{r+j}'')$ $j = 1, \dots, t$ di S stanno in $Z \cap (\underline{0} \times \mathbb{K}^n) = \underline{0} \times (U \cap W) = \operatorname{Ker} \pi|_Z$, quindi le S_{r+j}'' stanno in $U \cap W$. ...

to be continued
(vedi foglietto)

... in conclusione

Poiché le $r+t$ righe non nulle di S sono una base di Z, e le prime r righe sono tante quante $\dim(\mathrm{Im}\, \pi|_Z)$, le rimanenti t righe devono essere tante quante $\dim(\ker \pi|_Z) = \dim(U \cap W)$

Ma le S''_{r+j} sono linearmente indipendenti perché a scala, quindi forniscono una base di $U \cap W$. $\square$

13/11/2023

$f: V \to W$

$\quad B \quad B'$

$\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n\} \quad \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$

$M^B_{B'}(f) = [\cdots | [f(\underline{v}_i)]_{B'} | \cdots] \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

con le seguenti operazioni

$\mathcal{L}(V, W) = \{f \ V \to W \mid f \text{ lineare}\}$ è spazio vettoriale $\quad f+g$, αf

$M^B_{B'} : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$

$M^B_{B'} : f \longmapsto M^B_{B'}(f)$

PROP: $M^B_{B'}$ è un isomorfismo di spati vettoriali

- $M^B_{B'}$ è lineare?

① $M^B_{B'}(f+g) = M^B_{B'}(f) + M^B_{B'}(g)$
② $M^B_{B'}(\alpha f) = \alpha M^B_{B'}(f)$
da verificare

① $M^B_{B'}(f+g) \overset{\text{def.}}{=} [\cdots | [(f+g)\underline{v}_j]_{B'} | \cdots]$

$[(f+g)\underline{v}_j]_{B'} = [f(\underline{v}_j)+g(\underline{v}_j)]_{B'}$ — definizione di somma in $\mathcal{L}(V,W)$

ma il passaggio a coordinate è lineare

$= [\cdots | [f(\underline{v}_j)]_{B'} + [g(\underline{v}_j)]_{B'} | \cdots]$

$M^B_{B'}(f) = [\cdots | [f(\underline{v}_j)]_{B'} | \cdots]$ e $M^B_{B'}(g) = [\cdots | [g(\underline{v}_j)]_{B'} | \cdots]$

La loro somma si ottiene sommando le colonne

$M^B_{B'}(f) + M^B_{B'}(g) = [\cdots | [f(\underline{v}_j)]_{B'} + [g(\underline{v}_j)]_{B'} | \cdots] = M^B_{B'}(f+g)$

② $M^B_{B'}(\alpha f) = [\cdots | [\alpha f(\underline{v}_j)]_{B'} | \cdots] = [\cdots | \alpha [f(\underline{v}_j)]_{B'} | \cdots] =$

$= \alpha M^B_{B'}(f)$

Allora $M^B_{B'} : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$ è lineare

- $M^B_{B'}$ è isomorfismo?
  ① Iniettiva
  ② Suriettiva

① Iniettiva $\iff \ker M^B_{B'} = \{\underset{\text{matrice nulla}}{0}\}$

$M^B_{B'}(f) = 0$

$[f(\underline{v})]_{B'} = M^{B}_{B'}(f)\,[\underline{v}]_B$

$\downarrow$

se è nulla lo rimane anche quando viene moltiplicata per $[\underline{v}]_B$

$[f(\underline{v})]_{B'} = \underline{0} \iff f(\underline{v}) = \underline{0}$ l'unico vettore che ha tutte coordinate nulle è il vettore nullo

$\downarrow$

l'unica applicazione che ha matrice 0 è quella che manda tutto in 0

L'elemento neutro di questo spazio è l'applicazione nulla

② Surgettiva

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

devo far vedere che $\exists\ f \in \mathcal{L}(V,W)$ la cui matrice associata è A

$A = [A^1 | \cdots | A^n]$

$M^{B}_{B'}(f) = [\,[f(\underline{v}_1)]_{B'} | \cdots | [f(\underline{v}_n)]_{B'}\,]$

Sia $\underline{u}_1 \in W$ l'unico vettore che ha come coordinate quelle della colonna $A^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$

$\underline{u}_1 = a_1\underline{w}_1 + \ldots + a_m\underline{w}_m$

$\underline{u}_j \in W$ unico vettore con coordinate date dalla colonna A_j

$\exists\ f: V \to W$ unica tale che $f(\underline{v}_j) = \underline{u}_j$ (teo. già visto)

Per costruzione la matrice associata a questa f è la matrice A.

$\mathcal{L}(V,W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$ □

Corollario $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$

Base "canonica" di $\mathcal{L}(V,W)$ => è la controimmagine mediante $M^{B}_{B'}$ della base canonica dello spazio di matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$E^{(i,j)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} \\ j \end{array}$$

$V = \text{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$
$W = \text{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} f^{(i,j)}(\underline{v}_k) = \underline{0} & \text{se } k \neq j \\ f^{(i,j)}(\underline{v}_j) = \underline{w}_i \end{cases}$$

manda in $\underline{0}$ tutti i vettori della base di V con indice $\neq$ da j e nel vettore w_i della base di W v_j

---

$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong \mathcal{L}(V,W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$

$[F]^{B}_{B'} : \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ $\quad f \quad M^{B}_{B'}$

$\underline{x} \to M^{B}_{B'}(f)\,\underline{x}$ manda $\underline{x}$ nelle coordinate della sua immagine

- $V = \mathbb{R}_n[x] \qquad f: V \to V$

$$f(p(x)) = \sum_{i=0}^{n} p(i)\, x^i$$

- Dimostrare che è lineare
- Trovare la matrice associata a f tramite la base canonica $\{1, x, x^2, \dots\}$

$$M_{B'}^{B'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1^n \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \vdots & & & & 3^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & & n^n \end{bmatrix}$$

$B' = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
└ base canonica di $\mathbb{R}_n[x]$

$$f(1) = \sum_{i=0}^{n} x^i$$

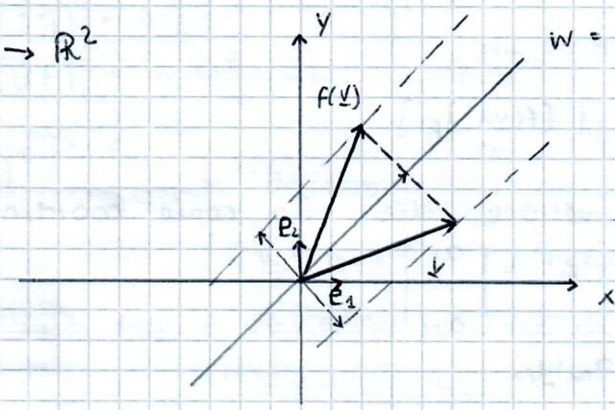
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} i\, x^i$$

$$f(x^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 x^i$$

Verificare se è iniettiva
(se è iniettiva è automaticamente surgettiva)

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

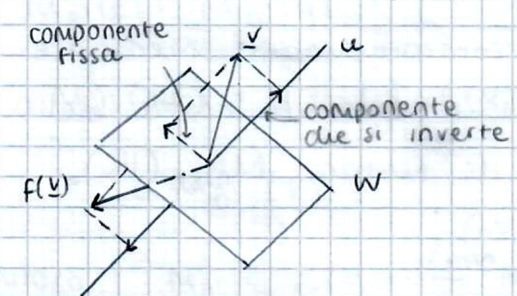
$W = \{x = y\}$



Trovare la matrice associata a f rispetto a $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

$$\begin{aligned} f(\underline{e}_1) &= \underline{e}_2 \\ f(\underline{e}_2) &= \underline{e}_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (stessa cosa rispetto a un piano)



$B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$u \equiv$ asse z

$\underline{e}_1$ e $\underline{e}_2$ rimangono fissi

$\underline{e}_3$ si inverte

$$M_B^B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Riflessione rispetto a $W = \{x + y + z = 0\}$
  └ $\perp$ a $(1,1,1)$ e passante per l'origine

  Trovare la matrice associata

Trovare la matrice associata alla rotazione di 60° rispetto all'asse $\perp$ al piano di prima e passante per l'origine

$120° \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$U \subset \mathbb{R}^4$ $\dim U = 2$
$W \subset \mathbb{R}^5$ $\dim W = 3$

1) $\mathcal{F}: \{ f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 \mid f(U) \subset W \} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$

è un sottospazio vettoriale

$\downarrow$

$f, g \in \mathcal{F} \Rightarrow f+g \in \mathcal{F}$

lineari per ip.

$\left.\begin{array}{l} f(U) \subset W \\ g(U) \subset W \end{array}\right\} \to (f+g)(\underline{u}) = \overset{\in W}{f(\underline{u})} + \overset{\in W}{g(\underline{u})}$

$\in W$ perché è sottospazio

$(\alpha f)(\underline{u}) = \alpha \overbrace{f(\underline{u})}^{\in W}$

$\in W$ perché è sottospazio

Calcolo $\dim \mathcal{F}$

Prendiamo base "adattata"

$B = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \}$ di $\mathbb{R}^4$ con $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in$ base di U

$B' = \{ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_5 \}$ di $\mathbb{R}^5$ con $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ base di W

$f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2) \in W \iff f(U) \subset W$

$$M^B_{B'}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

L'isomorfismo $M^B_{B'}$ tra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$ e $M_{5,4}(\mathbb{R})$ si restringe a un isomorfismo tra $\mathcal{F}$ e le matrici 5×4 della forma $\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$

dimensione 16

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ha dimensione 16

$\dim V = n$ $\dim W = m$ $U \subset V$ $\dim U = k$

$\mathcal{F}' = \{ f \in \mathcal{L}(V, W) \mid \ker f \supset U \}$

1) $\mathcal{F}'$ è sottospazio di $\mathcal{L}(V, W)$

$(f+g)(\underline{u}) = \underset{\underline{0}}{\underset{\shortparallel}{f(\underline{u})}} + \underset{\underline{0}}{\underset{\shortparallel}{g(\underline{u})}} = \underline{0}$

$(\alpha f)(\underline{u}) = f(\alpha \underline{u}) = \alpha \underset{\underline{0}}{\underset{\shortparallel}{f(\underline{u})}} = \underline{0}$

2) Trovare la dimensione di $\mathcal{F}'$

$\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_k}_{\text{base di } U}, v_{k+1}, \dots, v_n$ base di V

$w_1, \dots, w_m$ base di W

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & * & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m,k+1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{0 \quad 0}_{k \text{ colonne}}$

dimensione $(n-k)m$

ESERCIZIO

1) se $\mathcal{F}'' = \{ f : V \to W \mid \operatorname{Im} f \subset Z \}$ $\quad Z \subset W$, $\dim Z = h$

- dimostrare che è sottospazio
- trovare la dimensione

$\underbrace{w_1, \dots, w_h}_{\text{base di } Z}, \dots, w_n$ base di W

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \dots & a_{hn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2) U di dim h $\quad Z \subset W$

W di dim k $\quad U \subset V$

$\mathcal{F} = \{ f \in \mathcal{L}(V, W) \mid U \subset \ker f, \ \operatorname{Im} f \subset Z \}$

$n \quad m$

$B = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_h}_{\text{base di } U}, v_{h+1}, \dots, v_n \} \to$ base di V

$B' = \{ \underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{base di } Z}, w_{k+1}, \dots, w_m \} \to$ base di W

$$M^{B}_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,h+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & a_{2,h+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{k,h+1} & \dots & a_{k,n} \\ & & & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dimensione $k(n-h)$

$\underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{\text{prime } h \text{ colonne}}$

15/11/2023

$$\begin{array}{ccc} {}^{B}V & \xrightarrow{f} & W_{B'} \\ \downarrow & M^{B}_{B'}(f) & \downarrow \\ \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \end{array}$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$
$g \circ f$

$$[f(\underline{v})]_{B'} = M^{B}_{B'}(f)[\underline{v}]_B \qquad (g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$$

PROP. : f, g lineari $\Rightarrow g \circ f$ lineari

$$(g \circ f)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \overset{?}{=} (g \circ f)(\underline{v}_1) + (g \circ f)(\underline{v}_2)$$

$$g(f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = g(f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)) = g(f(\underline{v}_1)) + g(f(\underline{v}_2)) \checkmark$$

$$(g \circ f)(\alpha \underline{v}) \overset{?}{=} \alpha (g \circ f)(\underline{v})$$

$$g(f(\alpha \underline{v})) = g(\alpha f(\underline{v})) = \alpha g(f(\underline{v})) \checkmark$$

Proprietà

1) associatività

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} U$$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h(g(f(x)))$$

2) distributività

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$
$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$$

$$g(f_1(\underline{v}) + f_2(\underline{v})) = g(f_1(\underline{v})) + g(f_2(\underline{v})) \checkmark$$

3) $(cg) \circ f = g \circ (cf) = c(g \circ f) \qquad c \in \mathbb{K}$

Def $rg(f)$ = dimensione dell' immagine di f

$rg(f) = \dim Im(f)$

OSS

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad : \quad \underline{x} \mapsto A\underline{x}$

quindi $rg(A) = rg(f_A)$

ESERCIZI

$f: V \to W \qquad rg(f) = rg(M^{B}_{B'}(f)) \quad \forall$ scelta di basi

$rg f = \dim Im f$ — La dimensione dell' immagine di f è pari al rango della sua matrice associata

dimostriamo che $Im f \overset{\simeq}{=} Im f_{M^{B}_{B'}(f)}$

Basta prendere come isomorfismo il passaggio a coordinate

$\underline{w} \longmapsto [\underline{w}]_{B'}$ con $\underline{w} \in W_{B'}$

$[\underline{w}]_{B'} \in \mathbb{K}^m$

Il passaggio a coordinate manda $\mathrm{Im} f$ in $\mathrm{Im} f_{M^{B}_{B'}}(f)$

È iniettivo e surgettivo

Eserciti

(1) $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva

(2) $g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

(3) $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker} f$. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$

$\Rightarrow rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$

(4) $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im} f) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, g)$

$g|_{\mathrm{Im} f}$

(4) $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim V - \underset{\left(\dim \mathrm{Ker} f + \dim(\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f)\right)}{\underset{\shortparallel}{\dim \mathrm{Ker}(g \circ f)}}$

$\dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \underbrace{\dim V - \dim \mathrm{Ker} f}_{\dim \mathrm{Im} f} - \dim(\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f)$

$f: V \to V$ (lineare)

ENDOMORFISMO

$\mathcal{L}(V,V) := \mathcal{L}(V)$

def. $f: V \to V$ INVERTIBILE

se $\exists\ g: V \to V \mid g \circ f = f \circ g = Id_V$

$id_V(\underline{v}) = \underline{v}$

SONO EQUIVALENTI:

1) f invertibile
2) f isomorfismo
3) f iniettiva
4) f surgettiva
5) $rg\, f = \dim V$

1) $\Rightarrow$ 2)

$\exists\, g \mid g \circ f = f \circ g = Id \Rightarrow f$ iniettiva e surgettiva

- Id è un isomorfismo $\Rightarrow$ $g \circ f$ e $f \circ g$ iniettive e suriettive

$\Downarrow$ f iniettiva, $\Downarrow$ f surgettiva

3) e 4) sono equivalenti alla 2) (formula delle dimensioni tra spati di dimensione uguale)

3) => 5) per la formula delle dimensioni

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$
$$B \qquad B' \qquad B''$$

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$
$B' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$
$B'' = \{z_1, \dots, z_p\}$

$M^B_{B'}(f) \qquad M^{B'}_{B''}(g)$

$M^B_{B'}(g \circ f)$

esiste una relazione?

PROP. La matrice associata alla composizione è il prodotto riga per colonna delle matrici delle singole applicazioni

$$\boxed{\underset{p \times n}{M^B_{B''}(g \circ f)} = \underset{p \times m}{M^{B'}_{B''}(g)} \circ \underset{m \times n}{M^B_{B'}(f)}}$$

(Si può generalizzare alla composizione di più funzioni)

$\downarrow$ colonna jesima

$[(g \circ f)(\underline{v}_j)]_{B''}$ applico $[f(\underline{v})]_B = M^B_{B'}(f)[\underline{v}]_B$ a g

$\downarrow =$

$M^{B'}_{B''}(g)\,[f(\underline{v}_j)]_{B'}$

$\uparrow$ è la j-esima colonna della matrice $M^B_{B'}(f)$

=> colonna per colonna ottengo il prodotto □

Corollario: $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

usiamo $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$ esercizio 3 di prima

$A \in M_{mn}(\mathbb{K}) \qquad f_A(\underline{x}) = A\underline{x} \qquad \underline{x} \in \mathbb{K}^n$

OSS

$M^B_{B'}(f_A)$ rispetto alle basi canoniche è esattamente A

$f_A(\underline{e}_1) = A\underline{e}_1 = A^1 = [A\underline{e}_1]_{B'}$

Considero $f_A: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$
$f_B: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$f_{AB}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Esempio

$id_V : V \to V \qquad id_V(\underline{v}) = \underline{v}$

Se prendo la stessa base B in partenza e arrivo $M^B_B(id_V)$ è la matrice identità

$$\overset{B}{V} \xrightarrow{f} \overset{B'}{V} \xrightarrow{g} \overset{B}{V}$$

$g \circ f = id_V$

$M_B^B(g \circ f) = I = M_{B'}^B(g) \cdot M_B^{B'}(f)$ se f invertibile

↳ le matrici sono invertibili

$$\left(M_{B'}^B(f)\right)^{-1} = M_B^{B'}(f^{-1})$$

Come cambiano le matrici se cambio la base

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "f"] & W_{B'} \arrow[d, "id_W"] \\ V_C \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"] & W_{C'} \end{tikzcd}$$

$f = id_W \circ f \circ id_V$

$$\underset{m \times n}{M_{C'}^C(f)} = \underset{m \times m}{M_{C'}^{B'}(id_W)} \; \underset{m \times n}{M_{B'}^B(f)} \; \underset{n \times n}{M_B^C(id_V)}$$

$C = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$M_B^C(id_V) = \left[[\underline{v}_1]_B \middle| \cdots \middle| [\underline{v}_n]_B \right]$

matrice del cambiamento di coordinate (quadrata)

$A = M_{B'}^B(f)$ $\quad B = M_{C'}^C(f) \Rightarrow B = PAQ$ (allora $\exists P e Q$ t.c.)

$P \in GL_m(\mathbb{K}) \quad Q \in GL_n(\mathbb{K})$

TEOREMA DEL CAMBIO DI BASE

Siano B e C basi di V e B' e C' basi di W

$f: V \to W$ lineare

Allora vale: $M_{C'}^C(f) = M_{C'}^{B'}(id_W) M_{B'}^B(f) M_B^C(id_V)$

secondo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "f"] & W_{B'} \arrow[d, "id_W"] \\ V_C \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"] & W_{C'} \end{tikzcd}$$

COSTRUZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

16/11/2023
Manfredini

$f: V \to W$ lineare

è completamente determinata dai valori che assume sulla base

se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $\underline{v} \in V$

$\exists! \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad \underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

$\Rightarrow f(\underline{v}) = \lambda_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \lambda_n f(\underline{v}_n)$

- $\underline{\mathrm{Imm} f = \mathrm{Span}(f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n))}$
- Fissati $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W \qquad \exists! \ f \in \mathcal{L}(V, W) : \ f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$
  $i = 1, \dots, n$

Esercizio

Costruire $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare

$$\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right)}_{\underline{v}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{w}_1} \qquad \underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}\right)}_{\underline{v}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\underline{w}_2} \qquad \underbrace{f\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}_{\underline{v}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\underline{w}_3} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}\right) \begin{matrix} \nearrow \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ \searrow \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

Gauss righe

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

riduco a scalini per capire se sono una base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3}$$ indipendenti

$\to \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ indipendenti

$\underline{v}_4$ dipendente dagli altri

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} \in \mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

$\to$ la comb. può essere ricavata da A $\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 2, \ y = 1, \ x = 1$$

$$f(\underline{v}_4) = x f(\underline{v}_1) + y f(\underline{v}_2) + z f(\underline{v}_3) \overset{\text{sostituendo}}{=} \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Bisogna aggiungere un 4° vettore indipendente

Cerchiamo una base che contenga $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$

$\underline{v}_4 \notin \mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \to$ dimensione 3

$$\mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 \ \middle|\ x - y = 0 \right\} \qquad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 0 \to \dim 3$$

Dato che la dimensione è uguale basta verificare un'inclusione

$\text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \subset \{ \cdots \mid x = y \}$ è ovvia

=> sono lo stesso spazio

$\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sicuramente $\notin$ allo spazio sopra

base di $\mathbb{R}_4$
$$\begin{cases} \underline{v}_1 \longrightarrow \underline{w}_1 \\ \underline{v}_2 \longrightarrow \underline{w}_2 \\ \underline{v}_3 \longrightarrow \underline{w}_3 \\ \underline{v}_4 \longrightarrow \underline{0} \end{cases} \quad \checkmark$$

la scelta non è unica

- Proviamo a fare in modo che dim Imm$f$ = $\{1, 2, 3\}$

$\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \in \text{Imm}f$
↓
sottospazio
↓
$\text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) \subseteq \text{Imm}f$
↓ che dim ha?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Gauss righe

↓ ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \text{ linearmente indipendenti}$$
↓
lo span ha dim 3

$\Rightarrow$ Dim Imm$f \geq 3$

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &\longrightarrow \underline{w}_1 \\ \underline{v}_2 &\longrightarrow \underline{w}_2 \\ \underline{v}_3 &\longrightarrow \underline{w}_3 \\ \underline{v}_4 &\longrightarrow \underline{w}_1 \end{aligned}$$

se dim Imm$f$ = 3
⇓
Imm$f$ = span$(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3)$

basta sceglierlo dipendente dagli altri

Imm$f$ = span$(\underline{w}_1, \underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_1)$ = span$(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3)$ che ha dim. 3

- Richiediamo ora

$\text{Ker}f \subset \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = U$ dim U = 2 (non sono uno multiplo dell'altro)

$\frac{3}{4}\underline{v}_1 + \frac{3}{4}\underline{v}_2 - \frac{1}{2}\underline{v}_3 \xrightarrow{f} \frac{3}{4}\underline{w}_1 + \frac{3}{4}\underline{w}_2 - \frac{1}{2}\underline{w}_3$ ⊛

$\frac{1}{2}\underline{v}_1 - \frac{1}{2}\underline{v}_2 \xrightarrow{f} \frac{1}{2}\underline{w}_1 - \frac{1}{2}\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

⊛ = $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/5 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ linearm[ente] indipen[denti]

$f(U) = \text{span}(z_1, z_2) \Rightarrow \dim f(U) = 2$

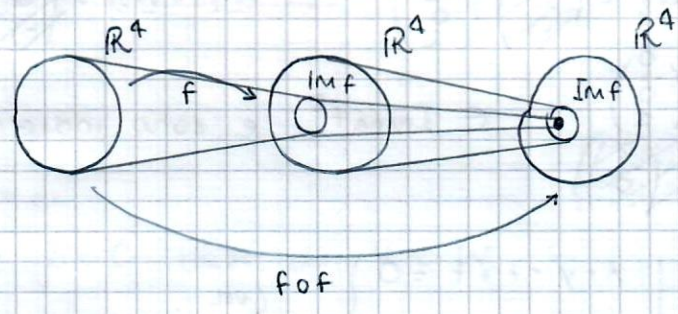
Osservo che il Ker di f ha dimensione 1 dunque la dimensione dell'intersezione tra Kerf e U deve essere almeno pari a 1

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\dim f(U)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\dim U} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \downarrow \\ U \cap \text{Ker} f = \{\underline{0}\}}}{\dim (U \cap \text{Ker} f)}$$

$\dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im} f = 4 - 3 = 1$

La richiesta è impossibile

- È vero che $e_1 \in \text{Imm} f^2$?



$\text{Imm} f^2 = f(\text{Imm} f) \subset \text{Imm} f$

$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \text{Imm} f^2$

$\text{Imm} f = \text{span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + t = 0 \right\}$

$\underline{e}_1 \notin \text{Imm} f^2$

- È possibile $\dim \text{Imm} f^2 = \{2, 1\}$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \dim f(\text{Imm} f)}}{\dim \text{Imm} f^2} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim (\text{Imm} f)} - \dim(\text{Imm} f \cap \overset{1}{\text{Ker} f}) \quad 0 \;/\; 1$$

$\Rightarrow$ Posso escludere $\dim \text{Imm} f^2 = 1$

$\dim \text{Imm} f^2 = 2 \iff \dim(\text{Imm} f \cap \text{Ker} f) = 1$

cioè $\text{Ker} f \subset \text{Imm} f$ dato che $\dim \text{Ker} f = 1$

- nuova base $\begin{cases} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_5 \in \text{Imm} f \end{cases}$

per $\underline{v}_5$ scelgo $\underline{w}_3 \in \text{Imm} f$, $\underline{w}_3 \notin \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

$\underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e lo mando in 0

Per questa f $\quad \underline{w}_3 \in \text{Ker} f \quad \text{span}\, \underline{w}_3 \subset \text{Ker} f \Rightarrow \text{span}\, \underline{w}_3 = \text{Ker} f$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{Imm} f^2$

$$\mathrm{Imm} f \cap \mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ x-y=0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right)$$

dim. 2

$$-\underline{v}_2 - 2\underline{v}_3 \xrightarrow{f} -\underline{w}_2 - 2\underline{w}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$-(\underline{v}_2 + \underline{v}_3) \xrightarrow{f} -(\underline{w}_2 + \underline{w}_3) = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Imm} f^2$ e sono indipendenti

$$\mathrm{Imm} f^2 = \mathrm{span}(\quad) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ z=0 \end{matrix} \right\}$$

(va controllata almeno 1 inclusione)

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \notin \mathrm{Imm} f^2$

- $\dim(\mathrm{Imm} f + \mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)) = ?$

$$= \underbrace{\dim \mathrm{Imm} f}_{3} + \underbrace{\dim \mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)}_{3} - \underbrace{\dim(\mathrm{Imm} f \cap \mathrm{span})}_{2} = 4$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^4 = \mathrm{Imm} f + \mathrm{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

base

$\underline{v}_1, \underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{w}_2$ → base di Imm f $\Rightarrow$ base di $\mathbb{R}^4$

→ base di Imm f ∩ span

→ base di span$(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

$$\underline{v}_1 \xrightarrow{f} \underline{w}_1$$

$$\underline{t}_1 \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_2 \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\+1\end{pmatrix}$$

$\underline{w}_2 \longrightarrow ?$ $\qquad \underline{w}_1 \longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\0\\-x-y\end{pmatrix} \in \mathrm{Imm} f^2$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{t}_1 - 2\underline{w}_1 \xrightarrow{f} \underline{w}_1 + \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}x\\y\\0\\-x-y\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{imp.}$$

invece $f = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ OK!

<u>f È UNICA</u>

RECAP

V, W

$\dim V = n$

$\dim W = m$

Fissate B e C basi di V e W

$$M_C^B : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \text{è un ISOMORFISMO}$$
$$f \longmapsto M_C^B(f)$$

$\forall \underline{v} \in V \quad M_C^B(f)[\underline{v}]_B = [f(\underline{v})]_C$

$[\operatorname{Ker} f]_B = \operatorname{Ker} M_C^B(f) = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid M_C^B(f)\underline{x} = \underline{0}\} \subset \mathbb{K}^n$

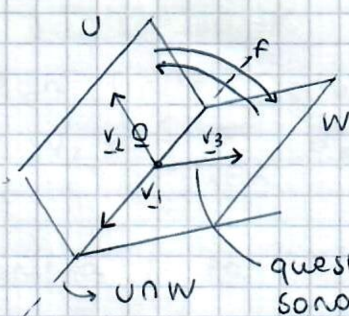
$[\operatorname{Imm} f]_C = \operatorname{Imm} M_C^B(f) = \operatorname{span}(\text{colonne } M_C^B(f)) \subset \mathbb{K}^m$

Esercizio

$U = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\} \qquad W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\right\}$

Costruire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c.

- $f(U) \subset W$, $f(W) \subset U$.



$f(U \cap W) \subset U \cap W$

questi 3 vettori sono generatori e base di $U + W$ e di $\mathbb{R}^3$
$\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}$

Scelgo una base particolare di $\mathbb{R}^3$ che contenga anche una base di $U + W$ ($= \mathbb{R}^3$) e $U \cap W$, di U e di W

$$U \cap W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix}\right\} = \operatorname{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1}\right)$$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to$ in $U \setminus W$ $\qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ in $W \setminus U$ $\qquad \Rightarrow$ base di $\mathbb{R}^3$

$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$

$f(\underline{v_1}) \in \text{span}(\underline{v_1})$ => $\underline{v}_1$ che è nell'intersezione deve continuare a rimanerci

$\overset{\shortparallel}{\alpha \underline{v_1}} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & 0 & e \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad (*)$

$f(\underline{v_2}) \in W = \text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_3})$

$f(\underline{v_2}) = b\underline{v_1} + c\underline{v_3} \qquad b, c, \in \mathbb{R}$

(*) $f(\underline{v_3}) \in U = \text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2})$

$f(\underline{v_3}) = d\underline{v_1} + e\underline{v_2}$

- $f(\underline{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ | sapendo queste 2 cosa si può dire su $M_B^B(f)$? $\quad f(\underline{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ => l'obiettivo ora è scrivere la matrice di f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$???

$[\underline{e_3}]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$[f(\underline{e_3})]_B = M_B^B(f)[\underline{e_3}]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f(\underline{e_3}) = 0\underline{v_1} + \frac{1}{2}\underline{v_2} + 2\underline{v_3}$

$$\begin{pmatrix} a+b+d \\ e \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ALCUNE COSTRUZIONI DI SPAZI VETTORIALI

20/11/2023

1) Se V e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, il prodotto cartesiano $V \times W = \{(\underline{v}, \underline{w}) \mid \underline{v} \in V, \underline{w} \in W\}$ è uno spazio vettoriale con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v}+\underline{v}', \underline{w}+\underline{w}')$
- $\alpha(\underline{v}, \underline{w}) = (\alpha\underline{v}, \alpha\underline{w})$

Tutti gli assiomi si verificano facilmente

Se $B = \{\underline{v}_i\}_{i\in I}$ è una base di V e $B' = \{\underline{w}_j\}_{j\in J}$ è una base di W => allora $\{(\underline{v}_i, \underline{0}) \mid i \in I\} \cup \{(\underline{0}, \underline{w}_j) \mid j \in J\}$ è una base di $V \times W$ (dimostrare!)

Corollario: $\dim(V\times W) = \dim V + \dim W$

Si hanno le PROIEZIONI LINEARI

$p_V : V\times W \to V \qquad p_V((\underline{v}, \underline{w})) = \underline{v}$

$p_W : V\times W \to W \qquad p_W((\underline{v}, \underline{w})) = \underline{w}$

e le INIEZIONI ovvie

$i_V : V \to V\times W \qquad i_V(\underline{v}) = (\underline{v}, \underline{0})$

$i_W : W \to V\times W \qquad i_W(\underline{w}) = (\underline{0}, \underline{w})$

$p_V \circ i_V = id_V \qquad \operatorname{Ker} p_W = \operatorname{Im} i_V$

$p_W \circ i_W = id_W \qquad \operatorname{Ker} p_V = \operatorname{Im} i_W$

Si può definire anche il prodotto di più spazi vettoriali $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k = \{(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) \mid \underline{v}_i \in V_i\}$ (sullo stesso campo $\mathbb{K}$)

$\dim(V_1\times V_2 \times \dots \times V_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim(V_i)$

2) Lo spazio vettoriale generato da un insieme X (qualunque) su un campo $\mathbb{K}$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite (formali) degli $x \in X$ a coeff. in $\mathbb{K}$:

$$V_X = \Big\{\sum_{x\in X} \alpha_x x \;\Big|\; \alpha_x \in \mathbb{K},\ \alpha_x \neq 0 \text{ solo per un num. finito di } x \in X\Big\}$$

La somma si fa:

$$\sum_{x\in X}\alpha_x x + \sum_{x\in X}\beta_x x = \sum_{x\in X}(\alpha_x + \beta_x)x$$

Per costruzione X è una base di V_X, infatti, due comb. sono lo stesso elemento di V_X <=> hanno gli stessi coefficienti α_x

Si ha un isomorfismo naturale tra lo spazio generato da X su $\mathbb{K}$ e lo spazio

$$\mathbb{K}^X_{fin} = \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f(x) \neq 0 \text{ solo per un num. finito di } x \in X \}$$

con la somma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad (\alpha f)(x) = f(\alpha x)$

Sono le funzioni a "supporto finito": supporto di $f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$

Alla funzione $f(x) \in \mathbb{K}^X_{fin}$ corrisponde la combinazione formale

$$\sum_{x \in X} f(x)\, x$$

esempio

Se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, allora ogni $\underline{v} \in V_X$ si scrive $\underline{v} = \sum_{x \in X} \alpha_x x =$

$= \sum_{x \in I(\underline{v})} x$, dove $I(\underline{v}) \subset X$ è il sottoinsieme finito di X in cui $\alpha_x = 1$.

Ne segue che V_X è isomorfo al seguente spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$:

Sia $\mathcal{P}_{fin}(X) = \{ I \subset X \mid I \text{ finito} \}$ Introduciamo come somma

$$I + J = I \triangle J = (I \cup J) \setminus (I \cap J) \quad \text{(differenza simmetrica)}$$

$\alpha \in \mathbb{F}_2$

Definiamo $\alpha I = \emptyset$ se $\alpha = 0$ e $\alpha I = I$ se $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}_{fin}(X)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$ isomorfo a V_X

(l'isomorfismo è $\underline{v} \to I(\underline{v})$, si noti che $\underline{0} \to \emptyset$ e che $I + I = \emptyset$ in $\mathcal{P}_{fin}(X)$)

NOTA V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_i\}_{i \in I}$ base
comb. lineari dei vettori di $\mathcal{B}$

Allora $V \cong V_{\mathcal{B}} \cong \mathbb{K}^{\mathcal{B}}_{fin}$, mandando $V \ni \underline{v} = \sum \alpha_i \underline{v}_i$ nella stessa combinazione formale, oppure nella funzione $f : \mathcal{B} \to \mathbb{K}$ data da $f(\underline{v}_i) = \alpha_i$ (la i-esima coordinata).

Questo isomorfismo $\varphi_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\mathcal{B}}_{fin}$ coincide quindi, nel caso di dimensione finita, con l'isomorfismo $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ $(\cong \mathbb{K}^{\mathcal{B}})$ di passaggio alle coordinate.

Esercizio

Sia X un insieme e sia $V = \{(I, J) \in \mathcal{P}_{fin}(X) \times \mathcal{P}_{fin}(X) \mid I \cap J = \emptyset\}$

Definire una somma in V e un prodotto $\mathbb{F}_3 \times V \to V$ che rendano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_3$

Prodotto esterno:

$1 \cdot (I, J) = (I, J)$

$2 \cdot (I, J) = (J, I)$

$0 \cdot (I, J) = (\emptyset, \emptyset)$

$$(I, J) + (I', J') = \left(J \cup J' \setminus (I \cap J') \cup (I' \cap J),\ (I \cup I') \setminus (I \cap J') \cup (J \cap I') \right)$$

SPAZIO QUOZIENTE

22/11/2023

$W \subset V$ sottospazio

$V/_W$ = classi di equivalenza $[\underline{v}] = \{\underline{v}+\underline{w} \mid \underline{w} \in W\} = \underline{v}+W$ → spazio vettoriale con la somma

MEGLIO SUGLI APPUNTI DI SALVETTI!

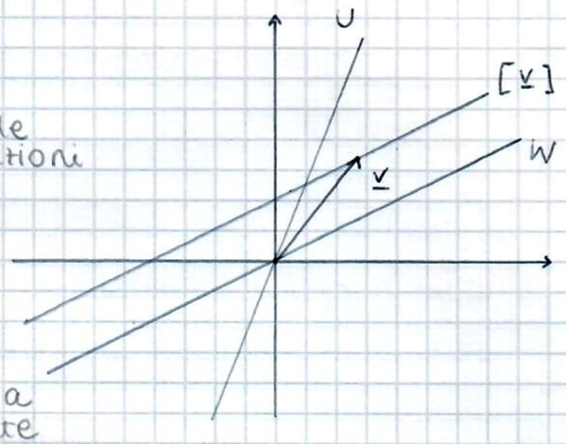
$\underline{v} \sim \underline{v}' \iff \underline{v}'-\underline{v} \in W$

$[\underline{0}] = W$

è uno spazio vettoriale con le seguenti operazioni

$[\underline{v}]+[\underline{v}'] = [\underline{v}+\underline{v}']$

$\alpha[\underline{v}] = [\alpha\underline{v}]$



$\pi: V \to V/_W \quad \pi(\underline{v}) = [\underline{v}]$ → proiezione a quoziente (bisognerebbe verificare la buona def.)

- lineare
- surgettiva
- $\mathrm{Ker}\,\pi = W$

$\underset{\mathrm{Im}}{\dim V/_W} = \dim V - \underset{\mathrm{Ker}}{\dim W}$ (formula delle dimensioni)

Ogni supplementare U di W (come in figura) ($V = U \oplus W$) interseca ogni classe in un solo punto

$\pi|_U : U \to V/_W$

è ISOMORFISMO

- $U \cap \mathrm{Ker}\,\pi = \{\underline{0}\}$ → iniettiva
- Hanno stessa dimensione → surgettiva
  - da Grassmann anche $\dim U = \dim V - \dim W$

Base di $V/_W$ prendo base di U $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-k}$ $\quad k = \dim W$, $n = \dim V$

$[\underline{v}_1], \dots [\underline{v}_{n-k}]$ base di $V/_W$

Viceversa se $[\underline{v}_1], \dots, [\underline{v}_{n-k}]$ base di $V/_W$

comunque scelti i rappresentanti $\underline{v}_1' \in [\underline{v}_1], \dots, v_{n-k}' \in [\underline{v}_{n-k}]$

i $\underline{v}_j'$ sono indipendenti e base di un supplementare di W

$$\sum_i \alpha_i v_i = \underline{0}$$

$$\downarrow \pi$$

$$\sum_i \alpha_i [v_i] = [\underline{0}] \implies \alpha_i \text{ sono tutti } 0 \quad \text{perché i } [\underline{v}_i] \text{ sono una base}$$

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i$$

La dimensione $n-k$ è giusta, manca far vedere che

- $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-k}) \cap W = 0$ (per esercizio)

I TEO. DI OMOMORFISMO

(una app. lineare tra spazi è omomorfismo tra i rispettivi gruppi abeliani)

$f: V \to W$ lineare

allora $V/_{\mathrm{Ker} f} \underset{\bar{f}}{\cong} \mathrm{Im}(f)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/_{\mathrm{Ker} f} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{f}[\underline{v}] := f(\underline{v})$

è ben definita

Bisogna dimostrare che $\bar{f}$ è lineare, surgettiva, iniettiva

Ovvio

se $\bar{f}([\underline{v}]) = \underline{0}$

$f(\underline{v}) = \underline{0}$

$\underline{v} \in \ker f$ cioè

$[\underline{v}] = [\underline{0}]$

lineare:

$\bar{f}([\underline{v}] + [\underline{v}']) = \bar{f}([\underline{v} + \underline{v}']) = f(\underline{v} + \underline{v}') = f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = \bar{f}([\underline{v}]) + \bar{f}([\underline{v}'])$

$\bar{f}([\alpha \underline{v}]) = \bar{f}(\alpha[\underline{v}]) = f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) = \alpha \bar{f}([\underline{v}])$

es.

$$V \xrightarrow{f} W$$
$$U \quad\quad Z$$

(con $U \subset V$, $Z \subset W$)

U e Z sottospazi

$U \xrightarrow{f} Z$

$f(U) \subset Z \Rightarrow$ f induce una applicazione lineare da

$V/U \xrightarrow{\bar{f}} W/Z$

$\bar{f}([\underline{v}]) = [f(\underline{v})]$

DIMOSTRARE CHE:

- $\bar{f}$ è ben definita
- è lineare

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ V/U & \xrightarrow{\bar{f}} & W/Z \end{array}$$

(es) $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ base di U (B_U) → sempre nelle ipotesi dell'esercizio precedente:
$f: V \to W$ lineare
$U \subset V$, $Z \subset W$ ssp. vettoriali
$f(U) \subset Z$

$B' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h$ base di Z (B_Z)

Che relazione c'è tra le matrici?

$\underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$ sono base di un supplementare di U
$\underline{w}_{h+1}, \dots, \underline{w}_m$ " " di Z

$\Rightarrow [\underline{v}_{k+1}], \dots, [\underline{v}_n]$ base di V/U $\quad B_{V/U}$
$\Rightarrow [\underline{w}_{h+1}], \dots, [\underline{w}_m]$ base di W/Z $\quad B_{W/Z}$

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{array}{c} \\ h\left\{ \right. \\ \\ m-h\left\{ \right. \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{M^{B_U}_{B_Z}(f|_U)}^{k} & * \\ \hline 0 & \underbrace{M^{B_{V/U}}_{B_{W/Z}}(\bar{f})}_{n-k} \end{array}\right] \qquad * \to M^{B \setminus B_U}_{B_Z}(pr_Z \circ f)$$

matrice a blocchi

SPAZIO DUALE

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$V^* = \{ f : V \to \mathbb{K} \text{ lineari} \} = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$

"funzionale"

esempio:

- $V = \mathbb{K}_n[x]$ (polinomi di grado n) $\quad f: V \to \mathbb{K} \quad f(p(x)) = p(x_0) \quad x_0 \in \mathbb{K}$ (lineare)

- $V = M_n(\mathbb{K}) \quad f(A) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}$ lineare (funzionale)

Se V è di dimensione finita, allora la dimensione del duale è quella di V

$\dim \mathbb{K} = 1$
$\dim V = n$
$\quad \dim \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = n \cdot 1 = n = \dim V$

Una base corrisponde a una base di $M_{1,n}(\mathbb{K})$

$[a_{11} \; \cdots \; a_{1n}] \qquad B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$([f(\underline{v}_1)], \dots, [f(\underline{v}_n)])$

funzionali lineari

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V

definiamo base duale $\mathcal{B}^* = \{ \underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^* \}$

$\underline{v}_1^* (\underline{v}_1) = 1$

$\underline{v}_1^* (\underline{v}_j) = 0$ se $j \neq 1$

$v_j^*(v_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

delta di Kronecker

$\underline{v}_1 \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}^*} \underline{v}_1^*$

$\vdots$

$\underline{v}_n \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}^*} \underline{v}_n^*$

$V \quad V^*$

$\varphi_{\mathcal{B}}^* : V \to V^*$

è l'applicazione lineare che estende $v_1 \to v_1^*$

$\varphi_{\mathcal{B}}^* : \sum_i \alpha_i v_i \to \sum_i \alpha_i v_i^*$

OSS $\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ sono lin. indipendenti in V^*

$\sum_i \alpha_i \underline{v}_i^* = \underline{0} \in V^*$ (linearmente nullo $\underline{v} \to 0$)

$(\sum_i \alpha_i \underline{v}_i^*)(\underline{v}_1) = \sum_i \alpha_i \underline{v}_i^*(\underline{v}_1) = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

perché v_1 deve essere mandato in 0 (come tutti gli altri)

e così via

Manda una base in una base $\Rightarrow$ ISOMORFISMO

Se $\dim V = \infty$ (es: $V = \mathbb{K}[x]$)

posso ancora costruire da una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_i\}_{i \in I}$ i vettori duali v_i^*, $i \in I$

$\varphi_{\mathcal{B}}^* : V \to V^* : v_i \to v_i^*$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{coordinate}} & \mathbb{K}^{\mathcal{B}}_{fin} = \{ f : \mathcal{B} \to \mathbb{K} \mid f(\underline{v}_i) \neq 0 \text{ solo per un numero finito di indici} \} \\ \varphi_{\mathcal{B}}^* \downarrow & & \\ V^* & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathcal{B}} = \{ f : \mathcal{B} \to \mathbb{K} \} \end{array}$$

$\underline{v} = \sum_{i \in I} \alpha_i \underline{v}_i$ solo un numero finito di α_i è $\neq 0$

$1, x, x^2, \dots$

$\alpha_0 \; \alpha_1 \; \alpha_2$

In generale $|\mathbb{K}^{\mathcal{B}}| > |\mathbb{K}^{\mathcal{B}}_{fin}|$

es.

$V = \mathbb{F}_2[x] \leftrightarrow$ sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$

$V^* \leftrightarrow$ tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$

$\dim V < \infty$

$\varphi_B^*: V \to V^*$ è ISOMORFISMO $\qquad v_i \to v_i^*$

(non canonico)

$V^{**} = (V^*)^*$ ha le stesse dimensioni di V

RIDUALE o BIDUALE $\longrightarrow V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K})$

funzioni da V in $\mathbb{K}$

$\varphi^{**}: V \overset{\cong}{\longleftrightarrow} V^{**}$ è ISOMORFISMO

$\underline{v} \to [f \to f(\underline{v})]$

funzionale $V^* \to \mathbb{K}$

φ^{**} manda $\underline{v}$ nell'omomorfismo di valutazione di un funzionale in $\underline{v}$ ($\in V^{**}$)

φ^{**} è ISOMORFISMO e coincide con $\varphi^*_{B^*}(\varphi_B^*)$

(Mappa trasposta - pull-back)

"tirato indietro"

$V \xrightarrow{f} W$ $\quad$ f lineare

induce

$W^* \to V^*$

fissato f

funzionale lineare di W^*: $W \xrightarrow{\alpha} \mathbb{K}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\boxed{\alpha \circ f}"'] & W \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

${}^t f: W^* \to V^*$

$\alpha \to \alpha \circ f \in V^*$

${}^T f$ è lineare: $\quad {}^T f(\alpha + \beta) = (\alpha+\beta)\circ f = \alpha \circ f + \beta \circ f = {}^T f(\alpha) + {}^T f(\beta)$

elemento di V^*

$\alpha(\underbrace{f(\underline{v})}_{\text{elemento di } W})$

${}^T f(c\alpha) = c\alpha \circ f = c(\alpha \circ f) = c\,{}^T f(\alpha)$

Calcolare la matrice di ${}^T f$ rispetto alle basi duali

C^* base di W^*

B^* base di V^*

$$\boxed{M_{B^*}^{C^*}({}^T f) = {}^t(M_C^B(f))}$$

(M_{ij}^*) $\quad (M_{ij})$

$\Rightarrow$ motivo per cui si chiama mappa trasposta

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$C = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$

$\underbrace{{}^T f(\underline{w}_j^*)}_{\text{elemento di } V^*} = w_j^* \circ f = \sum_{i=1}^n M_{ij}^* v_i^*$

$\to$ coordinate nella nuova base (colonna j-esima di $M_{B^*}^{C^*}({}^T f)$)

$M_{ij}^* = w_j^* \circ f(\underline{v}_i) = w_j^*\left(\sum_k M_{ki}\, \underline{w}_k\right) = M_{ji}$

posso applicare un vettore

${}^T f(w_j^*)(v_i) = w_j^*(\underbrace{f(v_i)}_{\text{colonna i-esima di } M_C^B(f)}) = M_{ji}$

Invarianti per similitudine: $rg(A)$ $tr(A)$ 27/11/2023

$V(\mathbb{K})$ $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono simili se $\exists M \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $A = M^{-1}BM \Rightarrow rg(A) = rg(B)$ e $tr(A) = tr(B)$

$\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare se è lineare su ogni componente

$$\begin{cases} \varphi(\underline{u}+\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{u}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \\ \varphi(\alpha\underline{v}, \underline{w}) = \alpha\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \end{cases}$$

e lo stesso nelle seconde componenti

Tenendo fissa una componente è lineare per l'altra

$$\varphi(\underline{u}, \underline{v}+\underline{w}) = \varphi(\underline{u}, \underline{w}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$$
$$\varphi(\underline{u}, \alpha\underline{v}) = \alpha\varphi(\underline{u}, \underline{v})$$

esempio: prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$: $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

esempio: $f \in V^*$, $g \in V^*$ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) := f(\underline{v})\, g(\underline{w})$

$Bil(V \times V, \mathbb{K}) = \{ \varphi: V \times V \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ bilineare} \}$

φ, ψ bilineari, def: $(\varphi, \psi)(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \psi(\underline{v}, \underline{w})$

$(\alpha\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha\,\varphi((\underline{v}, \underline{w}))$

dimostrare che $\varphi+\psi$ è bilineare

(così come $\alpha\varphi$)

è uno spazio vettoriale

il "vettore nullo" è l'applicazione lineare nulla

Potrei prendere $V \times V \times V \to \mathbb{K}$ trilineari

$\varphi(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \in \mathbb{K}$

Se ne tengo fisse 2 è lineare sulla 3^a

andando avanti posso prendere $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ copie}} \to \mathbb{K}$

è k-lineare: se tengo fisse $k-1$ componenti, φ è lineare sulla rimanente.

OSS. Se φ è k-lineare e una delle componenti di $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ è $\underline{0} \Rightarrow \varphi(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = 0$

es: $\varphi(\underline{0}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k) = 0$ perché $f: V \to \mathbb{K}$ data da $f(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k)$ è lineare quindi $f(\underline{0}) = \varphi(\underline{0}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k)$

φ è detta MULTILINEARE

DETERMINANTE

$A \in M_n(\mathbb{K})$

vedo A come collezione di righe $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ $A_i \in \mathbb{K}^n$

Cerco una funzione $\varphi: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ fattori}} \to \mathbb{K}$ multilineare

① **MULTILINEARE** (n-lineare) $\varphi(A_1, \dots, A_n)$ con un abuso di notazione: $\underline{\underline{\varphi(A)}}$

$\varphi(A_1, \dots, A_{i-1}, \lambda A_i' + \mu A_i'', A_{i+1}, \dots, A_n) =$

$= \lambda \varphi(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i', A_{i+1}, \dots, A_n) + \mu \varphi(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i'', \dots, A_n)$

$i = 1, \dots, n$

Per l'oss. precedente se A ha una riga nulla

$\Rightarrow \varphi(A) = 0$

② **ALTERNANZA**

Se scambio 2 righe la φ cambia segno

$(\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2)$

③ **NORMALIZZAZIONE**

$\varphi(I) = \varphi(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) = 1$

Teorema $\exists$ una sola φ che soddisfa ①, ②, ③

dim. (verrà chiamata il determinante di A)

• **UNICITÀ DI φ**

altre proprietà che derivano dalle 3:

(i) Se la matrice A ha 2 righe uguali $\Rightarrow \varphi(A) = 0$

dim $\varphi(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\varphi(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$ per ②

ma essendo uguali $\Rightarrow \varphi(A) = -\varphi(A) \Rightarrow \varphi(A) = 0$

$A_i = A_j$ $\qquad 2\varphi(A) = 0$

(ii) Se A ha una riga nulla $\varphi(A) = 0$ (già visto)

(iii) Se sommo ad A_i un multiplo della riga A_j, $j \neq i$

trovo B t.c. $\varphi(B) = \varphi(A)$

dim: $A_1 \to A_1 + \lambda A_2$

$$\varphi(A_1 + \lambda A_2, A_2, \dots, A_n) = \varphi(A_1, \dots, A_n) + \lambda \underbrace{\varphi(A_2, A_2, \dots, A_n)}_{0 \text{ per (i)}}$$

(iv) Riduciamo A a scala trovando S con operazioni elementari

- scambio di righe
- come la (iii) (NO moltiplicazione per uno scalare)

$\Rightarrow \varphi(S) = \pm \varphi(A)$

$+ \rightarrow$ numero pari di scambi di righe

$- \rightarrow$ num. dispari

(v) Se la matrice è diagonale

$$A \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{allora } \varphi(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$\varphi(A) = (a_{11} e_1, \ldots, a_{nn} e_n) =$

$= a_{11}(e_1, \ldots, a_{nn} e_n) = a_{11} a_{22} \varphi(e_1, e_2, \ldots, a_{nn} e_n) =$

$= \ldots = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}\, \varphi(e_1, \ldots, e_n) \underset{\text{normalizzazione}}{=} a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

$\Rightarrow$ CONSEGUENZE

- se $rg(A) = n \rightarrow S$ ha n righe $\neq 0$ $\quad S = \begin{bmatrix} p_1 & & * \\ & p_2 & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix}$

singolare := determinante nullo

- se $rg(A) = k < n \rightarrow S$ ha k righe $\neq 0$

$\Rightarrow$ (vi) se A è singolare ($\Leftrightarrow$ non invertibile $\Leftrightarrow rg A < n$)

$\Rightarrow \varphi(A) = 0$ $\quad (\varphi(A) = \pm \varphi(S) = 0$ perché ha riga $\underline{0})$

-

(vii) φ sulle matrici non singolari ($rg(A) = n$), φ è determinata da $A \sim S = \begin{bmatrix} p_1 & & * \\ 0 & \ddots & p_n \end{bmatrix}$ $\quad p_i \neq 0$

$$S \underset{\substack{\text{con operazioni} \\ \text{di tipo (iii)}}}{\sim} \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & p_n \end{bmatrix} = S'$$

$\varphi(A) = \pm \varphi(S) = \pm \varphi(S')$

$\varphi(S) = \varphi(S')$

non scambio mai le righe

S' è una matrice diagonale

$\varphi(S') = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$

$\varphi(A) = \pm p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$

Questo dimostra l'unicità di φ $\square$

Corollario

$Mult_n(\mathbb{K}^n) = \{ \varphi : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ multilineare} \}$ è uno spazio vettoriale

la somma di 2 multilineari è multilineare e se φ è multilineare, anche $\alpha\varphi$, $\alpha \in \mathbb{K}$, lo è)

$$Alt_n(\mathbb{K}^n) = \{\varphi : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ multilineare, alternante}\}$$

è sottospazio vettoriale di $Mult_n(\mathbb{K}^n)$

(la somma di due alternanti è alternante)

Corollario $\dim Alt_n(\mathbb{K}^n) = 1$ (senza normalizzazione sono sempre multiple)

dimostrazione: φ mult. alt. $\Rightarrow$ dimostriamo che è necessariamente multipla del determinante, che è quindi un generatore per $Alt_n(\mathbb{K}^n)$

$\varphi(I) = 1$ allora $\varphi = \det$

se $\varphi(I) = \varphi(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \neq 1$

$= \alpha \neq 1$ se $\alpha = 0$ $\varphi(A) = 0$ $\forall A$

$\frac{1}{\alpha}\varphi(I) = 1$

Per dimostrare $\varphi\begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix} = p_1 \cdots p_n$ ho usato la normalizzazione

se $\alpha \neq 0$ la funzione $\psi = \frac{1}{\alpha}\varphi$ è multilineare alternante e

$\psi(I) = 1 \Rightarrow \psi = \det \Rightarrow \varphi = \alpha \det$

(si può calcolare la dim dello spazio $Alt_p(\mathbb{K}^m) =$
$= \{\varphi : \underbrace{\mathbb{K}^m \times \dots \times \mathbb{K}^m}_{p} \to \mathbb{K} \mid \varphi$ multilineare alternante$\}$ e trovare basi esplicite)

- **ESISTENZA DI φ**

S_n: gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$ = {bigezioni di $\{1, \dots, n\}$ in se}

con l'operazione di composizione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$sgn(\sigma) = \pm 1$ / $sgn(\sigma) = 1$ se si può scrivere $\sigma = t_1 \cdots t_k$, k pari
\ $sgn(\sigma) = -1$ se $\sigma = t_1 \cdots t_k$ k dispari (trasposizioni)

$$sgn(\sigma) = \frac{\prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i<j} (j-i)} = (-1)^{n(\text{n. di inversioni})}$$

$sgn : S_n \to \{\pm 1\}$ è il gruppo con 2 elementi (con il prod.)

omomorfismo di gruppi

$$sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ questa sommatoria ha $n!$ termini

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

esempio

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$S_2 = \{ id, (1,2) \}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$S_3 = \{ id, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2) \}$

Teorema la funzione det soddisfa 1, 2, 3

dim

- MULTILINEARITÀ

Per la 1^a riga $A_1 = \lambda A_1' + \mu A_1''$ $\quad a_{1j} = \lambda a_{1j}' + \mu a_{1j}''$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (\lambda a_{1\sigma(1)}' + \mu a_{1\sigma(1)}'') a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}' a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \mu \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}'' \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \det \begin{bmatrix} A_1' \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \mu \det \begin{bmatrix} A_1'' \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

- ALTERNANZA

Scambiamo due righe h e k $\quad (h < k)$

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ A_h \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_h \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} b_{kj} &= a_{hj} \\ b_{hj} &= a_{kj} \\ b_{ij} &= a_{ij} \text{ se } i \neq h,k \end{aligned} \quad \forall j$$

$$\det B = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{h\sigma(h)} \cdots b_{k\sigma(k)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(h)} \cdots a_{h\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (*)$$

consideriamo la trasposizione $\tau = (h,k)$, indichiamo con $\lambda = \sigma\tau$

al variare di $\sigma \in S_n$, λ varia tra tutte le permutazioni di S_n

$(\sigma\tau = \sigma'\tau \Rightarrow \sigma = \sigma')$

osserviamo che $\lambda(i) = \sigma(i)$ se $i \neq h,k$

$\lambda(h) = \sigma(\tau(h)) = \sigma(k)$

$\lambda(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(h)$

$sgn(\lambda) = -sgn(\sigma)$ (moltiplico per 1 trasposizione)

$$\underline{\underline{(*)}} = \sum_{\lambda} -sgn(\lambda)\, a_{1\lambda(1)} \cdots a_{k\lambda(k)} \cdots a_{h\lambda(h)} \cdots a_{n\lambda(n)} =$$

$$= -\sum_{\lambda} sgn(\lambda)\, a_{1\lambda(1)} \cdots a_{h\lambda(h)} \cdots a_{k\lambda(k)} \cdots a_{n\lambda(n)} = -\det A$$

- NORMALIZZAZIONE

$\det(I) = 1$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn} = 1$$

applicando la formula

☑

Manca solo dimostrare che è invariante per similitudine

esercizio

A triangolare : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{bmatrix}$ $\quad a_{ij} = 0$ se $i > j$

allora $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$

Se $\sigma \neq id$ $\quad a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ contiene un fattore con indice di riga > indice di colonna

σ bigezione di $1, \dots, n$, $\sigma \neq id$, $\exists i$ $\sigma(i) < i$

($\sigma(n)$ è per forza n, $\sigma(n-1)$ è allora $n-1$, ...)

$\Rightarrow$ nella sommatoria rimangono solo i termini sulla diagonale

Determinante di $A = (a_{ij})$

29/11/2023

NOTA Per includere campi come $\mathbb{F}_2$ (2 non è invertibile) si sostituisce la condizione (2) $\boxed{\text{di alternanza}}$ con la

(2') se 2 componenti sono uguali $\underline{v}_i = \underline{v}_j = \underline{v}$ allora
$\varphi(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_n) = 0$

. (2') $\Rightarrow$ (2) $\quad \underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}''$

$$\underline{0} = \varphi(\dots, v'+v'', \dots, v'+v'', \dots) \overset{\text{per multilinearità}}{=} \underbrace{\varphi(\dots, \underline{v}', \dots, \underline{v}', \dots)}_{0} + \varphi(\dots, \underline{v}', \dots, \underline{v}'', \dots) +$$
$$+ \varphi(\dots, \underline{v}'', \dots, \underline{v}', \dots) + \underbrace{\varphi(\dots, \underline{v}'', \dots, \underline{v}'', \dots)}_{0} = 0$$
$$\Rightarrow \varphi(\dots, v', \dots, v'', \dots) = -\varphi(\dots, v'', \dots, v', \dots) \quad \square$$

Prop $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ $rg A = n$ $\overset{②}{\Leftrightarrow}$ $\det A \neq 0$

① $\quad rg A = rg(f_A)$

(=>) $\exists B$: $AB = I = BA$ $\quad f_A \circ f_B = f_B \circ f_A = Id$ => f_A iniettiva e surgettiva

=> $rg\, f_A =$

(<=) Se $rg\, f_A = n$ => surgettiva => iniettiva (ISOMORFISMO ⇓ INVERTIBILE)

(=>)

(2) $rg A = n$ $\quad \det A = \pm \det S = \pm \det S' = \pm p_1 \cdots p_n \neq 0$ se non ci sono pivot nulli

$$S' = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix}$$

$= 0$ se c'è almeno un pivot nullo

(<=) Se $\det \neq 0$ non possono esserci righe nulle nella ridotta a scala => $rg A = n$

TEO $\det A = \det {}^tA$

dim:

$A = (a_{ij}) \quad {}^tA = (a'_{ij} = a_{ji})$

$$\det {}^tA = \sum_\sigma sgn(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_\sigma sgn(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

scambio a tutti i pedici

$i = \sigma^{-1}(\sigma(i))$ $\quad sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$

perché $\sigma^{-1}\sigma = Id$

$1 = sgn\, Id = sgn\sigma \cdot sgn\sigma^{-1}$

$$= \sum_\sigma sgn(\sigma)\, a_{\sigma(1),\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))} =$$

$$= \sum_{\sigma^{-1}} sgn(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

Corollario Si può cambiare il det usando le colonne: si ottiene la stessa cosa

Def COMPLEMENTO ALGEBRICO o COFATTORE dell'elemento $a_{ij} \in A$ il determinante della matrice $(n-1)(n-1)$ che si ottiene da A cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima, $\boxed{\text{con segno } (-1)^{i+j}}$

Teo di sviluppo di Laplace, per righe o per colonne

scorre gli elementi di una riga

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \underbrace{\alpha_{ij}}_{\text{cofattore}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{ij}$$

scorre gli elementi di una colonna

si può dimostrare usando l'unicità del determinante, prendendo la funzione

$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathcal{A}_{ij}$ e facendo vedere che soddisfa i 3 assiomi

dati.

Teo di Binet

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$, allora

$\det(AB) = \det(A) \det(B)$

dim

Caso semplice: una delle matrici è singolare ($\det = 0$)

se B è singolare il membro di dx è 0, il membro di sx è zero, $rg(AB) \leq \min(rgA, rgB)$

$\leq rg B \leq n$

$\xRightarrow{\text{precedente dimostrazione}} \det(AB) = 0$

Prendiamo $\varphi: M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ data da $\varphi(A) = \det(AB)$ (B fissato)

Facciamo vedere i primi 2 assiomi (multilineare nelle righe e alternante)

MULTILINEARITÀ: $(AB)_i = A_i B$

$A_i = \lambda A'_i + \mu A''_i \Rightarrow (AB)_i = (\lambda A'_i + \mu A''_i)B = \lambda A'_i B + \mu A''_i B$

Per la multilinearità del det

$\det(AB) = \lambda \det(A'B) + \mu \det(A'', B)$

$A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \qquad A'' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A''_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$

$\varphi(A) = \lambda\varphi(A') + \mu\varphi(A'')$

ALTERNANZA

se A ha 2 righe uguali $\Rightarrow AB$ ha le stesse 2 righe uguali

$\Rightarrow \det AB = 0 \iff \varphi(A) = 0$

· $\varphi(I) = \det(I \cdot B) = \det(B)$

come visto l'altra volta φ è multiplo del $\det A$:

$\varphi(A) = \varphi(I) \det(A) = \det B \cdot \det A$

COROLLARIO 1

A non singolare $\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$AA^{-1} = 1 \Rightarrow \det I = 1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$

Corollario : $\det(AB) = \det(BA)$

Corollario : $P \in GL_n(\mathbb{K}) = \{P \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det P \neq 0\}$

$\Rightarrow \det(P^{-1}AP) = \det(A)$ (invariante per similitudine)

dim $\det((P^{-1}A)P) = \det(P(P^{-1}A)) = \det A$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango traccia e determinante ma non sono simili (I è simile solo a se stessa)

→ cioè non vale il viceversa

Esercizi

1) A invertibile $\Rightarrow$ $\boxed{(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \alpha_{ji}}$ (1) $\Rightarrow$ la matrice inversa è la matrice dei cofattori trasposta e moltiplicata per $1/\det A$

cofattori

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$ad-bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & \cancel{-ab}+\cancel{ab} \\ \cancel{cd}-\cancel{dc} & -bc+ad \end{pmatrix} = (ad-bc)I$$

$$(A(A^{-1}))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^{-1})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{1}{\det A}\alpha_{jk} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{jk}\right) = \begin{cases} i=j & (\ ) = \det A \text{ (Laplace)} \\ i\neq j & (\ ) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{bmatrix} \cdots A_i \\ \vdots \\ \cdots A_i \end{bmatrix}$$

se la sviluppo sulla riga j-esima viene quello che ho scritto

$\equiv$ sviluppo di Laplace di una matrice con 2 righe uguali

Matrice aggiunta di A $\Rightarrow$ trasposta della matrice dei cofattori

$\operatorname{Agg}(A) = (b_{ij} = \alpha_{ji})$

allora $\boxed{A \cdot \operatorname{Agg}(A) = \det A \cdot I}$ deriva dalla (1)

$\Rightarrow$ Le matrici aggiunte alle matrici invertibili hanno determinante 1, le matrici invertibili commutano con la propria aggiunta

ALGORITMO PER A^{-1}

$[A : I] \underset{\text{riduzione a scala completa}}{\sim} [I \mid B]$ $B = A^{-1}$

A e B sono equivalenti per righe

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid P[A : I] = P[I \mid B]$

$[PA \mid PI]$ $PA = I$, $PI = P = B$

- Inversa di A = $\frac{\text{matrice aggiunta}}{\text{determinante di A}}$
- Matrice A · Aggiunta di A = determinante · Matrice Id

Sistemi lineari quadrati

$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in M_n(\mathbb{K})$

$\det A \neq 0$

c'è 1 soluzione $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ $\qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Mathminds

REGOLA DI CRAMER ⊛

$$x_i = \frac{\det [A^1 | \cdots | \overset{i\text{-esima colonna}}{\underline{b}} | \cdots | A^n]}{\det A}$$

⊛ Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $\underline{x} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow$ se $\det A \neq 0$ $\exists!\, x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b$ e $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $x_i = \frac{\det D_i}{\det A}$ (esistenza data da Rouché-Capelli)

$A\underline{x} = b \iff \sum x_i A^i = \underline{b}$

$\det [A^1 | \cdots | \sum x_j A^j | \cdots | A^n] = \sum_{j=1}^{n} x_j \det [A^1 | \cdots | A^j | \cdots | A^n]$

se $i \neq j$ ha 2 colonne uguali $\Rightarrow \det = 0$

Rimane il caso $i = j \Rightarrow x_i \det A$

(esercizio compitino 2022)

$A_z = (a_{ij} = z^{|i-j|})$ $\downarrow$ simmetrica per il modulo

$$= \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \cdots & z^{n-1} \\ z & 1 & z & z^2 & & \vdots \\ z^2 & z & 1 & z & & \vdots \\ z^3 & z^2 & z & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Calcolare al variare di z, $\det A_z$ e $\operatorname{rg} A_z$

(ii) Per gli $z \mid A_z$ è invertibile determinare la 1^a colonna di $(A_z)^{-1}$

caso finito:

$$\begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 \\ z & 1 & z & z^2 & z^3 \\ z^2 & z & 1 & z & z^2 \\ z^3 & z^2 & z & 1 & z \\ z^4 & z^3 & z^2 & z & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_3 - zA_2 \\ \uparrow \\ A_4 - zA_3 \\ \uparrow \\ A_5 - zA_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & & * \\ 0 & 1-z^2 & \overset{z(1-z^2)}{*} & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1-z^2 & \overset{z(1-z^2)}{*} & \overset{z^2(1-z^2)}{*} \\ 0 & 0 & 0 & 1-z^2 & \overset{z(1-z^2)}{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-z^2 \end{bmatrix}$$ matrice triangolare

$\det(A_z) = (1-z^2)^{n-1}$

$\operatorname{rg}(A_z)$ se $1 - z^2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A_z) = n$

$1 - z^2 = 0 \Rightarrow$ serve guardare cosa c'è sopra i pivot (a matita)

$(1-z^2)$ moltiplica tutti i termini tranne quelli della 1^a riga

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A_z) = 1$

(ii) $\left[\begin{array}{c|c} A_t & I \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I & A_t^{-1} \end{array}\right]$

va fatto tramite l'algoritmo di prima

30/11/2023
Manfre

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ duale di V

$f \in V^*$ funzionale su V, $f: V \to \mathbb{K}$ lineare

- Assumiamo $\dim V = n < \infty$. Allora $\dim V^* = n$
- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V, $\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ base di V^*, duale di V $\mathcal{B}^*$

$$\underline{v}_i^*(\underline{v}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$f \in V^*$

$$\operatorname{Im} f \begin{cases} 0 \iff f = 0 \\ \mathbb{K} \end{cases} \qquad \dim \operatorname{Ker} f \begin{cases} n \iff f = 0 & \operatorname{Ker} f = V \\ n-1 & \operatorname{Ker} f = \text{iperpiano} \end{cases}$$

$W \subset V$ iperpiano (cioè $\dim W = \dim V - 1$), $U \subset V$ sottospazio

$$U + W \begin{cases} W \iff U \subset W \\ V \end{cases}$$

$$\dim(U+W) = \underbrace{\overset{\geq 1}{\dim U} + \overset{n-1}{\dim W}}_{\geq n} - (\dim(U \cap W)) = \begin{cases} \dim U \iff U \subset W \\ \quad \Rightarrow \text{rimane } n-1 = \dim W \\ \dim U - 1 \\ \quad \Rightarrow n \end{cases}$$

$f, g \in V^*$ $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K}: f = \lambda g \iff \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ $\to$ per l'osservazione precedente hanno entrambi dim n o $n-1$

($\Rightarrow$) $\underline{v} \subset \operatorname{Ker} g$ $\quad f(\underline{v}) = (\lambda g)(\underline{v}) = \lambda g(\underline{v}) = \lambda 0 = 0$ per cui $\subset$ equivale a $=$

($\Leftarrow$) Se $f = 0$, $\lambda = 0$ funziona

Se $f \neq 0$ $(\Rightarrow g \neq 0)$ $\dim \operatorname{Ker} f = n-1 = \dim \operatorname{Ker} g$ perché la dimensione dell'immagine è 0 oppure 1

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$

Scegliamo $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \notin \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$
$f(\underline{v}) \neq 0 \quad g(\underline{v}) \neq 0$

- $\underset{\dim\, n-1}{\operatorname{Ker}(f)} \oplus \underset{\dim 1}{\operatorname{Span}(\underline{v})} = V$

Poniamo $\lambda = \dfrac{f(\underline{v})}{g(\underline{v})} \in \mathbb{K}$

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1}$ base di $\operatorname{Ker} f \Rightarrow \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1}, \underline{v}$ base $\mathcal{B}$ di V

$f(\underline{u}_i) = 0$

$(\lambda g)(\underline{u}_i) = \lambda g(\underline{u}_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, n-1$

$f(\underline{v}) \quad \lambda g(\underline{v}) = \dfrac{f(\underline{v})}{g(\underline{v})} g(\underline{v}) = f(\underline{v})$

f e λg coincidono sulla base $\mathcal{B} \Rightarrow f = \lambda g$

corollario immediato

$f, g \in V^*$ sono indipendenti $\Leftrightarrow$ $\ker f, \ker g \neq V$ e $\ker f \neq \ker g$

$\Updownarrow$

$\dim(\ker f \cap \ker g) = n-2$

$f_1, \dots f_k \in V^*$ sono lin. indipendenti $\Leftrightarrow \dim(\ker f_1 \cap \dots \cap \ker f_k) = n-k$

$W \subset V$ sottospatio, l'annullatore di W è il sottospatio di V^*

$\mathrm{Ann}(W) = \{g \in V^* \mid g(\underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in W\} =$

$= \{g \in V^* \mid \ker g \supset W\} =$

$= \{g \in V^* \mid g(\underline{w_1}) = \dots = g(\underline{w_k}) = 0\}$

↳ generatori di W

$\dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V - \dim W$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ base di W $\qquad \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_n$ base di V

$\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ base duale. Allora, $\mathrm{Ann}(W) = \mathrm{span}(\underline{v}^*_{m+1}, \dots, \underline{v}_n^*)$

DIMOSTRAZIONE

(2 inclusioni)

① $\mathrm{Span}(\underline{v}^*_{m+1}, \dots, \underline{v}_n^*) \subset \mathrm{Ann}(W)$

$v^*_{m+j}(\underline{v}_i) = 0$ ($i = 1, \dots, m$; $1 \leq j \leq n-m$) $\Rightarrow v^*_{m+j}$ annulla una base di W

$\Rightarrow v^*_{m+j} \in \mathrm{Ann}(W)$

AnnW ssp. vettoriale

$\Rightarrow v^*_{m+1}, \dots, v_n^* \in \mathrm{Ann}(W) \Rightarrow \mathrm{Span}(\underline{v}^*_{m+1}, \dots, \underline{v}_n^*) \subset \mathrm{Ann} W$

② $\mathrm{Ann}(W) \subset \mathrm{Span}(\underline{v}^*_{m+1}, \dots, \underline{v}_n^*)$

scrittura in base di V^*

$g \in \mathrm{Ann}(W) \qquad \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}: \quad g = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$

$g(\underline{v}_i) = \lambda_1 v_1^*(\underline{v}_i) + \dots + \lambda_n \underline{v}_n^*(\underline{v}_i) = \lambda_i$

$i = 1, \dots, m \qquad 0 = g(v_i) = \lambda_i \Rightarrow g = \lambda_{m+1} \cdot v^*_{m+1} + \dots + \lambda_n \underline{v}_n^*$

i primi m si annullano

OSS $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base $\mathcal{B}$ di V $\qquad v_1^*, \dots, v_n^*$ base $\mathcal{B}^*$ duale di $\mathcal{B}$

$g \in V^* \qquad g = g(\underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \dots + g(\underline{v}_n)\underline{v}_n^*$

$$\boxed{[g]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} g(\underline{v}_1) \\ \vdots \\ g(\underline{v}_n) \end{pmatrix}}$$

$g = \alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \dots + \alpha_n v_n^*$

$g(\underline{v}_i) = \alpha_i$

$\underline{v} \in V \qquad \underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$\underline{v}_i^*(\underline{v}) = \lambda_i \Rightarrow v_1^*(\underline{v})\underline{v}_1 + \dots + v_n^*(\underline{v})\underline{v}_n = \underline{v}$

$$\boxed{[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} v_1^*(\underline{v}) \\ \vdots \\ v_n^*(\underline{v}) \end{pmatrix}}$$

$f \in V^*$, $f \neq 0$ $\quad Ann(Ker f) = Span(f)$

$\dim Span(f) = 1$, $\dim Ann(Ker f) : n-(n-1) = 1$

$\supset \lambda f \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \underline{v} \in Ker f \qquad (\lambda f)(\underline{v}) = (\lambda)f(\underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \lambda 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda f \in Ann(Ker f)$

$V = \mathbb{R}^3 \qquad W = Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^* & \xrightarrow[\text{iso}]{M} & M_{1,3}(\mathbb{R}) \\ \cup\!\!\!\!\mid & & \downarrow \\ f & \longmapsto & (a,b,c) \end{array}$$

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = (a\ b\ c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ax+by+cz$

" $f = ax+by+cz$ "

$\underline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ base di $\mathbb{R}^3$

li prendo a caso e guardo se sono base

$rg\begin{pmatrix} 1 & +1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$

Ascolta Pendulous Threats
Però solo quella, le altre dell'album fanno schifo

$\underline{v_1^*}, \underline{v_2^*}, \underline{v_3^*} = ?$

$\underline{v_1^*} = a_1x + b_1y + c_1z \qquad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$

$\underline{v_1^*}(\underline{v_1}) = a_1 + b_1 + 2c_1 = 1$

$v_1^*(\underline{v_2}) = a_1 - b_1 = 0$

$\underline{v_1^*}(\underline{v_3}) = 3a_1 + 3b_1 + 2c_1 = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{trasposta} \Rightarrow rg\, 3}^{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soluzione unica

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$v_1^* = 1/4(-x-y+3z)$

$v_2^* = a_2x + b_2y + c_2z$ cosa cambia?

$$A\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2^* = \tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$v_3^* \rightsquigarrow A\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{v}_3^* = \tfrac{1}{4}(x+y-z)$$

$$Ann(W) = Span(\underline{v}_3^*) = Span(x+y-z)$$

$$Ann(W) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-z=0 \right\}$$

$$Ann(Span(\underline{v}_1)) = Span(\underline{v}_2^*, \underline{v}_3^*) = Span(x-y, x+y-z)$$

$$Span(\underline{v}_1) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{array} \right\}$$

Prop. dell'annullatore

$U, W \subset V$ sottospazi

Se si annullano in W che è più grande si annullano in particolare in U

- $U \subset W \Rightarrow Ann(U) \supset Ann(W)$ (i)
- $Ann(U+W) = Ann\,U \cap Ann\,W$ (ii)
- $Ann(U \cap W) = Ann\,U + Ann\,W$ (iii)

dim.

(i) $f \in Ann(W)$ $\quad \underline{u} \in V \subset W \quad f(\underline{u}) \overset{\in W}{=} 0 \Rightarrow f \in Ann(W) \subset Ann\,U \cap Ann\,W$

(ii) $\subseteq$

$U \cap (U+W)$, $W \cup$ $\quad$ $Ann(U) \cup Ann(U+W) \cap Ann(W) \Rightarrow Ann(U+W)$

$\downarrow$

$W \subset (U+W)$ $\quad Ann(U+W) \subset Ann\,U$

$U \subset (U+W)$ $\quad Ann(U+W) \subset Ann\,W$

$\supseteq$ $\quad g \in Ann(U) \cap Ann(W) \quad \underline{v} \in W+U, \quad \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \quad \underline{u} \in U, \ \underline{w} \in W$

$$g(\underline{v}) = \underset{g \in Ann\,U}{g(\underline{u})} + \underset{g \in Ann\,W}{g(\underline{w})} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow g \in Ann(U+W)$$

(iii) $\supseteq$ $\quad U \cap W \subset U$, $U \cap W \subset W$ $\quad Ann(U \cap W) \supset Ann\,U$, $Ann(U \cap W) \supset Ann\,W$

$$\Rightarrow Ann(U \cap W) \supset Ann(U) + Ann(W)$$

$\subseteq$ (se $\dim V < \infty$)

$$\dim(Ann\,U + Ann\,W) = \dim Ann\,U + \dim Ann\,W - \dim \underbrace{(Ann\,U \cap Ann\,W)} =$$

$$= 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim(Ann(U+W)) =$$

punto (ii) precedente

$\dim(Ann(U+W)) = \dim V - \dim(U+W)$

$$= \dim V - (\dim U + \dim W - \dim(U+W)) =$$

$$= \dim V - \dim(U \cap W) = \dim Ann(U \cap W)$$

$W \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = \operatorname{Ker} A \qquad A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

1). • chi è Ann W? => funzioni da $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}$ che mandano tutto W in zero

2). • Come sono fatti gli iperpiani di $\mathbb{K}^n$ che contengono W?

1) $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ righe di A W soluzioni di $\begin{cases} A_1\underline{x} = 0 \\ \vdots \\ A_m\underline{x} = 0 \end{cases}$

$A_i \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \longleftrightarrow f_i \in (\mathbb{K}^n)^*$

$f_i(\underline{x}) = A_i\underline{x}$

Considero l'applicazione associata alle singole righe => ognuna di esse deve mandare $\underline{x}$ in zero

le soluzioni di $A_i\underline{x} = 0 \longleftrightarrow \underline{x} \in$ al $\operatorname{Ker} f_i$

$W = \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_m$

$\operatorname{Ann}(W) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_m) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f_1) + \dots + \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f_m) =$
$= \operatorname{Span}(f_1) + \dots + \operatorname{Span}(f_m) = \operatorname{Span}(f_1, \dots, f_m)$

↳ funzionali associati alle righe della matrice

2) $H \subset \mathbb{K}^n$ iperpiano $H \supset W$

$$H = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid G\underline{x} = 0\} \qquad G \in M_{1,n}(\mathbb{K})$$
$= \operatorname{Ker} G = \operatorname{Ker} g$

↳ deve avere dimensione n-1

$\updownarrow$

$g \in (\mathbb{K}^n)^*$

$g(\underline{x}) = G\underline{x}$

$W \subset H$

$\Downarrow$

$\operatorname{Ann}(H) \subset \operatorname{Ann}(W)$

$\operatorname{Span}(g) \qquad \operatorname{Span}(f_1, \dots f_m)$

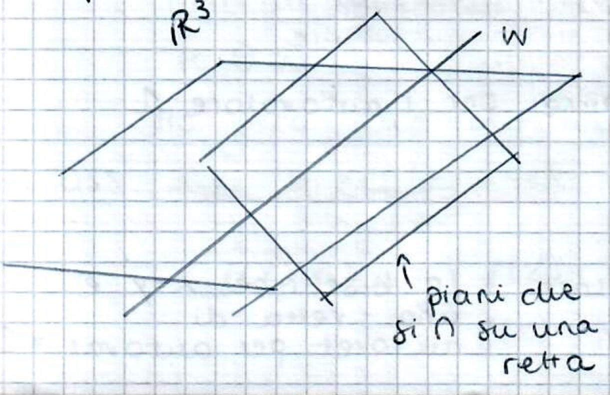
$\Rightarrow g \in \operatorname{Span}(f_1, \dots, f_m), \quad G \in \operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m)$

Se $G \in \operatorname{Span}(f_1, \dots, f_m)$ e sia $H = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid G\underline{x} = 0\} = \operatorname{Ker} G$

$G = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$

$\underline{w} \in W \qquad G(\underline{w}) = \lambda_1 \underbrace{A_1 \underline{w}}_{0} + \dots + \lambda_m \underbrace{A_m \underline{w}}_{0} = 0$

$\Rightarrow \underline{w} \in H \Rightarrow H \supset W$



$W =$ retta $= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{matrix} \right\}$

$\operatorname{Ann}(W) = \operatorname{Span}(\text{"}x - y - z\text{"}, \text{"}3x + 2y + 4z\text{"})$

iperpiano che contiene W

$W \subset H \subset \mathbb{R}^3$ piano

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha(x-y-z) + \beta(3x+2y+4z) = 0 \right\}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

Sia $P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ piani che contengono la retta P

$$\alpha(1-1-1) + \beta(3+2+4) = 0$$

$$-\alpha + 9\beta = 0$$

piano cercato

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \beta\left(+9(x-y-z) + (3x+2y+4z)\right) = 0 \right\}$$

posso dividere per β

04/12/2023

$f: V \to V$

$\exists$ basi per cui $M_B(f)$ è "semplice"?

id: $V \to V$ $\quad \forall B \quad M_B(id) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Matrici diagonali

Se $\exists B \subseteq \{v_1, \dots, v_n\} \mid M_B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ diagonale

$\downarrow$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_n v_n$

Se $f(v) = \lambda v \quad \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow$ tutti i multipli di v vengono moltiplicati per lo stesso λ

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v$$

Se $f(v) = 0 \rightarrow$ tutta la retta di v viene mandata in 0

Def. $W \subset V$, W è f-invariante se $f(W) \subset W$

Def. V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ $\quad f: V \to V$ endomorfismo

Un vettore $v \neq 0 \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f(v) = \lambda v$ si chiama autovettore di f relativo all'autovalore λ.

- $v \neq 0$ autovettore $\Rightarrow \alpha v$ autovettore $(\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$

tutti i vettori della retta di v sono anch'essi autovettori relativi allo stesso autovalore

ESEMPIO 1

id: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

id$(v) = v \Rightarrow$ ogni v è autovettore per l'autovalore 1

ESEMPIO 2

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovalore 1

La bisettrice $x=y$ è una retta di autovet. per autoval. $=1$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ la bisettrice $y=-x$ è una retta di autovettori per autovalore -1

Def. $f: V \to V$ si dice **diagonalizzabile** se $\exists\, B \mid M_B(f)$ è diagonale. $\iff \exists\, B$ di autovettori

$\Rightarrow$ visto

$\Leftarrow$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di autovettori $f(\underline{v}_i) = \lambda_i \underline{v}_i \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow M_B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ è diagonale ✓

Def. λ autovalore

$V_\lambda = \{ \underline{v} \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \} = \{$autovettori relativi a λ unito lo $\underline{0}\}$

nella def. di autovalori si richiede $\underline{v} \neq \underline{0}$

$\downarrow$

AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ, è un sottospazio vettoriale di V

$\underline{u}, \underline{v} \in V_\lambda \quad f(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha\lambda \underline{u} + \lambda\beta \underline{v} = \lambda(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v})$

$\Downarrow$

$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in V_\lambda$

ES1 • id ha un solo autovalore $\lambda = 1$

$V = V_\lambda$

ES2 • $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad V_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$V_{-1} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad V_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\downarrow$

non può contenere altro, altrimenti sarebbe tutto lo spazio ed è evidente che non contiene $\underline{e}_2$

Rotazione di angolo θ in $\mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$\boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}} \in M_2(\mathbb{R})$

• Non ha autovalori reali (nessuna retta rimane in se stessa) se θ non multiplo di π

Ha però due autovalori complessi

OSS $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda\, id)$

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}, \quad f(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = \underline{0}$

$f(\underline{v}) - \lambda\, id(\underline{v}) = \underline{0} \iff (f - \lambda\, id)(\underline{v}) = \underline{0}$

$\mathcal{B}$ base di V

$$[f-\lambda\, id]_{\mathcal{B}}\, [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \underline{0}$$ $M_{\mathcal{B}}(f)$ è quadrata perché f è un endomorfismo

$$\Updownarrow$$

$$(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I)\, [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \underline{0} \quad \in \mathbb{K}^n$$ sistema lineare quadrato del quale cerco soluzioni non nulle

$A = M_{\mathcal{B}}(f)$ autovettore.

Cerco $\underline{x} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\} \mid (A-\lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ (*) $\qquad (A-\lambda I)$

Un sistema quadrato omogeneo $n \cdot n$ ha soluzione $\underline{x} \neq 0 \iff rg\, B < n$

$$\Updownarrow$$

$\det B = 0$

Quindi $\exists\, \underline{x}, \lambda$, con $\underline{x} \neq 0$, soluzione di (*) $\iff \det(A-\lambda I) = 0$

cerco λ che abbassa il rango

λ è autovalore $\iff \det(A-\lambda I) = 0$

$n=1$ $\quad M_{1,1}(\mathbb{K})$ $\quad A = [a] \qquad [a-\lambda] \qquad \det([a-\lambda]) = a-\lambda \iff a = \lambda$

$= a[1] = a\, id$

$n=2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \qquad \det([A-\lambda I])$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc =$$
$$= \lambda^2 - (tr A)\lambda + \det A$$

ESEMPIO NUMERICO:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}$$

$\downarrow \det$

$(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta$

$\cos^2\theta + \lambda^2 - 2\cos\theta + \sin^2\theta \rightarrow \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1$

$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$

$\theta = k\pi \rightarrow \lambda = \cos\theta = \pm 1$

$\sin\theta = 0$

$\theta \neq k\pi$:

$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$ non ha sol. reali

$n=3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$

det: $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + \ldots$

$$= -\lambda^3 + \underbrace{(a_{11}+a_{22}+a_{33})}_{tr A}\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda + \det A = 0$$

λ^2 viene solo da questo prodotto

$A \in M_n(\mathbb{K})$

$\det(A - \lambda I)$ è un polinomio $\in \mathbb{K}[\lambda]$ di grado n

$$= (-1)^n \left(\lambda^n - (\mathrm{tr}\, A)\lambda^{n-1} + \ldots \underset{(-1)^k}{\pm} \left(\sum \begin{smallmatrix}\text{minori principali}\\ \text{di ordine } k\end{smallmatrix} \right) \lambda^k + \ldots + \det A \right)$$

potente dispari con segno $\ominus$ potente pari con segno $\oplus$

minore = determinante di una sottomatrice quadrata di ordine k determinato dalla scelta di k indici di riga e k indici di colonna

determinante di una matrice $k \times k$

$\#$ minori di ordine k in una matrice $n \cdot n$ = $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$

minore principale $\rightarrow$ indici di riga = indici di colonna $\Rightarrow$ $\#$min. princip. $= \binom{n}{k}$

$\rightarrow = p_A(\lambda)$ polinomio caratteristico della matrice A

Riassumendo: gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico di $M_B(f)$

cioè il polinomio caratteristico è invariante per similitudine

PROP. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ se $B = P^{-1}AP$ $\quad P \in GL_n(\mathbb{K})$

Def $f: V \to V$ $\quad p_f(\lambda) = p_{M_B(f)}(\lambda)$

I commuta

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \underset{P^{-1}\lambda I P}{\lambda I}) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) =$$

$I = P^{-1}P$

$$= (\cancel{\det P^{-1}}) \det(A - \lambda I)(\cancel{\det P}) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$$

$\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$

teo. di Binet

lo abbiamo dimostrato su un campo

il problema di questa matrice è che ha entrate appartenenti a un anello di polinomi che non è un campo

3 strade:
- dimostro che Binet vale su un anello
- passo nel campo che contiene i coeff. di $\mathbb{K}[\lambda]$
  $\mathbb{K}[\lambda] \subset \mathbb{K}(\lambda)$ = campo delle frazioni $\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}$ (funt. razionali) $\leftarrow$ metodo + semplice
- per campi ∞

se sostituisco a λ un numero $\alpha \in \mathbb{K}$ trovo

$$p_B(\alpha) = p_A(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$p_B(\alpha) - p_A(\alpha) = 0 \quad \text{per } \infty \text{ valori di } \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Achtung! Questo non è sempre vero

Se $\mathbb{K}$ è infinito $\Rightarrow$ tutti i coeff. sono 0
$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ come polinomio

In $\mathbb{F}_2$ possono essere uguali come funzioni e non come polinomi

es.
$p(x) = x$
$q(x) = x^2$
$p(1) = 1 \quad q(1) = 1$
$p(0) = 0 \quad p(0) = 0$

Oss $p_A(\lambda)$ invariante per similitudine $\Rightarrow$ tutti i coeff. di $p_A(\lambda)$ invariante per similitudine $\Rightarrow$ Corollario: traccia invariante per similitudine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stesso pol. caratteristico $\not\Rightarrow$ simili

non simili ma con stesso polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

l'unica radice è $\lambda = 1$

$\Rightarrow$ B non è diagonalizzabile

(*) $V_\alpha = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \alpha \underline{v} \}$

Def. Molteplicità algebrica dell'autovalore $\alpha \in \mathbb{K}$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m q(\lambda) \qquad q(\alpha) \neq 0$$

implica che m è massimo

$$\mu_a(\alpha) = m = \max \{ k \mid (\lambda - \alpha)^k \text{ divide } p_A(\lambda) \}$$

Molteplicità geometrica di α: $\dim V_\alpha = \mu_g(\alpha)$

dimensione dell'autospazio relativo ad α (*)

06/12/2023

$A \in M_n(\mathbb{K})$ $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\det(\alpha A) = \det \begin{bmatrix} \alpha A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_n \end{bmatrix} = \dots = \alpha^n \det A$$

$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

$$\det(\alpha A) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha a_{1\sigma(1)} \cdots \alpha a_{n\sigma(n)} = \alpha^n \underbrace{\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{\det A}$$

Matrice a blocchi

$$\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \xrightarrow{\text{trasposizione}} \left[\begin{array}{c|c} {}^tA & 0 \\ \hline {}^tC & {}^tB \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} A \in M_k(\mathbb{K}) \\ B \in M_h(\mathbb{K}) \end{array}$$

$\det A \det B = \det {}^tA \det {}^tB$ (già dimostrato)

A sottomatrice corrispondente alle prime k righe e k colonne

B " " " ultime h righe e h colonne

In generale C è non quadrata $(k \times h)$

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] = \det A \det B = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0 & {}^tB \end{bmatrix}$$

(basta dimostrarlo in un caso)

$$\varphi(A) = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

soddisfa la multilinearità e l'alternanza

scrivo l'i-esima riga come somma

$A_i = A_i' + A_i''$ anche la riga i-esima di $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ si scompone aggiungendo 0

$$[A_i' + A_i'' \; 0 \cdots 0]$$

Se scambio 2 righe di A si scambiano le corrispondenti righe di $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$, quindi cambia segno

$\varphi(A) = \varphi(I) \det A$ $\qquad \varphi(I) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{array}{c} \overbrace{}^{k} \\ k\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ C & & B \end{bmatrix} \right. \end{array}$

abbiamo già dimostrato che ogni funzione multilineare e alternante di A è un multiplo di det A, faccio vedere che $\frac{\varphi(A)}{\varphi(I)}$ è proprio det A

$\downarrow \det$

$$\begin{array}{c} \overbrace{}^{k-1} \\ \begin{array}{c} k-1 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ C' & & B \end{bmatrix} \end{array} = \dots = \det B$$

sviluppo per la prima riga

$$\varphi(A) = \det(A)\det(B)$$

Determinante di Vandermonde

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ $\qquad x_i \neq x_j$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$A_i \rightsquigarrow A_i - x_1 A_{i-1}$

sottraggo a ogni riga quella di sopra moltiplicata per X_1

sviluppo sulla 1ª colonna

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & & & \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & & \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}$$

multilinearità delle colonne

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ x_2 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

un altra matrice di Vandermonde

$\Downarrow$ per INDUZIONE

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

primo indice maggiore del secondo

$$(x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2)(x_4 - x_3) \cdots$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ $rg(A) = \max \{ k \mid \exists \text{ minore di ordine } k \neq 0 \}$

(determinante di una sottomatrice $k \times k$ determinata dalla scelta di k indici di riga e k indici di colonna)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$rg(A) = k \Rightarrow$ ① $\exists$ minore di ordine $k \neq 0$

② Tutti i determinanti di ordine $> k$ sono $= 0$

Oss la ② equivale a richiedere che tutti i minori di ordine $k+1$ sono nulli)

(se tutti i minori di ordine m sono $0 \Rightarrow$ tutti quelli di ordine $m+1$ sono 0) deriva da Laplace

- Se $A^1, \dots, A^k$ (colonne) sono linearmente dipendenti

$$n \left\{ \underbrace{\left[A^1 | \cdots | A^k \right]}_{k} \right.$$

Allora qualunque minore di ordine k estratto da queste colonne ha determinante 0, cioè è nullo.

$\exists \ \underline{x} \in \mathbb{K}^k \mid x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = \underline{0}$ $(*)$ $\underline{x} \neq \underline{0}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$

es. supponiamo che il minore $k \times k$ sia fatto con le prime k righe:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1k} \\ & & \\ a_{k1} & & a_{kk} \\ \hline \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nk} \end{bmatrix} \qquad B^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{bmatrix}, \dots, B^k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \end{bmatrix}$$

la relazione $(*)$ vale anche sulle B^j: $x_1 B^1 + \dots + x_k B^k = \underline{0}$

(se sono dipendenti le colonne lunghe le sono anche le corte)

Allora $rg [B^1 | \cdots | B^k] < k \Rightarrow \det [B^1 | \cdots | B^k] = 0$

<u>Viceversa</u>,

Se un certo minore $\det \begin{pmatrix} A_{i_1 \cdots i_k} \\ {}_{j_1 \cdots j_k} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow A^{j_1}, \dots, A^{j_k}$ sono linearmente indipendenti

↳ sottomatrice ottenuta scegliendo le righe $i_1, \dots i_k$ e le colonne $j_1, \dots, j_k$

Se $A^1, \dots, A^k$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \exists$ minore di ordine k estratto da queste colonne che è $\neq 0$.

Posso fare operazioni di colonna (di tipo (i) e (iii)) che riducono a scala per colonne la matrice $C = [A^1 | \cdots | A^k]$ (cioè senza moltiplicare)

avrà k pivot $\neq 0$ perché le colonne sono indipendenti.

Le operazioni fatte lasciano invariati i determinanti dei minori $K \times K$.
La sottomatrice fatta con le righe che contengono i pivot ha rg k e quindi $\det \neq 0$.

11/12/2023

$f: V \to V$ $\quad V/\mathbb{K}$

autovalore $\quad f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
autovettore $\quad \underline{v} \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$

autospazio $\quad V_\lambda = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \}$
è sottospazio vettoriale

es. $\lambda = 0 \quad V_0 = \ker f \qquad V_1 = \{ \underline{v} \mid f(\underline{v}) = \underline{v} \}$

Polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$ è un polinomio di grado $= n$.

$A = M_B(f)$ $\qquad$ $p_A(\lambda)$ è invariante per similitudine

$p_B = p_A$ se $B = P^{-1} A P$

$\downarrow$

permette di associare il polinomio direttamente alla funzione

$p_f(\lambda) = p_A(\lambda)$ $\qquad$ autovalori di f = radici di $p_f(\lambda)$

$V_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$

$\mu_a(\alpha)$ autovalore $\quad$ molteplicità algebrica di α

$$\mu_a(\alpha) = \max \{ k \mid (x-\alpha)^k \text{ divide } p_f(\lambda) \}$$

autovalore semplice $\quad \mu_a(\alpha) = 1$
" doppio $\quad \mu_a(\alpha) = 2$

molteplicità geometrica $\Rightarrow \mu_g(\alpha) = \dim V_\lambda$ (num. di autovettori indipendenti)

$\mu_g(\alpha) = n - rg(A - \alpha I)$ perché $\mu_g(\alpha) = \ker(f - \lambda Id)$
$(A - \alpha I)\underline{x} = 0$

OSS $\quad \alpha$ autovalore $\Leftrightarrow \mu_a(\alpha) \geq 1$ o $\mu_g(\alpha) \geq 1$

Teorema $\quad \alpha$ autovalore : $\mu_g(\alpha) \leq \mu_a(\alpha)$

COROLLARIO: se $\mu_a(\alpha) = 1 \Rightarrow \mu_g(\alpha) = \mu_a(\alpha) = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \quad \alpha = 1 \qquad \mu_a(\alpha) = 2$
$\mu_g(\alpha) = 1$

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dim. Prendiamo una base di V_α : $v_1, \dots, v_\mu$ $(\mu = \mu_g(\alpha))$
ed estendiamola a base $\mathcal{B}$ di V

$$\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\mu, \underline{v}_{\mu+1}, \dots, \underline{v}_n \}$$

$$f(\underline{v}_j) = \alpha \underline{v}_j \qquad j = 1, \dots, \mu$$

$$M_\mathcal{B}(f) = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{matrix}}^{\mu} & B \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & C \end{array}\right]$$

↓ polinomio caratteristico

$$p_f(\lambda) = \det (M_\mathcal{B}(f) - \lambda I) = \det \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha-\lambda \end{matrix} & B \\ \hline 0 & \underbrace{C - \lambda I}_{\text{di ordine opportuno}} \end{array}\right]$$

è una matrice a blocchi

$$p_f(\lambda) = (\alpha-\lambda)^\mu \det(C - \lambda I) = (\alpha-\lambda)^\mu \cdot p_C(\lambda)$$

$\Rightarrow$ $\mu_a(\alpha)$ è almeno μ

Teorema $f : V \to V$
Allora autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

dim. Per induzione su k

Se $k = 1$ $\quad f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1 \quad \underline{v}_1 \neq 0 \rightarrow$ è lin. indipendente

HP INDUTTIVA: $k-1$ vettori relativi ad autovalori distinti sono sempre linearmente indipendenti

$$f(\underline{v}_i) = \lambda_i \underline{v}_i \qquad i = 1, \dots, k$$

supponiamo $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$ (1)

| applichiamo f

$$\alpha_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_k f(\underline{v}_k) = \underline{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0} \qquad (2)$$

Con (1) e (2) elimino il k-esimo vettore

$(2) - \lambda_k (1)$

$(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ Tutti i coeff sono 0 per ipotesi induttiva

ma $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$

Dato che $\underline{v}_k \neq \underline{0}$ anche $\alpha_k = 0$

COROLLARIO: Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti, allora $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta $(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k})$

A priori sarebbe stato facile concludere che $V_i \cap V_j = \emptyset$ ma non $V_k \cap (V_i \oplus V_j) = \emptyset$

$W_1, \dots, W_k \subseteq V$ sono equivalenti:

1) $W_1, \dots, W_k$ sono in somma diretta ($\underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k \in W$ "$W_1 + \dots + W_k$" si scrive in modo unico) def. $\underline{w}_i \in W_i$

2) $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots W_k) = \{\underline{0}\}$

3) $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1}) = \{\underline{0}\}$

4) $\underline{w}_1 \in W_1, \dots, \underline{w}_k \in W_k \quad \underline{w}_i \neq 0$
$\Rightarrow \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ lin. indipendenti

5) Se $B_i \subset W_i$ base, allora $B_i \cap B_j = \emptyset$ (se $i \neq j$) e $B_1 \cup \dots \cup B_k$ è base di W

6) $\dim W = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i$

Recap: $f: V \to V$ diagonalizzabile se $\exists$ B base di V, tale che $M_B(f)$ sia diagonale

B base che diagonalizza f (cioè $M_B(f)$ diagonale)
$\Leftrightarrow$ B è una base di autovettori

es. $\mathbb{K}: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$

$f_A(\underline{x}) = A\underline{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1 \qquad \mu_a(\lambda) = 2$, $\mu_g(\lambda) = 1$

non ha base di autovettori

---

f diagonalizzabile

Se B è una base di autovettori $\Rightarrow M_B(f)$ è diagonale

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ autovalori

$\mu_a(\lambda_1)$ = # di volte in cui λ_1 appare sulla diagonale

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

$\mu_g(\lambda_1) = n - rg(A - \lambda_1 I) =$

$= n - \mu_a(\lambda_1)$

$\Rightarrow$ Condizione necessaria affinché f sia diagonalizzabile è che

$$\mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i) \quad \forall i$$

In generale non può essere sufficiente (perché alcuni autovalori potrebbero non essere nel campo considerato)

es. $V = \mathbb{R}^3$ $f: V \to V$ rotazione attorno all'asse z di angolo θ ($\neq k\pi$)

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*

$$p_f(\lambda) = (1-\lambda)((\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta)$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta + 1)$$

Def. SPETTRO DI f = {autovalori di f}

* Spettro di f = {1} $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$ (θ non multiplo di π)

$$\mu_a(1) = 1 = \mu_g(1)$$

Quando $p_f(\lambda)$ è completamente riducibile?

In $\mathbb{C}$ sempre, perché è ALGEBRICAMENTE CHIUSO

contiene tutte le radici dei polinomi in $\mathbb{C}[x]$

Se $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha grado $n \Rightarrow p(x)$ ha n radici se contate con molteplicità

OSS f diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$

$f: V \to V$ dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono tutti gli autovalori distinti

$\Leftarrow$ Sia B_i base di V_{λ_i}

$\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ è base di V (composta di soli autovalori)

$\Rightarrow$ Sappiamo già che i V_{λ_i} sono in somma diretta, devo dimostrare che V è la somma degli autospazi

Se V ha base di autovettori

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$$\underline{v} = \sum x_i \underline{v}_i \in V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$$

TEOREMA: CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ

V spazio vett. su $\mathbb{K}$. $f: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ detti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti

$$\boxed{\begin{aligned} &1) \quad \sum_{i=1}^{h} \mu_a(\lambda_i) = n = \dim V \\ &2) \quad \forall i \quad \mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i) \end{aligned}}$$

il polinomio che ottengo ha sempre grado n

1) equivale a dire che le radici del polinomio caratteristiche di f sono contenute in $\mathbb{K}$ (campo considerato)

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_a(\lambda_1)} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_a(\lambda_k)}$$

Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\Rightarrow$ gli unici polinomi irriducibili sono quelli di grado 1 e la condizione 1 è sempre verificata.

dim.

($\Rightarrow$) f diagonalizz. $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{h} \mu_g(\lambda_i) = \dim V$

Dato che $\mu_g(\lambda_i) \leq \mu_a(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i$
Se $\sum_{i=1}^{h} \mu_g(\lambda_i) = \dim V \Rightarrow \sum_{i=1}^{h} \mu_a(\lambda_i) = \dim V$

Da cui segue immediatamente anche la 2)

($\Leftarrow$) Se valgono la 1) e la 2)
allora $\sum_{i=1}^{h} \mu_g(\lambda_i) = \dim V$ da cui (per precedente dimostrazione, f è diagonalizzabile. $\square$

Manca la lezione del 13/12/2023
(guarda appunti di Salvetti su e-learning)
+ quella del 14/12 di Manfre
(è sulle esercitazioni di e-learning)

$f: V \to V$ diagonalizzabile $\iff$

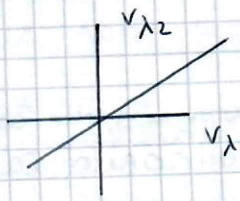
(i) $\sum_i \mu_g(\lambda) = \dim V$ ($p_f(\lambda)$ è completamente riducibile in $K[x]$)

(ii) $\mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$

$\iff V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$

lemma f diagonalizzabile ($\iff V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$)

Allora $W \subset V$ è f invariante $\iff W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_n})$



$W \not\supseteq (W \cap V_{\lambda_1}) + (W \cap V_{\lambda_2})$

I sottospati W tali che $W = (W \cap V_{\lambda_1}) + (W \cap V_{\lambda_2})$ sono solo

$$W = \{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \underline{0}, V\}$$

se $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$ con $\mu_g(\lambda_i) = 1 \ \forall i$

$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_n})$

ci sono $\binom{n}{k}$ sottospati W di dimensione k

Se uno dei V_{λ_i} ha dimensione > 1 allora sono ∞.

$(\Leftarrow)$ $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_n})$

W è invariante $\underline{w} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k$ $\quad \underset{\text{autovettore}}{\underline{w}_i} \in W \cap V_{\lambda_i}$

$f(\underline{w}) = f(\underline{w}_1) + \dots + f(\underline{w}_k) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\underline{w}_i}_{\in W \cap V_{\lambda_i}}$

$(\Rightarrow)$ $\underline{w} \in W$ f-invariante

posso scrivere $\underline{w}$ in questo modo perché so che $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$

$\underline{w} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n$ $\quad \underline{w}_i \in V_{\lambda_i}$

voglio far vedere che $\underline{w}_i \in W \cap V_{\lambda_i}$

cioè

$\underline{w}_i \in W$

PASSO BASE $\to$ se ha 1 sola comp. è chiaro. Supponiamo sia vero per $M-1$.

Per induzione sul numero di componenti $\underline{w}_i \neq \underline{0}$

$\underline{w} = \underline{w}_{j1} + \dots + \underline{w}_{jM}$ $\quad \underline{w}_{js} \in V_{\lambda_{js}}$ $\quad \underline{w}_{js} \neq 0$

se $M = 0$

$\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{w}_j \in W$ ovvio

Applico f

$f(\underline{w}) = f(\underline{w}_{j1}) + \dots + f(\underline{w}_{jM}) = \lambda_{j1} \underline{w}_{j1} + \dots + \lambda_{jM} \underline{w}_{jM}$

Sottraggo alla 2^a la $\lambda_{jM} \times 1^a$

$$f(\underline{w}) - \lambda_{jM}\underline{w} = \underbrace{(\lambda_{j1} - \lambda_{jM})\underline{w}_1}_{\cap\, W} + \dots + \underbrace{(\lambda_{jM-1} - \lambda_{jM})\underline{w}_{M-1}}$$

in W perché W è invariante

per ipotesi induttiva

$\underline{w}_{j1}, \dots, \underline{w}_{jM-1} \in W \Rightarrow$ dalla 1^a segue che anche $\underline{w}_{jM} \in W$

Corollario $f: V \to V$ diagonalizzabile

$W \subset V$ f-invariante

Allora $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile

$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_k})$

se metto insieme le basi delle componenti $\neq 0$ $W \cap V_{\lambda_i}$ ottengo una base di W che è una base di autovettori (per f ma anche per $f|_W$)

$f, g : V \to V$ endomorfismi diagonalizzabili

Problema: quando sono simultaneamente diagonalizzabili?

$\exists\, \mathcal{B}$ base | sia $M_{\mathcal{B}}(f)$ che $M_{\mathcal{B}}(g)$ sono diagonali $\Leftrightarrow \exists$ una base comune di autovettori (con autovalori anche diversi).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$$

Teorema f, g diagonalizzabili, lo sono simultaneamente se e solo se commutano

$f \circ g = g \circ f$

($\Rightarrow$) Ovvio dal fatto che 2 matrici diagonali commutano

($\Leftarrow$) oss $f \circ g = g \circ f \Rightarrow \operatorname{Ker} g$ e $\operatorname{Im} g$ sono f-invarianti

$\underline{v} \in \operatorname{Ker} g$

$g(f(\underline{v})) = f(g(\underline{v})) = \underline{0}$

$\underline{w} = g(\underline{v})$ $\quad f(\underline{w}) = f(g(\underline{v})) = g(f(\underline{v})) \to$ è nell'imm. di g

$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ $\quad V_{\lambda_i}$ autospazi di f

$V_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_j id)$ $\quad g$ commuta anche con $f - \lambda id$

Per l'oss ogni autospazio V_{λ_i} è g-invariante.

per il corollario $g|_{V_{\lambda_j}}$ è diagonalizzabile

V_{λ_j} ha base $\underline{v}_{1,j}, \dots, v_{m_j}$ $\quad m_j = \mu_g(\lambda_j)$

$\exists$ una base comune di autovettori

Quindi $w^{(1)}_1, \dots, w^{(k)}_{m_k}$

ESERCIZIO $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalizzabili sono simili $\Leftrightarrow$ *

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$A e_1 = \lambda_1 e_1$

$A e_2 = \lambda_2 e_2$

Basta prendere la base ordinata come $\{e_2, e_1\}$

$$M_{\{e_2, e_1\}}(f_A(I)) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$ (trasformazione fatta da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)

* $\Leftrightarrow$ stessi autovalori con stessi $\mu_a(\lambda)$ $\Leftrightarrow$ stesso polinomio caratteristico

---

$f: V \to V$

$\exists B$ tale che $M_B(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = T$ triangolare

$$p_T(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$$

polinomio caratteristico

Condizione necessaria: $p_T(\lambda)$ completamente riducibile in $K[x]$

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$\underline{v}_1$ è un autovettore

$f(\underline{v}_2) = a_{22} v_2 + a_{12} \underline{v}_1$

$f(\underline{v}_j) = a_{jj} \underline{v}_j + a_{j-1,j} v_{j-1} + \dots + a_{1j} v_1$

$\underline{0} \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n = V$ / Bandiera di sottospazi

$\dim W_j = j$

f triangolarittabile $\Rightarrow \exists$ una bandiera $W_1 \subset \ldots \subset W_m$ di sottospazi invarianti

E viceversa se $W_1 \subset \ldots \subset W_m$ è una bandiera di sottospazi invarianti $\Rightarrow f$ triangolarittabile

$\underline{v}_1$ base di W_1 (autovettore)

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ base di W_2

$\vdots$

$\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k$ base di W_k

f triangolarittabile

$\Updownarrow$

$\exists$ una base a bandiera

$M_B(f)$ è triangolare $\qquad B$ si dirà base a bandiera

Teorema $\quad f: V \to V \quad V$ sp. vett. su $\mathbb{K}$

$p_f(\lambda)$ è COMPLETAMENTE RIDUCIBILE in $\mathbb{K}[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ triangolarittabile

dim.

$p_f(\lambda)$ ha almeno una radice $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists\, \underline{v}_1 \in V$ autovettore relativo a α

Per induzione su $n = \dim V$

$B' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, v_n\}$ base

$$M_B(f) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right]$$

$V = V_1 \oplus W$

$V_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1) \qquad W = \mathrm{span}\{v_2, \ldots, v_n\}$

$g: W \to W$

$pr_W \circ f|_W \; : W \to W \qquad pr_W : V \to W$

non invariante $\qquad \underline{v}' + \underline{w}' \mapsto \underline{w}'$

Osserviamo che C è la matrice associata a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ di g (considerando anche la 1^a colonna nulla perché v_1 viene mandato in 0)

$$M_{\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}}(g) = C$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & \alpha_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \hline 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mn} \end{array}\right]$$

$$f(\underline{v}_2) = a_{12}\underline{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i2}\underline{v}_i$$

$$pr_W(f(\underline{v}_2)) = \sum_{i=2}^{n} a_{i2} v_i$$

Per induzione $\exists$ una base a bandiera in $W = \{\underline{v}_2', \ldots, \underline{v}_n'\}$ per g

$$pr_W = f|_W (v_j') - \sum_{k=2}^{j} \gamma_k \underline{v}_k' \in W$$

$$\Rightarrow f|_W (\underline{v}_j) = \gamma_1 \underline{v}_1 + \ldots !!$$

cioè $\underline{v}_1, \underline{v}_2' \ldots, \underline{v}_n'$ è una base a bandiera per f

Si poteva usare $\bar{g} : V/V_1 \to V/V_1$

$$\bar{g}(f(\underline{v})) = [f(\underline{v})]$$

$[\underline{v}_1], \ldots, [\underline{v}_n]$ base di V/V_1
$\quad = \bar{B}$

$C = M_{\bar{B}}(\bar{f})$ provare a farla

(Manca la lezione del 20/12)

FINE PRIMO SEMESTRE

UNA SERIE DI DIM DA FONTI DIVERSE (+ comprensibili) O ESERCIZI RILEVANTI

- In $M_n(\mathbb{K})$ le matrici che commutano con tutte le altre sono quelle della forma $a I_n$, $a \in \mathbb{K}$
  (I_n: matrice identità)

DIMOSTRAZIONE:

X_i indica l'i-esima riga e X^j la j-esima colonna

$C = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA \ \forall B \in M_n(\mathbb{K})\} = \mathrm{Span}(I_n)$

$\boxed{\supseteq}$ supponiamo che $M \in \mathrm{Span}(I_n) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{K} \mid M = k I_n$

allora
$$\left.\begin{aligned} BM &= B k I_n = kB \\ MB &= k I_n B = kB \end{aligned}\right\} MB = BM$$

- Questo dimostra che $\mathrm{Span}\, I_n \subseteq C$

$\boxed{\subseteq}$ Supponiamo che $A \in C \Rightarrow M$ commuta con tutte le matrici tra cui quelle della forma E_{ij} $\begin{cases} 1 \text{ in posizione } i,j \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$ (quelle della base canonica)

Allora si ha [$e(B_{i1})_i \cdot A^1 = a_{11}$ (da cui $a_{11} = a_{ii}$)]

a) $A_i (B_{i1})^1 = a_{ii}$ $\Rightarrow$ se commuta con tutte le matrici del tipo B_{i1} si ha $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$

b) Se $i \neq j$ $(B_{jj})_i = \underline{0}$ $\Rightarrow (B_{jj})_i A^j = 0$ $A_i \cdot (B_{jj})^j = a_{ij}$

$\Rightarrow$ se commuta con tutte le matrici B_{jj} allora $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

Ciò dimostra che $\mathrm{Span}(I_n) \subseteq C$

Allora $C = \mathrm{Span}(I_n)$ $\square$

DEF $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ si dice triangolabile (o triangolarizzabile) se $\exists B$, base di V tale che $M_B(f)$ è triangolare superiore (cioè esiste una base a bandiera

DEF Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice triangolabile se è simile ad una matrice triangolare superiore, cioè se $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che PAP^{-1} è triangolare superiore

Sia $A \in M_B(f)$, dove $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ e B è una generica base di V, allora f è triangolabile $\Leftrightarrow$ A è triangolabile

TEO **TEOREMA DI TRIANGOLAZIONE**

$A \in M_n(\mathbb{K})$, allora A è triangolabile $\Leftrightarrow$ $\chi_A(t)$, polinomio caratteristico di A è completamente riducibile in $\mathbb{K}$.

($\Rightarrow$) Supponiamo $A \sim T \rightarrow$ matrice triangolare superiore

Gli elementi della diagonale principale di T sono tutti e soli gli autovalori di T (cioè le radici del polinomio caratteristico), ma gli autovalori sono invarianti per similitudine per cui sono anche tutti e soli gli autovalori di A

Pertanto, $\chi_A(t)$ è completamente riducibile in $\mathbb{K}$

($\Leftarrow$) Procediamo per induzione su n

PASSO BASE: Per $n=1$ la tesi è banalmente vera (tutte le matrici 1×1 sono triangolari sup.)

HP INDUTTIVA: supponiamo che se $A \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ allora sia vera la tesi: $\chi_A(t)$ completamente riducibile $\Rightarrow$
$\Rightarrow A$ triangolabile

PASSO INDUTTIVO: dimostriamola vera per n

Poiché $\chi_A(t)$ è completamente riducibile su $\mathbb{K}$, esiste almeno un autovettore u_1 relativo ad un autovalore λ_1

L'insieme $\{u_1\}$ è estendibile a una base $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ di $\mathbb{K}^n$. Sia P la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{K}^n$ alla base B_1, allora

$$P^{-1} A P = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

③ riporta in coordinate rispetto a B_1

② applica f

① scrive in coordinate rispetto alla base canonica

$\chi_{A_1}(t)$ completamente riducibile

Gli autovalori di A_1 sono autovalori di A, $\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\,\chi_{A_1}(t)$

Per ipotesi induttiva $\exists\, Q_0 \in GL_{n-1}(\mathbb{K}) \mid Q_0^{-1} A_1 Q_0 = T_{n-1} \rightarrow$ matrice triangolare superiore $(n-1)\times(n-1)$

Sia $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

$$\Rightarrow Q^{-1} P^{-1} A P Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_0^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_0 & \\ 0 & & & \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \Rightarrow PQ \text{ triangolarizza } A$$

$\square$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE A BLOCCHI

Il determinante di una matrice a blocchi triangolare (superiore o inferiore) o diagonale è dato dal prodotto dei determinanti delle sottomatrici quadrate poste sulla diagonale.

siano esse $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^{n} \det(A_i)$$

DIMOSTRAZIONE NEL CASO IN CUI $M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$ (da questa è facile poi generalizzare)

Fissati B e C definiamo $\varphi(A)$ come il determinante di $M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$

$$\varphi(A) = \det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $\varphi(A)$ è multilineare per definizione di determinante ed è alternante perché quando scambio 2 righe di A si scambiano anche le rispettive righe di $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ per cui $\varphi(A)$ cambia di segno.

Allora $\varphi(A) = K \cdot \det(A)$ (precedente dimostrazione)

$\det A = \dfrac{\varphi(A)}{K}$ $\Rightarrow$ affinché sia rispettata anche la normalizzazione del determinante, necessariamente $K = \varphi(I)$

$$\Rightarrow \varphi(A) = \det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right] = \varphi(I) \det A$$

$$\varphi(I) = \det \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right] = \det B$$

si verifica facilmente sviluppando sulla 1ª riga

$$\Rightarrow \varphi(A) = \det B \det A \qquad \square$$

Stessa identità tecnica del teorema di Binet

REGOLA DI CRAMER

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad A \in M_n(\mathbb{K})$

$\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ c'è 1 soluzione $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ (Rouché-Capelli)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}}$$

dove A_i è la colonna ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con $\underline{b}$

DIMOSTRAZIONE:

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \sum_i x_i A^i = \underline{b}$$

$$\det\left[A^1 | \cdots | \underbrace{\textstyle\sum_i x_j A_j}_{\text{colonna i-esima}} | \cdots | A^n\right] = \sum_{j=1}^{n} x_j \det\left[A^1 | \cdots | A^j | \cdots | A^n\right] =$$

$$= \begin{cases} x_i \det A & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \text{ (la matrice ha due colonne uguali)} \end{cases}$$

Inizio secondo semestre . . .

POLINOMIO MINIMO

29/02/2024

$f: V \to V \qquad f^2 = f \circ f$

$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n} \qquad f^n : V \to V$

$f^n \circ f^m = f^m \circ f^n = f^{m+n}$

$p(x) = x^2 - 2x + 3 \qquad p(f) = f^2 - 2f + 3\,id : V \to V$

endomorfismo

V spazio su $\mathbb{K}$

$\sigma_f : \mathbb{K}[x] \to \mathcal{L}(V)$ (f è un endomorfismo di V fissato)

$\sigma_f(p(x)) = p(f)$ è lineare: $\sigma_f(p(x) + q(x)) = p(f) + q(f) =$
$= \sigma_f(p(x)) + \sigma_f(q(x))$
$\sigma_f(\alpha p(x)) = \alpha p(f) = \alpha \sigma_f(p(x))$

$\mathcal{L}(V)$ è un anello con somma e composizione

$\mathbb{K}[x]$ è un anello con somma e prodotto $\Rightarrow$ σ_f è un OMOMORFISMO DI ANELLI

$\sigma_f(p(x)q(x)) = p(f)q(f) = \sigma_f(p(x))\sigma_f(q(x))$

$\operatorname{Ker} \sigma_f = \{ p(x) \mid p(f) = 0 \}$ endomorfismo banale

$A \in M_n(\mathbb{K})$

è equivalente considerare $\sigma_A : p(x) \to M_n(A)$
$p(x) \mapsto p(A)$

$\exists ?\ p(x)$ con $\deg p(x) > 0 \mid p(A) = 0$?

Sì

Basta notare che $\mathbb{K}[x]$ ha dimensione ∞, mentre $\mathcal{L}(V)$ e $M_n(\mathbb{K})$ hanno dim. finita.

Dimostrazione più formale:

Considero $\sigma_A \big|_{\mathbb{K}_m[x]} \quad \mathbb{K}_m[x] \to M_n(\mathbb{K})$ con $m \geq n^2 + 1$

serve per formalizzare le due righe precedenti, il teo. della dim non si può applicare su spazi di dim. ∞

$\Rightarrow$ per la formula delle dimensioni il nucleo ha dimensione positiva

Inoltre,

$I, A, A^2, \dots, A^m$

se $m > n^2$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ $\exists$ una combinazione non banale:

$\Rightarrow \alpha_0 I + \dots + \alpha_m A^m = 0$ con qualche $\alpha_i \neq 0$

Allora esistono polinomi che vengono annullati dalla matrice.

Analogamente $\exists\ p(x)$ con $\deg p(x) > 0 \mid p(f) = 0$

endomorfismo nullo

$\ker \sigma_f$ è un ideale di $\mathbb{K}[x]$

$$p(x) \in \ker \sigma_f \Rightarrow \sigma_f(p(x)q(x)) = p(f)q(f) = 0$$

prop. di assorbimento

Inoltre $\mathbb{K}[x]$ è PID $\Rightarrow$ i suoi ideali sono monogenerati

Def. Il polinomio minimo di f : $\varphi_f \in \mathbb{K}[x]$ è l'unico generatore monico di $\ker \sigma_f$

φ_f è di grado minimo tra tutti i polinomi che vengono annullati da f

monico di deg. minimo

il termine di grado maggiore si annulla perché sono entrambi monici

UNICITÀ se ci fosse $\psi_f \neq \varphi_f$ $\deg(\psi_f(x) - \varphi(x)) < \deg(\varphi_f)$

$$\psi_f - \varphi(x) \in \ker \sigma_f \Rightarrow \psi_f(x) - \varphi_f(x) = 0$$

per le prop di ideale   per la minimalità del grado

Ogni $p(x) \in \ker \sigma_f$ è diviso da $\varphi_f(x) \Rightarrow p(x) = \varphi_f(x)q(x)$

(Stessa identica cosa per le matrici)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\mu_a(\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{\mu_a(\lambda_k)}$$

$\varphi_D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k)$ annulla la matrice

$\varphi_D(D) = (D - \lambda_1 I) \cdots (D - \lambda_k I) = 0$

(il prodotto di matrici diagonali si fa moltiplicando gli elementi sulla diagonale) e per ogni riga appare un fattore nullo

generico autovalore relativo a λ_1

$D\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 \iff (D - \lambda_1 I)(\underline{v}_1) = 0$

$\varphi_D(D)(\underline{v}_1) = \underline{0} \Rightarrow$ annulla una base di autovalori $\Rightarrow$ annulla tutto

Segue che il polinomio minimo divide $(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k)$ non può "saltare" nessun fattore $(\lambda - \lambda_i)$

WLOG "saltiamo" $\lambda - \lambda_1$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$p(x) = (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k)$$

$$p(D)(\underline{v}_1) = (D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_k I)(\underline{v}_1) =$$

$$= (D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_{k-1} I)((\lambda_1 - \lambda_k)\underline{v}_1) =$$

$$\cdots = (\lambda_1 - \lambda_k) \cdots (\lambda_1 - \lambda_2)(\underline{v}_1) \neq 0$$

sto considerando autovalori distinti per cui tutti i fattori sono $\neq 0$

Oss $f \in \mathcal{L}(V)$ $\quad \mathcal{B}$ base di V

$A = M_{\mathcal{B}}(f)$

$p(x) \in \mathbb{K}[x]$ $\quad M_{\mathcal{B}}(p(f)) = p(A) = p(M_{\mathcal{B}}(f))$

comporre e sommare endomorfismi equivale a moltiplicare e sommare le loro matrici associate

$M_{\mathcal{B}}(p(f)) = p(M_{\mathcal{B}}(f))$

$p(f) = 0 \iff p(A) = 0$

allora σ_f e σ_A sono tali che $\operatorname{Ker}\sigma_f = \operatorname{Ker}\sigma_A$

Coroll. Ciò dimostra anche che il polinomio minimo è INVARIANTE PER SIMILITUDINE (il Ker non cambia per similitudine per cui il polinomio minimo, che è l'unico generatore, è sempre quello)

esercizio: dimostrarlo direttamente

$p(x) \in \mathbb{K}[x]$ $\quad p(A) = 0 \iff p(B) = 0$ se $A \sim B$

Supponiamo $\underset{0}{p(A)}$, $p(B) = p(P^{-1}AP) = \sum_{i=1}^{\deg p} \alpha_i (P^{-1}AP)^i =$

$= P^{-1} \sum_i \alpha_i A^i P = P^{-1}p(A)P = 0$

(la dim si può fare in un verso solo perché il problema è simmetrico)

$\left[\begin{array}{l}\text{deriva da} \\ (P^{-1}AP)^k = \\ \quad = P^{-1}A^kP\end{array}\right]$

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

$f^2(\underline{v}) = \lambda^2 \underline{v}$

$f^m(\underline{v}) = \lambda^m \underline{v}$

$(\alpha f^n + \beta f^m)\underline{v} = (\alpha\lambda^n + \beta\lambda^m)\underline{v}$

$\quad \Downarrow$

$p(f)(\underline{v}) = p(\lambda)(\underline{v}) \Rightarrow p(f)^{(\underline{v})} = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 0$

cioè se un autovalore relativo a λ viene mandato in 0, $(x-\lambda)$ divide il pol. caratteristico

$x - \lambda \mid p(x)$

altra dimostrazione che non posso saltare fattori

Sia f diagonalizzabile con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$\Rightarrow$ il polinomio minimo è $\varphi_f(x) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k)$

se ha esponenti > 1 f non è diagonalizzabile (cond. necessaria e come vedremo anche sufficiente)

pol. minimo $\quad$ pol. caratteristico

f diagonalizzabile $\Rightarrow \varphi_f(x) \mid p_f(x)$

$\boxed{\textbf{TEOREMA DI HAMILTON - CAYLEY}}$ (dove $p_f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ è il polinomio caratteristico)

$f \in \mathcal{L}(V)$ allora $p_f(f) = 0$

Ricordiamo lo sviluppo del determinante $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underset{\text{cofattore}}{\alpha_{ij}} = \det A$

cofattore $= (-1)^{i+j}$ per il det della matrice ottenuta eliminando riga i e colonna j

$A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice aggiunta di A è A' t.c.

$A' = (a'_{ij})$ $\quad a'_{ij} = \alpha_{ji}$ (indici invertiti)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Lemma: $A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AA' = (\det A)I$

vale anche per matrici a coeff. in un anello (es. di polinomi)

(dim. negli appunti del 1° semestre)

dim. $A-\lambda I \rightarrow$ matrice a coeff. polinomiali

B aggiunta di $A-\lambda I$

$(A-\lambda I)B = \det(A-\lambda I)I = p_A(\lambda)I$ ⊛ (dal lemma)

$B=(b_{ij})$, $b_{ij} \in \mathbb{K}[\lambda]$ Nota: $\deg(b_{ij}) \leq n-1$ perché b_{ij} è un minore di A di ordine $n-1$, con elementi polinomi di grado ≤ 1

Scriviamo $b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}\lambda + \dots + b_{ij}^{(n-1)}\lambda^{n-1}$

Sia $B^{(h)} = (b_{ij}^{(h)}) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ $h=0,1,\dots,n-1$

Allora la matrice B si sviluppa nelle potenze di λ, con i coeff. i $B^{(h)}$

(nella matrice $B^{(h)}$ appaiono solo i coefficienti delle potenze λ^h)

$$B = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h B^{(h)}$$

allora dalla ⊛ di sopra

$$(A-\lambda I)\sum_{h=0}^{n-1}\lambda^h B^{(h)} = p_A(\lambda)I = \underbrace{(a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0)}I \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ uguagliando i coeff. delle stesse potenze di λ:

(i coefficienti ora sono matrici)

0) $AB^{(0)} = a_0 I$

1) $AB^{(1)} - B^{(0)} = a_1 I$

$\vdots$

n-1) $AB^{(n-1)} - B^{(n-2)} = a_{n-1} I$

n) $-B^{(n-1)} = a_n I$

moltiplichiamo rispettivamente le righe 0), 1), … n) per $I, A, A^2, \dots, A^n$, se sommiamo membro a membro si trova

$$0 = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n = p_A(A) \qquad \square$$

$AB^{(0)} = a_0 I$

$A^2B^{(1)} - AB^{(0)} = a_1 A$

$A^3B^{(2)} - A^2B^{(1)} = a_2 A^2$

$\vdots$

$A^nB^{(n-1)} - A^{n-1}B^{(n-2)} = a_{n-1}A^{n-1}$

$-A^n B^{(n-1)} = a_n A^n$

$f \in \mathcal{L}(V)$ triangolabile $\iff \exists$ base di V: $M_B^B(f) = T$ triangolare superiore $\iff \exists$ base di B a bandiera per f

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ $f(\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)) \subset \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$
$(\iff f(\underline{v}_i) \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i))$

- f triangolabile $\iff p_f(\lambda)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[\lambda]$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ triangolabile $\iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid PAP^{-1} = T$ (T matrice triangolare superiore $\iff \exists B$ base di $\mathbb{K}^n$ a bandiera per A

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ $A(\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_K) \subset \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_K)$

$(\iff A\underline{v}_i \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i))$

- A triangolabile $\iff p_A(\lambda)$ completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[\lambda]$

TRIANGOLARIZZARE UNA MATRICE

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

$p_A(\lambda) = \lambda^4$ $\quad Sp(A) = \{0\}$ $\quad \mu_a(0) = 4 \Rightarrow$ sulla diagonale avremo solo 0

$\Downarrow$

fattorizzabile completamente

$\Downarrow$

A triangolabile

questo metodo ricalca la dimostrazione del criterio

come si triangola una matrice

1) TROVARE $\underline{v}_1$ autovettore di f
2) $V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1) \oplus W$
3) Considerare $f|_W$ (in generale W non è f-invariante, ma a noi serve un endomorfismo)
4) Considero $p_W^V \circ f|_W : W \to W$

$\downarrow$ proiezione in W $\qquad p_W^V \circ f|_W = g \in \mathcal{L}(W)$

Per induzione si ripete il procedimento su g fino a trovare una base triangolare

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ il determinante di questa 3×3 è $\neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{rg} A \geq 3$ ma $\det A = 0 \Rightarrow \mathrm{rg} A = 3$

$\dim \mathrm{Ker} A = 1$ $\qquad \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$B = \underline{v}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ è base di $\mathbb{R}^4$ (si verifica facilmente)

$W = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ $\qquad \mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1) \oplus W$

$$M^{B}_{B}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

posso ottenere queste 3 colonne calcolando dove vanno $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ ed $\underline{e}_3$

la proiezione su W preserva questa parte

$$M^{\{e_1, e_2, e_3\}}_{\{e_1, e_2, e_3\}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad g = p^{v}_{W} \circ f|_W$$

$$p_g(\lambda) = -\lambda^3$$

$\dim \mathrm{Ker}\, g = 1$ (la matrice ha rango 2)

$$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Span}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3) \overset{\text{in } \mathbb{R}^4}{=} \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}\right)$$

(nella base canonica di $\mathbb{R}^4$)

$B_1 = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ base di $\mathbb{R}^4$ perché $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$

$$M^{B_1}_{B_1}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \oplus W_1$

$g_1 = pr_{W_1} \circ f|_{W_1}$

$$M^{(e_1, e_2)}_{(e_1, e_2)}\, g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_{g_1}(\lambda) = \lambda^2$$

$$\mathrm{Ker}\, g_1 = \mathrm{Span}(\underline{e}_2) = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3}\right)$$

$B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{w}$ base di $\mathbb{R}^4$ (sistemate le prime 3 colonne va bene qualsiasi $\underline{w}$)

$$M^{B}_{B}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & -2 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{triangolare superiore}$$

immagine di $\underline{v}_3$ da calcolare a partire dalla matrice iniziale

qui c'è necessariamente 0 (unico autovalore)

Triangolarizzabilità simultanea

Se sono simultaneamente triangolabili non è detto che commutino

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita

***** $f, g \in \mathcal{L}(V)$ triangolabili tali che $f \circ g = g \circ f \Rightarrow f$ e g sono simultaneamente triangolabili

(abbiamo già dimostrato che f e g diagonalizzabili lo sono simultaneamente $\Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$)

- **LEMMA 1**

$f \in \mathcal{L}(V)$ triangolabile, $W \subset V$ sottospazio f-invariante $\Rightarrow$

$\Rightarrow f|_W$ triangolabile

(la restrizione a ogni sottospazio f-invariante è triangolabile)

- **LEMMA 2**

$f, g \in \mathcal{L}(V) \mid (f \circ g) = (g \circ f)$ Allora gli autospazi di f sono g-invar.

cioè devo dimostrare che se $\underline{v} \in V_\lambda(f) \Rightarrow g(\underline{v}) \in V_\lambda(f)$

cioè $f(g(\underline{v})) = \lambda g(\underline{v})$

- **Dim LEMMA 1**: sia $C = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W, completiamola a base di $V \Rightarrow B = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_n\}$

$$M_B^B(f) = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & A & \vdots & \vdots & B & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & C & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f(\underline{w}_i) \in W \\ \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{matrix}$$

$m \times m$ "$A \in \mathcal{L}(W)$"

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ 0 & C - \lambda I \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I) \det(C - \lambda I) \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_{f|_W} \mid p_f$ ma p_f è completamente riducibile in $\mathbb{K}[\lambda]$ perché f è triangolabile per hp $\Rightarrow p_{f|_W}$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[\lambda] \Rightarrow f|_W$ triangolabile

- **Dim LEMMA 2** $\Rightarrow$ vale per due endomorfismi in generale, non necessariamente triangolabili

$\lambda \in Sp(f)$, $\underline{v} \in V_\lambda(f)$

$\underline{f(g(v))} = g(f(\underline{v})) = g(\lambda \underline{v}) = \underline{\lambda g(\underline{v})} \rightarrow g(\underline{v}) \in V_\lambda(f)$

cioè $V_\lambda(f)$ è g-invariante

*** Dimostrazione:**

$\exists\, \underline{v}_1$ autovettore di f e di g, poiché: f triangolabile $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in Sp(f)$ e $V_\lambda(f) \neq \{\underline{0}\}$ è g-invariante (lemma 2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g|_{V_\lambda(f)}$ è triangolabile (lemma 1) $\Rightarrow \exists\, \underline{v}_1 \in V_\lambda(f)$ autovettore per g e per f

$V = Span(\underline{v}_1) \oplus W$, sia C una base di W

$pr_W \circ f|_W = f_1$

$pr_W \circ g|_W = g_1$

$$A = M_{\underline{v}_1, C}^{\underline{v}_1, C}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = M^{\underline{v}_1, C}_{\underline{v}_1, C}(\quad)$$

$\Rightarrow \quad A' = M^C_C(f_1) \quad e \quad B' = M^C_C(g_1) \qquad f_1, g_1 \in \mathcal{L}(W)$

$$AB = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'B' & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} \lambda_2\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B'A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A'B' = B'A' \quad \Rightarrow \quad f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$

Per induzione $\exists\, C'$ base di W che triangola simultaneamente g_1 e f_1.

$$M^{C'}_{C'}(f_1) = T_1 \qquad M^{C'}_{C'}(g_1) = T_2$$

$B = \underline{v}_1, C'$ base di V è tale che

$$M^B_B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad M^B_B(g) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ triangola simultaneamente f e g. $\square$

Esercitio

V spatio vettoriale di dimensione 3

Costruire (se esiste) $f \in \mathcal{L}(V)$ non diagonalizzabile t.c.

(i) • $\dim \operatorname{Ker}(f-2id)^2 = 2$

(ii) • $\exists\, W \subset V$ sottospatio f-invariante, $\dim W = 2$, $W \neq \operatorname{Ker}(f-2id)^2$

(iii) • $\exists\, \underline{v} \in V \setminus W$ autovettore

(i) Se $\operatorname{Ker}(f-2id) = \{\underline{0}\} \Rightarrow f-2id$ invertibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow (f-2id)^2$ invertibile ↯

$2 \in Sp(f) \qquad \underset{\neq 0}{\operatorname{Ker}(f-2id)} \subset \operatorname{Ker}(f-2id)^2$

↓

è f-invariante perché $(f-2id)^2$ commuta con f

OSS $\dim W \cap \operatorname{Ker}(f-2id)^2 = 1$ (Grassmann)

↳ retta f-invariante generata da un autovettore $\underline{w}$ per f

$\underline{w}, \underline{w}_1$ base di $W \Rightarrow \underline{v}, \underline{w}, \underline{w}_1$ base $\mathcal{B}$ di V

↳ autovettore per il punto (iii)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a \in \mathbb{R}$$

↳ autovettore

→ W è invariante

$\Rightarrow$ Se $a = 0$ f è diagonalizzabile $\Rightarrow a \neq 0$

2 è un autovalore

$p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$ scritto così perché potrebbero esserci ripetizioni

$Sp(f) = \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\} \cup \{\lambda_3\}$

- un λ_i è 2
- Non sono tutti distinti (altrimenti f sarebbe diagon.)

$\mu_a(y) = 1 \Rightarrow \mu_g(y) = 1$

• Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, allora:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-2I)^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

il Ker da dim. 3 ↯

• Se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mu_g(\lambda_1) \geq 2 \quad (=2) \\ \mu_g(\lambda_3) \geq 1 \end{array}$$

$$\underset{3}{V} \supset \underset{2}{V_{\lambda_1}(f)} \oplus \underset{1}{V_{\lambda_3}(f)} \Rightarrow f \text{ diagonalizzabile ↯}$$

- Se $\lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$rg(A - \lambda_1 I) = 1 \qquad \mu g(\lambda_1) = 2 \qquad \mu g(\lambda_2) \geq 1$

$\Rightarrow$ f diagonalizzabile $\lightning$

- Se $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - 2)^2 & 2a(\lambda_2 - 2) \\ 0 & 0 & (\lambda_2 - 2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ha rg } 2$$

$\Rightarrow \ \ker (A - 2I)^2 = 1 \ \lightning$

- Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ (verificare per esercizio che $\dim \ker (A - 2I)^2 = 2$)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - 2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker (A - 2I)^2 = \text{Span}(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$

$\ker (f - 2id)^2 = \text{Span}(\underline{w}_2, \underline{w}_1) = W \ \lightning$ (per il punto iii))

$\Rightarrow$ <u>F NON ESISTE</u>

06/03/2024

$f \in \mathcal{L}(V)$ su $\mathbb{K}$ $\qquad p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$p(f) : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathcal{L}(V)$

$\exists$ alcuni polinomi | $p(f) = 0 \equiv$ end. nullo
$\Downarrow$
formano un ideale generato dal polinomio minimo $\varphi_f(x)$

$p_\lambda(x) \Rightarrow p_\lambda(f) = 0$ (teo di Ham-Cay) $\Rightarrow \varphi_f(x) \mid p_\lambda(x)$ il polinomio minimo divide il caratteristico

- Se $p_\lambda(x)$ si decompone completamente in $\mathbb{K}[x]$
$\Rightarrow p_\lambda(x) = (x - \lambda_1)^{\mu a(\lambda_1)} \cdots (x - \lambda_k)^{\mu a(\lambda_k)}$
e $\varphi_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k} \qquad m_i \leq \mu a(\lambda_i)$ e $m_i \geq 1 \ \forall i$ (ancora non dimostrato)

- Se f è diagonalizzabile allora
$\varphi_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ (vale anche il viceversa)

$f: V \to V \qquad W \subset V$ f-invariante

$f|_W : W \to W$

Che relazioni ci sono tra pol. minimi e caratteristici?

- Sia B' base di W e estendiamola a base B di V

$$M_B(f) = \left[\begin{array}{c|c} M_{B'}(f|_W) & * \\ 0 & C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

$p_{f|_W}(x) \mid p_f(x)$ (già visto)

POL. MINIMO (Meglio sulle dispense)

$\varphi_f(f) = 0$ end. nullo $\Rightarrow \varphi_f(f|_W) = 0 \qquad \varphi_f(f)|_W = \varphi_f(f|_W) = 0$

rimane nullo anche sui vettori di W

$\Rightarrow \varphi_{f|_W}(x) \mid \varphi_f(x)$

Analogamente $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ prendo un polinomio e ci sostituisco dentro M $\quad p(M) = \begin{bmatrix} p(A) & * \\ 0 & p(C) \end{bmatrix}$

$M^k = \begin{bmatrix} A^k & * \\ 0 & C^k \end{bmatrix}$

da cui

$p(M) = 0 \Rightarrow p(A) = 0$

$p(A) \mid p(M)$

---

f induce una applicazione

$\bar{f}: V/W \to V/W$ (ben definita se W è invariante)

$[\underline{v}] \longmapsto [f(\underline{v})]$

$\varphi_f(f) = 0 \Rightarrow \varphi_f(\bar{f}) = 0 \Rightarrow \varphi_{\bar{f}}(x) \mid \varphi_f(x)$

dim.

Se $B = \{\underbrace{B'}_{\text{base di } W}, \underline{v}_{m+1}, \dots, v_n\}$ $\qquad B'' = \{[\underline{v}_{m+1}], \dots, [\underline{v}_n]\}$ è una base del quoziente

$$\begin{bmatrix} M_{B'}(f|_W) & * \\ 0 & M_{B''}(\bar{f}) \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ se p (pol. minimo) annulla la matrice grande annulla anche $M_{B''}(\bar{f})$

OSS $\quad p_f(x) = p_{f|_W}(x)\, p_{\bar{f}}(x)$

Se $\exists U$ supplementare f-invariante di W

$V = \underset{B'}{W} \oplus \underset{B''}{U} \quad \Rightarrow$ il pol. minimo è il m.c.m. dei pol. minimi

$\Rightarrow$ il pol. caratteristico è il prodotto dei pol. caratteristici

Esercizio

$f|_W = 0$ e $\bar{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?

$$M = \begin{bmatrix} M_{B'}(f|_W) & * \\ 0 & M_{B''}(\bar{f}) \end{bmatrix}$$

$\to$ non so cosa c'è qui

quindi in generale NON è vero

es: applicazione indotta da $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$W = \mathrm{Span}(\underline{e}_1)$ $\quad f(W) = \{\underline{0}\}$

$\bar{f} : [\alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2] \xrightarrow{A} [\beta \underline{e}_1] = [\underline{0}]$ $\quad \bar{f}(V/W) = \{\underline{0}\}$

$f: V \to V$ $\quad$ ip: POL. CARATTERISTICO completamente riducibile

($\Leftrightarrow$ f- triangolarizzabile)

(es. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o un altro campo algebricamente chiuso)

Supponiamo che $f: V \to V$ abbia un solo autovalore λ

$\dim V = n$

$$J_{\lambda,n} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$\mu_a(\lambda) = n$

$\mu_g(\lambda) = 1$

$V_\lambda = \mathrm{Span}(\underline{e}_1)$

$\Rightarrow$ Blocco di JORDAN

$n = 1$ $\quad [\lambda]$

$n = 2$ $\quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = A$

$n = 3$ $\quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = B$

pol. caratteristico:

$p_f(x) = \pm (x - \lambda)^n$

$\varphi_f(x) \mid (x-\lambda)^n \Rightarrow \varphi_f(x) = (x-\lambda)^k$

$1 \leq k \leq n$

$A - \lambda Id = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ la minima potenza che fa 0 è 2

$B - \lambda Id = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \neq [0]$ ma $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = [0]$

($[0]$: matrice 3×3 nulla)

Sia $A = J_{\lambda,n} - \lambda Id$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ la prima potenza nulla è A^n

Anche perché A agisce in questo modo:

$$\begin{tikzcd} \underline{e}_n \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "A^2"'] \arrow[rrrr, bend right, "A^{n-1}"'] & \underline{e}_{n-1} \arrow[r] & \underline{e}_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \underline{e}_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_f(X) = \pm p_f(x) = (x-\lambda)^n$$

Per ogni blocco di Jordan il polinomio minimo è uguale a $\pm$ il polinomio caratteristico

Def. $f: V \to V \mid \exists k$ t.c. $f^k = 0$ si dice **nihilpotente**

Lemma: sono equivalenti

esempio: $J_{\lambda,n} - \lambda Id$

(i) f nihilpotente

(ii) $p_f(x) = x^n \qquad (n = \dim V)$

(iii) $\varphi_f(x) = x^k \qquad (k \leq n)$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Rightarrow f^k(\underline{v}) = \lambda^k \underline{v} \quad \forall k$

se $f^k = 0 \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) è immediato considerando che

$$\varphi_f(x) \mid p_f(x)$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\quad \varphi_f(f) = f^k = 0$

Def. $h: V \to V$ nihilpotente;

Una base di V $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ tale che

$$\underline{v}_n \xrightarrow[h]{} \underline{v}_{n-1} \to \dots \xrightarrow[h]{} \underline{v}_1 \xrightarrow[h]{} 0$$ è una **base ciclica**

$W \subset V$ h-invariante è detto ciclico se ha una base ciclica

TEO FORMA CANONICA DI JORDAN *

$f: V \to V$ triangolabile;

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di f con $\mu_a(\lambda_i) = \mu_i$

$\exists B$ base di V tale che la matrice associata a f è nella forma

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} J_{\lambda_1,k_{1,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_1,k_1,m_1} \end{matrix} & \\ \hline & \begin{array}{|c|} \begin{matrix} J_{\lambda_2 k_{21}} & & & \\ & J_{\lambda_2,k_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_2,k_2 m_2} \end{matrix} \\ \hline \end{array} \\ & \qquad \ddots \end{array} \end{bmatrix}$$

Tutti gli indici n_{ij} dipendono solo da f e due matrici di Jordan sono sono simili $\Leftrightarrow$ differiscono solo per l'ordine dei blocchi

Esempio:

$f: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ nihilpotente, le possibili forme di Jordan sono

$\Updownarrow$ ha solo autovalori 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (blocchi di ordine 1 - caso diagonalizzabile)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 1+1+1+1 \\ 4 &= 2+2 \\ 4 &= 4 \\ 4 &= 1+1+2 \\ 4 &= 1+3 \end{aligned}\right\} \text{tutte le possibili forme}$$

$\varphi_{J_{\lambda,n}}(x) = (x-\lambda)^n$

Il pol. minimo dei blocchi di $\underset{=J}{M_B(f)}$ è il m.c.m dei blocchi di Jordan che contiene

$\Rightarrow \underbrace{\varphi_J}_{\text{(matrice di prima)}}(\lambda) = (x-\lambda_1)^{\max(n_{1,j})} \cdots (x-\lambda_k)^{\max(n_{k,j})}$

f diagonalizzabile $\Leftrightarrow \max n_{ij} = 1$ (il pol. minimo si decompone in fattori lineari distinti)

$\Leftarrow$ tutti i blocchi 1×1 $\Leftrightarrow$ J diagonale

Esercizio

$f: V \to V$ V su $\mathbb{C}$

se $\exists k \mid f^k = id \Rightarrow f$ diagonalizzabile $\qquad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}$

$p(x) = x^k - 1 \Rightarrow p(f) = 0 \Rightarrow \varphi_f(x) \mid \underbrace{x^k - 1}_{\text{ha } k \text{ radici distinte in } \mathbb{C}} = \prod_{i=0}^{k-1} (x - \varepsilon^k)$

$\Rightarrow \varphi_f(x)$ ha fattori lineari distinti $\Rightarrow f$ diagonalizzabile

*** DIM.**

I) Si trovano sottospazi invarianti $U_1, \dots, U_k \mid V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ e tali che $f|_{U_i}$ ha solo l'autovalore λ_i

II) $f|_{U_i}$ ha solo autovalore λ_i, quindi $f - \lambda_i Id$ ha solo autoval. 0 $\Rightarrow$ è nihilpotente

Vediamo il punto I, come si separano gli autospati

$f: V \to V$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im} f \supseteq \mathrm{Im} f^2 \supseteq \mathrm{Im} f^3 \supseteq \dots \supseteq \mathrm{Im} f^k \supseteq \dots \\ \ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \dots \subseteq \ker f^k \subseteq \dots \end{array}\right\} \text{dimensioni complementari}$$

<u>lemma</u> se per qualche k ho $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+s}) \quad \forall s \geq 0$ (lo stesso per i nuclei)

<u>dim:</u> $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = f(\mathrm{Im}(f^k)) \Rightarrow \mathrm{Im} f^k \cap \ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f^{k+1} \cap \ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow \mathrm{Im} f^{k+2} = \mathrm{Im} f^{k+1}$

<u>Prop.</u> $k = \min\{h \mid \mathrm{Im}(f^h) = \mathrm{Im}(f^{h+1})\}$ allora

(i) $V = \ker f^k \oplus \mathrm{Im} f^k \to$ decomposizione di FITTING di V (rispetto a f)

(ii) $f|_{\ker f^k}$ è nihilpotente, $f|_{\mathrm{Im} f^k}$ è invertibile

(iii) ↳ solo autov. 0 ↳ tutti li altri autoval.

$\to k \leq \mu_a(0)$ to be continued...

07/03/2024
(Manfre)

V spazio vettoriale$/_{\mathbb{K}}$, $\dim V = n < \infty$, $f \in \mathcal{L}(V)$

$val_f = \sigma_f : \mathbb{K}[x] \to \mathcal{L}(V)$ applicazione lineare definita sulla base standard detta VALUTAZIONE su f e si scrive $\sigma_f(p) = p(f)$ $p \in \mathbb{K}[x]$

$x^k \mapsto f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ volte}}$ $(x^0 = 1 \mapsto f^0 = id_V)$

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d \Rightarrow p(f) = a_0 id_V + a_1 f + \dots + a_d f^d \in \mathcal{L}(V)$
$a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$

- σ_f è un <u>omomorfismo di anelli</u>: $\sigma_f(pq) = \sigma_f(p) \cdot \sigma_f(q) \ \forall p, q \in \mathbb{K}[x]$
$\qquad (pq)(f) \qquad p(f) \cdot q(f) = q(f) \cdot p(f)$
- $\mathrm{Im}(\sigma_f) = \mathbb{K}[f] = \mathrm{Span}(id_V, f, f^2, \dots)$ è un <u>sottoanello commutativo di $\mathcal{L}(V)$</u> (dato dagli endomorfismi polinomiali in f)
- $\ker(\sigma_f) = I(f)$ è l'<u>ideale</u> di f (è un sottospazio di $\mathbb{K}[x]$ e $\forall p \in I(f)$, $\forall q \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow pq \in I(f)$)
  $I(f) \neq \{\underline{0}\}$
  $I(f) \neq \mathbb{K}[x]$ cioè è un ideale NON banale
- Il POLINOMIO MINIMO di f, φ_f, è il polinomio monico di grado minimo tale che
  φ_f è generatore di $I(f)$ come ideale, cioè $I(f)$ è composto dai multipli polinomiali di φ_f
  $$I(f) = (\varphi_f) = \{p \in \mathbb{K}[x] \mid \varphi_f | p\} = \{q\varphi_f \mid q \in \mathbb{K}[x]\}$$

Reminder! $\mathbb{K}[x]$ è PID $\Rightarrow$ il Ker, che è sempre un ideale è MONOGENERATO (così come tutti gli altri ideali di $\mathbb{K}[x]$)

$$I(f) = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid \underbrace{p(f) = 0}_{\in \mathcal{L}(V)} \}$$ (endomorfismo nullo)

$p \in I(f) \iff Im(p(f)) = \{\underline{0}\} \iff Ker(p(f)) = V$

$\iff \forall \underline{v} \in V \quad p(f)(\underline{v}) = \underline{0}$

$p \in I(f) \longleftrightarrow$ comb. lineari nulle di potenze di f (in $\mathcal{L}(V)$)

$p = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \in I(f) \iff \sum_{i=0}^{d} a_i f^i = 0 \in \mathcal{L}(V)$

$\varphi_f \longleftrightarrow$ la comb. lineare nulla "minima" di potenze di f

$\deg \varphi_f = d \iff id_V, f, \dots, f^{d-1}$ sono lin. indipendenti (in $\mathcal{L}(V)$) mentre $f^d \in Span(id_V, f, \dots, f^{d-1})$

$f^d = a_0 id_V + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1}$

$\hookrightarrow \varphi_f = x^d - a_{d-1} x^{d-1} - \dots - a_1 x - a_0$

Inoltre $id_V, f, \dots, f^{d-1}$ sono una base di $\mathbb{K}[f]$

$Span(id_V, f, f^2, \dots)$

infatti sono generatori: $f^d \in Span(id_V, \dots, f^{d-1})$ (distributività)

$f^{d+1} \overset{"}{=} \alpha_0 f + \dots + \alpha_{d-1} f^d \in Span(id_V, \dots, f^{d-1})$

$f^d \circ f = (\alpha_0 + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{d-1} f^{d-1}) \circ f = \alpha_0 f + \alpha_1 f^2 + \dots + \alpha_{d-1} f^d$

reiterando $f^k \in Span(id_V, \dots, f^{d-1}) \quad \forall k \geq d$

$\dim \mathbb{K}[f] = \deg \varphi_f$

la dimensione dello spazio degli endomorfismi polinomiali in f è pari al deg del polinomio minimo

Per calcolare φ_f

- Trovare il minimo d: $id_V, \dots, f^{d-1}, f^d$ sono lin. dipendenti
- Scrivere $f^d = a_0 id_V + \dots + \alpha_{d-1} f^{d-1} \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$
- $\varphi_f = x^d - \alpha_{d-1} x^{d-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$\rightarrow$ oppure il max $d-1$ tale che $id, f, \dots, f^{d-2}, f^{d-1}$ sono lin. indipendenti

ES. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim V = 3$ $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ base di V

$f \in \mathcal{L}(V)$ definita da
$\underline{v}_1 \to \underline{v}_2$
$\underline{v}_2 \to -\underline{v}_3$
$\underline{v}_3 \to -3\underline{v}_1$

id_V, f sono lin. dipendenti? $\iff f \overset{?}{=} \lambda id_V$ NO $f(\underline{v}_1) = \underline{v}_2 \neq \lambda \underline{v}_1$

id_V, f, f^2 sono lin. dipendenti? $f^2 = a\, id_V + bf$

NO $f^2(\underline{v}_1) = -\underline{v}_3 \overset{?}{=} a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2$ imp. perché sono indipendenti

id_V, f, f^2, f^3 sono lin. dipendenti?

$$f^3 \Rightarrow \begin{matrix} \underline{v_1} \to 3v_1 \\ \underline{v_2} \to 3v_2 \\ \underline{v_3} \to 3v_3 \end{matrix} \Rightarrow f^3 = 3id$$

SONO LIN. DIPENDENTI $f^3 = 3id_V$

$\Rightarrow \deg \varphi_f = 3$

$\varphi_f = x^3 - 3$

Polinomio minimo per le matrici : $A \in M_n(\mathbb{K})$

$val_A = \sigma_A : \mathbb{K}[x] \to M_n(\mathbb{K})$ omomorfismo di anelli

$x^k \longmapsto A^k$

- $Im(\sigma_A) = \mathbb{K}[A] = Span(\underset{\overset{\shortparallel}{A^0}}{I_n}, A, A^2, \dots)$ matrici polinomiali in A

  sottoanello commutativo di $M_n(\mathbb{K})$
- $Ker(\sigma_A) = I(A)$ ideale di A con generatore monico φ_A (polinomio minimo di A)
- $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \varphi_A$
- Se B è una base di V, $f \in \mathcal{L}(V)$, $A = M^B_B(f)$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}(V) \arrow[d, "M^B_B"] \\ \mathbb{K}[x] \arrow[ur, "\sigma_f"] \arrow[r, "\sigma_A"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & M_n(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

$$M^B_B(\underset{\overset{\shortparallel}{p(f)}}{\sigma_f(p)}) = \underset{\overset{\shortparallel}{p(A)}}{\sigma_A(p)}$$

poiché $M^B_B(f^k) = A^k$

- $\mathbb{K}[A] = M^B_B(\mathbb{K}[f])$
- $I(A) = I(f) \Rightarrow \varphi_A = \varphi_f$

($\Rightarrow I(A)$ e φ_A sono invarianti per similitudine)

Es $\quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\dim V=3$, $f\in \mathcal{L}(V)$ $\quad \exists B$ base di V tale che

$$A = M_B^B(f) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi_f = \varphi_A$$

I_3, A sono lin. dip? $\iff A = \lambda\, id$ $\quad$ NO $\quad \lambda \in \mathbb{K}$

I_3, A, A^2 sono lin. dip? $\iff A^2 \overset{?}{=} a I_4 + bA \quad a,b\in\mathbb{K}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} -2b+a & b & b \\ 0 & -b+a & 0 \\ -b & b & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b=-2, \quad a=-1$$

$$A^2 = -I_3 - 2A \Rightarrow A^2 + 2A + I_3 = 0$$

$$\varphi_f = \varphi_A = x^2 + 2x + 1$$

Altro metodo:

Per trovare φ_f, se si conosce un $p\in I(f)$, allora basta controllare i divisori di p

Es

Supponiamo che $f\in\mathcal{L}(V)$: $f^5 = 2f^3 - f \iff f^5 - 2f^3 + f = 0$

$$\Rightarrow x^5 - 2x^3 + x \in I(f)$$

$$x(x^4-2x^2+1) = x(x-1)^2(x+1)^2$$

$$\varphi_f = \begin{cases} x \\ x-1 \\ x+1 \\ x(x-1) \\ x(x+1) \\ (x-1)^2 \\ (x+1)^2 \\ (x-1)(x+1) \\ x(x-1)^2 \\ x(x+1)^2 \\ x(x-1)(x+1) \\ (x-1)(x+1)^2 \\ (x+1)(x-1)^2 \\ x(x-1)^2(x+1) \\ (x-1)^2(x+1)^2 \\ x(x-1)(x+1)^2 \\ x(x-1)^2(x+1)^2 \end{cases}$$

Cerco quello di grado minimo che calcolato in f fa 0

Es $\quad V=\mathbb{R}^5 \quad f = L_A \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$

vale anche il viceversa perché se il pol. minimo non ha termine noto la matrice è un divisore dello zero

$\boxed{\text{il polinomio minimo ha termine noto} \Rightarrow \text{la matrice è invertibile}}$

$\Uparrow$

- $\varphi_f \overset{?}{=} x \Rightarrow f=0$ $\quad$ NO
- $\varphi_f \overset{?}{=} x-1 \Rightarrow f - id_{\mathbb{R}^5} = 0$ $\quad$ NO
- $\varphi_f \overset{?}{=} x+1 \Rightarrow f + id_{\mathbb{R}^5} = 0$ $\quad$ NO
- $\varphi_f \overset{?}{=} (x-1)^2 \Rightarrow (f - id_{\mathbb{R}^5})^2 = 0$ $\qquad (A-I_5)^2 = 0$

trucchetto utile quando c'è un termine noto

$$\downarrow$$

$$A^2 - 2A = -I$$

$$A(A-2I) = -I \Rightarrow A \text{ invertibile} \Rightarrow \text{imp}$$

ha una colonna nulla

φ_f ha termine noto $\Rightarrow$ A invertibile

Per cui posso escludere tutti i polinomi che hanno termine noto

$\varphi_f \overset{?}{=} (x-1)x \Rightarrow (A - I_5)A = 0$

facendo i calcoli si vede che non è vero NO

$\varphi_f \overset{?}{=} (x+1)x \Rightarrow (A+I)A = 0$

NO

$\varphi_f \overset{?}{=} x(x-1)^2 \Rightarrow A(A-I)^2 = 0$

Facendo i calcoli si verifica che è vero

$\Rightarrow \varphi_f = x(x-1)^2$

TH. HAMILTON-CAYLEY : $p_f \in I(f) \iff \varphi_f \mid p_f$

$p_f(A) = -\lambda(1-\lambda)^4$

quella di prima

Quindi oltre a quelli con termine noto potevo eliminare anche tutti quelli in cui compare $(x+1)$

Sarebbero rimasti solo: $\lambda, \ \lambda(\lambda-1), \ \lambda(\lambda-1)^2$

anche questo si può escludere perché

$Sp(f) = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p_f\} = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \varphi_f\}$

$p \in I(f), \ \lambda \in Sp(f) \Rightarrow p(\lambda) = 0$

$p = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \qquad a_i \in \mathbb{K}$

$\underline{v} \in V_\lambda(f) \qquad \underline{v} \neq \underline{0}$

$p(f)(\underline{v}) = \underset{p \in I(f)}{\underline{0}} = (a_0 id_V + \dots + a_m f^m)(\underline{v}) = a_0\underline{v} + a_1\lambda\underline{v} + \dots + a_m\lambda^m\underline{v} =$

$= \underline{v}(a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m) = \underset{\neq \underline{0}}{\underline{v}}\, p(\lambda) \Rightarrow p(\lambda) = 0$

$\Downarrow$

$Sp(f) \subset \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p\}$

- $\varphi_f \mid p_f \Rightarrow p_f = \varphi_f \, q \quad q \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \varphi_f\} \subset \{\text{" " di } p_f\}$

$\{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p_f\} = Sp(f) \subset \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \varphi_f\} \rightarrow$ dimostrato nella lezione del 14/03

da cui $\{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p_f\} = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \varphi_f\}$

$\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ la valutazione su $\underline{v}$

$val_{\underline{v}} = \sigma_{\underline{v}} : \mathcal{L}(V) \to V$ lineare
$\qquad g \mapsto g(\underline{v})$

Componendo con σ_f si ha:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}(V) \arrow[dr, "\sigma_{\underline{v}}"] & \\ \mathbb{K}[x] \arrow[ur, "\sigma_f"] \arrow[rr] & & V \end{tikzcd}$$

*(la composizione di omomorfismi di anelli è ancora un omomorfismo di anelli)

Sia $\underline{v}$ che f fissati

$val_{f,\underline{v}} = \sigma_{f,\underline{v}} : \mathbb{K}[x] \to V$ lineare

$\qquad p \longmapsto p(f)(\underline{v}) \qquad (x^k \mapsto f^k(\underline{v}))$

- $Im(\sigma_{f,\underline{v}}) = \mathbb{K}[f](\underline{v}) = Span(\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v}), \dots) \equiv$ SOTTOSPAZIO CICLICO GENERATO DA $\underline{v}$
- $Ker(\sigma_{f,\underline{v}}) = I(f, \underline{v})^*$ IDEALE DI $\underline{v}$ RELATIVO A f

  il cui generatore monico è $\varphi_{f,\underline{v}}$, il polinomio minimo di $\underline{v}$ relativo a f
- Polinomi appartenenti a $I(f,\underline{v}) \longleftrightarrow$ combinazioni lineari nulle degli $f^i(\underline{v})$

- $\dim \mathbb{K}[f](\underline{v})$ (immagine) $= \deg \varphi_{f,\underline{v}} = d$ e $\underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^{d-1}(\underline{v})$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ base di $\mathbb{K}[f](\underline{v})$

  $\hookrightarrow$ per la minimalità del grado di $\varphi_{f,\underline{v}}$

  $\alpha_i \in \mathbb{K}$

  $\varphi_{f,\underline{v}} = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0$

- $I(f,\underline{v}) = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid p(f)(\underline{v}) = 0 \} \supset I(f) \Rightarrow \boxed{\varphi_{f,\underline{v}} \mid \varphi_f}$

  perché i polinomi che annullano tutto V annullano in particolare $\underline{v}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ generatori di V

$$\varphi_f = mcm(\varphi_{f,\underline{v}_1}, \varphi_{f,\underline{v}_2}, \dots, \varphi_{f,\underline{v}_m}) = m \quad (\text{monico})$$

Dim.

Mostriamo che $\varphi_f \mid m$ e $m \mid \varphi_f \Rightarrow \varphi_f = m$
entrambi monici

- Mostriamo che $m \in I(f)$ $(\Rightarrow \varphi_f \mid m)$ $\Longleftrightarrow m(f)(\underline{v}) = \underline{0} \ \forall \underline{v} \in V$

  $\underline{v} \in V$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{v}_i$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$, $m = \varphi_{f,\underline{v}_i} \cdot h_i \quad h_i \in \mathbb{K}[x]$

  $m(f)(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m(f)(\underline{v}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (h_i \cdot \varphi_{f,\underline{v}_i})(f)(\underline{v}_i) =$

  $= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (h_i(f) \circ \varphi_{f,\underline{v}_i}(f))(\underline{v}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(h_i(f)\left(\overbrace{\varphi_{f,(\underline{v}_i)}(\underline{v}_i)}^{\underline{0}}\right)\right) = \underline{0}$ ✓

- $\varphi_{f,\underline{v}_1} \mid \varphi_f \,,\ \varphi_{f,\underline{v}_2} \mid \varphi_f \,, \dots ,\ \varphi_{f,\underline{v}_n} \mid \varphi_f \Rightarrow m \mid \varphi_f$

Perché φ_f è un multiplo comune ai $\varphi_{f,\underline{v}_i}$ e il m.c.m. divide tutti i multipli comuni

$\square$

Forma canonica di Jordan per $f: V \to V$ (f triangolarizzabile)

08/03/2024

$\operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^2 \supset \dots$

$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \dots$

$k = \min\{h \mid \operatorname{Im} f^h = \operatorname{Im} f^{h+1}\}$

PROP

(i) $V = \operatorname{Im} f^k \oplus \operatorname{Ker} f^k$ (decomposizione di FITTING)

(ii) $f|_{\operatorname{Ker} f^k}$ è nilpotente, $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ è invertibile

(iii) $\mu_a(0) \geq k$

Esercizio

Se f è diagonalizzabile $\Rightarrow k = 1$ $\quad V = \underbrace{V_0}_{\operatorname{Ker} f} \oplus \underbrace{\dots V_{\lambda_n}}_{\operatorname{Im} f}$

(i) $f^k(\operatorname{Im} f^k) = \operatorname{Im}(f^{2k}) = \operatorname{Im}(f^k)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f^k \cap \operatorname{Ker} f^k = \{0\} \Rightarrow$ sono in somma diretta

(ii) $f|_{\operatorname{Ker} f^k}$ è nilpotente (per definizione)

se $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ conserva le dimensioni $\Rightarrow \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f^k} = \{0\}$

(iii) $\dim \operatorname{Ker} f^k = \mu_a(0)$ posso dirlo perché $p(\lambda) = p(\lambda)|_{\operatorname{Ker} f^k} \cdot p(\lambda)|_{\operatorname{Im} f^k}$ (ha solo autoval nulli; non ha autovalori nulli)

la successione dei $\operatorname{Ker} f^h$ aumenta strettamente di dimensione per $h < k$

$f: V \to V$ $\quad \alpha$ autovalore di f

$f - \alpha\, id$ NON è invertibile

$V = \operatorname{Ker}(f - \alpha\, id)^k \oplus \operatorname{Im}(f - \alpha\, id)^k$

$\operatorname{Ker}(f - \alpha\, id)^k = \hat{V}_\alpha$, $\quad \operatorname{Im}(f - \alpha\, id)^k = \hat{V}'_\alpha$

$\hat{V}_\alpha \Rightarrow$ ("generalizza" l'autospazio V_α, lo contiene)

$\downarrow$ def.

$\{\underline{v} \mid (f - \alpha\, id)^m(\underline{v}) = \underline{0} \text{ per qualche } m\} = \operatorname{Ker}(f - \alpha\, id)^{\mu_a(\alpha)}$

↳ **AUTOSPAZIO GENERALIZZATO**

TEO

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di f

$\Rightarrow V = \hat{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \hat{V}_{\lambda_k}$

dim

$V = \underbrace{\hat{V}_{\lambda_1} \oplus \hat{V}'_{\lambda_1}}_{\text{invarianti}} \Rightarrow \hat{V}_{\lambda_1} \oplus$ $\quad$ procedo per induzione su questa restrizione $f|_{\hat{V}'_{\lambda_1}}$

Concentriamoci su $f|_{\hat{V}_i}$, ha un solo autovalore λ_i

$h = f|_{\hat{V}_{\lambda_i}} - \lambda_i\, id$ ha solo autovalore 0 $\Rightarrow$ nilpotente

$f: V \to V$ con solo autovalore λ $\qquad h = f - \lambda\, id : V \to V$ nilpotente

$$M_B(h) = \begin{bmatrix} J_{0,n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{0,n_k} \end{bmatrix} \qquad J_{0,n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ha una base ciclica: $\{\underline{u}, h(\underline{u}), \dots, \underbrace{h^{n-1}(\underline{u})}_{\in \operatorname{Ker} h \,\cap\, \operatorname{Im} h^{n-1}}\}$

Se h nilpotente, $\min\{n \mid h^n = 0\}$ è l' **indice di nilpotenta di h**

$h^\nu = 0 \Rightarrow \nu \leq \dim V$ perché $\deg p_h = \dim V$ e
$\varphi_h \mid p_h \Rightarrow \deg \varphi_h \leq \deg p_h = \dim V$

$(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^{\overset{\dim V}{\overset{\|}{n}}-1}) \subset (\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^{n-2}) \subset \dots \subset (\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^{m+1}) \subset \dots \subset$
$\subset (\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^{m}) \subset \dots \subset (\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Ker} h$

Rinominiamoli $\quad K^{n-1} \subset K^n \subset \dots \subset K^{m+1} \subset K^m \subset \dots \subset K^1 \subset K^0$

ESEMPIO:

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & & & & & & & & \\ & \boxed{0} & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker} h = \operatorname{Span}\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_5, \underline{e}_7\} = K^0$

$\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h = \operatorname{Span}\{\underline{e}_3, \underline{e}_5, \underline{e}_7\} = K^1$
$\qquad \| $
$\operatorname{Span}\{\underline{e}_3, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_8\}$

$\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^2 = \operatorname{Span}\{\underline{e}_7\} = K^2$
$\qquad \|$
$\operatorname{Span}\{\underline{e}_7\}$

$j_1 = \max\{m \mid K^m \neq 0\}$
$j_2 = \max\{m \mid K^m \supsetneq K^{j_1}\}$
$j_3 = \dots$
$\vdots$
$j_p = \max\{m \mid K^m = \operatorname{Ker} h\}$

$0 \subset K^{j_1} \subsetneq K^{j_2} \subsetneq \dots \subsetneq K^{j_p} = \operatorname{Ker} h$

base di $K^{j_1} = \{\underline{v}_{1,1}, \dots, \underline{v}_{1,t_1}\}$
" " $K^{j_2} = \{\underline{v}_{1,1}, \dots, \underline{v}_{1,t_1}, \underline{v}_{2,1}, \dots, v_{2,t_2}\}$
$\vdots$
" " $K^{j_p} = \{\underbrace{\dots}_{\text{tutti i precedenti}}, \underline{v}_{p,1}, \dots, \underline{v}_{p,t_p}\}$

Nell' esempio di prima le basi sarebbero $\{\underline{e}_7\} \to \{\underline{e}_3, \underline{e}_5, \underline{e}_7\} \to \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_7\}$

$h^2(\underline{u}) = e^7$

$\underline{u} \to h(\underline{u}) \to h^2(\underline{u}) = \underline{e}_7$
$\underline{v} \to h(\underline{v}) \to \underline{e}_5$

$\underline{v}_{11} = h^{j_1}(\underline{u}_{11}) \leftarrow h^{j_1 -1}(\underline{u}_{11}) \leftarrow \cdots \leftarrow \underline{u}_{11}$ (idem per gli altri)

$\vdots$

$\underline{v}_{1,t_1}$ $\quad$ $\underline{v}_{r,s} \in K^{j_M} = \operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^{j_M}$

$v_{2,1}$

$\vdots$ $\quad$ $\exists\ \underline{u}_{r,s} \mid h^{j_M}(\underline{u}_{r,s}) = \underline{v}_{r,s}$

v_{2,t_2} $\quad$ $\underline{u}_{r,s} \to h(\underline{u}_{r,s}) \to \cdots \to h^{j_M}(\underline{u}_{r,s}) = \underline{v}_{r,s}$

$\vdots$

$v_{p,1}$ $\quad$ VEDI SCHEMA SULLE DISPENSE

$\vdots$

v_{p,t_p}

Ogni riga $\overset{= h^M(v_{r,s})}{m_i}$ dà una stringa di lunghezza $j_i + 1$

<u>PROP</u> I $h^{(m)}_{r,s}$ sono una base di V $\quad$ tutti i vettori della tabella formano una base

Corollario: V si decompone in sottospazi ciclici, la matrice di h è della forma di Jordan (ordinando i vettori di ogni stringa da destra a sinistra)

<u>dim</u>

$h^{(m)}_{r,s}$ generano V $\quad$ minimo $\quad$ perché h è NILPOTENTE $\quad$ "m" indice di nilpotenza

$\forall\ \underline{v} \in V \quad \exists\ \ell \mid h^\ell(\underline{v}) = \underline{0}$ $\quad$ $(\ell \leq r)$

① Per induzione su ℓ, dimostriamo che $\underline{v}$ è comb. lineare degli vettori della tabella

- Se $\ell = 0$ o $\ell = 1$ si può generare $\underline{v}$ con la base di Ker h (prima colonna)
  $\hookrightarrow \underline{v} \in \operatorname{Ker} h$
  altrimenti:

$h^{\ell-1}(\underline{v}) \neq \underline{0}$

$h(h^{\ell-1}(\underline{v})) = \underline{0} \qquad h^{\ell-1}(\underline{v}) \in \operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im}(h^{\ell-1}) = K^{\ell-1} = K^{j_S}$

per qualche s $(j_s \geq \ell-1)$

$$h^{\ell-1}(\underline{v}) \overset{\text{hp. induttiva}}{=} \sum_{\substack{r \leq s\\ q}} \alpha_{r,q}\, v_{r,q} = \sum_{\substack{r \leq s\\ q}} \alpha_{r,q}\, h^{j_r}(\underline{u}_{r,q}) =$$

$$= \sum_{\substack{r \leq s\\ q}} \alpha_{rq}\, h^{\ell-1}(h^{j_r - (\ell-1)}(u_{rq}))$$

$$h^{\ell-1}\Big(\underline{v} - \sum \alpha_{rq} \underbrace{h^{j_r - (\ell-1)}\, u_{rs}}_{\text{sono nella tabella}}\Big) = 0 \Rightarrow$$ per induzione è comb. lineare di vettori della tabella $\Rightarrow \underline{v}$ è comb. lineare di $u^{(m)}_{r,s}$

② Indipendenza lineare degli $u^{(s)}_{r,j}$

$$\sum \alpha^{(s)}_{r,j}\, u^{(s)}_{r,j} = \underline{0} \Rightarrow h^{j_1}(u^{(s)}_{r,j}) = \underline{0} \quad \text{se } r > 0 \vee s \geq 1$$

$h^{j_1}(u_{rj}^{(0)}) = \underline{v}_{1,j}$

$\Rightarrow$ della sommatoria, applicando h^{j_1} rimane

$$\sum_j \alpha_{1,j}^{(0)} v_{1j} = 0 \Rightarrow \alpha_{1,j}^{(0)} = 0 \qquad j = 1, \dots, t_1$$

Applico poi h^{j_1-1} e sopravvivono quelli della 2ª colonna e così via

Ci sono t_1 blocchi di ordine j_1+1, t_2 blocchi di ordine j_2+1, ...

$$\sum_i t_i = \underset{\mu_g(0) \text{ per } h}{\dim \operatorname{Ker} h} = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda id) = \underset{\text{per } f}{\mu_g(\lambda)}$$

Supponiamo che h sia nilpotente

n° blocchi $= \mu_g(0) = \dim \operatorname{Ker} h = n - \operatorname{rg} h$ (n° blocchi = = num. di colonne nulle)

$\operatorname{rg}(h^2)$

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Possibili forme di Jordan:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right]$$

ma dato che $\operatorname{rg} A^2 = 1$

allora quella giusta è necessariamente questa

(l'altra al quadrato fa 0)

13/03/2024

RECAP

V spazio vettoriale$/_{\mathbb{K}}$, $f \in \mathcal{L}(V)$

$$\sigma_f : \mathbb{K}[x] \to \mathcal{L}(V)$$
$$p \mapsto p(f)$$

$\operatorname{Im}(\sigma_f) = \mathbb{K}[f]$

$\operatorname{Ker}(\sigma_f) = I(f) \to$ generato dal polinomio minimo

$$\sigma_{f,v} : \mathbb{K}[x] \to V$$
$$p \mapsto p(f)(\underline{v})$$

$\operatorname{Im}(\sigma_{f,v}) = \mathbb{K}[f](\underline{v}) = \operatorname{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v}), \dots)$

sottospazio ciclico generato da $\underline{v}$

$\operatorname{Ker}(\sigma_{f,v}) = I(f,\underline{v})$ ideale di $\underline{v}$ relativo a f

$\varphi_{f,\underline{v}}$

I polinomi di $I(f,\underline{v})$ corrispondono alle combinazioni lineari nulle dei $f^j(\underline{v})$

$\dim \mathbb{K}[f](\underline{v}) = \deg \varphi_{f,\underline{v}} = d$ e

$\underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^{d-1}(\underline{v})$ sono una base di $\mathbb{K}[f](\underline{v})$

$f^d(\underline{v}) = a_0\underline{v} + a_1 f(\underline{v}) + \dots + a_{d-1} f^{d-1}(\underline{v})$

$\Rightarrow \varphi_{f,\underline{v}} = x^d - (a_0 + a_1 x + \dots + a_{d-1} x^{d-1})$

$I(f,\underline{v}) \supset I(f) \Rightarrow \varphi_{f,\underline{v}} \mid \varphi_f \mid p_f$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generatori di V, $\varphi_f = \operatorname{mcm}(\varphi_{f,\underline{v}_1}, \dots, \varphi_{f,\underline{v}_n})$

ES.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \varphi_A = ? \qquad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$$

$$\underline{e}_1 \xrightarrow{A} 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \xrightarrow{A} 2(2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) + (-\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) + (3\underline{e}_2 - \underline{e}_3)$$
$$= 4\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3$$

è indipendente dai precedenti? (indicati con $\uparrow$)

NO: $A^2 \underline{e}_1 = 4(2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) - 4(\underline{e}_1)$

$A^2 \underline{e}_1 = 4A\underline{e}_1 - 4\underline{e}_1 \iff (A^2 - 4A + 4)\underline{e}_1 = 0$

$\varphi_{A,\underline{e}_1} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Si procede nello stesso identico modo per $\underline{e}_2$ ed $\underline{e}_3$ e si trova:

$\varphi_{A,\underline{e}_2} = x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$ $\quad \varphi_{A,\underline{e}_3} = \varphi_{A,\underline{e}_2} = (x+4)(x-2)$

verificare!

$\varphi_A = \text{mcm}(\varphi_{A,e_1}, \varphi_{Ae_2}, \varphi_{Ae_3}) = (x+4)(x-2)^2$

il 3° polinomio è inutile perché già il mcm tra e_1 ed e_2 è di grado 3

Il problema degli ultimi due metodi visti è fattorizzare un polinomio, il primo (prendere le potenze di un endomorfismo e vedere la prima che dipende) funziona sempre.

OSS $\exists \underline{v} \in V \mid \underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^k(\underline{v})$ lin. indipendenti $\Rightarrow \deg \varphi_f \geq k+1$

e se $\deg \varphi_f = \dim V \ (= \deg p_f) \Rightarrow \varphi_f = \pm p_f$

Quindi $\exists \underline{v} \in V \mid v, f(\underline{v}), \dots, f^{k-1}(\underline{v})$ base di $V \Rightarrow \varphi_f = \varphi_{f,\underline{v}} = \pm p_f$

di dim. k

BASE CICLICA

(è vero anche il viceversa, poiché, in generale, $\exists \underline{v} \in V \mid \varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$)

Per cui esiste una base ciclica

$\Updownarrow$

$\varphi_f = \pm p_f$

Nell'esercizio precedente:

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = 4 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \dots = -9 \cdot 4 \neq 0 \Rightarrow$ sono indipendenti

$\Rightarrow \{\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v})\}$ formano una base ciclica e $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f = \pm p_f$

OSS $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, $W = \mathbb{K}[f](\underline{v}) = \text{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), \dots)$

allora W è f-invariante e $\varphi_{f|_W} = \varphi_{f,\underline{v}} \ (= \pm p_{f|_W})$

$\varphi_{f|_W,\underline{v}} \mid \varphi_{f|_W}$

$I(f|_W, \underline{v}) = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid p(f)(\underline{v}) = \underline{0} \}$

$(f|_W)(\underline{v}) = f(\underline{v})$

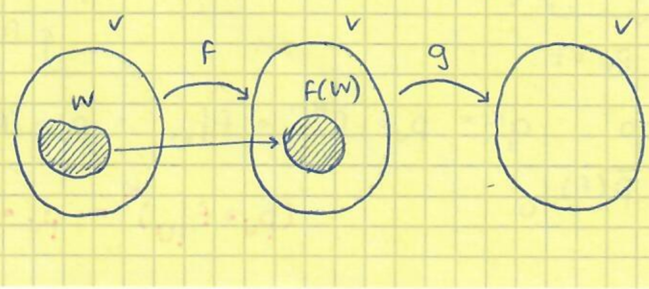
$(f|_W)^k(\underline{v}) = f^k(\underline{v})$

$\Downarrow$

$p(f|_W)(\underline{v}) = p(f)(\underline{v})$

$\Rightarrow I(f|_W, \underline{v}) = I(f, \underline{v}) \Rightarrow \varphi_{f|_W,\underline{v}} = \varphi_{f,\underline{v}}$

$f, g \in \mathcal{L}(V)$ $\quad W \subset V$ sottospazio



$(g \circ f)|_W = g \circ (f|_W) =$

$= g|_{f(W)} \circ f|_W$

Se W è f-invariante $\quad f(W) \subset W$, $\quad g|_W \circ f|_W$

W f-invariante , $f|_W \subset \mathcal{L}(W)$, $\quad (f^k)|_W = (f|_W)^k \quad \forall k \geq 0$

$$|_W : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(W,V) \quad \text{è lineare}$$
$$g \mapsto g|_W$$

$$g_1, g_2 \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow (g_1 + g_2)|_W = g_1|_W + g_2|_W$$

$$\lambda \in \mathbb{K},\ g \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow (\lambda g_1)|_W = \lambda (g_1)|_W$$

$\Rightarrow \quad p \in \mathbb{K}[x]$

$\quad p(f)|_W = p(f|_W)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{f-invariante}}}{I(f|_W)} = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid \underset{\substack{\shortparallel \\ p(f)|_W}}{p(f|_W)} = 0 \} = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid p(f)(W) = \{0\} \}$$

$$= \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid W \subset \ker p(f) \}$$

$$I(f|_W) \supset I(f) \Rightarrow \varphi_{f|_W} \mid \varphi_f$$

↳ un sottospazio f-invariante fornisce un divisore del polinomio minimo

---

$V = W \oplus U \quad W$ f-invariante

$g = \underbrace{p_U}_{\substack{\text{proiezione} \\ \text{su } U}} \circ f|_U \qquad p_U : V \to V$

$\qquad p_U|_U = id_U \qquad p_U|_W = 0$

$\qquad \operatorname{Im} p_U = U, \quad \ker p_U = W$

OSS $\quad p_U \circ f \circ p_U = p_U \circ f \quad$ infatti $\quad \underline{v} \in V$

$$\underline{v} = \underset{\in W}{\underline{w}} + \underset{\in U}{\underline{u}} \Rightarrow (p_U \circ f \circ p_U)(\underline{v}) = (p_U \circ f)(\underline{u}) = p_U(f(\underline{u}))$$

$$(p_U \circ f)(\underline{v}) = p_U(f(\underline{u}) + \underset{\substack{\downarrow \\ \in W \\ \text{f-invariante}}}{f(\underline{w})}) = p_U(f(\underline{u}))$$

$$g^k = (p_U \circ f|_U)(p_U \circ f|_U) \cdots (p_U \circ f|_U) = p_U \circ f \circ p_U \circ f \circ \cdots \circ p_U \circ f|_U =$$

$$= p_U \circ f \circ \cdots \circ \underbrace{p_U \circ f \circ \cancel{p_U}}_{= p_U \circ f} \circ f|_U \qquad (id_U = p_U \circ id_V|_U)$$

↑ funziona anche per $k=0$

Iterando k volte ottengo $\quad g^k = p_U \circ f^{k-1} \circ f|_U = p_U \circ (f^k)|_U$

$\overline{p} \in \mathbb{K}[x] \quad \overline{p}(g) = p_U \circ \overline{p}(f)|_U$

$$(p_U \circ f|_U)^k = p_U \circ (f^k)|_U$$

$$I(g) = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid \underbrace{p(g)}_{\overset{\shortparallel}{p_U \circ p(f)|_U}} = 0 \} = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid \underbrace{\mathrm{Im}\, p(f)|_U}_{\overset{\shortparallel}{p(f)(U)}} \in \underbrace{\mathrm{Ker}\, p_U}_{\overset{\shortparallel}{W}} \}$$

$$= \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid p(f)(U) \subset W \}$$

$$I(g) \supset I(f) \implies \varphi_g \mid \varphi_f$$

$f \in \mathcal{L}(V)$ $\quad p_f$ e φ_f hanno gli stessi fattori irriducibili

Se $p_f = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ $\quad p_i \in \mathbb{K}[x]$ monici, irriducibili, $m_i \geq 1$

$\implies \varphi_f = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ $\quad$ con $1 \leq n_i \leq m_i \quad \forall i = 1, \dots, k$

Dim.

$q \in \mathbb{K}[x]$ irriducibile e mostriamo che

$$q \mid p_f \underset{①}{\implies} q \mid \varphi_f \quad \text{e} \quad q \mid \varphi_f \underset{②}{\implies} q \mid p_f$$

② $q \mid \varphi_f$ e $\varphi_f \mid p_f$ (Ham-Cay) $\implies q \mid p_f$

① Per induzione sulla dimensione di V

PASSO BASE: $\dim V = 1$ $\quad A = [a] \implies p_A = a - \lambda$, $\varphi_A = \lambda - a$

$\varphi_f = \pm p_f$

Supponiamo che sia vero per (endomorfismi su spazi di) dimensione $< \dim V$

Fissiamo $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $W = \mathrm{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v}), \dots) \neq \{\underline{0}\}$ ← modo efficace di produrre sottospazi f-invarianti

$\implies$ Sia U supplementare di W

$V = U \oplus W$ $\quad \dim U < \dim V$

C base di W, D base di $U \implies B = C \cup D$ base di V

$$M_B^B(f) = \left[\begin{array}{c|c} M_C^C(f|_W) & * \\ \hline 0 & M_D^D(g) \end{array}\right] \qquad g = p_U \circ f|_U$$

$p_f = p_{f|_W} \cdot p_g$ $\qquad q \mid p_f \implies q \mid p_{f|_W} \vee q \mid p_g$ perché è irriducibile

? ⇒ perché ha una base ciclica

- Se $q \mid p_{f|_W} = \pm \varphi_{f|_W} \mid \varphi_f$ → non serve neanche l'ip. induttiva

- Se $q \mid p_g \implies q \mid \varphi_g \mid \varphi_f$ — divisibilità vista poco fa

per ip. induttiva

$\dim V = n$, $f \in \mathcal{L}(V)$ nilpotente $(\exists\, k > 1 \mid f^k = 0)$

$\Rightarrow p_f = (-1)^n \lambda^n$

Infatti: $f^k = 0 \Rightarrow x^k \in I(f) \Rightarrow \varphi_f \mid x^k$

$\varphi_f = x^h \quad h \leq k \,,\; h \geq 1$

$\Rightarrow p_f(x) = \pm x^n$ (non può avere altri fattori irriducibili per la dim. precedente)

$\downarrow$

Questa dimostrazione <u>non</u> usa la triangolarizzabilità

$V = U + W$ $\quad U, W$ f- invarianti

$f \in \mathcal{L}(V)$ $\quad f|_U \in \mathcal{L}(U)$

$f|_W \in \mathcal{L}(W)$

$\varphi_f = \text{mcm}(\varphi_{f|_W}, \varphi_{f|_U}) = m$ (monico)

Mostriamo che $\varphi_f \mid m$ e $m \mid \varphi_f \Rightarrow \varphi_f = m$ gradi uguali, si dividono e sono monici

- $\underbrace{\varphi_{f|_U} \mid \varphi_f \text{ e } \varphi_{f|_W} \mid \varphi_f}_{\text{multiplo comune di } \varphi_{f|_U} \text{ e } \varphi_{f|_W}} \Rightarrow m \mid \varphi_f$

  per le prop. di m.c.m (divide tutti i multipli comuni)

- Mostriamo che $m \in I(f) \Rightarrow \varphi_f \mid m$

  $m(f)(\underline{v}) \overset{?}{=} \underline{0} \quad \forall \underline{v}$?

  $\exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x]$ tali che:

  $m = h_1 \varphi_{f|_W}$, $m = h_2 \varphi_{f|_U}$

  $\underline{v} \in V$ lo scrivo come $\underline{v} = \underset{\in W}{\underline{w}} + \underset{\in U}{\underline{u}}$

  $m(f)(\underline{v}) = m(f)(\underline{w} + \underline{u}) = m(f)(\underline{w}) + m(f)(\underline{u}) =$

  $= (h_1 \varphi_{f|_W})(f)(\underline{w}) + (h_2 \varphi_{f|_U})(f)(\underline{u}) \underset{\text{omo di anelli}}{=} h_1(f)(\varphi_{f|_W}(f)(\underline{w})) + h_2(f)(\varphi_{f|_U}(f)(\underline{u})) =$

  $= h_1(f)(\underline{0}) + h_2(f)(\underline{0}) = \underline{0} \quad \forall\, \underline{v} \in V$

  $\Rightarrow m(f) = 0 \Rightarrow m \in I(f) \Rightarrow \varphi_f \mid m$

$\square$

14/03/2024

V spazio vettoriale$/\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(V)$

$\forall p \in \mathbb{K}[x]$ $\quad \operatorname{Ker} p(f)$, $\operatorname{Im} p(f)$ sono f-invarianti

$(p(f) \circ f = f \circ p(f))$

↳ Se due endomorfismi commutano, gli autospazi di uno (tra cui il Ker) sono invarianti per l'altro)

$\operatorname{Ker} p(f) = V \iff p \in I(f)$

$(\operatorname{Im} p(f) = \{\underline{0}\})$

$\operatorname{Ker} p(f) = \{\underline{0}\} \iff p(f)$ è invertibile $\iff p$ e φ_f sono coprimi

$(\operatorname{Im} p(f) = V)$ $\qquad \operatorname{MCD}(p, \varphi_f) = 1$

$\Leftarrow$ Identità di Bezout

$\exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x] \mid 1 = \operatorname{MCD}(p, \varphi_f) = h_1 p + h_2 \varphi_f$

Valutiamo su f:

$$id_V = h_1(f)\, p(f) + h_2(f) \underbrace{\varphi_f(f)}_{=0} = h_1(f)\, p(f)$$

$\Rightarrow p(f)^{-1} = h_1(f)$ cioè $p(f)$ è invertibile

$\Rightarrow$ $q = \operatorname{MCD}(p, \varphi_f)$

Supponiamo che $\deg q > 0$ (per assurdo)

$\exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x] \mid p = h_1 q \quad \varphi_f = h_2 q$

Valutiamo su f

$p(f) = h_1(f)\, q(f) \qquad \varphi_f(f) = h_2(f)\, q(f) = 0$

$h_1, h_2 \neq 0$

$p(f)$ isomorfismo $\Rightarrow h_1(f), q(f)$ invertibili

$0 = h_2(f) \underbrace{q(f)}_{\text{invertibile}} \Rightarrow h_2(f) = 0 \in I(f)$

perché $\deg q > 0$

ma $h_2 \neq 0$ e $\deg h_2 < \deg \varphi_f$ ↯

assurdo per minimalità di φ_f

$\Rightarrow \deg q = 0 \Rightarrow q = 1$ (l'MCD è monico)

$\exists$ base ciclica per $V \iff \varphi_f = \pm p_f$

$\Rightarrow$ già vista

$\Leftarrow$ $\exists\, \underline{v} \in V \mid \varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$ $\quad (\Rightarrow \underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^{n-1}(\underline{v})$ è una base ciclica di $V)$

↓

Dim. Nel caso in cui $\mathbb{K}$ è ∞

LEMMA: $\mathbb{K}$ infinito, V spazio vettoriale$/\mathbb{K}$, V non è unione finita di sottospazi propri $(U \subsetneq V)$

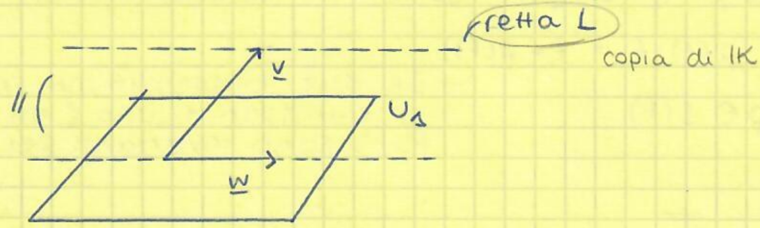
Dimostriamo per induzione su k, che se $U_1, \dots, U_k \subset V$ sottospazi propri $\Rightarrow V \neq U_1 \cup \dots \cup U_k$

- $k = 1$ $\quad U_1$ è proprio $\Rightarrow V \neq U_1$
- $k > 1$ $\quad$ se $U_1 \subset U_2 \cup \dots \cup U_k \Rightarrow U_1 \cup \dots \cup U_k = U_2 \cup \dots \cup U_k$

↳ $\neq$ da V per ip. induttiva

- Se $U_1 \not\subseteq U_2 \cup \dots \cup U_k \Rightarrow \exists\, \underline{w} \in U_1$ ma $\underline{w} \notin U_2 \cup \dots \cup U_k$ $(\underline{w} \neq \underline{0})$

U_1 è proprio $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \in V$, $\underline{v} \notin U_1$ $(\underline{v} \neq 0)$



$L = \{ a\underline{w} + \underline{v} \mid a \in \mathbb{K} \} = \mathrm{Span}(\underline{w}) + \underline{v}$

$\mathbb{K} \to L$

$a \mapsto a\underline{w} + \underline{v}$ è biunivoca

surgettiva per definizione di L

iniettiva:

$a_1, a_2 \in \mathbb{K}$

$a_1\underline{w} + \cancel{\underline{v}} = a_2\underline{w} + \cancel{\underline{v}}$

$(a_1 - a_2)\underline{w} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow L$ è infinito (copia di $\mathbb{K}$)

Come interseca gli altri sottospazi?

- $L \cap U_1 = \emptyset$ infatti $\underline{u} \in L \cap U_1$ $\exists\, a \in \mathbb{K} \mid \underline{u} = a\underline{w} + \underline{v}$

$$\underline{v} = \underbrace{\underline{u}}_{\in U_1} - \underbrace{a\underline{w}}_{\in U_1} \Rightarrow \underline{v} \in U_1 \;\lightning$$

- $\underset{i>0}{L \cap U_i}$ è data al più da un vettore

Mostriamo che se $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in L \cap U_i \Rightarrow \underline{w}_1 = \underline{w}_2$

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \mid \underline{w}_1 = \lambda_1 \underline{w} + \underline{v}$, $\underline{w}_2 = \lambda_2 \underline{w} + \underline{v}$

$\underline{v} = \underline{w}_1 - \lambda_1 \underline{w} = \underline{w}_2 - \lambda_2 \underline{w}$

$\underbrace{\underline{w}_1 - \underline{w}_2}_{\in U_i} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{w}$

Se fosse $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \underline{w} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) \Rightarrow \underline{w} \in U_i \;\lightning$

per come abbiamo scelto $\underline{w}$, cioè appartenente solo al sottospazio U_1

Allora $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \underline{w}_1 = \underline{w}_2$

- $L \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)$ contiene al più $k-1$ vettori ma L è infinito

$\Rightarrow \exists\, \underline{v} \in L \mid \underline{v} \notin U_1 \cup \dots \cup U_k \Rightarrow V \neq U_1 \cup \dots \cup U_k$

$\square$ (lemma)

<u>Dim. proposizione iniziale</u> $\boxed{\exists\, \underline{v} \in V \mid \varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f}$

$S = \{ \varphi_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in V \quad \underline{v} \neq \underline{0} \} \subset \{ \text{divisori di } \varphi_f \}$

polinomi minimi di tutti i vettori di $\underline{v}$

insieme finito $\Rightarrow S$ finito

$\exists\, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V \mid S = \{ \varphi_{f,\underline{v}_1}, \dots, \varphi_{f,\underline{v}_k} \}$

$\underline{v} \in V$, $\varphi_{f,\underline{v}} \in S \Rightarrow \exists i \mid \varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_{f,\underline{v}_i}$

$$\varphi_{f,(\underline{v}_i)}(f)(\underline{v}) = \varphi_{f,\underline{v}}(f)(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \in \ker \varphi_{f,\underline{v}_i} \in \ker \varphi_{f,\underline{v}_i}(f)$$

$$\Rightarrow V = \ker \varphi_{f,\underline{v}_1}(f) \cup \dots \cup \ker \varphi_{f,\underline{v}_k}(f)$$

$\hookrightarrow$ per il lemma NON possono essere tutti propri

$$\Rightarrow \exists j \mid \ker \varphi_{f,\underline{v}_j}(f) = V$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi_{f,\underline{v}_j}(f) = 0 \iff \varphi_{f,\underline{v}_j} \in I(V) \iff$$

$$\iff \varphi_f \mid \varphi_{f,\underline{v}_j} \text{ ma } \varphi_{f,\underline{v}_j} \mid \varphi_f \Rightarrow \varphi_{f,\underline{v}_j} = \varphi_f$$

□

Decomposizione di Fitting

$f \in \mathcal{L}(V)$ $\dim V < \infty$

$$\{\underline{0}\} \subsetneq \ker f \subsetneq \ker f^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker f^m = \ker f^{m+1} = \dots$$

$$V \supsetneq \operatorname{Im} f \supsetneq \operatorname{Im} f^2 \supsetneq \dots \supsetneq \operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^{m+1} = \dots$$

$$\uparrow$$

$$V = \underbrace{\ker f^m \oplus \operatorname{Im} f^m}_{\text{sottospazi invarianti}} \qquad (\ker f^{m-1} \subsetneq \ker f^m)$$

$g = f|_{\ker f^m}$ è nilpotente $g^m = 0$ ma $g^{m-1} \neq 0 \Rightarrow \varphi_g = x^m$

$h = f|_{\operatorname{Im} f^m}$ è invertibile $\ker h = \operatorname{Im} f^m \cap \ker f = \{\underline{0}\}$

$\uparrow$ dalla decomposizione di Fitting osservando che $\ker f \subsetneq \ker f^m$

$\Rightarrow$ 0 non è un autovalore di $h \Rightarrow \varphi_h(0) \neq 0$ cioè $x \nmid \varphi_h$

$$\varphi_f = \operatorname{mcm}(\varphi_g, \varphi_f) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coprimi}}}{\varphi_g \varphi_f} = x^m q(x) \qquad q(0) \neq 0$$

$\Rightarrow m = \mu_a(0)$ in φ_f ($= \mu_a(0)$ in φ_g)

UNICITÀ DELLA DECOMPOSIZIONE: esiste un'unica scomposizione tale che ($\exists!$)

- $V = U \oplus W$ f-invarianti
- $f|_U$ è nilpotente
- $f|_W$ è invertibile

ed è la decomposizione di Fitting

dim

$f|_U$ è nilpotente $\Rightarrow \exists k \mid (f|_U)^k = 0 \iff f^k(U) = \{\underline{0}\} \iff$

indice in cui si stabilizza la succ. di Fitting

$$\iff U \subset \ker f^k \subset \ker f^m$$

la somma non è più diretta (?)

$$\operatorname{Im} f^m = f^m(V) = f^m(U \oplus W) = \underbrace{f^m(U)}_{\{\underline{0}\}} + f^m(W) = f^m(W) = W$$

non si intersecano perché sono invarianti ma potrebbero non ricoprire tutto V

invariante e invertibile $\Rightarrow f(W) = W$

$\dim U = \dim V - \dim W = \dim V - \dim \operatorname{Im} f^m = \dim \operatorname{Ker} f^m$

Dall' inclusione + dimensioni $U \subset \operatorname{Ker} f^m \Rightarrow U = \operatorname{Ker} f^m$ $\square$

$$V = \underset{\|}{\operatorname{Ker} f^m} \oplus \operatorname{Im} f^m \qquad \varphi_f = \underset{x^m}{\varphi_g}\, \underset{q(x)}{\varphi_h} \quad \text{coprimi}$$

$\overset{*}{=}$ (11)

TESI $\rightarrow \operatorname{Ker} \varphi_g(f) \oplus \operatorname{Ker} \varphi_h(f) \;(= \operatorname{Ker} q(f))$

$\overset{*}{=}$ $V, f,\ \varphi(f)$ polinomio minimo $\Rightarrow V = \operatorname{Ker} \varphi(f)$

$\operatorname{Ker} f^m = U$; $\operatorname{Im} f^m = W$ $\qquad V = U \oplus W$

$W \subset \operatorname{Ker} q(f) = \operatorname{Ker} \varphi_h(f) \qquad h = f|_W$

$\varphi_h \in I(h) = \{ p \in \mathbb{K}[x] \mid W \subset \operatorname{Ker} p(f) \}$

$$V = \overset{U}{\operatorname{Ker} f^m} \oplus \overset{W}{\operatorname{Ker} q(f)} \Rightarrow \dim W = \dim \operatorname{Ker} q(f) \Rightarrow W = \operatorname{Ker} q(f)$$

$x^m, q(x)$ sono coprimi

$\downarrow$ identità di Bezout

$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x] \mid 1 = h_1(x) x^m + h_2(x) q(x)$

Valutando su f

$id_V = h_1(f) f^m + h_2(f) q(f)$ se $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f^m \cap \operatorname{Ker} q(f)$

$$\Rightarrow \underline{v} = h_1(f)(\underbrace{f^m(\underline{v})}_{= 0}) + h_2(f)(\underbrace{q(f)(\underline{v})}_{= 0}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f^m$ e $\operatorname{Ker} q(f)$ sono in somma diretta

Bisogna far vedere che formano tutto V

$$\underset{\in V}{\underline{v}} = \underset{\in \operatorname{Ker} q(f)}{h_1(f)(f^m(\underline{v}))} + \underset{\in \operatorname{Ker} f^m}{h_2(f)(q(f)(\underline{v}))}$$

$$q(f)(h_1(f)(f^m(\underline{v}))) = (q(f)\, h(f)\, \sigma_f(x^m))(\underline{v}) =$$

$$= (\underbrace{q(x)\, h(x)\, x^m}_{\varphi_f})(f)(\underline{v}) = (h(x)\varphi_f(x))(f)(\underline{v}) = \underline{0}$$

(idem per l'altro termine)

Esercizio: teorema di decomposizione primaria

$$p, q \in \mathbb{K}[x] \mid MCD(p,q) = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker} p(f) \oplus \operatorname{Ker} q(f) = \operatorname{Ker}(p(f)q(f)) = (pq)(f)$$

Supponiamo di avere $f, g \in \mathcal{L}(V) \mid \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g$

Allora $f^2 g = f \Rightarrow g^2 f = g$

Dim. la decomposizione di Fitting di f:

$$V = \underset{\text{base } C}{\operatorname{Ker} f^m} \oplus \underset{\text{base } D}{\operatorname{Im} f^m} \qquad m \geq 1 \qquad B = C \cup D \text{ base di } V$$

$$A = M_B^B(f) = \left[\begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right]$$

N è nilpotente

M è invertibile

$$\operatorname{Im}(f^2 g) \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$$

$\underset{\displaystyle \operatorname{Im} f}{\shortparallel}$

$V \supsetneq \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 = \cdots \Rightarrow n = 1$

$V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Rightarrow N = 0$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right] = B$$

$$f^2 g = f \Rightarrow A^2 B = A \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M^2 R & M^2 S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^2 R = 0 \text{ e } M^2 S = M \underset{M \text{ invertibile}}{\Rightarrow} R = 0, \ S = M^{-1}$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & M^{-1} \end{array}\right]$$

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & -QM \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\uparrow}\begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$$

invertibile
(corrisponde a certe operazioni di riga)

(Con le righe indipendenti di M^{-1} riesco ad annullare Q)

$$\Rightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} = \operatorname{rg} P + \operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M \Rightarrow \operatorname{rg} P = 0$$

cioè $P = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \qquad \underset{g^2 f}{B^2 A} = \begin{bmatrix} 0 & QM^{-1} \\ 0 & M^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \underset{\displaystyle B}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 0 & Q \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}}}$$

$$\Rightarrow g^2 f = g$$

f triangolabile, $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ 15/03/2024
Manfre

$$p_f = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{\mu_i} \qquad \varphi_f = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{n_i} \qquad 1 \leq n_i \leq \mu_i$$

$$\forall i \quad \{0\} \subsetneq Ker(f - \lambda_i id) \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{Ker(f - \lambda_i id)^{n_i}}_{= \hat{V}_{\lambda_i}(f)} = \dots = Ker(f - \lambda_i id)^{\mu_i}$$

$\hat{V}_{\lambda_i}(f)$ autospazio generalizzato rispetto all'autovalore λ_i

$$V = \hat{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \hat{V}_{\lambda_k}$$

$$\varphi(f)|_{\hat{V}_{\lambda_i}} = (t - \lambda_i)^{n_i} \qquad p_{f|\hat{V}_{\lambda_i}} = (\lambda_i - t)^{\dim \hat{V}_{\lambda_i}}$$

$$p_f = p_{f|\hat{V}_{\lambda_1}} \cdots p_{f|\hat{V}_{\lambda_k}} \Rightarrow \dim \hat{V}_{\lambda_i} = \mu_i = \mu_a(\lambda_i, f)$$

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\dim V = 5$

$\exists B$ base di $V \mid M_B^B(f) = A$

$\downarrow$ polinomio caratteristico

$$p_A = (1-t)^3 (1+t)^2 \Rightarrow Sp(f) = \{\pm 1\}$$
$\Rightarrow$ triangolabile

$$V = \hat{V}_1(f) \oplus \hat{V}_{-1}(f)$$

, o esp. minore (a seconda del pol. minimo)

$\hat{V}_1(f) = Ker(f - id_V)^3$ $\quad$ $\dim \hat{V}_1(f) = 3$

$\hat{V}_{-1}(f) = Ker(f + id_V)^2$ $\quad$ $\dim \hat{V}_{-1}(f) = 2$

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A - I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ ha rango 3 $\qquad$ 2 blocchi (entrambi 1×1)

$\dim(Ker(A+I)) = 5 - 3 = 2$

$\{0\} \subsetneq Ker(A+I) = \dots = \dots$

$\hat{V}_{-1}(f) = Ker(A+I) = Ker(f + id_V)$

$\Downarrow$ ha rango 3 $\qquad$ 2 blocchi (uno 2×2 e uno 1×1)

$\dim(Ker(A-I)) = 2$

$\{0\} \subsetneq \underset{2}{Ker(A-I)} \subsetneq \underset{3}{Ker(A-I)^2} = \dots$

$\hat{V}_1(f) = Ker(A-I)^2 = Ker(f - id_V)^2$

$\Rightarrow \varphi_f = (x-1)^2(x+1)$

$\mathbb{R}^3 = \underset{\hat{V}_{-1}(f)}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Ker}(f-id)^2}} \oplus \underset{\hat{V}_1(f)}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Ker}(f+id_V)}}$ $\Rightarrow$ fare la forma normale di Jordan $\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

f triangolabile $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ $\varphi_f = \prod_{i=1}^{k} (t-\lambda_i)^{n_i}$

$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \hat{V}_{\lambda_i}$ $\quad f|_{\hat{V}_{\lambda_i}}$ è triangolabile e $Sp(f|_{\hat{V}_{\lambda_i}}) = \{\lambda_i\}$

B_i base a bandiera per $f|_{\hat{V}_{\lambda_i}}$ $\left(M_B^B(f|_{\hat{V}_{\lambda_i}}) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} \right)$

$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ base di V a bandiera per f

$$M_B^B(f) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} \lambda_k & * \\ 0 & \lambda_k \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Una base di Jordan per f è data da una base a bandiera "buona" in ogni $\hat{V}_{\lambda_i}$:

$M_{B_i}^{B_i}(f|_{\hat{V}_{\lambda_i}})$ sia a blocchi del tipo $J(\lambda_i, h) = \left.\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}\right\} h$

blocco di Jordan di ordine h relativo a λ_i

Poniamo $g = f - \lambda_i id_V$, $m = n_i$

$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} g \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} g^m = \operatorname{Ker} g^{m+1} = \dots$

Per ottenere una base di $V_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Ker} g^m$ si può studiare

$h = g|_{\operatorname{Ker} g^m}$

- h è nilpotente
- $\operatorname{Ker} h^j = \operatorname{Ker} g^j$ (perché il complementare di $\operatorname{Ker} g^m$ è invertibile rispetto a g)

Basta quindi studiare il seguente caso: $g \in \mathcal{L}(V)$ nilpotente, $g^m = 0$, $g^{m-1} \neq 0$, $\varphi_g = x^m$

$U_i = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g^i \quad i = 1, \dots, m-1$

$\underset{\text{Fitting}}{\{0\} \neq} U_{m-1} \subset U_{m-2} \subset \dots \subset U_1 \subset \underbrace{\operatorname{Ker} g}_{\text{autospazio relativo a } \lambda_i}$ $\rightarrow$ alcune potrebbero essere uguaglianze

$v_1^{(m-1)}, \dots, v_{d_{m-1}}^{(m-1)}$ base di U_{m-1}

Completiamo a base di U_{m-2} con $v_1^{(m-2)}, \dots, v_{d_{m-2}}^{(m-2)}$

" U_{m-3} con $v_1^{(m-3)}, \dots, v_{d_{m-3}}^{(m-3)}$

⋮

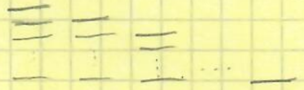
" $\operatorname{Ker} g$ con $v_1^{(0)}, \dots, v_{d_0}^{(0)}$

$v_1^{(m-1)} \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g^{m-1} \Rightarrow \exists\, u_1^{(m-1)} \mid g^{m-1}(u_1^{(m-1)}) = v_1^{(m-1)}$

$$\begin{array}{l} u_1^{(m-1)} \in \ker g^m \\ \downarrow g \\ g(u^{(m-1)}) \in \ker g^{m-1} \\ \downarrow g \\ \vdots \\ \downarrow g \\ g^{m-1}(u_1^{(m-1)}) = v_1^{(m-1)} \neq \underline{0} \quad \llcorner \in \ker g \\ \downarrow g \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ si costruisce questa torre anche per gli altri vettori del Ker e per gli altri vettori di completamento

(VEDI SCHEMA A SCALA NELLA LEZIONE DI MANFRE DEL 15/03/2024)



Prendendoli tutti ottengo una base di V

Ordinando queste colonne dal basso verso l'alto si ottiene una base di Jordan:

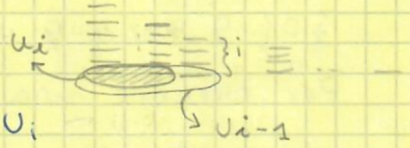
$v_1^{(m-1)} = g^{m-1}(u_1^{(m-1)}),\ g^{m-2}(u_1^{(m-1)}), \dots$

$M(g) = J(0,m)$, idem con gli altri $v_1^{(m-2)}, v_1^{(m-3)} \dots$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$J(0,m-1) \quad J(0,m-2)$

$\Rightarrow$ • $\exists$ un blocco di taglia m (il primo blocco c'è sempre) ed è la massima taglia dei blocchi

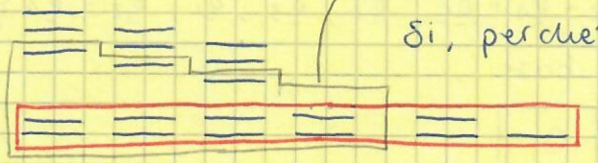


- \# blocchi di taglia m = $\dim U_{m-1}$
- \# blocchi di taglia i = $\dim U_{i-1} - \dim U_i$
- \# blocchi di taglia 1 = $\dim \operatorname{Ker} f - \dim U_1$
- \# di blocchi totali = $\dim \operatorname{Ker} g = \mu_g(0)$

Computazionalmente per trovare una base di Jordan conviene trovare "le teste" delle torri (a cui applicare g per trovare gli altri

$\in \operatorname{Im} g$ e sono in num. giusto ($\dim V - \dim \operatorname{Ker} g$)

$\Rightarrow$ sono una base di $\operatorname{Im} f$



$\in \operatorname{Im} g^2$, sono in numero giusto?

Sì, perché quelli in rosso sono una base di $\operatorname{Ker} g^2$

$\in \operatorname{Ker} g^2$

(così per $\operatorname{Im} g^3, \operatorname{Ker} g^3$; $\operatorname{Im} g^4, \operatorname{Ker} g^4, \dots$)

B_M^M $\quad B_{M-1}^{M-1}$

$\operatorname{Ker} g^M = \operatorname{Ker} g^{M-1} \oplus \operatorname{Span} B_M^M$

$V = \operatorname{Ker} g^M = \operatorname{Ker} g^{M-1} \oplus \operatorname{Span}(B_M^M)$

$\operatorname{Ker} g^{M-1} = \operatorname{Ker} g^{M-2} \oplus g(\operatorname{Span}(B_M^M)) \oplus \operatorname{Span}(B_{M-1}^{M-1})$

$\operatorname{Ker} g^{M-2} = \operatorname{Ker} g^{M-3} \oplus g^2(\operatorname{Span}(B_M^M)) \oplus g(\operatorname{Span}(B_{M-1}^{M-1})) \oplus \operatorname{Span}(B_{M-2}^{M-2})$

$\vdots$ etc.

$\hookrightarrow$ fornisce un modo per trovare le teste delle colonne

Esempio esplicito

$$A \in M_5(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = 0 \Rightarrow \varphi_A = x^3 \quad p_A = x^5$$

$\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker} A^3$ $\qquad \{\underline{0}\} \subsetneq \underset{3}{\operatorname{Ker} A} \subsetneq \underset{4}{\operatorname{Ker} A^2} \subsetneq \underset{5}{\operatorname{Ker} A^3} = \dots$

$\dim \operatorname{Ker} A^2 = 4$

$\dim \operatorname{Ker} A = 3$ $\qquad$ perché non sta nel nucleo di A^2

$\mathbb{R}^5 = \underset{5}{\operatorname{Ker} A^3} = \underset{4}{\operatorname{Ker} A^2} \oplus \operatorname{Span}(\underline{e}_3)$

$$\underline{e}_3 \xrightarrow{A} \underline{e}_2 \xrightarrow{A} \underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_4 + \underline{e}_5$$

$\hookrightarrow$ Forma canonica di Jordan di A $\quad \begin{bmatrix} J(0,3) & \\ & \dots \end{bmatrix}$

$\underset{4}{\operatorname{Ker} A^2} = \underset{3}{\operatorname{Ker} A} \oplus \underset{1}{\operatorname{Span}(\overset{g(\underline{e}_3)}{\underline{e}_2})} \oplus \cancel{?}$ $\Rightarrow$ non ci sono blocchi di dimensione due

$\underset{3}{\operatorname{Ker} A} = \underset{1}{\operatorname{Span}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_4 + \underline{e}_5)} \oplus \underset{2}{\operatorname{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2 - \underline{e}_{\underset{4}{3}})}$

La base cercata è $\mathcal{B} = \{ \underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_4 + \underline{e}_5,\ \underline{e}_2,\ \underline{e}_3,\ \underline{e}_1,\ \underline{e}_2 - \underline{e}_4 \}$

$\downarrow$ in questa base

$$A \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array}\right]$$

20/03/2024
Manfre

h nilpotente

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_{11} & \to & u_{11}^{(1)} & \to & \cdots & \to & u_{11}^{(j_1-1)} & \to & v_{11} \\
\vdots & & & & & & & & \\
u_{1c_1} & \to & u_{1c_1}^{(1)} & \to & \cdots & \to & u_{1,c_1}^{(\ )} & \to & v_{1c_1} \\
 & & u_{22} & \to & \cdots & \to & u_{21}^{(\ )} & \to & v_{21} \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & v_{k1} \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & v_{kc_k}
\end{array} \Bigg\} \text{ k-esima colonna}$$

c_1 = n° di vettori della prima colonna

c_k = n° di vettori nella k-esima colonna

$$\sum_{i=1}^{j_1+1} c_i = n = \dim V$$

$$\sum_{i=1}^{j_1} c_i = \dim \operatorname{Im} h = \operatorname{rg} h$$

↳ tutto tranne l'ultima colonna (cioè il Ker)

$$\sum_{i=1}^{j_1-1} c_i = \dim \operatorname{Im} h^2 = \operatorname{rg} h^2$$

$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{1} c_i = c_1 = \dim \operatorname{Im} h^{j_1} = \operatorname{rg} h^{j_1}$$

<u>Esempio</u>

$$\begin{array}{ccccccccccc}
u_{11} & \to & u_{11}^{(1)} & \to & u_{11}^{(2)} & \to & u_{11}^{(3)} & \to & u_{11}^{(4)} & \to & \boxed{v_{11}} \\
u_{12} & \to & u_{12}^{(1)} & \to & u_{12}^{(2)} & \to & u_{12}^{(3)} & \to & u_{12}^{(4)} & \to & \boxed{v_{12}} \\
 & & u_{21} & \to & u_{21}^{(1)} & \to & u_{21}^{(2)} & \to & u_{21}^{(3)} & \to & v_{21} \\
 & & & & & & u_{31} & \to & u_{31}^{(1)} & \to & v_{31} \\
 & & & & & & u_{32} & \to & u_{32}^{(1)} & \to & v_{32} \\
 & & & & & & & & & & v_{41} \\
 & & & & & & & & & & v_{51}
\end{array}$$

base di $\operatorname{Im} h^5$

$\to$ base di $\operatorname{Im} h^4$

$\to$ base di $\operatorname{Im} h^3$

$P_g(\lambda)$ è completamente riducibile $\Rightarrow \exists B$ per cui $M_B(f) =$

$$= \begin{bmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{\lambda_1 n_1 k_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{\lambda_2 n_2 k_2} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} = J$$

$$\lambda I_n + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{n \times n} = J_{\lambda, n} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_{11}} & & & \\ & \lambda_1 I_{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2 I_{n_2 k_2} \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad N = J - D = \begin{bmatrix} J_0 \, n_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & J_0 \, n_{k k_k} \end{bmatrix}$$

ha solo elementi sulla diagonale — ha solo blocchi relativi a 0

$J = D + N$ $\quad$ D diagonale, N nilpotente

$\delta : V \to V$ endomorfismo $\mid M_B(\delta) = D$

$\nu : V \to V$ endomorfismo $\mid M_B(\nu) = N$

(Divido diagonale e sopra diagonale nella scomposizione di Jordan)

$f = \delta + \nu$

δ diagonalizzabile, ν nilpotente

<u>OSS</u> $\delta\nu = \nu\delta$ perché $DN = ND$ perché i blocchi λI_n, J_{0n} commutano

λI_n è un elemento del centro di $M_n(\mathbb{K})$ e posso moltiplicare a blocchi

<u>COROLLARIO:</u>

$f: V \to V$, f triangolabile $\exists\, \delta$ diagonalizzabile e ν nilpotente t.c.
$\delta\nu = \nu\delta \quad f = \delta + \nu$

Inoltre la decomposizione è unica e si chiama "decomposizione di Jordan di un endomorfismo"

<u>Dim. unicità:</u>

$f = \delta + \nu = \delta' + \nu'$ con δ e δ' diagonalizzabili e ν, ν' nilpotenti
$\delta\nu = \nu\delta$ e $\delta'\nu' = \nu'\delta'$

$\hat{V}_\lambda$ autospazio generalizzato per f è f-invariante

È invariante anche per δ perché $f\delta = \delta f$ (in particolare commutano $(f-\lambda id)^n$ e δ e gli autospazi generalizzati sono particolari δ commuta con Ker)

$$(\delta + \nu)\delta = \delta^2 + \nu\delta = \delta(\delta + \nu)$$

$(f - \lambda id)^{Ma(\lambda)} \Rightarrow \hat{V}_\lambda$ è δ-invariante $\Rightarrow \hat{V}_\lambda$ è ν-invariante

$\Rightarrow \hat{V}_\lambda$ è δ', ν'-invariante

Ora basta mostrare che $\delta|_{\hat{V}_\lambda} = \delta'|_{\hat{V}_\lambda}$

$f|_{\hat{V}_\lambda}$ ha solo l'autovalore λ

$\shortparallel$ $\quad$ nilpotente

$\delta|_{\hat{V}_\lambda} + \nu|_{\hat{V}_\lambda}$

$\hookrightarrow$ diagonalizzabile

$\delta|_{\hat{V}_\lambda}$ ha solo l'autovalore λ

$\Downarrow$ $-\ \delta$ diagonalizzabile

$\delta = \lambda id \Rightarrow \delta' = \lambda id$ $\qquad$ $\delta = \delta'$ implica banalmente $\nu = \nu'$ $\qquad \square$

V spazio vettoriale $/_{\mathbb{R}}$, $\quad f: V \to V$

con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_h, \underbrace{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_k, \bar{\alpha}_k}_{\text{complessi non nulli}}$

$$\mu_a(\alpha_i) = \mu_a(\bar{\alpha}_i) \Rightarrow \mu_g(\alpha_i) \overset{?}{=} \mu_g(\bar{\alpha}_i)$$

Dim:

$A = M_B(f) \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C}) \qquad f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ x \mapsto Ax$

$A\underline{x} = \alpha\underline{x} \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ \underline{x} \in \mathbb{C}^n$

$V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ $\quad$ autovettore relativo ad α

$\overline{A\underline{x}} = \overline{\alpha\underline{x}} \Rightarrow \bar{A}\bar{\underline{x}} = \bar{\alpha}\bar{\underline{x}}$, $\quad \bar{A} = A$

$V_\alpha \to V_{\bar{\alpha}}$

$\underline{x} \mapsto \bar{\underline{x}}$

$\overline{(c\underline{x})} = \bar{c}\bar{\underline{x}}$ $\quad$ e biunivoca

è $\mathbb{R}$-lineare ma non $\mathbb{C}$-lineare

$f(\underline{x}) = \bar{\underline{x}}$

$f(i\underline{x}) = i\bar{\underline{x}}$?

Supponiamo $\underline{x} = (i, 1 \dots)$

$f(\underline{x}) = (-i, 1 \dots)$

$f(i\underline{x}) = (-1, -i \dots)$

$i(f(\underline{x})) = (1, i \dots)$

sono diversi $\Rightarrow f$ non è lineare su $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} V_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} V_{\bar{\alpha}}$ $\qquad \square$

$A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$

blocchi reali $\qquad$ blocchi complessi

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{\alpha_1, m_{11}} & & & \\ & & & \ddots\ J_{\alpha_1, m_1 c_1} & & \\ & & & & J_{\bar{\alpha}_1, m_{11}} & \\ & & & & & \ddots\ J_{\bar{\alpha}_1, m_1 c_1} \end{bmatrix}$$

La forma su $\mathbb{C}$ ha blocchi

$J_{\alpha_1, n_{11}}$ e $J_{\bar{\alpha}_1, n_{11}}$ dello stesso ordine

$$\underline{u}_{n-1} \xrightarrow{A-\alpha_1 I} \underline{u}_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{u}_1 \longrightarrow \underline{v}$$

coniugando

$$\bar{\underline{u}}_{n-1} \xrightarrow{A-\bar{\alpha}_1 I} \bar{\underline{u}}_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \bar{\underline{u}}_1 \longrightarrow \bar{\underline{v}}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \alpha_1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \bar{\alpha}_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \bar{\alpha}_1 \end{matrix} \end{array}\right] \longrightarrow \text{blocco reale}$$

$\circledast \longrightarrow$

$\underline{z} \in \mathbb{C}^n$ $\quad \underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 i \\ \vdots \\ x_n + y_n i \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$\quad = \underline{x} + i\underline{y}$

$\alpha_1 = a + ib \qquad f_A(\underline{u}_j) = \alpha_1 \underline{u}_j + \underline{u}_{j-1} \quad j \geq 1$

$\underline{u}_j = \underline{u}_j' + i\underline{u}_j'' \qquad f_A(\underline{v}) = \alpha_1 \underline{v}$

$f(\underline{u}_j' + i\underline{u}_j'') = \alpha_1(\underline{u}_j' + i\underline{u}_j'') + (\underline{u}_{j-1}' + i\underline{u}_{j-1}'') \Rightarrow f(\underline{u}_j') + if(\underline{u}_j'') =$

$= \alpha_1 \underline{u}_j' + \underline{u}_{j-1}' + i(\alpha_1 \underline{u}_j'' + \underline{u}_{j-1}'')$ dove $\alpha_1 = a + ib$

$\Rightarrow \; = a\underline{u}_j' - b\underline{u}_j'' + \underline{u}_{j-1}' + i(a\underline{u}_j'' + b\underline{u}_j' + \underline{u}_{j-1}'')$

$f_A(\underline{v}' + i\underline{v}'') = (a+ib)(\underline{v}' + i\underline{v}'') = \underset{(a+ib)v'}{f_A(\underline{v}')} + i\underset{\substack{i(a+ib)v'' \\ = (ai-b)v''}}{f_A(\underline{v}'')} = av' - bv'' + i(av'' + bv')$

Ordiniamo i vettori:

$\underline{v}', \underline{v}'', \underline{u}_1', \underline{u}_1'', \dots, \underline{u}_{n-1}', \underline{u}_{n-1}''$

$$\circledast \longrightarrow J_{\alpha_1}^{\mathbb{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \\ & & \ddots & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ & & & \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} \end{bmatrix}}_{n \text{ volte}}$$

$\underline{u} = \underline{v}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = -A^t$

$\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

$\lambda = 0$ autovalore $\qquad \mu_g(0) = 1 \qquad \mu_a(0) = 1$

$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda = 0$

$-\lambda(\lambda^2 + 6) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{6} \;\vee\; \lambda = 0$

gli autovalori $\neq 0$ in una matrice antisimmetrica sono sempre tutti immaginari

$J_A^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & i\sqrt{6} & \\ & & -i\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad J_A^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \sqrt{6} \\ & -\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$

21/03/2024
Manfre

V spazio vettoriale $/\mathbb{K}$, $\dim V = n$

$g \in \mathcal{L}(V)$ nilpotente, $\varphi_g = x^k$ $\quad p_g = \pm x^n$

- La forma canonica di Jordan di g è composta da blocchi di tipo $J(0,m) \in M_m(\mathbb{K})$
- $\exists$ blocco di ordine k ed è il blocco di ordine massimo
- $\#$ blocchi $= \dim \operatorname{Ker} g = \mu_g(0)$

DIMOSTRATO DOPO

- $\#$ blocchi di ordine j $= 2\dim\operatorname{Ker} g^j - \dim\operatorname{Ker} g^{j-1} - \dim\operatorname{Ker} g^{j+1} =$

  $= \# \text{blocchi di ord } j+2 + 2\# \; j+3 \dots$

  $= rg(g^{j-1}) + rg(g^{j+1}) - 2\,rg(g^j) \longrightarrow \# \text{bl di ord } j+1 + 2\# \text{b.o. } j+2$ tutto $\cdot(-2)$

  $= \# \text{blocchi ord } j + 2\# \text{bl. } j+1 + 3\# \text{bl. } j+2 \dots$

Data una base di Jordan di g:

- Una base di $\operatorname{Ker} g^j$ è data dai primi j vettori di ogni blocco
- Una base di $\operatorname{Im} g^j$ è data da tutti eccetto gli ultimi j vettori di ogni blocco

---

g: F.C.J. di g ha un solo blocco $J(0,n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di Jordan per g

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Span}(\underline{v}_1)$ $\qquad \operatorname{Im} g = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n-1})$

$J(0,n)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{Ker} g^2 = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \\ \operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n-2}) \end{array}$

colonna $i+1$

$J(0,n)^i \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{Ker} g^i = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) \\ \operatorname{Im} g^i = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-i}) \end{array}$

$1 \leq i \leq n-1$

Con più di un blocco si ripete lo stesso ragionamento su ogni blocco

Esempio

Supponiamo che la F.C.J. di g sia

$$\begin{bmatrix} J_{0,3} & & & \\ & J_{0,3} & & \\ & & J_{0,2} & \\ & & & J_{0,1} \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_9$ base di Jordan di g

nove

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_4, \underline{v}_7, \underline{v}_9)$

$\operatorname{Im} g = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_5, \underline{v}_7)$

$\operatorname{Ker} g^2 = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_5, \underline{v}_7, \underline{v}_8, \underline{v}_9)$

$\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_4)$

$$\begin{array}{ccccccc} & 4 & & 7 & & 9 & \\ \{\underline{0}\} \subsetneq & \ker g & \subsetneq & \ker g^2 & \subsetneq & \ker g^3 = V = & \dots \\ V \supsetneq & \mathrm{Im}\, g & \supsetneq & \mathrm{Im}\, g^2 & \supsetneq & \mathrm{Im}\, g^3 = \{\underline{0}\} = & \dots \\ & 5 & & 2 & & 0 & \end{array}$$

$\dim \ker g^i$:

$0, 4, 7, 9, 9, \dots \quad \Rightarrow \quad \varphi_g = x^3$

- mi dice che ci sono 4 blocchi
- mi dice che solo 3 blocchi aumentano di taglia ($\Rightarrow$ c'è un blocco 1×1)
- 2 aumentano di taglia ($\Rightarrow$ c'è un blocco 2×2)

Questa successione: $0, 4, 6, 9, 9, \dots$ <u>NON</u> è possibile

- 4 blocchi
- 2 di taglia 1×1
- poteva essere al max 8
- Con 2 blocchi di ordine maggiore di 1 non posso aumentare di 3

$\underline{\dim \ker g^J} - \underline{\dim \ker g^{J-1}} = \underline{\# \text{ di blocchi di taglia} \geq J} \leftarrow$

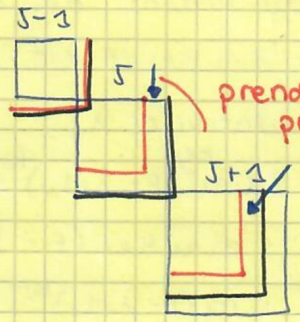
$\#$ di blocchi di taglia $J =$

$= \#$ " " $\geq J$ $-$ $\#$ " " $\geq J+1$

$\dim \ker g^J - \dim \ker g^{J-1}$

$- (\dim \ker g^{J+1} - \dim \ker g^J)$

$= 2 \dim \ker g^J - \dim \ker g^{J+1} - \dim \ker g^{J-1}$



prendo solo i primi J

$\#$ di blocchi di taglia $1 = 2 \dim \ker g - \dim \ker \underset{\underset{id}{\parallel}}{g^0} - \dim \ker g^2$

$\#$ di blocchi di taglia $K = 2 \dim \ker g^K - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\dim \ker g^{K-1}} - \dim \ker g^{K+1} =$

$\ker g^{K+1} = \ker g^K$ (a K la succ. si stabilizza)

$= \dim \ker g^K - \dim \ker g^{K-1}$

FCJ: V sp. vett$/_{\mathbb{K}}$, $f \in \mathcal{L}(V)$ triangolarizzabile

- Fattorizzazione $p(f) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (\lambda - x)^{m_\lambda}$ $\quad \varphi(f) = \prod_{f \in Sp(f)} (\lambda - x)^{n_\lambda}$ $\quad 1 \leq n_\lambda \leq m_\lambda$
- Decomposizione di V tramite autospazi generalizzati $\quad V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \hat{V}_\lambda$

$\hat{V}_\lambda = \ker (f - \lambda id)^{n_\lambda} = \ker (f - \lambda id)^{m_\lambda}$

- Studiare $g = (f - \lambda_{id_V})|_{\hat{V}_\lambda}$ (nilpotente) tramite le succ. di Ker / Im:

- Esprimere $\hat{V}_\lambda$ come somma diretta di sottospazi (f-invarianti) ciclici con basi del tipo $(f-\lambda id_V)^k(\underline{v}), (f-\lambda id)^{k-1}(\underline{v}), \dots, (f-\lambda id)\underline{v}, \underline{v}$ (ponendo $g = f - \lambda id_V$)
- Poiché $f|_{\hat{V}_\lambda} = g + \lambda id_V|_{\hat{V}_\lambda}$ la matrice di $f|_{\hat{V}_\lambda}$ si ricava da quella di g sommando λI

- $\exists B$ base di V tale che la matrice associata a f in tale base è diagonale a blocchi con blocchi del tipo

$$J(\lambda, k) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{K}) \quad , \quad \lambda \in Sp(f)$$

(B base di Jordan (non unica) per f, $M_B^B(f)$ forma normale/canonica di Jordan (unica a meno di riordinare i blocchi))

↳ la FCJ è determinata dalle dimensioni $\dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id_V)^k$ $\lambda \in Sp(f)$, $k \geqslant 1$ ovvero dai ranghi $rg(f-\lambda id_V)^k$ $\lambda \in Sp(f)$, $k \geqslant 1$

- $\dim \hat{V}_\lambda = m_\lambda = \mu_a(\lambda) =$ somma degli ordini dei blocchi relativi a λ
- # blocchi relativi a $\lambda = \mu_g(\lambda)$ $(= \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id))$
- $n_\lambda =$ ordine massimo dei blocchi relativi a λ
- # blocchi di ordine k relativi a $\lambda = 2\dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id_V)^k - \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id)^{k-1} - \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id_V)^{k+1} =$
$= rg(f-\lambda id)^{k+1} + rg(f-\lambda id_V)^{k-1} - 2rg(f-\lambda id)^k$

Data una base di Jordan per f

- Una base per $\operatorname{Ker}(f-\lambda id_V)^k$ è data dai primi k vettori di ogni blocco relativo a λ
- Una base per $\operatorname{Im}(f-\lambda id_V)^k$ è data da tutti i vettori (anche relativi ad altri autovalori) eccetto gli ultimi k di ogni blocco relativo a λ
- La FCJ è invariante completo per la relazione di coniugio/similitud. (per endomorfismi o matrici triangolabili).

$$M_5(\mathbb{R}) \ni A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p_A = (1-x)^3(2-x)^2$

$Sp(A) = \{1, 2\}$

al più

$\hat{V}_1 = \ker(A-I)^3 \qquad \dim \hat{V}_1 = 3$

$\hat{V}_2 = \ker(A-2I)^2 \qquad \dim \hat{V}_2 = 2$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cancel{0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cancel{0} & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cancel{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim \ker(A-I) = 5 - \underbrace{rg(A-I)}_{3} = 2$

$\Downarrow$ sicuramente

$\dim \ker(A-I)^2 = 3$

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verificabile osservando che $rg(A-I)^2 = 2$

$\Rightarrow$ ci sono 2 blocchi relativi a 1 di cui 1 si stabilitta subito

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$rg(A-2I) = 3$

$\dim \ker(A-2I) = 2$

$\{\underline{0}\} \subsetneq \ker(A-2I) = \ldots = \ldots$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right]$$

Allora la F.C.J di A è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = (x-1)^2(x-2)$$

Ora cerchiamo una base di Jordan

$$\begin{array}{l} \ker(A-I)^2 \\ \ker(A-I) \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \circ & & & \\ \uparrow & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{1}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{2}} \end{array}$$

$(A-I)^2$ ha la 5^a colonna nulla mentre $(A-I)$ no

altro vettore dentro il Ker indipendente da $-\underline{e}_2 + \underline{e}_4$

$\ker(A-I)^2 = \ker(A-I) \oplus Span(\underline{e}_5)$

$\ker(A-I) = Span(-\underline{e}_2 + \underline{e}_4) \oplus Span(\underline{e}_5 - \underline{e}_1 + \underline{e}_3)$

immagine di $\underline{e}_5$

Per l'autovalore 2 serve solo una base del $\ker(A-2I)$
$$\{\underline{e}_4, \underline{e}_1 + \underline{e}_5\}$$

$\Rightarrow$ Base di Jordan per A: $\mathcal{B} = \{-\underline{e}_2 + \underline{e}_4, \underline{e}_5, \underline{e}_5 - \underline{e}_1 + \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_1 + \underline{e}_5\}$

$\ker(A-I) = \text{Span}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_4, \underline{e}_5) \to \underline{e}_5 - \underline{e}_1 + \underline{e}_3$

$\text{Im}(A-I) = \text{Span}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_4, \underline{e}_4, \underline{e}_1 + \underline{e}_5)$

$\ker(A-I)^2 = \text{Span}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_4, \underline{e}_5, \underline{e}_5 - \underline{e}_1 + \underline{e}_3)$

$\text{Im}(A-I)^2 = \text{Span}(\underline{e}_4, \underline{e}_1 + \underline{e}_5)$

$\ker(A-2I) = \text{Span}(\underline{e}_4, \underline{e}_1 + \underline{e}_5)$

$\text{Im}(A-2I) = \text{Span}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_4, \underline{e}_5 - \underline{e}_1 + \underline{e}_3)$

SOTTOSPAZI INVARIANTI

- $f \in \mathcal{L}(V)$ | FCJ ha un solo blocco $J(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$

  $\varphi_f = (x-\lambda)^n = \pm p_f$

  (*) $\ker(f - \lambda id_V)^k$ $k = 0, 1, \dots, n$ sono f-invarianti e $\dim \ker(f-\lambda id_V)^k = k$

  $W \subset V$ ssp. f-invariante

  $\dim W = m$

  $f|_W \in \mathcal{L}(W)$ $\quad \varphi_{f|_W} = (x-\lambda)^h$ $\quad 1 \leq h \leq n$, $1 \leq h \leq m$

  $\Rightarrow p_{f|_W} = (x-\lambda)^m (-1)^m = (\lambda - x)^m \in I(f|_W)$

  $\Rightarrow \underset{m}{\underset{\shortparallel}{W}} \subset \underset{m}{\underset{\shortparallel}{\ker((f-\lambda id)^m)}} \Rightarrow W = \ker(f - \lambda id)^m$

  $\Rightarrow$ Gli unici sottospazi f-invarianti di f sono i nuclei di sopra (*)

- $f \in \mathcal{L}(V)$ | FCJ ha due blocchi $J(\lambda, k)$, $J(\mu, n-k)$ $\lambda \neq \mu$

  $\varphi_f = (x-\lambda)^k (x-\mu)^{n-k}$ $(= \pm p_f)$

  i $\ker(f - \lambda id_V)^i \oplus \ker(f - \mu id)^j$ sono f-invarianti

  $0 \leq i \leq k$ $\quad 0 \leq j \leq n-k$ $\quad$ di dimensione $i+j$

  $W \subset V$ ssp. f-invariante $\dim W = m$

  $f|_W \to \varphi_{f|_W} = (x-\lambda)^h (x-\mu)^\ell \longrightarrow p_{f|_W} = (\lambda - x)^i (\mu - x)^j$

  $0 \leq h \leq k$ $\quad 0 \leq \ell \leq n-k$ $\quad i \geq h$ $\quad j \geq \ell$ $\quad i+j = m$

  $p_{f|_W} \in I(f|_W) \Rightarrow W \subset \ker((f-\lambda id)^i (f - \mu id)^j) =$

  $= \ker(f - \lambda id)^i \oplus \ker(f - \mu id)^j$

  $\hookrightarrow i + j = m$

$W = \ker(f-\lambda id)^i \oplus \ker(f-\mu id)^j$

In generale, $f \in \mathcal{L}(V)$ triangolabile

- $\forall \lambda \in Sp(f) \quad \mu_g(\lambda) = 1 \Rightarrow f$ ha un num. finito di ssp. invarianti e sono somma diretta di $\ker(f-\lambda id)^k \quad (\lambda \in Sp(f))$
- $\mathbb{K}$ infinito, $\exists \lambda \in Sp(f) \mid \mu_g(\lambda) > 1 \Rightarrow f$ ha infiniti sottospazi invarianti ($\forall$ dimensione tra 1 e $\dim V - 1$).

22/03/2024
Salvetti

(Stampare dispense riguardo all' algoritmo di ricerca di una base di Jordan)

PRODOTTI SCALARI

Prodotto canonico in $\mathbb{K}^n$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\varphi: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ APPLICAZIONE BILINEARE SIMMETRICA

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}; \underline{x} \rangle$

$\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$

bilinearità $\Rightarrow \varphi(\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{w}) = \alpha \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \beta \varphi(\underline{v}_2, \underline{w})$

$\varphi(\underline{v}, \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2) = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + \beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}_2)$

Una applicazione bilineare simmetrica si dice PRODOTTO SCALARE

In $\mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ lunghezza di $\underline{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

In $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$^* \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ è un prodotto scalare

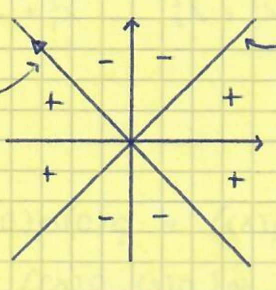
$\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$ FORMA QUADRATICA ASSOCIATA:

$$q: V \to \mathbb{K} \qquad q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$$

es $\langle \rangle \quad q(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

per* $\to q(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2$

$\hookrightarrow q(\underline{x}) = 0 \iff x_1 = \pm x_2$



maggiore stretto

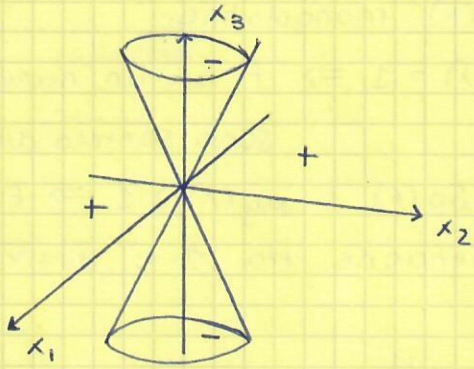
Def. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un prodotto scalare si dice positivo se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \ \forall \underline{v} \neq 0$

Def. Un vettore $\underline{v} \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ si chiama vettore ISOTROPO

$V = \mathbb{R}^3$

$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

$q(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$



VETTORI ISOTROPI

CONO: se c'è $\underline{x}$, c'è anche $\alpha \underline{x}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$

$\varphi(\alpha \underline{v}, \alpha \underline{v}) =$

$= \alpha^2 \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$

$V = M_n(\mathbb{K})$

$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi(A, B) = tr(AB)$

tr è lineare

bilinearità: $\varphi(A + A', B) = tr((A + A')B) = tr(AB + A'B) =$

$= tr(AB) + tr(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$

simmetria: $tr(AB) = tr(BA)$

└ dimostrato nel 1° semestre

$\psi(AB) = tr({}^tAB)$

bilinearità:

simmetria

$tr({}^tAB) = tr({}^tB, A)$

${}^t({}^tAB) = {}^tBA$

$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij})$

$$tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA)_i B^i = \sum_{i=1}^{n} {}^t(A^i) B^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$V = \mathbb{C}^2$

(Invece in $\mathbb{R}$ il prodotto scalare canonico è positivo)

$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$q(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 \qquad x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow$ ha soluzione in $\mathbb{C}$ per cui ci sono vettori isotropi

---

$V = \mathbb{K}[x]$

$\varphi(p(x), q(x)) = p(0)q(0)$ è un prodotto scalare

oppure $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i) q(x_i) \qquad x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$

$\varphi_1, \varphi_2 : V \times V \to \mathbb{K}$ (φ_1 e φ_2 prodotti scalari)

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi_1(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi_2(\underline{v}, \underline{w})$ è un prodotto scalare

$(\alpha\varphi) = \alpha(\varphi_1(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi_2(\underline{v}, \underline{w}))$ è un prodotto scalare

$\Rightarrow$ i prodotti scalari formano uno spatio vettoriale

<u>altro esempio:</u>

- $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)\,dx$
- $V = \mathbb{K}^n$

  $A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica $A = {}^tA$

  $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$ (dimostrare che è bilineare)
  (la simmetria deriva da $A = {}^tA$ $\circledast$

  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

  Esempio in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

  $$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$$

$\circledast$ $$\varphi(\underline{y}, \underline{x}) = {}^t\underline{y} A \underline{x} \underset{\substack{\uparrow \\ 1\times 1}}{=} {}^t({}^t\underline{y} A \underline{x}) = {}^t\underline{x}\,{}^tA\,\underline{y} = {}^t\underline{x} A \underline{y} = \varphi(\underline{x}, \underline{y})$$

$${}^t\underline{x} A \underline{y} = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

V sp. vettoriale$/_{\mathbb{K}}$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ prodotto scalare

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \dots + x_n\underline{v}_n$

$\underline{w} = y_1\underline{v}_1 + \dots + y_n\underline{v}_n$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j \underline{v}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$$

Def. MATRICE ASSOCIATA A φ rispetto a B

$$M_B(\varphi) = (a_{ij} = \varphi(\underline{v}_i\ \underline{v}_j)) = \begin{bmatrix} \varphi(\underline{v}_1\ \underline{v}_1) & \cdots & \varphi(v_1\ v_n) \\ \varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_1) & & \vdots \\ \vdots & & \\ \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_1) & & \varphi(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_B M_B(\varphi) [\underline{w}]_B}$$

<u>è simmetrica</u>

TEO (cambio di base per prodotti scalari)

$B' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ altra base per V sia

$A' = M_{B'}(\varphi) = (a'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j))$

$P = M_{B}^{B'}(id)$ allora $A' = {}^tPAP$ (non è una similitudine a meno che non sia ${}^tP = P^{-1}$) ⊛

Def. Se $A' = {}^tPAP$, A e A' si diranno CONGRUENTI
(esercizio: è una relazione di equivalenza) sulle matrici simmetriche

27/03/2024
(Manfre)

$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$ estensione di campi ($\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$)

- $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{F}^n$
- $M(m,n,\mathbb{K}) \hookrightarrow M(m,n,\mathbb{F})$
- $\mathbb{K}[t] \hookrightarrow \mathbb{F}[t]$

⊛ DIMOSTRAZIONE

$A'_{ij} = \varphi(w_i, w_j) = {}^t[w_i]_B A [w_j]_B = {}^t(P^i) A P^j = ({}^tPAP)_{ij}$

Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ scriviamo $A_{\mathbb{F}} = A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

- $rg A = rg A_{\mathbb{F}}$

Rouché-Capelli vale su un campo qualsiasi

- $b \in \mathbb{K}^m$, $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni in $\mathbb{K}^n \iff A_{\mathbb{F}}\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni in $\mathbb{F}^n$ (e le soluzioni in $\mathbb{K}^n$ sono anche soluzioni in $\mathbb{F}^n$)
- Se $m=n$ $\det A = \det A_{\mathbb{F}}$, $p_A = p_{A_{\mathbb{F}}}$

polinomio generico

Dimostriamo che $\varphi_A = \varphi_{A_{\mathbb{F}}}$

$p \in I(A) \Rightarrow p(A) = 0 \in M_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{F}) \Rightarrow p(A_{\mathbb{F}}) = 0$

$p \in I(A_{\mathbb{F}})$

$\Rightarrow \underset{\substack{\Psi \\ \varphi_A}}{I(A)} \subset I(A_{\mathbb{F}}) \Rightarrow \varphi_{A_{\mathbb{F}}} \mid \varphi_A$

Ora ci basta dimostrare che hanno lo stesso grado

S_h sistema lineare

$x_0 I + x_1 A + \dots + x_{h-1} A^{h-1} = A^h$ $\quad x_0, \dots, x_{h-1} \in \mathbb{K}$

$(S_h)_{\mathbb{F}}$

$x_0 I + x_1 A_{\mathbb{F}} + \dots + x_{h-1} A_{\mathbb{F}}^{h-1} = A_{\mathbb{F}}^h$ $\quad x_0, \dots, x_{h-1} \in \mathbb{F}$

Non ci sono soluzioni se $h \leq \deg \varphi_A - 1$
$\exists$ soluzioni se $\deg \varphi_A \leq h$ $\quad \exists!$ sol. se $h = \deg \varphi_A$

Non ci sono soluzioni se $h \leq \deg \varphi_{A_{\mathbb{F}}} - 1$
$\exists$ soluzioni se $\deg \varphi_{A_{\mathbb{F}}} \leq h$ $\quad \exists!$ sol se $h = \deg \varphi_{A_{\mathbb{F}}}$

Ma (S_h) ha soluzioni $\iff$ $(S_h)_{\mathbb{F}}$ ha soluzioni $\Rightarrow$

$\Rightarrow \deg \varphi_A = \deg \varphi_{A_{\mathbb{F}}} \Rightarrow \varphi_A = \varphi_{A_{\mathbb{F}}}$

ma la fattorizzazione nei due campi può essere diversa

FORMA CANONICA DI JORDAN REALE

FCJ reale $A \in M_n(\mathbb{R})$ NON triangolabile

- p_A non è completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}[x]$, ma $p_{A_{\mathbb{C}}}$ lo è in $\mathbb{C}[x]$

$Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$

$Sp(A_{\mathbb{C}}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_e, \bar{\mu}_e\} \subset \mathbb{C}$ $\quad \mu_g \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

- $\bar{\ }: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\quad e \mapsto \bar{e}$ "coniugato" $\quad \overline{\mathrm{Ker}(A_{\mathbb{C}} - \mu I)^k} = \mathrm{Ker}(A_{\mathbb{C}} - \bar{\mu} I)^k \quad \forall k$ (*)

OSS: $-$ non è lineare ma è biunivoca e manda vettori indipendenti in vettori indipendenti (dimostrare per esercizio) (V)

Per cui $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(A_{\mathbb{C}} - \mu I)^k = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(A_{\mathbb{C}} - \bar{\mu} I)^k \ \forall k \Rightarrow$

la FCJ di A contiene un blocco $J(\mu, h) \Leftrightarrow$ contiene un blocco $J(\bar{\mu}, h)$ e se $z_1, \dots, z_h \in \mathbb{C}^n$ danno un blocco allora $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_h$ danno l'altro

(*) $\underline{v} \in \mathrm{Ker}(A - \mu I)^k \Leftrightarrow (A - \mu I)^k \underline{v} = \underline{0} = \bar{\underline{0}}$

$\underline{0} = (\underset{A}{\underset{\shortparallel}{\bar{A}}} - \bar{\mu} \underset{I}{\underset{\shortparallel}{\bar{I}}})^k \bar{\underline{v}} \Rightarrow \bar{v} \in \mathrm{Ker}(A - \bar{\mu} I)^k$

(simmetricamente se prendessi $\underline{v} \in \mathrm{Ker}(A - \bar{\mu} I)^k$)

$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_h, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_h) \subset \mathbb{C}^n$ è $A_{\mathbb{C}}$-invariante (perché sono vettori di un blocco di Jordan)

$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1, \dots, \mathrm{Re}\, z_h, \mathrm{Im}\, z_h)$ è generato da vettori di $\mathbb{R}^n$

↳ su $\mathbb{C}$ è lo stessto span di prima

$\Rightarrow \hat{V}_\mu \oplus \hat{V}_{\bar{\mu}}$ ha una base reale B. Poniamo $\hat{V}_{\mu\bar{\mu}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(B)$

$\mathbb{R}^n: \hat{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \hat{V}_{\lambda_k} \oplus \underbrace{\hat{V}_{\mu_1\bar{\mu}_1}} \oplus \dots \oplus \hat{V}_{\mu_e\bar{\mu}_e}$

↳ blocchi ottenuti "esplodendo" i blocchi relativi a μ_1 ovvero si sostituisce $z \in \mathbb{C}$ con

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, z & \mathrm{Im}\, z \\ -\mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{bmatrix}$$

ESEMPIO:

$$\begin{bmatrix} a+ib & 1 \\ 0 & a+ib \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

OSS: $M_2(\mathbb{R})$ contengono una copia di $\mathbb{C}$:

Esercizio: la mappa $\mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ $\quad z \longmapsto \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,z & \mathrm{Im}\,z \\ -\mathrm{Im}\,z & \mathrm{Re}\,z \end{bmatrix}$

è un omomorfismo di anelli iniettivo (✓)

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) : PAP^{-1} = B \iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{C}) : QA_{\mathbb{C}}Q^{-1} = B_{\mathbb{C}}$

($\Rightarrow$) Basta prendere $Q = P$

($\Leftarrow$) $QA = BQ \qquad Q = R + iS \qquad R, S \in M_n(\mathbb{R})$

$(R+iS)A = B(R+iS)$

$\underset{\text{parte reale}}{RA = BR} \qquad \underset{\text{parte immaginaria}}{SA = BS}$

Non so se R e S sono invertibili $\longrightarrow$ $PAP^{-1} = B \Rightarrow PA = BP$

$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{R} \quad (R+rS)A = B(R+rS)$ $\quad$ $\not\Leftarrow$ (per il viceversa devo sapere che P è invertibile)

↳ riesco a trovarne una invertibile?

$p(x) := \det(R + xS) \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$

basta che non sia il polinomio nullo $\Rightarrow$ equivale a richiedere che $\exists x \mid p(x) \neq 0$

ma $p(i) = \det(Q) \neq 0$

$\Rightarrow p \neq 0 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : p(r) \neq 0$

$P = R + rS$ funziona :) $\qquad \square$

Determinare la <u>forma canonica di Jordan reale</u> e una <u>base di Jordan reale</u> per

$$M_6(\mathbb{R}) \ni A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Trovare p_A, fattorizzarlo su $\mathbb{R}/\mathbb{C}$, trovare la FCJ e la base di Jordan nei complessi e nei reali

$p_A \overset{?}{=} p_{{}^tA}$

$${}^tA = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Cambio base $\Rightarrow e_3, e_4, e_1, e_2, e_5, e_6$

$$
{}^tA \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
p_A = p_{{}^tA} = p_B = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} =
$$

$$
= \cdots = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)^3 \qquad Sp(A) = \emptyset
$$

$$
p_{A_{\mathbb{C}}} = (\lambda - (1+2i))^3 (\lambda - (1-2i))^3 \qquad Sp(A_{\mathbb{C}}) = \{1+2i, 1-2i\}
$$

AUTOVALORE $1-2i$:

$$
M = A - (1-2i)I = \begin{bmatrix} 2+2i & -2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2i & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2i & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2i & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2+2i \end{bmatrix}
$$

1^a riga $+ 4^a$ riga $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2+2i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2+2i \quad -4$
-6^a riga $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2i \quad -2-2i$
$-(i)\cdot 6^a$ riga $\Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ ✓

Con varie manipolazioni si verifica che $\operatorname{rg} M = 4 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} M = 2$

$\downarrow$

$\#$ di blocchi relativi a $1-2i$

FCJ di $A_{\mathbb{C}} \Rightarrow$

$$
\left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 1-2i & 1 & & & & \\ 0 & 1-2i & & & & \\ \hline & & 1-2i & & & \\ \hline & & & 1+2i & 1 & \\ & & & & 1+2i & \\ \hline & & & & & 1+2i \end{array}\right]
$$

$$
\varphi_{A_{\mathbb{C}}} = (x-(1-2i))^2 (x-(1+2i))^2
$$

$$
\varphi_A = (x^2 - 2x + 5)^2
$$

FCJ REALE DI $A \Rightarrow$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 & & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & & \\ 0 & 0 & 2 & 1 & & \\ \hline & & 0 & & 1 & -2 \\ & & & & 2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{lcl} \underline{v}_2 & & \\ \Big\downarrow M & & \Big\} \operatorname{Ker} M^2 \\ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_3 & \Big\} \operatorname{Ker} M & \end{array}
$$

$\underline{v}_1 \in \operatorname{Im} M \cap \operatorname{Ker} M$ — vettore di $\operatorname{Ker} M$ linearmente indipendente da $\underline{v}_1$

$$
\operatorname{Im} M = \operatorname{Span}(\underbrace{M^1, M^2, M^3, M^4}_{\text{colonne}})
$$

(le ultime 2 dipendono dalle prime)

$\operatorname{Ker} M \rightsquigarrow$ eq. cartesiane date dalle $2^a, 4^a, 5^a, 6^a$ riga di M

(1^a e 3^a riga dipendono dalle altre)

$S \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica si dice definita positiva se

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{x} \neq \underline{0} \quad {}^t\underline{x}\, S\, \underline{x} > 0$

riga / colonna

OSS S è invertibile (se $\underline{x} \neq 0 \ S\underline{x} \neq \underline{0}$) e S^{-1} è simmetrica definita positiva $\Rightarrow S$ è simmetrica definita positiva

$${}^t\underline{x}\, S^{-1} \underline{x} = {}^t\underline{x}\, S^{-1} S S^{-1} \underline{x} = {}^t(S^{-1}\underline{x})\, S\, (S^{-1}\underline{x}) \text{ e } S^{-1}\underline{x} \neq 0 \text{ se } \underline{x} \neq 0$$

l'inversa di una simmetrica è ancora simmetrica

OSS I è simmetrica definita positiva:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad {}^t\underline{x}\, I \underline{x} = {}^t\underline{x}\,\underline{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

è uguale a $0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

L'identità è la matrice associata al prodotto scalare canonico

OSS $N \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tNN$ è simmetrica definita positiva

$${}^t\underline{x}\, {}^tNN\underline{x} = {}^t(N\underline{x})(N\underline{x}) = {}^t(N\underline{x})\, I\, (N\underline{x}) \text{ e } N\underline{x} \neq \underline{0} \text{ se } \underline{x} \neq 0$$

> 0 perché I è definita positiva

Esercizio: $M \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $\exists\ a_1, \dots, a_k$ distinti non nulli tali che

$$(M^2 + a_1^2 I)(M^2 + a_2^2 I) \cdots (M^2 + a_k^2 I) = 0$$

allora $\exists\ S, A \in M_n(\mathbb{R})$, S simmetrica definita positiva, A antisimmetrica tali che

$$M = SA$$

Infatti: $(x^2 + a_1^2)(x^2 + a_2^2) \cdots (x^2 + a_k^2) \in I(M)$

$\hookrightarrow$ irriducibili su $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \varphi_M(x) = \prod_{j \in J} (x^2 + a_j^2) \qquad J \subset \{1, 2, \dots, k\}$$

non è detto che ci siano tutti i fattori

$$\varphi_{M_\mathbb{C}}(x) = \prod_{j \in J} (x + ia_j)(x - ia_j)$$

$\Rightarrow M_\mathbb{C}$ diagonalizzabile con autovalori immaginari puri

ci potrebbero essere più blocchi relativi allo stesso autovalore

$\Rightarrow$ FCJ reale di M è del tipo

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & a_{j_1} \\ -a_{j_1} & 0 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} 0 & a_{j_2} \\ -a_{j_2} & 0 \end{matrix} \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

Sia essa B. B è antisimmetrica

$$\exists\ N \text{ invertibile tale che } M = N^{-1} B N = \underbrace{N^{-1} ({}^tN)^{-1}}_{= ({}^tNN)^{-1}} \underbrace{{}^tN B N}$$

moltiplico per l'identità

simmetrica definita positiva (OSS 3)

$N^{-1}(N^T)^{-1} = (N^T N)^{-1}$ è simmetrica definita positiva

$A = N^T B N \qquad A^T = (N^T B N)^T = N^T B^T N^{T^T} = N^T(-B)N = -A$

$\hookrightarrow$ antisimmetrica ($A^T = -A$)

antisimmetrica

le matrici congruenti a una matrice antisimmetrica sono anch'esse antisimmetriche

allora posta $S = N^{-1}(N^T)^{-1}$ e $A = N^T B N$

$$B = N^{-1}(N^T)^{-1} N^T B N = SA$$

simmetrica definita positiva

antisimmetrica

28/03/2024
(Salvetti)

$\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$

$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$A = M_B(\varphi) = (a_{ij} = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))$

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_B \, A \, [\underline{w}]_B$

matrice di cambio di base

$B' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ base $\qquad P = M_B^{B'}(id)$

$A' = (a'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j))$ A e A' si dicono matrici congruenti

$A' = {}^tPAP \qquad M_{B'}(\varphi) = {}^tM_B^{B'}(id)\, M_B(\varphi)\, M_B^{B'}(id)$

$A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = {}^t[\underline{w}_i]_B A [\underline{w}_j]_B = {}^t(P^i)AP^j = ({}^tPAP)_{ij}$

INVARIANTI PER CONGRUENZA

$\text{rg}\, A' = \text{rg}\, A$ (quando moltiplico per una matrice invertibile il rango non cambia)

$\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(M_B(\varphi))$

$\det A' = \det({}^tPAP) = \underbrace{\det {}^tP}_{\det P} \det A \det P = \det A (\det P)^2$

il det NON è un invariante per congruenza

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si conserva il segno del determinante

Def. $\underline{v}, \underline{w} \in V$, sono ortogonali (rispetto a φ) se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$

es. $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

es. $\underline{v}$ è isotropo $\iff$ $\underline{v}$ è ortogonale a sé stesso
(direttamente dalla definizione)
$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$

$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$
$q(\underline{x}) = x_1^2 + \qquad + x_2^2 + x_3^2 = 0$

luogo dei vettori isotropi

insieme di vettori ortogonali a ogni altro

Def. $V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V\}$

RADICALE di φ

In generale dato sottospazio $W \subset V$ $\quad$ insieme di vettori ortogonali a ogni altro vettore di W

$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W\}$

$V^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V

$\underline{v}, \underline{v}' \in V^\perp$ $\quad \circ\ \varphi(\underline{v}+\underline{v}', \underline{w}) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\varphi(\underline{v}', \underline{w})} = 0$

$\circ\ \varphi(c\underline{v}, \underline{w}) = c\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$

es. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e φ è definito positivo $V^\perp = \{\underline{0}\}$

Def φ è non degenere se $V^\perp = \{\underline{0}\}$, degenere se $\dim V^\perp > 0$

es. $V = \mathbb{R}^2$

$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 \Rightarrow V^\perp = \{\underline{x} \mid \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = 0\ \forall y\} = \text{Span}(\underline{e}_2)$

↳ ha dimensione 1

MORFISMO DI RAPPRESENTAZIONE

$V; \varphi$ $\quad \alpha_\varphi : V \to V^*$

$\alpha_\varphi(\underline{v}) : \underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\qquad$ $\underline{v} \xmapsto{\alpha_\varphi} \varphi(\underline{v}, \circ)$ funzionale

è un funzionale

α_φ è lineare $\quad \alpha_\varphi(\underline{v}+\underline{v}')(\underline{w})$

$\alpha_\varphi(\underline{v}+\underline{v}') \Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) + \alpha_\varphi(\underline{v}')(\underline{w})$

$\alpha_\varphi(c\underline{v}) : \underline{w} \to \varphi(c\underline{v}, \underline{w}) = c\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = c\alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w})\ \forall \underline{w}$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ base duale

è un certo funzionale tale che:

$\alpha_\varphi(\underline{v}_1) : \underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}_1, \underline{w})$

$\shortparallel$

$x_1 \underline{v}_1^* + \dots + x_n \underline{v}_n^* =$

$= \varphi(\underline{v}_1 \underline{v}_1)\, \underline{v}_1^* + \dots + \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_n)\, \underline{v}_n^*$ $\qquad \alpha_\varphi(\underline{v}_2) = \dots$

$$\underset{\substack{\text{base duale di } V \\ (\text{base di } V^*)}}{\overset{\text{base di } V}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}}}(\alpha_\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi(\underline{v}_1 \underline{v}_1) & \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) & \dots \\ \vdots & & \\ \varphi(v_n v_1) & & \varphi(\underline{v}_n \underline{v}_n) \end{bmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

NB! è uguale alla sua trasposta $\varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_j, v_i)$

$\text{Ker}\, \alpha_\varphi = \{\underline{v} \mid \alpha_\varphi(\underline{v}) = 0 \quad w \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0\ \forall \underline{w}\} = V^\perp$

funzionale nullo

Passando alle coordinate $\underline{v} \in V^\perp \iff [\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{ker}\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$\dim \text{ker}\, \alpha_\varphi = n - \text{rg}\,\varphi = \dim V^\perp$ $\qquad M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$

φ non degenere $\iff \det M_{\mathcal{B}}(\varphi) \neq 0$

$W \subset V$ sottospazio

$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0\ \forall \underline{w} \in W\}$ $\quad$ ESERCIZIO: è un sottospazio vettoriale

es. $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

$W = \mathrm{Span}(\underline{w}) \qquad \underline{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$W^\perp = \{ \underline{y} \mid a y_1 + b y_2 + c y_3 = 0 \} \Rightarrow$ sottospazio

---

$S \subset V$ sottoinsieme

1) $S^\perp = \{ \underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall\ \underline{w} \in S \}$ ESERCIZIO è sottospazio

2) $S \subset T$ sottoinsiemi $\Rightarrow S^\perp \supset T^\perp$ Rovescia le inclusioni come l'annullatore

3) $S^\perp = (\mathrm{Span}\, S)^\perp$

Posso definire l'ortogonale di qualsiasi sottoinsieme!

dim. $\boxed{\subset}$ $S \subset \mathrm{Span}\, S \Rightarrow (\mathrm{Span}\, S)^\perp \subset S^\perp$ dall'es. 2

$\boxed{\supset}$ viceversa, $\underline{v} \perp S \Rightarrow \underline{v} \perp$ a qualunque comb. lineare dei vettori di S

$\varphi(\underline{v}, \sum_i x_i \underline{v_i}) = \sum_i x_i \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})$

Se B è una base di W, $W^\perp = B^\perp$

$B = \{ \underline{w_1}, \dots, \underline{w_k} \}$

devo risolvere

$\varphi(\underline{v}, \underline{w_i}) = 0 \quad i = 1, \dots, k \Rightarrow$ sistema di k equazioni lineari

k coordinate

(dim di $W^\perp$) $W \subset V$, φ

$\dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim (W \cap V^\perp)$

Corollario: Se φ è non degenere $\Rightarrow \dim W^\perp = \dim V - \dim W$

Dimostrazione:

$\underline{v} \in W^\perp$

$\alpha_\varphi(\underline{v}) : \underline{w} \to \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall\ \underline{w} \in W$

$\mathrm{Ann}\, W \subset V^*$ annullatore di W

$\{ f \in V^* \mid f(\underline{v}) = 0 \quad \forall\ \underline{w} \in W \}$

$\underline{v} \in W^\perp \iff \alpha_\varphi(\underline{v}) \in \mathrm{Ann}\, W$

$W \subset V \quad \dim W = k \quad \dim V = n$

$\dim(\mathrm{Ann}\, W) = n - k$

$B = \{ \underbrace{\underline{w_1}, \dots, \underline{w_k}}_{\text{base di } W}, \underline{w_{k+1}}, \dots, \underline{w_n} \}$

$f : \overset{B}{V} \to \overset{C}{\mathbb{K}} \qquad f \in \mathrm{Ann}\, W$

$M^B_C(f) = [\underbrace{[f(\underline{w_1})], \dots}_{=0 \text{ fino a } k}, [f(\underline{w_n})]]$

$W^{\perp} = \alpha_\varphi^{-1}(\mathrm{Ann}\,W)$ se φ è non degenere α_φ è un isomorfismo

$\Rightarrow$ conserva le dimensioni $\Rightarrow \dim W^{\perp} = \dim(\mathrm{Ann}\,W) = n-k$

(fare le stesse considerazioni in forma matriciale) $\square$

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad i = 1, \dots, k$

(meglio sulle dispense)

$[\underline{v}]_B = \underline{x} \qquad [\underline{w}]_B = \underline{y}$

${}^t\underline{x} A \underline{y}_i = 0 \quad i = 1, \dots, k$

${}^t\underline{y}_i A \underline{x} = 0$ se $\mathrm{rg}\,A = n$ la matrice del sistema ha rango k

Dimostrazione generale MOLTO MEGLIO SULLE DISPENSE DI SALVETTI DEL 28/03

In generale ($\dim V^{\perp} \geq 0$) $\quad \overline{V} = V/V^{\perp}$

$\overline{\varphi}([\underline{v}], [\underline{v}']) \underset{\text{def.}}{=} \varphi(\underline{v}, \underline{v}')$

va verificato che è ben definita

$\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$

$\underline{u}' = \underline{v}' + \underline{w}' \qquad \underline{w}, \underline{w}' \in V^{\perp}$

$\varphi(\underline{u}, \underline{u}') = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v}' + \underline{w}') = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \cancel{\varphi(\underline{v}, \underline{w}')} + \cancel{\varphi(\underline{w}, \underline{w}')} + \cancel{\varphi(\underline{w}, \underline{v}')}$

$\overline{\varphi}$ è NON degenere

$\overline{\varphi}([\underline{v}], [\underline{w}]) = 0 \quad \forall [\underline{w}]$

$\Downarrow$

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in V \Rightarrow \underline{v} \in V^{\perp} \Rightarrow [\underline{v}] = [\underline{0}]$

$\pi : V \to \overline{V} = V/V^{\perp}$

$W \mapsto \overline{W} = \pi(W)$

$W^{\perp} = \pi^{-1}(\overline{W}^{\perp})$

$\underline{v} \in W^{\perp} \quad \overline{\varphi}([\underline{v}], [\underline{w}]) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$

$[\underline{w}] \in \overline{W}$ (e viceversa, per esercizio)

- $\dim \overline{W} = ? = \dim W - \dim(W \cap V^{\perp})$
- $\dim(\overline{W}^{\perp}) \underset{\substack{\text{non} \\ \text{degenere}}}{=} \dim \overline{V} - \dim \overline{W} = \dim V - \dim V^{\perp} - \dim W + \dim(W \cap V^{\perp})$
- $\dim(W^{\perp}) = \dim(\pi^{-1}(\overline{W}^{\perp})) =$
$= \dim \overline{W}^{\perp} + \dim V^{\perp}$

($f: V \to V$ surgettiva
$U \to f(U)$
$\dim f^{-1}(U) = \dim U + \dim \mathrm{Ker}\, f$)

<u>ESEMPIO</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^3$

$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$V^{\perp} = \mathrm{Span}(\underline{e}_3)$

ESERCIZIO $W \subset V$ sottospazio

$(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$ (vedi lezione del 28/03 sull'iPad)

$W \subset (W^\perp)^\perp$ (inclusione ovvia)

$\dim W = n - \dim W^\perp = n - (n - \dim W)$ (??? è vera solo se $W \cap V^\perp = \{0\}$)

In generale $W + V^\perp \subset (W^\perp)^\perp$

$\dim(W + V^\perp) = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp)$

$\dim V - \dim W^\perp + \underbrace{\dim(W^\perp \cap V^\perp)}_{= \dim V^\perp} =$

$= \dim V - \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$

ESERCIZIO / PROP. $V = W \oplus W^\perp \iff W \cap W^\perp = \{0\}$

OSS Un vettore $\underline{v}$ è isotropo $\iff (\mathrm{Span}\,\underline{v}) \subset (\mathrm{Span}\,\underline{v})^\perp$

$\iff \varphi|_{W \times W}$ è NON DEGENERE

$W = \mathrm{Span}\,\underline{v}$ $\quad \underline{v}$ isotropo $\varphi|_W = 0$ (controllare le soluzioni sulle dispense di Salvetti)

10/04/2024
Manfre

Prodotti scalari

V sp. vettoriale$/\mathbb{K}$ $\quad \varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare e simmetrica

(char $\mathbb{K} \neq 2$) $\quad (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

Ovvero:

- φ è lineare in entrambi gli argomenti

  Fissato $\underline{v} \in V$ $\quad \varphi(\underline{v}, \cdot) : V \to \mathbb{K}$, $\quad \underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ è lineare

  Fissato $\underline{w} \in V$ $\quad \varphi(\cdot, \underline{w}) : V \to \mathbb{K}$ $\quad \underline{v} \to \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ è lin.

  $(\varphi(\underline{v}, \cdot)$ e $\varphi(\cdot, \underline{w}) \in V^* \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V)$

- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$

  $(\varphi(\underline{v}, \cdot) = \varphi(\cdot, \underline{v}))$ OSS Basta simmetrica e lineare in un argomento

$PS(V) = \{\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ p. scalare$\}$ è uno sp. vettoriale$/\mathbb{K}$ (ssp. di $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{K})$)

$\alpha_\varphi : V \to V^*$ è lineare
$\underline{v} \mapsto \varphi(\underline{v}, \cdot)$

φ prodotto scalare fissato

(morfismo di rappresentazione
Se $f = \varphi(\underline{v}, \cdot)$ $\underline{v}$ rappresenta f
f è rappresentato da $\underline{v}$)

• $\text{Rad}\,\varphi = V^{\perp} = \text{Ker}\,\alpha_\varphi = \{ \underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V \}$ radicale di φ (ssp. di V)

φ si dice non degenere se $\text{Rad}\,\varphi = \{\underline{0}\}$

Per cui se un funzionale non annulla il radicale sicuramente non posso rappresentarlo

• $\text{Im}\,\alpha_\varphi \subset \text{Ann}(\text{Rad}(\varphi))$ (*) e vale = se V ha dim. finita

$\dim V < \infty \Rightarrow \text{Im}\,\alpha_\varphi = \text{Ann}(\text{Rad}\,\varphi)$

(*) $\text{Ann}(\text{Rad}\,\varphi) = \{ f \in V^* \mid f|_{\text{Rad}\,\varphi} = 0 \} = \{ f \in V^* \mid \text{Rad}\,\varphi \subset \text{Ker} f \}$

Dim

$f \in \text{Im}\,\alpha_\varphi, \quad \exists \underline{v} \in V: \quad f = \varphi(\underline{v}, \cdot)$

$\underline{w} \in \text{Rad}\,\varphi \qquad f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \Rightarrow \underline{w} \in \text{Ker} f$

$\Rightarrow \text{Rad}\,\varphi \subset \text{Ker} f \Rightarrow f \in \text{Ann}(\text{Rad}\,\varphi)$

$\dim V = n < \infty, \quad \dim \text{Ann}(\text{Rad}\,\varphi) = n - \dim \text{Rad}\,\varphi = n - \dim \text{Ker}\,\alpha_\varphi = \dim \text{Im}\,\alpha_\varphi$

$\Rightarrow \dim \text{Im}\,\alpha_\varphi = \dim \text{Ann}(\text{Rad}\,\varphi)$

Esercizio: sono lineari e inverse

Se $V = \mathbb{K}^n, \qquad PS(\mathbb{K}^n) \cong S_n(\mathbb{K})$ → matrici simmetriche $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$

$\varphi \in PS(\mathbb{K}^n) \longmapsto M(\varphi) = (\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j))_{i,j=1,\dots,n} \in S_n(\mathbb{K})$

$A \in S_n(\mathbb{K}) \longmapsto \varphi_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : \quad \varphi_A(x, y) = {}^t x A y \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$

$\varphi_A(y, x) = {}^t y A x \underset{\uparrow}{=} {}^t({}^t y A x) = {}^t x A y = \varphi_A(x, y)$

(perché è un elemento del campo)

• $\text{Rad}\,\varphi_A = \text{Ker}\,A$

Dim. $x \in \text{Rad}\,\varphi_A \Rightarrow \varphi_A(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{K}^n \iff {}^t x A y = 0 \ \forall y \in \mathbb{K}^n \iff$

$\iff {}^t x A = 0 \iff 0 = {}^t A x = A x \iff x \in \text{Ker}\,A$

φ_A è non degenere $\iff \det A \neq 0$

ES. $V = \mathbb{R}^3 \qquad \varphi: V \times V \to \mathbb{K} \qquad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(x, y) = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_3$

$\varphi \in PS(\mathbb{R}^3)$?

Si vede che i due vettori sono intercambiabili, ora mostriamo un metodo alternativo per dimostrare che $\varphi \in PS(\mathbb{R}^3)$

$\varphi(x, y) = x_1(3y_1 + y_2 - y_3) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(-y_1 - y_2 - y_3) =$

$= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3y_1 + y_2 - y_3 \\ y_1 - y_3 \\ -y_1 - y_2 - y_3 \end{pmatrix} = {}^t x \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{= A} y =$

$= {}^t x A y, \quad A \in S_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi = \varphi_A \in PS(\mathbb{R}^3)$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_R = 0$$

(ha una riga che è multiplo di un'altra)

$\Rightarrow \varphi$ è degenere $\quad \mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,A' =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\mathrm{Im}\,\alpha_\varphi = \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}\,\varphi)$

I funzionali rappresentabili tramite φ sono quelli che annullano $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es. $f \in V^*$: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + y \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ NON rappresentabile

$g \in V^*$: $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 4x + y - 2z \qquad g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$ rappresentabile

α_φ non è iniettiva $\Rightarrow$ ci sono diversi vett. che rappresentano il funzionale

α_φ è iniettiva $\Leftrightarrow$ il prodotto scalare è NON degenere

Se $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ rappresenta g: $\quad g = \varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \cdot\right)$

$$4x + y - 2z = (a \; b \; c)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 3a + b - c = 4 \\ a - c = 1 \\ -a - b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

la scelgo come variabile indipendente e determino le altre fissata questa

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - c = 1 \\ -2a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ -2a+3 \\ a-1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

uguale alla prima

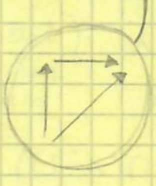
tutti i vettori di questa forma rappresentano g

La rappresentazione è unica se α_φ è un isomorfismo $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\alpha_\varphi \neq \{0\} \Leftrightarrow \varphi$ non degenere

---

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base $\mathcal{B}$ di $V \qquad \varphi \in PS(V)$

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\,]_\mathcal{B} \; [\,]_\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[ur, "{\varphi \circ ([\,]_\mathcal{B}^{-1}, [\,]_\mathcal{B}^{-1})}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd} \quad = \varphi_A$$



Ogni prodotto scalare da $V \times V$ in $\mathbb{K}$ genera un prodotto scalare da $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}$ (mediante la matrice di rappresentazione)

↳ bilineare e simmetrica

$\Rightarrow$ p. scalare su $\mathbb{K}^n$

con $A \in S_n(\mathbb{K})$

$$A = M_\mathcal{B}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j = 1, \dots, n}$$

$$\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V, \quad \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi_A([\underline{v}]_\mathcal{B}, [\underline{w}]_\mathcal{B}) = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B}\, A\, [\underline{w}]_\mathcal{B}$$

$$[\,]_\mathcal{B}(\mathrm{Rad}\,\varphi) = \mathrm{Rad}\,\varphi_A = \mathrm{Ker}\,A$$

B' base di V, $A' = M_{B'}(\varphi)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[ddr, bend left, "\varphi_{A'}"] & \\
V \times V \arrow[u, "{[\ ]_{B'}}"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
 & \mathbb{K} \\
V \times V \arrow[uu, "id_V \times id_V"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"] & \\
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[uuuu, bend left=60, "f_M^*"] \arrow[uur, bend right, "\varphi_A"'] &
\end{tikzcd}$$

$M = M^{B}_{B'}(id_V) \in GL_n(\mathbb{K})$

* f_M isomorfismo di cambio di base $\mathbb{K}^n_B \to \mathbb{K}^n_{B'}$

$$\varphi_A(x,y) = \varphi_{A'}(Mx, My)$$
$$\varphi_A(x,y) = {}^t x A y \qquad \varphi_{A'}(Mx,My) = {}^t(Mx) A' My = {}^t x({}^t M A' M) y$$

molto più intelligente della dimostrazione di Salvetti

$A = {}^t M A' M$

$A \equiv A'$ congruenti

$V = \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(p,q) = p(1)q(2) + p(2)q(1) \quad \forall p,q \in V$

Si verifica che è simmetrica e lineare $\qquad$ simmetrica

$\downarrow$

$a \in \mathbb{R}$

$val_a : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$
$p \longmapsto p(a)$

$\Rightarrow$ fissato p: $\varphi(p, \circ) = \underbrace{p(1)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{val_2(\circ)}_{\in V^*} + \underbrace{p(2)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{val_1(\circ)}_{\in V^*}$

$\Rightarrow \varphi(p, \circ) \in V^*$

↳ dimostra che è lineare in una componente

$\{1, x, x^2\}$ base B di V

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(Calcolo il det con operazioni di riga perché mi servirà il Ker)

$$\begin{pmatrix} 2&3&5 \\ 1&1&1 \\ 5&6&8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&3&5 \\ 1&1&1 \\ 0&1&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0&1&3 \\ 1&1&1 \\ 0&1&3 \end{pmatrix}$$

$$M_B(\varphi) \underset{\text{operazioni di riga}}{\sim} \begin{pmatrix} 0&1&3 \\ 1&1&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 0 \Rightarrow \varphi_M$ degenere $\Rightarrow \varphi$ degenere

($\dim \mathrm{Rad}\,\varphi = 1$) $= \dim \mathrm{Ker}\, M$

$$\mathrm{Rad}\,\varphi_M = \mathrm{Ker}\, M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Span}(x^2 - 3x + 2)$$

In alternativa:

$p \in \mathrm{Rad}\,\varphi \Rightarrow 0 = p(1)q(2) + p(2)q(1) \quad \forall q \in V$

$\left.\begin{matrix} q = x - 2 \Rightarrow p(2) = 0 \\ q = x - 1 \Rightarrow p(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p(x) = (x-1)(x-2)\cdot\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (ha al max deg 2) ma dalla matrice so già che deve avere grado 1

$\Rightarrow \mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Span}((x-1)(x-2))$

B' base di V $\quad 1, x, x^2 - 3x + 2$

↱ questa parte rimane uguale a prima

$$M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = M' = {}^t M^{B'}_{B}(id_V)\, M\, M^{B'}_{B}(id_V)$$

$M_B^{B'}(id_V) = \begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 0&1&-3 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 2&-3&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&3&5 \\ 3&4&6 \\ 5&6&8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&3&5 \\ 3&4&6 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2&3&5 \\ 3&4&6 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 0&1&-3 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&3&0 \\ 3&4&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ in eserciti concreti non farlo MAI così

B'' base di V $\quad 1,\ 2x-3,\ x^2-3x+2$

$M_{B''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&-2&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ lo scelgo in modo che abbia prodotto scalare 0 con 1
cioè risolvendo $p(1) = -p(2)$

Es. $\exists$ base $B''' \mid M_{B'''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&-1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$? Bisogna moltiplicare B'' per $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$Bil(V \times V, \mathbb{K})$

$F: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare

Fissato $\underline{v} \in V$ $\quad F(\underline{v}, \circ): V \to \mathbb{K}$ lineare $\quad (F(\underline{v}, \circ) \in V^*)$

(idem nella 2^a componente)

$\alpha_{F,S}: V \to V^*$
$\underline{v} \mapsto F(\underline{v}, \circ)$

$\alpha_{F,D}: V \to V^*$
$\underline{v} \mapsto F(\circ, \underline{v})$

2 morfismi di rappresentazione
non sono uguali
perché non sono necessariamente simmetrici

$Rad_S(F) = \operatorname{Ker} \alpha_{F,S} = \{ \underline{v} \in V \mid F(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V \}$

$Rad_D(F) = \operatorname{Ker} \alpha_{F,D} = \{ \underline{w} \in V \mid F(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{v} \in V \}$

$\varphi \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$

${}^t\varphi \in Bil(V \times V, \mathbb{K}) \quad {}^t\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}, \underline{v})$

$\tau: Bil(V \times V, \mathbb{K}) \to Bil(V \times V, \mathbb{K})$ lineare

$\tau^2 = id_{Bil(V \times V, \mathbb{K})} \Rightarrow \tau$ isomorfismo

perché il polinomio minimo si scompone in fattori lineari distinti

ricavo da questo che il polinomio minimo è $x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ diagonalizzabile con spettro $\subset \{1, -1\}$
$(\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2)$

$Bil(V \times V, \mathbb{K}) = V_1 \oplus V_{-1}$

alternanti o 2-forme

$V_1 = PS(V)$, $\quad V_{-1} = A(V) = \{ \varphi \in Bil(V \times V, \mathbb{K}) \mid {}^t\varphi = -\varphi \}$

$\underset{\in Bil}{\varphi} = \underset{\in PS}{\frac{\varphi + {}^t\varphi}{2}} + \underset{\in A}{\frac{\varphi - {}^t\varphi}{2}}$

(ogni applicazione bilineare si può scrivere in questo modo come somma di un p. scalare e una forma alternante)

V_1: ${}^t\varphi - \varphi = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$
cioè φ simmetrico

V_{-1}: ${}^t\varphi + \varphi = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$
cioè φ alternante

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base B di V

$M_B(F) = (F(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{ij = 1, \dots, n} = M \in M_n(\mathbb{K})$

$F(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_B \, M \, [\underline{w}]_B$

$M_B \quad Bil(V \times V, \mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \quad$ isomorfismo

$$PS(V) \oplus A(V) \longleftrightarrow S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

B' nuova base di V

$\Rightarrow M_{B'}(F) = {}^tN M_B(F) N \qquad N = M_B^{B'}(id_V) \in GL_n(\mathbb{K})$

<u>OSS.</u> $A \in S_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tNAN \in S_n(\mathbb{K})$

$A \in A_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tNAN \in A_n(\mathbb{K})$

$Rad_S(F) \overset{[\,]_B}{\longleftrightarrow} Ker\ ?$

$Rad_D(F) \overset{[\,]_B}{\longleftrightarrow} Ker\ ?$

$Rad_S(F) = \{ \underline{v} \in V \mid F(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V \}$

$Rad_D(F) = \{ \underline{w} \in V \mid F(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{v} \in V \}$

$M_B(F) = A$

(i) $Rad_S(F) \overset{[\,]_B}{\longleftrightarrow} \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid {}^t\underline{x} A \underline{y} = 0 \ \forall \underline{y} \in V \}$

(ii) $Rad_D(F) \overset{[\,]_B}{\longleftrightarrow} \{ \underline{y} \in \mathbb{K}^n \mid {}^t x A y = 0 \ \forall \underline{x} \in V \}$

(i) ${}^t\underline{x} A \underline{y} = 0 \ \forall y \iff {}^t x A = 0 \iff {}^t(A^t \underline{x}) = \underline{0} \iff A^t x = 0$

$\Rightarrow Rad_S(F) \overset{[\,]_B}{\longleftrightarrow} Ker\, A^t$

(ii) ${}^t\underline{x} A y = 0 \ \forall \underline{x} \iff Ay = 0 \iff \underline{y} \in Ker\, A$

$\Rightarrow Rad_D(F) \overset{[\,]_B}{\longleftrightarrow} Ker\, A$

11/04/2024
Salvetti

$\dim(W^{\perp}) = \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^{\perp})$

$\rho : V \xrightarrow{\cong} V^{**} = (V^*)^*$

In dimensione finita questi spazi sono isomorfi mediante l'isomorfismo

$\rho(\underline{v}) : V^* \to \mathbb{K}$
$f \mapsto f(\underline{v})$

funzionale del funzionale

$\underline{v} \in V \xrightarrow{\rho}$ valutazione in $\underline{v} \in V^{**}$

$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ $\quad \alpha_\varphi : V \to V^*$

$\underline{v} \mapsto \underbrace{[\underline{w} \to \varphi(\underline{v}, \underline{w})]}_{\varphi(\underline{v}, \cdot)}$ funzionale

$\ker \alpha_\varphi = V^{\perp}$

Esercizio: $\rho(W^{\perp}) = \mathrm{Ann}(\alpha_\varphi(W)) \to$ da dimostrare ⊛

$\dim \mathrm{Ann}(\alpha_\varphi(W)) = n - \dim(\alpha_\varphi(W)) = n - (\dim W - \dim W \cap V^{\perp})$

$\dim \rho(W^{\perp}) = \dim W^{\perp}$

ρ isomorfismo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ conserva le dimensioni

⊛ $\boxed{\subseteq}$ $\rho(\underline{w}')$ $\quad \underline{w}' \in W^{\perp}$

$\rho(\underline{w}')(\alpha_\varphi(\underline{w})) = \varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$

$\boxed{\supseteq}$ (Basta verificare che le dimensioni sono uguali, vedi Ipad lezione del 28/03)

$V, \varphi \qquad W \subset V$ ssp

notazione:

$\varphi|_W = \varphi|_{W \times W} : W \times W \to \mathbb{K}$

$\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \{ \underline{w} \in W \mid \varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0 \ \forall \underline{w} \in W \} = W \cap W^{\perp}$

$W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\} \iff \varphi|_W$ è NON degenere $\iff$ data $\mathcal{B}$ base di W, $M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$ è non singolare ($\det M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W) \neq 0$)

$\to \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^{\perp})$

$\dim W^{\perp} \geq n - \dim W$

allora $W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\} \iff V = W \oplus W^{\perp}$

per Grassmann

$\Leftarrow$ definizione di somma diretta

$\Rightarrow$ $\dim W \oplus W^{\perp} = \dim W + \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^{\perp}) \geq \dim V$

---

in $\mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ è NON degenere (la sua matrice associata, che segue, ha det $\neq 0$)

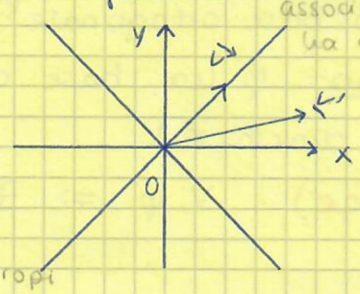
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\underline{v}$ isotropo $\quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi|_{\mathrm{Span}(\underline{v})} = 0$

$(a\ b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a\ -b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 - b^2$

$a^2 = b^2 \to$ vett. isotropi



$\underline{v}^{\perp} = (\text{Span}\,\underline{v})^{\perp}$ → deve avere dimensione 1
$\qquad \shortparallel$ (se avesse dimensione 2 $\underline{v}$ dovrebbe essere nel radicale)
$\quad \text{Span}\,\underline{v}$

$\underline{v}'$ vettore non isotropo $\Rightarrow \varphi|_{\text{Span}\,\underline{v}'}$ NON degenere

$\varphi(\underline{v}', \underline{v}') \neq 0$

$(\underline{v}')^{\perp}$ è una retta $\neq \text{Span}(\underline{v}')$

---

in $\mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

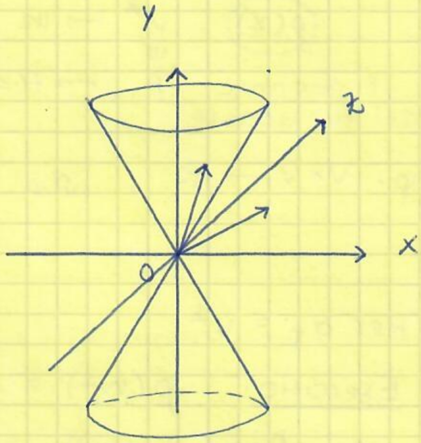
$q(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}, \underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

$\underline{x}$ non isotropo (fuori dal cono)

$\Rightarrow (\text{Span}\,\underline{x})^{\perp} \oplus \text{Span}\,\underline{x} = \mathbb{R}^3$

$\underline{x}$ isotropo

$\Rightarrow (\text{Span}\,\underline{x})^{\perp} \supset \text{Span}\,\underline{x}$



$\varphi : V \times V \to \mathbb{K} \qquad q : V \to \mathbb{K}$

$q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$

$$q(\underline{v}+\underline{w}) = \varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) = \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}_{q(\underline{v})} + \underbrace{\varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})}_{2\varphi(\underline{v}, \underline{w})} + \underbrace{\varphi(\underline{w}, \underline{w})}_{q(\underline{w})}$$

$\Rightarrow$ Posso ricavare $\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ se $\text{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ conoscendo q

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{1}{2}\left(q(\underline{v}+\underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})\right)$$ formula di POLARIZZAZIONE

Se $q(\underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{v}, \underline{w}$

es. se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_2 + x_2y_1$

$V = \mathbb{F}_2^2 \qquad q(\underline{x}) = 2x_1x_2 = 0$

per far vedere che se $\text{char}\,\mathbb{K} = 2$ non funziona più

↳ la forma quadratica è sempre 0 ma φ è non degenere

Da adesso in poi consideriamo 2 invertibile

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ → ho preso una base di vettori isotropi

Def $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ BASE ORTOGONALE di V dotato di prodotto scalare φ se $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \ \forall i \neq j$

Oss B base ortogonale di $\varphi \iff M_B(\varphi)$ è diagonale

Esercizio: φ ha base ortogonale di vettori isotropi $\iff \varphi = 0$

TEO $\text{char}\,\mathbb{K} \neq 2$

(Lagrange) $V, \varphi \Rightarrow \exists$ una base ortogonale

dim.

(i) Se tutti i vettori sono isotropi $(q=0) \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$ qualunque base è ortogonale

(ii) Sia $\underline{v}_1$ non isotropo $\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) \neq 0 \Rightarrow$ per quanto detto sopra

$$V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1) \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\mathrm{Span}(\underline{v}_1)^\perp}_{\dim \mathrm{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n-1}$$

(manca passo base, ovvio) Per induzione su n ha una base ortogonale

$$\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$$

$\Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortogonale di $\underline{V}$. $\square$

Se cambio base la matrice cambia per congruenza $B = {}^tPAP$

Corollario: $A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \underset{\text{diagonale}}{D} = {}^tPAP$

$V = \mathbb{K}^n \quad \varphi: V \times V \to \mathbb{K} \quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$

$\hookrightarrow M_B(\varphi)$, B base canonica

$\exists B'$ ortogonale $M_{B'}(\varphi) = D$ diagonale

$\hookrightarrow$ è congruente ad A

$\Rightarrow$ considerazioni equivalenti al teo. di Sylvester in forma matriciale

TEO (Sylvester, caso su $\mathbb{C}$)

V sp. vettoriale $/\mathbb{C}$, $\varphi: V \times V \to \mathbb{C}$ prodotto scalare di rango r.
Allora esiste B base t.c.

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(con r uni sulla diagonale)

Dim. Lagrange $\Rightarrow \exists B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortogonale

Posso ordinare la base in modo che $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) \neq 0$ se $i = 1, \dots r$

$= 0$ se $i = r+1, \dots, n$

$$\Rightarrow M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \varphi(\underline{v}_r, \underline{v}_r) & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(il rango è invariante per congruenza)

$a_{11} = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)$ cerchiamo una trasformazione del tipo

$\underline{v}_1' = \alpha \underline{v}_1, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\underline{v}_1', \underline{v}_1') = 1$

$\varphi(\alpha \underline{v}_1, \alpha \underline{v}_1) = \alpha^2 \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) = \alpha^2 a_{11} = 1 \qquad \alpha = \sqrt{\frac{1}{a_{11}}}$

Corollario: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche sono congruenti $\Leftrightarrow$ hanno stesso rango

Su $\mathbb{C}$ il rango è l'invariante completo per congruenza

$V = \mathbb{C}^n$

$\varphi_A(\underline{x},\underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$

$\varphi_B(\underline{x},\underline{y}) = {}^t\underline{x} B \underline{y}$

($\Leftarrow$) $\exists \mathcal{B} \mid M_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{rg A} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\exists \mathcal{B}' \mid M_{\mathcal{B}}(\varphi_B) = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{rg B} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$

Se sono congruenti alla stessa matrice sono congruenti tra di loro per transitività

($\Rightarrow$) per esercizio

A, B congruenti, cioè $\exists S \in GL_n(\mathbb{C}) \mid B = {}^tSAS$

$rg B = rg(({}^tSA)S) \underset{S \text{ invertibile}}{=} rg({}^tSA) \underset{{}^tS \text{ invertibile}}{=} rg A$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

V sp. vettoriale su $\mathbb{R}$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$

$c_+(\varphi)$ = INDICE DI POSITIVITÀ di φ = $\max\{\dim W \mid W \subset V,$ ssp. t.c. $\varphi|_W > 0\}$

definito positivo

dovevano essere lettere iota "ι"

$c_-(\varphi)$ = INDICE DI NEGATIVITÀ = $\max\{\dim W \mid W \subset V$ ssp. t.c. $\varphi|_W < 0\}$

$c_0(\varphi)$ = INDICE DI NULLITÀ = $\dim V^\perp = n - rg\varphi$

TEO (Sylvester, caso $\mathbb{R}$)

V sp. vett$/\mathbb{R}$ $\quad \varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ p. scalare

$\exists$ base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{c_+(\varphi)} & & & \\ & \overbrace{-1 \; \ddots \; -1}^{c_-(\varphi)} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$$

$\forall$ base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si ha che

$\# \{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0\} = c_+(\varphi)$

$\# \{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0\} = c_-(\varphi)$

$\# \{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0\} = c_0(\varphi)$

dim. Per Lagrange $\exists$ $\mathcal{B}$ base ortogonale

sia essa $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

Ordiniamola in modo che i $\underline{v}_i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0$ vengano prima, poi i negativi e poi i nulli

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ | $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0$ $i = 1, \dots, p$

$\underline{v}_{p+1}, \dots, \underline{v}_{p+q}$ | " < 0 $i = p+1, \dots, p+q$

$v_{p+q+1}, \dots, v_n$ | " $= 0$ $i = p+q+1, \dots, n$

$rg(\varphi) = q+p$ $M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{p+q,p+q} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \# \{ i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0 \} = n - rg\,\varphi = \iota_0(\varphi)$

da questo ottengo che sono costanti $\iota_0(\varphi)$ e $(\iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi))$

$W_+ = \text{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\}$

$W_- = \text{Span}\{\underline{v}_{p+1}, \dots, \underline{v}_{p+q}\}$ $\Rightarrow V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$

$W_0 = \text{Span}\{\underline{v}_{p+q+1}, \dots, \underline{v}_n\}$

$\iota_+(\varphi) = \max\{\dim W \mid \varphi|_W > 0\}$

$\varphi|_{W+} > 0$ $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_p \underline{v}_p$

$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots \alpha_p \underline{v}_p, \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_p \underline{v}_p) \overset{*}{=}$

$= \alpha_1^2 \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) + \dots + \alpha_p^2 \varphi(\underline{v}_p, \underline{v}_p) > 0 \quad \forall \underline{v} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \iota_+(\varphi) \geq p$

supponiamo per assurdo che esista

se $\exists W$ di $\dim > p \mid \varphi|_W > 0$

$\dim W \cap (W_- \oplus W_0) > 0$ $\Rightarrow W$ contiene qualche vettore

Grassmann $\underline{v} \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$

(si fa vedere con un conto simile a $\overset{*}{=}$)

$\Rightarrow \iota_+(\varphi) = p$

Nello stesso modo si dimostra che $\iota_-(\varphi) = q$

Ora posso ridurli a 1 e -1 come nel caso complesso

$\downarrow$

$a_{jj} < 0$

$\Rightarrow \alpha_j^2 a_{jj} = -1$

$\alpha_j = \sqrt{\frac{-1}{a_{jj}}}$

positivo

12/04/2024
(Manfre)

V sp. vett/$\mathbb{K}$, $q \in PS(V)$

non si sa perché l'ho chiamato q

- $\underline{v}, \underline{w} \in V$ sono **ortogonali**, $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $q(\underline{v}, \underline{w}) = 0$
- $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** se $\underline{v} \perp \underline{v}$ $(q(\underline{v}, \underline{v}) = 0)$
- $CI(q) = \{\underline{v} \in V \mid q(\underline{v}, \underline{v}) = 0\}$ **CONO ISOTROPO** di q (chiuso per prodotto di scalari)
- **$\text{Rad}\, q$** $= \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{w} \ \forall \underline{w} \in V\}$ **$\subset CI(q)$**
- $\underline{v} \in \text{Rad}\, q \iff \underline{v}$ è ortogonale ad un insieme di generatori di V

($\Rightarrow$) ovvia

($\Leftarrow$) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generatori $\quad \underline{v} \perp v_i \quad \forall i = 1, \dots, k$

$\underline{w} \in V \quad \underline{w} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k$

$q(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha_1 q(\underline{v}, \underline{v}_1) + \dots + \alpha_k (\underline{v}, \underline{v}_k) = 0 \Rightarrow \underline{v} \in \text{Rad}\, q$

- $\underline{v} \in V$, $\underline{v}^\perp = \{\underline{w} \in V \mid \overset{\underline{v} \perp \underline{w}}{q(\underline{v}, \underline{w}) = 0}\} = \text{Ker}\, \overset{\in V^*}{q(\underline{v}, \cdot)} \Rightarrow$ ssp.
- $\underline{v} \in CI(q) \iff \underline{v} \in \underline{v}^\perp \qquad \underline{v} \in \text{Rad}\, q \iff \underline{v}^\perp = V$
- $\underset{\underline{v}\text{ non isotropo}}{\underline{v} \notin CI(q)} \iff V = \text{Span}(\underline{v}) \oplus \underline{v}^\perp$ (dimostrato ieri)

Prodotto scalare standard su $\mathbb{K}^n$ $\quad \langle , \rangle \quad \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

$$\langle x, y \rangle = {}^t x y \overset{\shortparallel}{} {}^t x I y \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n \qquad \langle , \rangle = q_I$$

sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \langle , \rangle$ è NON degenere $\quad \text{Rad}\, \langle , \rangle = \{\underline{0}\}$

$CI(\langle , \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$\hookrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

su $\mathbb{R}$: $\{\underline{0}\}$ (anisotropo)
anisotropo $\Rightarrow$ non degenere
non degenere $\not\Rightarrow$ anisotropo

su $\mathbb{C}$: $\neq \{\underline{0}\}$

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \in CI(\langle , \rangle)$$

$\underline{0}^\perp = V \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \underline{0} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$

dim $n-1$
$\Rightarrow$ IPERPIANO

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad V = S_2(\mathbb{R})$, $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$, $q(A,B) = (1\,2)\, AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \forall A, B \in V$

$$\varphi(AB) = (1\,2)\, AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = {}^t\left((1\,2)\, AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (1\,2)\, {}^tB\, {}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

A e B simmetriche

$= (1\,2)\, BA \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \varphi(B,A)$ $\quad$ el. di $\mathbb{K}$ $\quad \Rightarrow \varphi$ simmetrico

Si verifica anche che è lineare

Fissata $A \in V$, $B_1 + B_2 \in V$ $\quad \varphi(A, B_1 + B_2) = (1\,2)\, A(B_1 + B_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= (1\,2)(AB_1 + AB_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1\,2)\, AB_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1\,2)\, AB_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \varphi(A, B_1) + \varphi(A, B_2)$

$\lambda \in \mathbb{K}$, $B \in V$ $\quad \varphi(A, \lambda B) = (1\,2)\, A \lambda B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda (1\,2)\, AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \varphi(A,B)$

$\Rightarrow \varphi \in PS(V)$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ base di V $(\mathcal{B})$

$\mathrm{Rad}\,\varphi = A_1^\perp \cap A_2^\perp \cap A_3^\perp$

$A_1^\perp = \left\{ B \in V \mid (1\,2)\, A_1 B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

$A_1 B = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1\,2) \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a + 2c$

$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\hookrightarrow A_2 \perp A_1$

$A_2^\perp = \left\{ B \in V \mid (1\,2)\, A_2 B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$A_2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \qquad (1\,2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2c + 4b$

$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$ (un altro piano $\neq$ dal precedente)

$A_3^\perp = \left\{ B \in V \mid (1\,2)\, A_3 B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$A_3 B = \begin{pmatrix} c & b \\ a & c \end{pmatrix} \qquad (1\,2) \begin{pmatrix} c & b \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a + 2b + 5c$

$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ -2/5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ -2/5 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$B \in \mathrm{Rad}\,\varphi \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ 2c + 4b = 0 \\ 2a + \cancel{2b} + 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Rad}\,\varphi = A_1^\perp \cap A_2^\perp$

$\qquad\qquad\qquad 2(a + 2c) + c + 2b$

$\begin{cases} c = -2b \\ a = 4b \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$CI(\varphi) = \left\{ A \in V \mid \underbrace{(1\,2)\, A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{} = 0 \right\}$

$(1\,2)\, {}^t\!A A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = {}^t\!\left(\underbrace{A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{x = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right) A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow {}^t x x = 0 \Rightarrow x \in CI(\langle , \rangle) = \{ \underline{0} \} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

$CI(\varphi) = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c \\ c + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$ eq. di prima

$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \xrightarrow{[\,]_\mathcal{B}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ coincide con il radicale (poteva, potenzialmente, essere più grande)

$M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = M \qquad A_1 \xrightarrow{[\,]_\mathcal{B}} \underline{e_1}$

$e_1^{\perp_{\varphi_M}} \qquad {}^t e_1 M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_3$

$\hookrightarrow$ ha per coeff. quelli delle eq. trovate

$CI(\varphi) \xrightarrow{[\ ]_B} CI(\varphi_M) \qquad \left(CI(\varphi_M) = Rad(\varphi_M) = Span\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right)$

Se volessimo cercarlo dalla matrice

$$CI(\varphi_M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x_1\, x_2\, x_3) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad = \right\}$$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 = 0$$

$\hookrightarrow$ impossibile da trattare agevolmente

B' nuova base $\Rightarrow A_1, A_2, A_3' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

$$CI(\varphi) \overset{[\ ]_B}{\longleftrightarrow} CI(\varphi_{M'}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 = 0 \right\} = Span(\underline{e}_3)$$

$$\Rightarrow CI(\varphi) = Span(A_3')$$

$S \subset V \quad S^\perp = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{s} \perp \underline{v} \ \forall \underline{s} \in S \} = \bigcap_{\underline{s} \in S} \underline{s}^\perp$ ssp

$\hookrightarrow$ è il ragionamento che ho usato per la base dell'esercizio di prima

- $S \subset T \subset V \Rightarrow S^\perp \supset T^\perp$
- $V^\perp = Rad\,\varphi$
- $S \subset Rad\,\varphi \Rightarrow S^\perp = V$
- $Rad\,\varphi \subset S^\perp \ \forall S \subset V$ — Il radicale è nell'ortogonale di tutti i ssp (e di tutti i sottoinsiemi)
- $S^\perp = (Span(S))^\perp$

$\downarrow$

dim.
- $S \subset Span(S) \Rightarrow S^\perp \supset (Span(S))^\perp$
- $\underline{v} \in S^\perp$

$\underline{w} \in Span\,S \qquad \underline{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i \underline{s}_i \quad a_i \in \mathbb{K},\ \underline{s}_i \in S$

prendo un $\underline{v}$ nell'ortogonale di S

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{s}_i)}_{0} = 0 \Rightarrow \underline{v} \in (Span(S))^\perp$$

- $W \subset V$ ssp. $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ generatori di W, $W^\perp = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}^\perp = \underline{w}_1^\perp \cap \dots \cap \underline{w}_k^\perp$

- $W^\perp = \alpha_\varphi^{-1}((Ann(W))$

$\downarrow$

dim. $\underline{v} \in W^\perp \iff \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W \iff \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W$

$\iff W \subset Ker\,\alpha_\varphi(\underline{v}) \iff \alpha_\varphi(\underline{v}) \in Ann\,W$

$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap Im f)$

$f(f^{-1}(B)) = B \cap Im f$

- $\dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim(W \cap Rad\,\varphi)$

$\alpha_\varphi(W^\perp) = Ann(W) \cap Im\,\alpha_\varphi = Ann(W + Rad\,\varphi)$

quest'ultima uguaglianza deriva dalla formula $Ann\,U \cap Ann\,W = Ann(U+W)$ e dal fatto che $Im\,\alpha_\varphi = Ann\,Rad\,\varphi$

$$\dim \alpha_\varphi(W^\perp) = \dim W^\perp - \dim(W^\perp \cap \underbrace{\ker \alpha_\varphi}_{\mathrm{Rad}\,\varphi}) = \dim W^\perp - \dim \mathrm{Rad}\,\varphi$$

$(\mathrm{Rad}\,\varphi \subset W^\perp)$

$$\dim(\mathrm{Ann}(W+\mathrm{Rad}\,\varphi)) = \dim V - \dim(W+\mathrm{Rad}\,\varphi) =$$

$$= \dim V - (\dim W + \dim \mathrm{Rad}\,\varphi - \dim(W \cap \mathrm{Rad}\,\varphi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim(W \cap \mathrm{Rad}\,\varphi)$$

$\square$

- $W^{\perp\perp} = W + \mathrm{Rad}\,\varphi \to$ sull' 1pad Esercizio: $W^{\perp\perp\perp} = ?$
  $= W^\perp + V^\perp = W^\perp$
  (perché $V^\perp \subset W^\perp$)
- $U, W \subset V$ ssp.
  (i) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
  (ii) $(U \cap W)^\perp \supset U^\perp + W^\perp$ e vale = se φ è non degenere
  (NB! avevamo trovato prop. simili per l'annullatore)

dim (i)

$\boxed{\subset}$ $\begin{matrix} U \subset \\ W \subset \end{matrix} U+W \Rightarrow \begin{matrix} U^\perp \supset \\ W^\perp \supset \end{matrix} (U+W)^\perp \Rightarrow (U+W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$

$\boxed{\supset}$ $\underline{v} \in U^\perp \cap W^\perp$ $\underline{z} \in U+W$ $\underline{z} = \underline{u} + \underline{w}$ $\begin{matrix} \underline{u} \in U \\ \underline{w} \in W \end{matrix}$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{z}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}+\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{v} \in (U+W)^\perp$$

dim (ii)

$\boxed{\supset}$ $U \cap W \begin{matrix} \subset U \\ \subset W \end{matrix} \Rightarrow (U \cap W)^\perp \begin{matrix} \supset U^\perp \\ \supset W^\perp \end{matrix} \Rightarrow U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$

$(U \cap W)^\perp$ ssp.

$\boxed{\subset}$ caso φ non degenere.

Guardiamo le dimensioni

$$\dim(U^\perp + W^\perp) = \dim W^\perp + \dim U^\perp - \dim(U^\perp \cap W^\perp) =$$

$$= \dim V - \dim U + \dim V - \dim W - \dim((U+W)^\perp) =$$

$$= \dim V - \dim U + \cancel{\dim V} - \dim W - (\cancel{\dim V} - \dim(U+W)) =$$

$$= \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U+W) =$$

$$= \dim V - \dim(U \cap W) = \dim((U \cap W)^\perp)$$

$W \subset V$ ssp, la restrizione di φ a $W \times W$ $\varphi|_{W\times W}$ si indica con $\varphi|_W \in PS(W)$

- $\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \{\underline{w}' \in W \mid \underline{w}' \perp \underline{w} \ \forall \underline{w} \in W\} = W \cap W^\perp \to$ scollegato dal radicale globale
- $CI(\varphi|_W) = \{\underline{w} \in W \mid \underline{w} \perp \underline{w}\} = W \cap CI(\varphi)$
- $V = W \oplus W^\perp \Leftrightarrow \varphi|_W$ non degenere $(\Leftrightarrow \mathrm{Rad}\,\varphi|_W = \{\underline{0}\} = W \cap W^\perp \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \exists\, W \oplus W^\perp)$

$\dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = \cancel{\dim} W + \dim V - \cancel{\dim} W + \dim(\mathrm{Rad}\varphi \cap W)$

$\geq \dim V \Rightarrow \dim V$

$V = W \oplus W^\perp \quad (\dim(\mathrm{Rad}\,\varphi \cap W) = 0)$

- $V = W + W^\perp \iff \mathrm{Rad}\,\varphi|_W \subset \mathrm{Rad}\,\varphi$

$\Rightarrow \underline{w} \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_W = W \cap W^\perp, \quad \underline{v} \in V, \exists\, \underline{w}' \in W, \underline{u} \in W^\perp \mid \underline{v} = \underline{w}' + \underline{u}$

$\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\underline{w}, \underline{w}') + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = 0$

$\Rightarrow \underline{w} \in \mathrm{Rad}\,\varphi$

$\boxed{\supseteq}$ $\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp - \dim(W \cap W^\perp) =$

$= \cancel{\dim W} + \dim V - \cancel{\dim W} + \dim(\mathrm{Rad}\,\varphi \cap W) - \dim(\mathrm{Rad}\,\varphi|_W)$

$\mathrm{Rad}\,\varphi|_W \begin{matrix} \subset \mathrm{Rad}\,\varphi \\ \subset W \end{matrix} \qquad \mathrm{Rad}\,\varphi|_W \subseteq \mathrm{Rad}\,\varphi \cap W$

$\Rightarrow \dim(W + W^\perp) \geq \dim V \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(W + W^\perp) = \dim V$

$W + W^\perp = V$

17/04/2024
Salvetti

Abbiamo visto il teo. di Sylvester su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

SEGNATURA DI φ su $\mathbb{R} \to (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), \iota_0(\varphi))$

invariante completo per congruenza

$\iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) + \iota_0(\varphi) = \dim V$

$\iota_0\varphi = n - rg(\varphi)$

$V, \varphi \qquad V', \varphi'$ sullo stesso campo $\mathbb{K}$

ISOMETRIA: $f: {}_\varphi V \to V'_{\varphi'}$ isomorfismo lineare

tale che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w}$

genera una classe di equivalenza

Esercizio: $f: V \to V'$ è isometria $\iff \forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V, allora $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è una base di V' e $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi'(f(\underline{v}_i) f(\underline{v}_j)) \quad \forall\, i,j \iff \exists\, \mathcal{B}$ tale che ..."

basta una base

$\Rightarrow$ caso particolare della def. (+ un isomorfismo manda vett. indipendenti in vett. indipendenti)

$\Leftarrow$ $\varphi(\underline{v} = \sum_i x_i \underline{v}_i, \underline{w} = \sum_i y_i \underline{v}_i) =$

$= \sum_{i,j} \varphi(a_i \underline{v}_i, b_j \underline{v}_j) = \sum_{i,j} \varphi'(a_i f(\underline{v}_i), b_j f(\underline{v}_j)) = \varphi'(\sum_i a_i f(\underline{v}_i), \sum_j b_j f(\underline{v}_j)) =$

$= \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$

PROP $V, \varphi \quad V', \varphi'$ sono equivalenti:

$\mathcal{B}'$ qualunque e non fatta dalle immagini di $\mathcal{B}$ come nel caso precedente

(i) V, φ e V', φ' sono isometrici

(ii) $\forall$ base $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di V', $M_\mathcal{B}(\varphi), M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti

basta che ne esista una (iii)

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad f: V \to V'$ isometria

$$\begin{matrix} B & B' \\ \shortparallel & \\ \{v_1, \dots, v_n\} & \end{matrix}$$

$B'' = f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$

$$\varphi(v_i, v_j) = a_{ij} = \varphi(f(v_i), f(v_j)) = (M_{B''}(\varphi'))_{ij}$$

$M_B(\varphi) = M_{B''}(\varphi') \cong M_{B'}(\varphi')$

è congruente per il teo di cambiamento di base a $M_{B'}(\varphi')$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\quad A = M_B(\varphi)$

??? $\quad B = M_{B'}(\varphi') \qquad B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$

$$A = {}^tPBP$$

$$a_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = \sum_{k,l} p_{ki}\, \varphi'(v_k', v_l')\, p_{lj} = \varphi'\Big(\underbrace{\sum_k p_{ki} v_k'}_{v_i''}, \underbrace{\sum_l p_{lj} v_l'}_{v_j''}\Big)$$

$B'' = \{v_i'' = \sum_k p_{ki} v_k'\}$ è base perché $P \in GL_n(\mathbb{K})$

$f: v_i \to v_i''$ unicamente definita conserva i prodotti degli elementi della base $\Rightarrow$ è un'isometria

TEO $\quad V, \varphi \quad V', \varphi'$ sp. vett. su $\mathbb{R}$

V, V' sono isometrici $\Leftrightarrow \sigma(\varphi) = \sigma(\varphi')$ (segnature)

dove $\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), \iota_0(\varphi))$

($\Rightarrow$) $\quad \exists f: V \to V'$ isometria

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonale di V

$\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ è una base ortogonale di V'

$\iota_+(\varphi) = \#\{i \mid \varphi(v_i, v_i) > 0\} = \iota_+(\varphi') = \#\{i \mid \varphi'(f(v_i), f(v_i)) > 0\}$

($\Leftarrow$) Prendiamo basi di Sylvester in V e V'

$v_1, \dots, v_n$ e $v_1', \dots, v_n'$

$\Rightarrow \varphi(v_i, v_j) = \varphi'(v_i', v_j')$ (ottengo la stessa matrice per Sylvester)

$f: v_i \mapsto v_i'$ è una ISOMETRIA

A simmetrica reale $\quad \iota_+(A) = \iota_+(\varphi_A)$ (abuso di notazione) $\qquad (\varphi_A(x, y) = {}^t x A y)$

$\sigma(A)$ segnatura del p. scalare associato

Corollario: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche ($\in S_n(\mathbb{K})$) sono congruenti $\Leftrightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$ (cioè se hanno stessa segnatura)

$A \quad \varphi_A$

$B \quad \varphi_B$

A, B congruenti $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_A \quad \mathbb{R}^n, \varphi_B$ isometrici $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi_A$ e φ_B hanno la stessa segnatura $\rightarrow$ invariante completo per congruen.

Prop (i) e (ii) + teorema precedente

$(i_+(\varphi), \ i_-(\varphi), \ i_0(\varphi)) \qquad i_+ + i_- + i_0 = n$

$n = 1 \rightarrow 3$ possibili segnature

$(1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1)$

$n = 2 \rightarrow$ c'è ad esempio $(1,1,0)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ indefinito (né positivo né negativo) non degenere

$V, \varphi \qquad V = U \overset{\perp}{\oplus} W$

$\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \qquad \forall \underline{u} \in U, \ \underline{w} \in W$

In generale credo che ci siano $\frac{(n+2)!}{n!\,2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ possibili segnature

$\varphi|_U \qquad \varphi|_W$

$$\left.\begin{aligned} i_+(\varphi) &= i_+(\varphi|_U) + i_+(\varphi|_W) \\ i_-(\varphi) &= i_-(\varphi|_U) + i_-(\varphi|_W) \\ i_0(\varphi) &= i_0(\varphi|_U) + i_0(\varphi|_W) \end{aligned}\right]$$ valgono queste relazioni

DIM.

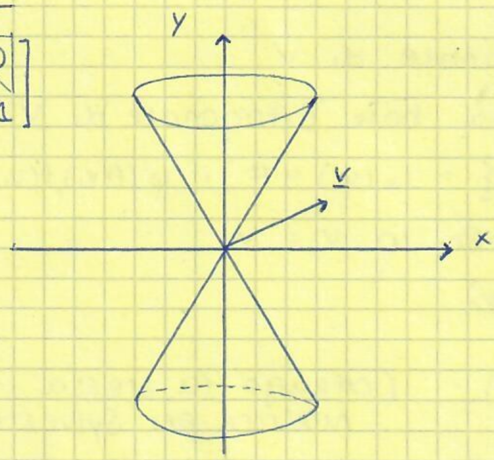
B' base ortogonale di U

B'' base ortogonale di W

$B' \cup B'' = B \rightarrow$ base ortogonale di V

e a questo punto è evidente

$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$



$\underline{v}^\perp = Span(\underline{v})^\perp$

se $q(\underline{v}) > 0 \Rightarrow Span(\underline{v})^\perp$ com'è messo?

$Span(\underline{v}) \overset{\perp}{\oplus} Span(\underline{v})^\perp = V$

$\Rightarrow Span(\underline{v})^\perp$ è un iperpiano

$2 = i_+(\varphi) = \underset{\overset{\parallel}{1}}{i_+(\varphi|_{Span(\underline{v})})} + \underset{\overset{\parallel}{1}}{i_+(\varphi|_{Span(\underline{v})^\perp})}$ $\Rightarrow$

$1 = i_-(\varphi) + \underset{\overset{\parallel}{0}}{i_-(\varphi|_{Span(\underline{v})})} + \underset{\overset{\parallel}{1}}{i_-(\varphi|_{Span(\underline{v})^\perp})}$ $\Rightarrow$

{ NB! $Span(\underline{v})^\perp$ passa sempre per l'origine perché è un ssp. vettoriale }

Allora $Span(\underline{v})^\perp$ deve segare il cono (contiene sia vettori positivi (dentro il cono) sia negativi (fuori dal cono)).

se $q(\underline{v}) < 0$

$2 = \underset{\overset{\parallel}{0}}{i_+(\varphi|_{Span(\underline{v})})} + \underset{\overset{\parallel}{2}}{i_+(\varphi|_{Span(\underline{v})^\perp})}$

$\Rightarrow Span(\underline{v})^\perp$ è un piano che interseca il cono nel vertice

se $\underline{q(\underline{v}) = 0}$ $\quad Span(\underline{v}) \subset Span(\underline{v})^{\perp}$

OSS ogni piano $\pi \supset Span(\underline{v})$ e che non è tangente al cono contiene sia vettori < 0 che vettori > 0

Se $(Span(\underline{v}))^{\perp}$ fosse uno di questi piani $\sigma(\varphi|_{Span(\underline{v})^{\perp}}) = (1,1,0)$

impossibile

Sarebbe $\varphi|_{Span(\underline{v})^{\perp}}$ non degenere $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = Span(\underline{v})^{\perp} \oplus \underbrace{Span(\underline{v})^{\perp\perp}}_{Span(\underline{v})}$ ↯ (*)

$\Rightarrow Span(\underline{v})^{\perp}$ è un piano tangente al cono

Esercizio

Fare lo stesso ragionamento in $\mathbb{R}^4$ con $M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$

vett. isotropi (ipersuperficie conica)

$\mathbb{K}$ qualunque $\quad V, \varphi$

(*) $\varphi|_W$ non degenere $\Leftrightarrow W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$ $\Leftrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$ (lezione dell'11/04)

Def. $W \subset V$

W è isotropo se $\varphi|_W = 0$

$\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0 \quad \forall\, \underline{w}, \underline{w}' \in W$

OSS $V^{\perp}$ è isotropo

es. $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è isotropo e $W = Span(\underline{v})$ è isotropo

$\underline{v}$ isotropo $\Leftrightarrow Span(\underline{v})$ isotropo

INDICE DI WITT DI φ: massima dimensione di un sottospazio isotropo

W è isotropo $\Leftrightarrow W \subset W^{\perp}$

Prop. φ non degenere

W isotropo

$\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$

Dim:

$$\dim W \underset{W \subset W^{\perp}}{\leq} \dim W^{\perp} = \dim V - \dim W \rightarrow \dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$$

□

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V, \varphi \quad \varphi$ non degenere

$\sigma(\varphi) = (i_+(\varphi), i_-(\varphi), 0)$

$\varphi > 0 \Rightarrow w(\varphi) = 0 \qquad \varphi < 0 \Rightarrow w(\varphi) = 0$

indice di Witt

In generale $w(\varphi) = \min\{i_+(\varphi), i_-(\varphi)\}$

supponiamo $i_-(\varphi) \leq i_+(\varphi)$

non può essere $w(\varphi) > \underset{\text{min.}}{\iota_-(\varphi)}$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{\iota_+(\varphi)}, \underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_{\iota_-(\varphi)}$ → Base di Sylvester

>0 <0

span dei vettori che generano sulla diagonale numeri positivi

$V = W_+ \oplus W_-$ ← " " " " negativi

tale spazio avrebbe intersezione non banale con W_+

↯ perché $\forall \underline{w} \in W_+$ si ha $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$

Ora basta costruire un ssp. isotropo con questa dim. massima $(\iota_-(\varphi))$

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}'_1, \underline{v}_1 + \underline{v}'_1) = \underbrace{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}_{=1} + \underbrace{\varphi(\underline{v}'_1, \underline{v}'_1)}_{=-1} + 2\cancel{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}'_1)} = 0$$

2 vettori $\underline{u}, \underline{w}$ isotropi, ortogonali e lin. indipendenti generano un ssp. isotropo

$\Rightarrow$ Prendo $\underline{v}_1 + \underline{v}'_1$

$\underline{v}_2 + \underline{v}'_2$

$\vdots$

$\underline{v}_{\iota_-(\varphi)}, \underline{v}'_{\iota_-(\varphi)}$

↖ minimo dei due per φ

$\varphi(\underline{v}_i + \underline{v}'_i, \underline{v}_j + \underline{v}'_j) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) + \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}'_j) + \varphi(\underline{v}'_i, \underline{v}_j) + \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0$

(erano tutti ortogonali tra di loro in partenza)

18/04/2024
Manfre

V spazio vett. $/_{\mathbb{K}}$ $\varphi \in PS(V)$

- $U, W \subset V$ ssp. si dicono ortogonali, $U \perp W$ se $U \subset W^\perp$ $(\Rightarrow W \subset U^\perp)$

  $U \subset W^\perp \Rightarrow W^{\perp\perp} \subset U^\perp \Rightarrow W + V^\perp \subset U^\perp$
  ma $W \subset W + V^\perp \Rightarrow W \subset U^\perp$ □

- Se $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$, $U \perp W$

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ base C di U
$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h$ base D di W $\Rightarrow$ insieme formano una base B di V

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \underline{u}_i & \underline{w}_j \end{array} \\ M_B(\varphi) = & \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \end{array}$$

$A = M_C(\varphi|_U)$

$B = M_D(\varphi|_W)$

Se $V = U \overset{\perp}{\oplus} V$ allora:

$\operatorname{Rad}\varphi = \operatorname{Rad}\varphi|_U \oplus \operatorname{Rad}\varphi|_W$

$\operatorname{Rad}\varphi|_U \subset U$, $\operatorname{Rad}\varphi|_W \subset W$ $\Rightarrow$ sono in somma diretta $\oplus$ OK!

Dim.

$\boxed{\subset}$ $\underline{v} \in \operatorname{Rad}\varphi$ $\exists!\ \underline{u} \in U, \underline{w} \in W \mid \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\underline{u}' \in U \Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{u}') = 0$

$\varphi(\underline{u}, \underline{u}') + \cancel{\varphi(\underline{w}, \underline{u}')} \Rightarrow \varphi(\underline{u}, \underline{u}') = 0 \Rightarrow \underline{u} \in \operatorname{Rad}\varphi|_U$

W U

$\underline{w}' \in W \Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w}') = 0$ equalmente $\underline{w} \in \operatorname{Rad}\varphi|_W$

$\cancel{\varphi(\underline{u}, \underline{w}')} + \varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0 \Rightarrow \varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0 \Rightarrow \underline{w} \in \operatorname{Rad}\varphi|_W$

$\boxed{\supset}$ $\underline{z} \in \text{Rad}\,\varphi|_U \oplus \text{Rad}\,\varphi|_W$ $\quad \underline{z} = \underline{u} + \underline{w}$ $\quad \underline{u} \in \text{Rad}\,\varphi|_U$

$\underline{w} \in \text{Rad}\,\varphi|_W$

$\underline{v} \in V \quad \underline{v} = \underline{u}' + \underline{w}' \quad \underline{u}' \in U$

$\underline{w}' \in W$

$$\varphi(\underline{z}, \underline{w}) = \varphi(\underline{u}+\underline{w}, \underline{u}'+\underline{w}') = \varphi(\underline{u}, \underline{u}') + \varphi(\underline{u}, \underline{w}') + \varphi(\underline{w}, \underline{u}') + \varphi(\underline{w}, \underline{w}')$$
$= 0$

$\Rightarrow \underline{z} \in \text{Rad}\,\varphi$

<u>ESERCIZIO</u> (nelle stesse ip. di sopra) ✓

- $\text{Rad}\,\varphi|_U = U \cap \text{Rad}\,\varphi \qquad \text{Rad}\,\varphi|_W = W \cap \text{Rad}\,\varphi$
- $U^\perp = W + \text{Rad}\,\varphi$
- $W^\perp = U + \text{Rad}\,\varphi$

W supplementare di $\text{Rad}\,\varphi$ $\quad V = W \oplus \text{Rad}\,\varphi$

$\Rightarrow \varphi|_W$ è non degenere

<u>OSS</u> $W \perp \text{Rad}\,\varphi \Rightarrow \text{Rad}\,\varphi = \text{Rad}\,\varphi|_W \oplus \text{Rad}(\underbrace{\varphi|_{\text{Rad}\varphi}}_{})$ $\overset{0}{=}$ per cui il radicale è tutto $\text{Rad}\,\varphi$

$= \text{Rad}\,\varphi|_W \oplus \text{Rad}\,\varphi$

$\hookrightarrow = \{\underline{0}\} \Rightarrow \varphi|_W$ non degenere

$V = M_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(A,B) = tr(AB) \quad \psi(A,B) = tr(A\,{}^tB) \quad \forall A,B \in V$

$\varphi, \psi \in PS(V)$

- φ è non degenere:

$A \in \text{Rad}\,\varphi \Leftrightarrow tr(AB) = 0 \quad \forall B \in V$

in particolare $tr(AE_{ij}) = 0$ — al variare di i e j

$$AE_{ij} = \left(\boxed{0}\ \underset{j}{A^i}\ \boxed{0}\right) \Rightarrow tr(AE_{ij}) = a_{ji} = 0 \longrightarrow A = 0$$

$\hookrightarrow$ matrice la cui colonna j-esima è la colonna i-esima di A

$\Rightarrow \text{Rad}\,\varphi = \{\underline{0}\}$

- $V = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) \quad (\text{char}\,\mathbb{K} \neq 2)$

$$\varphi|_{S_n(\mathbb{K})} = \psi|_{S_n(\mathbb{K})} \qquad \varphi|_{A_n(\mathbb{K})} = -\psi|_{A_n(\mathbb{K})}$$

- $S_n(\mathbb{K}) \perp_\varphi A_n(\mathbb{K}), \quad S_n(\mathbb{K}) \perp_\psi A_n(\mathbb{K})$

$A \in S_n(\mathbb{K}) \quad B \in A_n(\mathbb{K})$ — la traccia è invariante per trasposizione

$$\varphi(A,B) = tr(AB) = tr({}^t(AB)) = tr(\underset{-B}{{}^tB}\ \underset{A}{{}^tA}) = -tr(BA) \overset{0}{=} -\varphi(A,B)$$

$\Rightarrow \ \varphi(A,B) = 0$

(char $\mathbb{K} \neq 0$)

$$\psi(AB) = tr(A\,{}^t\overset{\overset{-B}{\shortparallel}}{B}) = -tr(AB) \overset{tr({}^tAB)}{=} tr({}^tBA) = tr(AB) = 0$$

- ψ è non degenere:

$$\{\underline{0}\} = Rad\,\varphi = \overset{\overset{\{\underline{0}\}}{\shortparallel}}{Rad\,\varphi|_{S_n(\mathbb{K})}} \oplus \overset{\overset{\{\underline{0}\}}{\shortparallel}}{Rad\,\varphi|_{A_n(\mathbb{K})}}$$

non degeneri

$\Rightarrow \ \psi|_{S_n(\mathbb{K})}$ e $\psi|_{A_n(\mathbb{K})}$ sono non degeneri

perché $\varphi|_{S_n(\mathbb{K})}$ è uguale a $\psi|_{S_n(\mathbb{K})}$ e $\varphi|_{A_n(\mathbb{K})} = -\psi|_{A_n(\mathbb{K})}$ ma se uno non è degenere chiaramente non lo è neanche l'altro

$$Rad\,\psi = Rad\,\psi|_{S_n(\mathbb{K})} \oplus Rad\,\psi|_{A_n(\mathbb{K})} = \{\underline{0}\} \Rightarrow \psi \text{ non degenere}$$

Su $\mathbb{K}^n$, $\langle , \rangle$ il prodotto scalare standard, $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = {}^t\underline{v}\,\underline{w} \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$

- $W \subset \mathbb{K}$ iperpiano, ha equazioni cartesiane

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \right\}$$

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

non c'è l'altro addendo perché $\langle\rangle$ è non degenere

cioè $W = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\perp}$ Allora $W^{\perp} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\perp\perp} = Span\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)$

$(W^{\perp\perp} = W + V^{\perp})$

- $U \subset \mathbb{K}^n$ ssp. con equazioni cartesiane

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{matrix} \langle \underline{v}_1, \underline{x} \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \underline{v}_k, \underline{x} \rangle = 0 \end{matrix} \right\} = \bigcap_{i=1}^{k} \underline{v}_i^{\perp}$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{K}^n$

$$\Rightarrow U^{\perp} = (\underline{v}_1^{\perp} \cap \underline{v}_2^{\perp} \cap \dots \cap \underline{v}_k^{\perp})^{\perp} = \underline{v}_1^{\perp\perp} + \underline{v}_2^{\perp\perp} + \dots + \underline{v}_k^{\perp\perp} =$$

$$= span(\underline{v}_1) + Span(\underline{v}_2) + \dots + Span(\underline{v}_k)$$

mi permette di trovare facilmente l'ortogonale di un ssp. rispetto al prod. scalare canonico a partire dalle eq. cartesiane

POSSO VEDERE GLI IPERPIANI COME SPAZI ORTOGONALI AL VETTORE DEI COEFFICIENTI

Se char $\mathbb{K} \neq 2$, $CI(\varphi) = V \iff \varphi = 0$

- $\exists^{no}$ basi ortogonali:

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base B di V : $\underline{v}_i \perp \underline{v}_j$ se $i \neq j$ ($\iff M_B(\varphi)$ diagonale)

- Se $\underline{v}_i \in CI(\varphi) \Rightarrow \underline{v}_i \in Rad\,\varphi$
- B contiene una base di $Rad\,\varphi$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \notin CI(\varphi) \qquad \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n \in CI(\varphi)$

$$M_B(\varphi) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k \end{matrix} \Big\} \neq 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = M$$

$\mathrm{rg}\, M = k \Rightarrow \dim \mathrm{Rad}\,\varphi = n-k$

$\underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n \in \mathrm{Rad}\,\varphi$ sono lin. indipendenti e sono $n-k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ base di $\mathrm{Rad}\,\varphi$

$\underline{v}_0 \notin CI(\varphi) \Rightarrow V = \mathrm{Span}(\underline{v}_0) \oplus \underline{v}_0^{\perp}$

Dato $\underline{v} \in V$ il **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ lungo $\underline{v}_0$ è

$$c(\underline{v}, \underline{v}_0) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_0)}{\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}$$

$\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0) \neq 0$ perché $\underline{v}_0$ è non isotropo

$\underline{w} = \underline{v} - c(\underline{v}, \underline{v}_0)\underline{v}_0 \in \underline{v}_0^{\perp}$ e $\underline{v} = c(\underline{v}, \underline{v}_0)\underline{v}_0 + \underline{w}$ è la scomposizione di $\underline{v}$ nella somma diretta

dim.

$$\varphi(\underline{w}, \underline{v}_0) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_0) - c(\underline{v}, \underline{v}_0)\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_0) - \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_0)}{\cancel{\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}}\cancel{\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0)} = 0$$

ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V

Se $\underline{v}_1 \notin CI(\varphi)$,

$\underline{v}_1^{(1)} = \underline{v}_1, \quad \underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_2 - c(\underline{v}_2, \underline{v}_1)\underline{v}_1, \quad \dots, \quad \underline{v}_n^{(1)} = \underline{v}_n - c(\underline{v}_n, \underline{v}_1)\underline{v}_1$

$\Rightarrow$ è ancora una base

$\underline{v}_1^{(1)} \perp v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}$

Se $v_2^{(1)} \notin CI(\varphi)$ reitero su $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$

$v_1^{(2)} = v_1^{(1)}, \quad v_2^{(2)} = v_2^{(1)}, \quad v_3^{(2)} = v_3^{(1)} - c(\underline{v}_3^{(1)}, \underline{v}_2^{(1)})\, v_2^{(1)}, \quad \dots, \quad v_n^{(2)}$

$\Rightarrow$ sono base e sono ancora ortogonali a $v_1^{(2)}$ (comb. di vettori ortogonali) oltre che a $v_2^{(2)}$ (e $v_1^{(2)} \perp v_2^{(2)}$)

Se ad ogni passo $v_i^{(i-1)} \notin CI(\varphi)$ (ad esempio $CI(\varphi) = \{\underline{0}\}$)

$v_1^{(n-1)}, \dots, v_n^{(n-1)}$ base ortogonale di V

OSS tutte le basi ottenute hanno la stessa bandiera di ssp.
cioè $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1^{(i)}, \dots, \underline{v}_k^{(i)})$

$CI(\varphi) = \{\underline{0}\}$ $\quad f \in \mathcal{L}(V)$ triangolabile

$\exists B$ base di $V \mid M_B^B(f)$ è triangolare superiore

$\Leftrightarrow$ la bandiera data da B è f-invariante

$B \xrightarrow{G-S} B'$ base ortogonale di V con la stessa bandiera di B

$\Rightarrow$ la bandiera data da B' è f-invariante $\Rightarrow M_{B'}^{B'}(f)$ è triang.

ovvero $\exists B'$ base ortogonale di V che triangola f

Sia $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ $\quad f(X) = MX \quad \forall X \in M_2(\mathbb{R})$ dove $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\psi \in PS(M_2(\mathbb{R}))$: $\psi(A,B) = tr(A^tB) \quad \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$

- f è lineare e triangolabile
- Trovare una base di $M_2(\mathbb{R})$ a bandiera per f e ortogonale per ψ

$X \in M_2(\mathbb{R})$

$f^k(X) = M^k X \implies p \in \mathbb{R}[t] \quad p(f)X = p(M)X$

$\implies I(f) = I(M) \implies \varphi_f = \varphi_M$

$p_M(t) = (t-1)^2 = \varphi_M = \varphi_f \implies f$ triangolabile

$p_f(t) = (t-1)^4$

Se $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ autovettore di M relativo a $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (M\underline{v} = \lambda \underline{v})$

$N_1 = \left(\underline{v} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, $N_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| \underline{v} \right)$ sono autovettori di f relativi a λ

$f(N_1) = MN_1 = \left(M\underline{v} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \left(\lambda\underline{v} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \lambda \left(\underline{v} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \lambda N_1$

$f(N_2) = \ldots$

$Sp(f) = Sp(M) = \{1\} \qquad V_1(M) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

base di $M_2(\mathbb{R})$, sia essa $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(M_3) = MM_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M_1 + M_3 \qquad f(M_4) = M = M_1 + M_2 + M_4$

$\mathcal{B}$ è a bandiera per f ma non sappiamo se è $\perp$ per ψ

$CI(\psi) = \{\underline{0}\} \qquad A \in CI(\psi) \iff \psi(A,A) = 0 \iff tr(A^tA) = 0$

$tr(A^tA) = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0 \quad = 0 \iff A = 0$

$\implies$ Gram - Schmidt produce una base ortogonale

$\psi(M_1, M_1)$

$$M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\psi(M_1, M_2)$

(lo calcolo per tutti)

questa parte non serve per il 1° passo di Gram-Schmidt

$B' \Rightarrow M_1' = M_1 \qquad M_2' = M_2 - c(M_2, M_1)M_1 = M_2$

$M_3' = M_3 - c(M_3, M_1)M_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$M_4' = M_4 - c(M_4, M_1)M_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & & * \end{pmatrix}$$

qualcosa che non serve

$B'' \Rightarrow M_1'' = M_1 \quad M_2'' = M_2 \quad M_3'' = M_3' - c(M_3', M_2')M_2' = M_3'$

$M_4'' = M_4' - c(M_4', M_2')M_2' = M_4' + \frac{1}{2}M_2' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$M_{B''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & * \end{pmatrix}$$

$B''' \Rightarrow M_1''' = M_1, \quad M_2''' = M_2 \quad M_3''' = M_3'' \quad M_4''' = M_4'' - c(M_4'', M_3'')M_3'' =$
$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$M_{B'''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

B''' è una base ortogonale di V a bandiera per f

19/04/2024
Salvetti

Esercizio

$V/\mathbb{C}$ φ prodotto scalare non degenere. Trovare $w(\varphi)$

indice di Witt

molto meglio sulle dispense di Salvetti

max dimensione di un ssp. isotropo

$\mathbb{C} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{R} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$

NB! Su $\mathbb{R}$ so trovarla $= \min(i_+, i_-)$ ma su $\mathbb{C}$ no

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

PRODOTTI HERMITIANI V spazio vett. su $\mathbb{C}$

$\varphi: V \times V \to \mathbb{C}$

(i) • φ è lineare nella 2ª componente $\varphi(\underline{v}, \alpha\underline{w} + \beta\underline{w}') =$
$= \varphi(v, w)\cdot\alpha + \beta\varphi(\underline{v}, \underline{w}')$

(ii) • φ è anti-lineare nella 1ª componente $\varphi(\underline{v} + \underline{v}', \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w})$
$\varphi(\alpha\underline{v}, \underline{w}) = \bar{\alpha}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$

(iii) • $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})}$

Es (i), (iii) $\Rightarrow$ (ii)

• $\varphi(\underline{v} + \underline{v}', \underline{w}) \overset{(iii)}{=} \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v} + \underline{v}')} \overset{(i)}{=} \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v}')} \overset{(iii)}{=} \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w})$

• $\varphi(\alpha\underline{v}, \underline{w}) \underset{(iii)}{=} \overline{\varphi(\underline{w}, \alpha\underline{v})} \underset{(i)}{=} \overline{\alpha\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \bar{\alpha}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$

es. $V = \mathbb{C}^n \quad \varphi(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$

$V = \mathbb{C}[x] \quad \varphi(p(x), q(x)) = \overline{p(0)}\, q(0)$

Dalla (iii) $\Rightarrow \varphi(\underline{v},\underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v},\underline{v})} \in \mathbb{R}$

questo fa in modo che quando considero una base ortogonale per un prodotto hermitiano sulla diagonale ho numeri reali e posso parlare di segno

$V/\mathbb{C}$, φ hermitiano

$V/\mathbb{R}$, φ simmetrico

Tutti i risultati trovati su $\mathbb{R}$ per i p. scalari si estendono ai p. hermitiani:

φ hermitiani def. >0 se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) > 0 \quad \forall \underline{v}$

$(i_+(\varphi), i_-(\varphi), i_0(\varphi))$ segnatura ....

$\underline{v} = \sum_i x_i \underline{v}_i \qquad \underline{w} = \sum_j y_j \underline{v}_j$

$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \varphi\left(\sum_i x_i \underline{v}_i, \sum_j y_j \underline{v}_j\right) = \sum_{i,j} \overline{x}_i y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$

$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = {}^t\overline{[\underline{v}]}\, A\, [\underline{w}]$

${}^t\underline{\overline{x}}\, A\, \underline{y}$

$a_{ji} = \varphi(v_j, \underline{v}_i) = \overline{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)} = \overline{a}_{ij}$

$\Rightarrow \quad A = {}^t\overline{A} = A^*$ ← matrice aggiunta di A

se $A = A^* \Rightarrow A$ si dice hermitiana o autoaggiunta

Cambio base $\Rightarrow B = P^* A P$ (vd. dimostrazione, analoga al caso reale)

${}^t\overline{P}\, A P$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$\underline{x} \longmapsto A\underline{x}$ in $\mathbb{R}^n$

$\underline{z} \longmapsto A\underline{z}$ in $\mathbb{C}^n$ (posso farla agire sui complessi)

$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad z_k = x_k + i y_k$

$\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$

$A(\underline{x} + i\underline{y}) = A\underline{x} + i A\underline{y}$

V sp. vett. $/\mathbb{C}$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base

se moltiplico solo per $\mathbb{R}$, $V_{\mathbb{R}} = V$ sp. vett. su $\mathbb{R}$

la dimensione diventa $2n$, con base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, i\underline{v}_1, \dots, i\underline{v}_n$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ $\quad f: V \to V$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{COMPLESSIFICATO} \\ \text{DELLO SPAZIO } V}}{V_{\mathbb{C}}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{su } \mathbb{R}}}{V \times V} \qquad (a+ib)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, b\underline{v} + a\underline{w})$$

V con questa def. è uno spazio vett. su $\mathbb{C}$ con

$\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$

$(V, \underline{0}) \cong V$ parte reale

$(\underline{0}, V) \cong V$ parte immaginaria

$f: V \to V \qquad f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

$f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + i f(\underline{w})$

$M_B(f) = M_B(f_{\mathbb{C}})$ $\quad$ ($\Rightarrow$ stessi autovalori complessi)

$\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad$ p. scalare

$\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ $\quad$ p. hermitiano

estensione

con la stessa segnatura

verificare che è hermitiano

$\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}' + i\underline{w}') := \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \varphi(\underline{w}, \underline{w}') + i\left(\varphi(\underline{v}, \underline{w}') + \varphi(\underline{w}, \underline{v}')\right)$

<u>nota</u>: B base di V (e di $V_{\mathbb{C}}$) $\qquad M_B(\varphi) = M_B(\varphi_{\mathbb{C}})$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

V sp. vett. $/\mathbb{K}$ $\quad \varphi$ prodotto scalare non degenere (vale ugualmente per prodotti hermitiani non degeneri, esercizio!)

Allora $\forall\, F \in V^*$, $\exists!\, \underline{w}_F \in V$ t.c. $F(\underline{v}) = \varphi(\underline{w}_F, \underline{v})$ $\forall\, \underline{v} \in V$

<u>dim.</u>

$\alpha_\varphi: V \to V^* \qquad \underline{v} \mapsto \varphi(\underline{v}, \cdot) \qquad \operatorname{Ker} \alpha_\varphi = V^\perp = \{\underline{0}\}$

φ non degenere $\Rightarrow$ α_φ isomorfismo (quindi in particolare è iniettivo) $\square$

<u>dimostrazione più costruttiva</u>:

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale di V

$\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ base duale di V^*

$F = \sum_{i=1}^{n} F(\underline{v}_i)\, \underline{v}_i^*$ $\qquad \dfrac{\underline{v}_1}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}$ rappresenta $\underline{v}_1^*$ (idem tutti gli altri vett. della base duale)

$\underline{w}_F = \sum_{i=1}^{n} F(\underline{v}_i) \dfrac{\underline{v}_i}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$

$\square$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "F"] & \mathbb{K} \\ V^* & V^* \arrow[l, "{}^t f"] \end{tikzcd} \qquad {}^t f(F) = F \circ f \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = {}^t M_{\mathcal{B}^*}({}^t f)$$

PROP. $\exists$ un unico endomorfismo ${}^t f_{(\varphi)} : V \to V$ tale che
$$\alpha_\varphi \circ {}^t f_{(\varphi)} = {}^t f \circ \alpha_\varphi$$

! ${}^t f$ e ${}^t f_{(\varphi)}$ sono due cose $\neq$!

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_\varphi"'] \arrow[rr, bend right, "F \circ f"] & V \arrow[l, bend right, "{}^t f(\varphi)"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\alpha_\varphi"] & \mathbb{K} \\ V^* & V^* \arrow[l, "{}^t f"] \end{tikzcd}$$

cioè questo diagramma commuta

$$\varphi(\underline{v}, f(\cdot)) \xleftarrow{{}^t f} \varphi(\underline{v}, \cdot)$$

$${}^t f(\alpha_\varphi(\underline{v})) = \alpha_\varphi({}^t f(\underline{v}))$$

$$\forall\, \underline{w} \in V \quad \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi({}^t f_{(\varphi)}(\underline{v}), \underline{w})$$

esiste un unico ${}^t f_{(\varphi)}$ per cui posso fare questa cosa $\forall\, \underline{v}, \underline{w}$

V sp. vett. su $\mathbb{C}$, vale lo stesso con
$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w})$$

$$\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \in V^*$$

Per Riesz $\exists\, \underline{v}' \in V \mid \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \quad \forall\, \underline{w} \in V$

$\underline{v}'$ dipende da $\underline{v}$, $\underline{v}' = {}^t f_{(\varphi)}(\underline{v}) \longrightarrow$ va verificato che è unico (*) e che dipende linearmente da $\underline{v}$ — esercizio!

(*) es: $\varphi(\underline{v}'', \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \ \forall\, \underline{w}$

$\varphi(\underline{v}'' - \underline{v}', w) = 0 \ \forall\, w$

$\underline{v}'' - \underline{v}' \in \operatorname{Rad}\varphi$

$\Rightarrow \underline{v}'' = \underline{v}'$

$$M_{\mathcal{B}}({}^t f)\, \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)}_{} = \overbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)}^{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}\, M_{\mathcal{B}}({}^t f_{(\varphi)})$$

$$M_{\mathcal{B}}({}^t f_{(\varphi)}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}\, M_{\mathcal{B}}({}^t f)\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Def. V, φ non degenere $\quad f : V \to V$ simmetrico

- se ${}^t f_{(\varphi)} = f$ cioè $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w}$

f è ortogonale se

$\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w}$

$\varphi({}^t f_{(\varphi)} f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \Rightarrow {}^t f_{(\varphi)} \circ f = id = f \circ {}^t f_{(\varphi)}$

Caso $V/\mathbb{C}$, φ hermitiano, stesse def. con f^*

$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$ si dice hermitiano o autoaggiunto

V sp. vett su $\mathbb{R}$, $\varphi > 0$ scalare
V sp. vett. su $\mathbb{C}$ $\varphi > 0$ hermitiano
) è detto SPAZIO EUCLIDEO

- f simmetrico $\quad \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$) $\mathbb{R}$
- f ortogonale $\quad \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$) $\mathbb{R}$
- f hermitiano $\quad \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$) $\mathbb{C}$
- f unitario $\quad \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$) $\mathbb{C}$

f simmetrico reale:

B base di V

$M_B({}^t f_\varphi) = M_B(\varphi)^{-1}\, {}^t(M_B(f))\, M_B(\varphi)$

B base ortonormale $(\equiv \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 1 +$ ortogonale$) \Rightarrow M_B(f) = {}^t(M_B(f))$
se B ortonormale

viceversa, se B è ortonormale e $M_B(f)$ è simmetrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f è simmetrico

$$\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) \overset{?}{=} \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$$

$A = M_B(f) \qquad M_B(\varphi) = I$

$${}^t[f(\underline{v})]_B\, I\, [\underline{w}]_B = {}^t[\underline{v}]_B\, {}^tA\, [\underline{w}]_B \qquad {}^t[\underline{v}]_B\, I\, (A[\underline{w}]_B) =$$
$$= {}^t[\underline{v}]_B\, A\, [\underline{w}]_B$$

su $\mathbb{R}$: f simmetrico $\Leftrightarrow$ $M_B(f)$ simmetrica per B ortonormale

su $\mathbb{C}$: f hermitiano $\Leftrightarrow$ $M_B(f)$ hermitiana per B ortonormale

24/04/2024
Manfre

V sp. vett. $/\mathbb{K}$, $\varphi \in PS(V)$

$\underline{v}_0 \notin CI(\varphi) \Rightarrow V = \mathrm{Span}(\underline{v}_0) \oplus \underline{v}_0^\perp$

le due proiezioni su $\mathrm{Span}(\underline{v}_0)$ e $\underline{v}_0^\perp$ sono date da: $\underline{v} \in V$

coeff. di Fourier

$$P_{\mathrm{Span}(\underline{v}_0)}(\underline{v}) = c(\underline{v}, \underline{v}_0)\underline{v}_0 \qquad P_{\underline{v}_0^\perp}(\underline{v}) = \underline{v} - c(\underline{v},\underline{v}_0)\underline{v}_0$$

$$c(\underline{v}, \underline{v}_0) = \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v}_0)}{\varphi(\underline{v}_0,\underline{v}_0)}$$

$W \subset V$ ssp, $\varphi_{|W}$ non degenere $\Leftrightarrow V = W \oplus W^\perp$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ base ortogonale di W ($\underline{w}_i$ non isotropo $\forall i = 1, \dots, n$)

le due proiezioni su W e $W^\perp$ sono date da: $\underline{v} \in V$

$$P_W(\underline{v}) = \sum_i c(\underline{v}, \underline{w}_i)\underline{w}_i = \underline{w} \qquad P_{W^\perp}(\underline{v}) = -\sum_i c(\underline{v},\underline{w}_i)\underline{w}_i + \underline{v} = \underline{z}$$

$\underline{w} + \underline{z} = \underline{v}$ $\quad \underline{w} \in W$ $\quad$ basta vedere che $\underline{z} \in W^\perp$

$\underline{z} \perp \underline{w}_j \quad j = 1, \dots, n$

$$\varphi(\underline{z}, \underline{w}_j) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}_j) - \sum_i c(\underline{v},\underline{w}_i)\underbrace{\varphi(\underline{w}_i,\underline{w}_j)}_{0 \text{ se } i \neq j} = \varphi(\underline{v},\underline{w}_j) - c(\underline{v},\underline{w}_j)\cdot\varphi(\underline{w}_j,\underline{w}_j) = \underline{0}$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale di V, $\underline{v} \in V$ $\quad \underline{v} = \sum_j a_j \underline{v}_j \quad a_j \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = \varphi\left(\sum a_j \underline{v}_j, \underline{v}_i\right) = a_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$$

se $\underline{v}_i \notin CI(\varphi)$ ($\Leftrightarrow \underline{v}_i \notin \mathrm{Rad}(\varphi)$) $\quad a_i = c(\underline{v}, \underline{v}_i)$

la coordinata i-esima di $\underline{v}$ è il suo coeff di Fourier rispetto a $\underline{v}_i$

Se φ è non degenere (tutti i $\underline{v}_i$ non sono isotropi)

$\forall \underline{v} \in V$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^n c(\underline{v}, \underline{v}_i)\underline{v}_i$ ovvero $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} c(\underline{v},\underline{v}_1) \\ \vdots \\ c(\underline{v},\underline{v}_n) \end{pmatrix}$

<u>OSS.</u> se $\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ è la base di V^* duale di B

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^*(\underline{v}) \\ \vdots \\ \underline{v}_n^*(\underline{v}) \end{pmatrix}$$ allora, se φ è non degenere

i prodotti scalari ci danno la base duale, le coordinate e le proiezioni

$$\underline{v}_i^* = c(\cdot, \underline{v}_i) = \frac{\varphi(\cdot, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)} = \frac{1}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}\alpha_\varphi(\underline{v}_i)$$

V, W sp. vett. $/\mathbb{K}$ $\quad \varphi \in PS(V) \quad \psi \in PS(W)$

(V, φ) è ISOMETRICO a (W, ψ) (o φ isometrico a ψ) se

$\exists\, f: V \to W$ isomorfismo: $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \psi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

- $f(CI(\varphi)) = CI(\psi)$, $f(\mathrm{Rad}\,\varphi) = \mathrm{Rad}\,\psi$

$\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0 \Leftrightarrow \psi(f(\underline{v}), f(\underline{v})) = 0$ / $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0\ \forall \underline{w} \in V \Leftrightarrow \psi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = 0\ \forall \underline{z} = f(\underline{w}) \in W$ ($\mathrm{Im}(f)$)

• $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base $\mathcal{B}$ di $V \Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ base $\mathcal{C}$ di W

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{C}}(\psi)$$

($\Rightarrow$ per trovare un'isometria basta trovare due basi nelle quali i p. scalari hanno la stessa matrice)

• $[\ ]_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{K}^n$ è un'isometria tra (V, φ) e $(\mathbb{K}^n, \varphi_{M_{\mathcal{B}}(\varphi)})$

$\hookrightarrow {}^t\underline{x}\, M_{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}\, \underline{y}$

Da un'esercizio precedente:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = S_2(\mathbb{R})$, $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$

$\varphi(A,B) = (1,2)\, AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall A, B \in V$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ base $\mathcal{B}$ di V e $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$W = \mathbb{R}_2[x]$, $\psi: W \times W \to \mathbb{R}$, $\psi(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)\ \forall p,q \in W$

$\psi \in PS(W)$. (V, φ) è isometrico a (W, ψ)?

$\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ base di W

$M_{\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M \Rightarrow rg(\psi) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Rad}\psi = 1$

$\operatorname{Rad}\psi = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = p(1) = 0 \}$

$p_1 = 1$, $p_2 = ?$, $p_3 = x(x-1)$

$\hookrightarrow$ vettore del radicale

$a + bx + cx^2 \in 1^\perp$ per ψ $\quad 2a + b + c = 0 \quad b = -c - 2a$

$\Updownarrow$

$\underline{e}_1^\perp$ per φ_M $= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow 1^\perp = \operatorname{Span}(-x + x^2, \underbrace{1 - 2x}_{= p_2})$

$\Rightarrow p_1, p_2, p_3$ base ortogonale di W

$$M_{\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $p_1 \rightsquigarrow \lambda_1 p_1 \quad 1 \overset{?}{=} \psi(\lambda_1 p_1, \lambda_1 p_1) = \lambda_1^2 \psi(p_1, p_1) = 2\lambda_1^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

• $p_2 \rightsquigarrow \lambda_2 p_2 \quad 4 = \psi(\lambda_2 p_2, \lambda_2 p_2) = 2\lambda_2^2 \Rightarrow \lambda_2 = \pm\sqrt{2}$

$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}(1-2x), x(x-1) \right\}$

$$M_{\mathcal{B}''}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

φ e ψ sono isometrici tramite l'isometria f tale che

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \xmapsto{f} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \xmapsto{f} \sqrt{2}(1-2x)$$

$$\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix} \xmapsto{f} x(x-1)$$

Esercizio: Mostrare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ $\quad \phi_{\underline{v}} : S_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è un p. scalare su $S_n(\mathbb{K})$ $\quad (A,B) \mapsto {}^t\underline{v} AB \underline{v}$

- Mostrare che $\forall a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, $\psi_{a_1,\dots,a_k} : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}$, $(p,q) \mapsto \sum_{i=1}^{k} p(a_i)q(a_i)$ è un prodotto scalare su $\mathbb{K}_n[x]$
- Mostrare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ $a_1 \neq a_2$ $(S_2(\mathbb{R}), \phi_{\underline{v}})$ è isometrico a $(\mathbb{R}_2[x], \psi_{a_1,a_2})$

V sp. vett. $/\mathbb{R}$, $\varphi \in PS(V)$, φ si dice
- definito positivo se $\forall \underline{v} \in V$ $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ e $\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$
- semidefinito positivo se $\forall \underline{v} \in V$ $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \geq 0$
- definito negativo se $\forall \underline{v} \in V$ $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \leq 0$ e $\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$
- semidefinito negativo se $\forall \underline{v} \in V$ $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \leq 0$

- φ (semi) definito positivo$/$neg., $W \subset V$ ssp. $\Rightarrow$ $\varphi|_W$ (semi) definito pos$/$neg
- φ definito $\Rightarrow$ φ non degenere e $\varphi|_W$ non degenere $\forall W \subset V$ ssp. $W \neq \{\underline{0}\}$
  quindi $V = W \oplus W^\perp$ $\forall W \subset V$ ssp

φ definito $\iff CI(\varphi) = \{\underline{0}\}$

($\Rightarrow$) ovvia

($\Leftarrow$) Se φ non fosse definito (per assurdo) $\Rightarrow \exists \underline{v} \in V, \underline{v} \neq \underline{0} \mid \varphi(\underline{v},\underline{v}) \leq 0$
$\exists \underline{w} \in V, \underline{w} \neq 0 \mid \varphi(\underline{w},\underline{w}) \geq 0$

. In Span$(\underline{v},\underline{w})$ $\exists$ $\underline{u}$ isotropo $\underline{u} \neq \underline{0}$ ↯

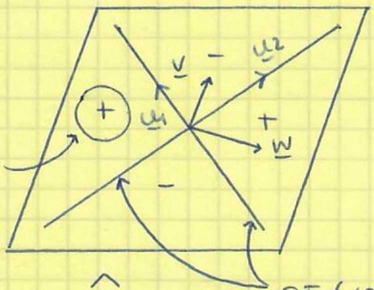
Se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0 \vee \varphi(\underline{w},\underline{w}) = 0$ ✓

Se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) < 0 \wedge \varphi(\underline{w},\underline{w}) > 0$ $\Rightarrow$ $\underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente indipendenti
$(\underline{v} = \lambda \underline{w} \quad \varphi(\underline{v},\underline{v}) = \lambda^2 \varphi(\underline{w},\underline{w})$ ↯$)$

$\underbrace{\lambda \underline{w} + \underline{v}}_{\neq \underline{0}} \in \text{Span}(\underline{v},\underline{w}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda \underline{w} + \underline{v}, \lambda \underline{w} + \underline{v}) = \lambda^2 \varphi(\underline{w},\underline{w}) + 2\lambda \varphi(\underline{w},\underline{v}) + \varphi(\underline{v},\underline{v}) \overset{?}{=} 0$

$$\Delta/4 = \underset{\geq 0}{\varphi(\underline{w},\underline{v})^2} - \underset{\underset{0}{\vee}}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}\,\underset{\underset{0}{\wedge}}{\varphi(\underline{v},\underline{v})} > 0 \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \mid \lambda_i \underline{w} + \underline{v} \in CI(\varphi) \text{ ↯}$$



→ piano $z = \mathrm{Span}(\underline{v},\underline{w})$

segno delle forme quadratiche

$CI(\varphi|_z)$

⇑ PIANO IPERBOLICO
- $\dim V = 2$
- φ non degenere
- $CI(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$

$$M_{(\underline{v},\underline{w})}(\varphi|_z) = \begin{pmatrix} \overset{<0}{\varphi(\underline{v},\underline{v})} & \varphi(\underline{v},\underline{w}) \\ \varphi(\underline{v},\underline{w}) & \underset{>0}{\varphi(\underline{w},\underline{w})} \end{pmatrix} = M$$

$$M_{(\underline{u}_1\underline{u}_2)}(\varphi|_z) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \neq 0$$

φ semidefinito $\iff CI(\varphi) = \mathrm{Rad}(\varphi)$

($\Rightarrow$) Se fosse $CI(\varphi) \not\supseteq \mathrm{Rad}(\varphi)$ (l'inclusione $\subset$ è sempre vera)

$\Rightarrow \exists\, \underline{v} \in CI(\varphi),\ \underline{v} \notin \mathrm{Rad}(\varphi)$

$\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0 \wedge \varphi(\underline{v},\underline{w}) \neq 0 \Rightarrow \underline{v},\underline{w}$ lin. indipendenti

$(\underline{v} = \lambda \underline{w},\ \underset{0}{\varphi(\underline{v},\underline{w})} \overset{\cdot\lambda}{=} \underset{0}{\varphi(\underline{v},\underline{v})} \text{ ↯})$

$\mathrm{Span}(\underline{v},\underline{w})$ è un piano iperbolico

↓

$\lambda \underline{v} + \underline{w} \neq \underline{0}$

$$\varphi(\lambda\underline{v}+\underline{w}, \lambda\underline{v}+\underline{w}) = \lambda^2 \overset{0}{\varphi(\underline{v},\underline{v})} + 2\lambda \overset{0}{\varphi(\underline{v},\underline{w})} + \varphi(\underline{w},\underline{w}) = 2\lambda\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{w})$$

$$\lambda = -\frac{\varphi(\underline{w},\underline{w})}{\varphi(\underline{v},\underline{w})}$$

↓ allora riesco a trovare
λ t.c. $\varphi(\lambda\underline{v}+\underline{w}, \lambda\underline{v}+\underline{w}) > 0$ e
$\bar\lambda$ t.c. $\varphi(\bar\lambda\underline{v}+\underline{w}, \bar\lambda\underline{v}+\underline{w}) < 0$

$\Rightarrow \varphi$ non è semidefinito ↯ (sempre causato dall'esistenza di un piano iperbolico)

($\Leftarrow$) Se φ non fosse semidefinito $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v},\underline{v}) < 0$
$\exists\, \underline{w} \in V \mid \varphi(\underline{w},\underline{w}) > 0$ ($\underline{v},\underline{w} \neq \underline{0}$ e lin. indip.)

. $\mathrm{Span}(\underline{v},\underline{w})$ piano iperbolico $\Rightarrow$ prendo $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ isotropi
ma $\underline{u}_1 \not\perp \underline{u}_2 \Rightarrow \underline{u}_1, \underline{u}_2 \notin \mathrm{Rad}\,\varphi$ ↯

Invarianti completi per isometria per $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

V sp. vett. $/\mathbb{K}$, $\varphi \in PS(V)$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale $\mathcal{B}$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: (eventualmente riordinando $\mathcal{B}$)

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad a_i \in \mathbb{C}, \ a_i \neq 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

Se B' è la base $\frac{v_1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{v_k}{\sqrt{a_k}}$ $\quad M_{B'}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ BASE ORTONORMALE NORMALIZZATA

OSS k non dipende dalla base ($k = rg(\varphi) = \dim V - \dim Rad\varphi$)

Quindi:

- V, W sp. vett. $/\mathbb{C}$, $\varphi \in PS(V)$, $\psi \in PS(W)$

  φ isometrico a $\psi \iff \dim W = \dim V$ e $rg(\varphi) = rg(\psi)$
- $A, B \in S_n(\mathbb{C})$ $\quad A \equiv B \iff rg A = rg B$

  $B = {}^tMAM$ con $M \in GL_n(\mathbb{C})$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: (eventualmente riordinando B)

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_p & & & & \\ & & & b_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & b_q & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lll} a_i \in \mathbb{R} & a_i > 0 & i = 1, \dots, p \\ b_i \in \mathbb{R} & b_i < 0 & i = 1, \dots, q \end{array}$$

nella base $B' = \left\{ \frac{v_1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{v_p}{\sqrt{a_p}}, \frac{v_{p+1}}{\sqrt{-b_1}}, \dots, \frac{v_{p+q}}{\sqrt{-b_q}}, v_{p+q+1}, \dots, v_n \right\}$

BASE ORTOGONALE NORMALIZZATA

$$M_B(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

OSS p e q non dipendono dalla base!

$p = \iota_+(\varphi) = \max\{\dim W \mid W \subset V \text{ ssp: } \varphi|_W \text{ è def. pos}\}$

$q = \iota_-(\varphi) = \max\{\dim W \mid W \subset V \text{ ssp: } \varphi|_W \text{ è def. neg}\}$

↳ indice di positività e di negatività di φ

$\iota_0(\varphi) = \dim Rad\varphi$

↳ indice di nullità di φ

- $\iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) + \iota_0(\varphi) = \dim V$, $\quad \iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) = rg(\varphi)$

Poniamo $\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), \iota_0(\varphi))$ SEGNATURA di φ

e se $A \in S_n(\mathbb{R})$ poniamo $\sigma(A) = \sigma(\varphi_A)$

Quindi:

- V, W sp. vett. $/_{\mathbb{R}}$ $\quad \varphi \in PS(V) \quad \psi \in PS(W)$

  φ isometrico a $\psi \iff \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$
- $A, B \in S_n(\mathbb{R}), \quad A \equiv B \iff \sigma(A) = \sigma(B)$

φ definito positivo $\iff \sigma(\varphi) = (n, 0, 0)$

φ definito negativo $\iff \sigma(\varphi) = (0, n, 0)$

φ semidefinito positivo $\iff \sigma(\varphi) = (p, 0, n-p)$

φ semidefinito negativo $\iff \sigma(\varphi) = (0, q, n-q)$

<u>OSS</u>: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\quad A \equiv B \Rightarrow \det A$ e $\det B$ hanno lo stesso segno

$$B = {}^tMAM \quad M \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det B = \underbrace{(\det M)^2}_{>0} \det A$$

(vedi nella lezione 12 di Manfredini il comportamento del cono isotropo al variare della segnatura)

02/05/2024

V, φ SPAZIO EUCLIDEO (spazio vettoriale dotato di prodotto scalare o hermitiano definito positivo)

su $\mathbb{R}$ $\varphi > 0$ (scalare)

su $\mathbb{C}$ $\varphi > 0$ (hermitiano)

$\mathbb{R}$
- $f: V \to V$ si dice SIMMETRICO se $f = {}^t f_{(\varphi)} \iff \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\mathbb{C}$
- $f: V \to V$ si dice HERMITIANO o AUTOAGGIUNTO se $f = f^*_{(\varphi)} \iff \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\mathbb{R}$
- $f: V \to V$ si dice ORTOGONALE se $\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\mathbb{C}$
- $f: V \to V$ si dice UNITARIO se $\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

Prop. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V

$\mathbb{R}$
- $f: V \to V$ è simmetrico $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è simmetrica $(A = A^T)$
- $f: V \to V$ è ortogonale $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è ortogonale $(AA^T = A^TA = I)$

$\mathbb{C}$
- $f: V \to V$ è hermitiano $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è hermitiana $(A = A^* = \overline{A}^T)$
- $f: V \to V$ è unitario $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è unitaria $(AA^* = A^*A = I)$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B} \underbrace{M_\mathcal{B}(\varphi)}_{\substack{= \\ I \text{ se } \mathcal{B} \text{ è una} \\ \text{base ortonormale}}} [\underline{w}]_\mathcal{B} = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B} [\underline{w}]_\mathcal{B} \implies \text{prodotto canonico in } \mathbb{R}^n$$

$B = M_\mathcal{B}(f)$

(i) $\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = {}^t[f(\underline{v})]_\mathcal{B} [\underline{w}]_\mathcal{B} = {}^t(B[\underline{v}]_\mathcal{B}) [\underline{w}]_\mathcal{B} = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B} {}^tB [\underline{w}]_\mathcal{B}$

(ii) $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B} [f(\underline{w})]_\mathcal{B} = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B} B [\underline{w}]_\mathcal{B}$

(i) = (ii) $\forall \underline{v}, \underline{w} \iff B = {}^tB$

In generale ${}^t\underline{x} A \underline{y} = {}^t\underline{x} B \underline{y}$ $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \iff A = B$

Prop. $\mathbb{R}^n$ con prodotto canonico $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = {}^t\underline{x}\underline{y}$

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Sono equivalenti:

(i) A è ortogonale

(ii) $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x} \longmapsto A\underline{x}$ è ortogonale

(iii) le colonne (e le righe) di A formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$

<u>(i) ⇒ (ii)</u> $\langle f(\underline{x}), f(\underline{y}) \rangle = {}^t(f_A(\underline{x})) f_A(\underline{y}) = {}^t(A\underline{x})(A\underline{y}) = {}^t\underline{x} {}^tA A \underline{y} =$

$= {}^t\underline{x}\underline{y}$
↑
A ortogonale

<u>(ii) ⇒ (iii)</u> f_A ortogonale ⇒ manda una base ortonormale in una base ortonormale

Ma la base canonica è ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$

$f_A(e_j) = Ae_j = A^j$

<u>(iii) ⇒ (i)</u> $({}^tAA)_{ij} = \langle A^i, A^j \rangle = {}^tA^i A^j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \implies {}^tAA = I$

Prop. $A \in M_n(\mathbb{C})$ sono equivalenti

(i) A unitaria

(ii) $f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ unitario

(iii) le colonne (o le righe) di A formano una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$

ESERCIZIO: $f: V \to V$ è ortogonale $\Rightarrow$ f è invertibile e f^{-1} è ortogonale

$\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

se $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow 0 = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \ \forall \underline{w}$ ma φ è definito positivo

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

$\varphi(f^{-1}(f(\underline{v})), f^{-1}(f(\underline{w}))) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \Rightarrow \varphi(f^{-1}(\underline{v}), f^{-1}(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ ortogonale

---

le trasformazioni ortogonali formano un gruppo rispetto alla composizione

$O_n \Rightarrow$ gruppo delle matrici ortogonali di ordine n

---

$O_1 \Rightarrow A = [a] \to O_1 = \{[1], [-1]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$

$O_2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

${}^tAA = I$

$\det {}^tA \det A = (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO_n = \{A \in O_n \mid \det A = 1\}$

sottogruppo ortogonale speciale

$U_n \Rightarrow$ gruppo delle matrici unitarie di ordine n

$U_1 = [a] \quad \bar{a}a = 1 \Rightarrow |a|^2 = 1$

$U_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A^*A) = \det A^* \det A = \overline{\det A}\det A = |\det A|^2 = 1 \Rightarrow |\det A| = \pm 1$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\bar{a}+b\bar{b} & a\bar{c}+b\bar{d} \\ \bar{a}c+d\bar{b} & c\bar{c}+d\bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |a|^2+|b|^2=1 \\ |c|^2+|d|^2=1 \\ \bar{a}c+d\bar{b}=0 \end{cases}$

$(\Leftrightarrow a\bar{c}+\bar{d}b=0)$

$SU_n = \{A \in U_n \mid \det A = 1\} \to$ studiarlo!

V, φ euclideo

$W \subset V$ ssp. $\quad V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}$

$\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$

È unica ed esiste sempre (φ definito positivo)

$pr_W : V \to V$

$pr_W(\underline{v}) = \underline{w}$ è simmetrica $\quad M_B(pr_W) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & 0 & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$

INVERSIONE rispetto a W:

$f_W : V \to V$

$\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}' \longmapsto \underline{w} - \underline{w}'$

$$\begin{matrix} W^{\perp} & \oplus & W = V \\ \cup\!\!\!\!\! \mid & & \cup\!\!\!\!\! \mid \\ \underline{w}' & & \underline{w} \end{matrix}$$

(caso particolare: $\dim W = n-1 \Rightarrow f_W$: riflessione ortogonale rispetto a W)

$$M_B(f_W) = \begin{bmatrix} \underbrace{1 \ \ddots \ 1}_{\dim W} & 0 \\ 0 & \underbrace{-1 \ \ddots \ -1}_{\dim W^{\perp}} \end{bmatrix} \qquad f_W = pr_W - pr_{W^{\perp}}$$

V, φ euclideo, **NORMA** di $\underline{v} \Rightarrow \|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$

$\|\underline{v}\| \geq 0$

$\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

$\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\| \qquad \|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \, \|\underline{v}\|$

↳ DISUGUALIANZA TRIANGOLARE

Disugualianza di Schwartz: $|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$

Dim. Caso su $\mathbb{R}$

$\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v} + t\underline{w}, \underline{v} + t\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) + t^2 \varphi(\underline{w}, \underline{w}) + 2t\varphi(\underline{v}, \underline{w}) =$

$= \|\underline{v}\|^2 + t^2 \|\underline{w}\|^2 + 2t\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \geq 0 \quad (\forall t)$

↑ φ def. positivo

$\Rightarrow \Delta \leq 0$

$4\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - 4\|\underline{w}\|^2 \|\underline{v}\|^2 \leq 0 \Rightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 \leq \|\underline{w}\|^2 \cdot \|\underline{v}\|^2$

$|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$

$\Delta = 0 \iff \underline{v} + t\underline{w} = \underline{0} \iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ linearmente dipendenti

TEOREMA SPETTRALE

V, φ euclideo

($\mathbb{R}$) $f: V \to V$ simmetrico $\Rightarrow$ V ha una base ortonormale di autovettori

($\mathbb{C}$) $f: V \to V$ hermitiano $\Rightarrow$ V ha una base ortonormale di autovet. e tutti gli autovalori sono reali

Dim.

(1) f hermitiano $\Rightarrow$ tutti gli autovalori sono reali

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ $\quad \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{v}) = \bar{\lambda}\varphi(\underline{v}, \underline{v})$

$\quad \varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(\underline{v}, \lambda\underline{v}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{v})$ $\Rightarrow$ se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$ *

(caso su $\mathbb{R}$) $f: V \to V$ simmetrico $\quad \varphi > 0$

$f_{\mathbb{C}}: V \to V$ hermitiano $\quad \varphi_{\mathbb{C}}$ hermitiano > 0 con stessi autovalori

$f_{\mathbb{C}}$ ha tutti autovalori reali $\Rightarrow$ f ha tutti autovalori reali

* COROLLARIO: A hermitiana $\Rightarrow$ A ha tutti autovalori reali

$f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ è hermitiana rispetto al prodotto herm. canonico

$(A\underline{x})^* \underline{y} = \underline{x}^* A^* \underline{y} = \underline{x}^* A \underline{y} = \underline{x}^*(A\underline{y})$

Quindi A reale simmetrica $\Rightarrow$ A hermitiana $\Rightarrow$ A reale simm. ha tutti autovalori reali

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ base ortonormale di V

$M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica reale $\Rightarrow$ tutti autovalori reali

(2) $\lambda \neq \mu \Rightarrow V_\lambda \perp V_\mu$

$\lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \underset{\lambda \text{ reale}}{=} \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v}, \underline{w})$

$\underline{v} \in V_\lambda$, $\underline{w} \in V_\mu$ $\quad (\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$

(3) $W \subset V$ f-invariante $\Rightarrow$ $W^\perp$ f-invariante

$\underline{w} \in W$, $\underline{w}' \in W^\perp$ $\quad \varphi(\underline{w}, f(\underline{w}')) = \varphi(\underset{\in W}{f(\underline{w})}, \underset{\in W^\perp}{\underline{w}'}) = 0 \Rightarrow f(\underline{w}') \perp \underline{w} \quad \forall \underline{w}, \underline{w}'$

$\Rightarrow f(\underline{w}') \in W^\perp \quad \forall \underline{w}'$

Per concludere:

$W = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}$ $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti gli autovalori

se $W \subsetneq V \Rightarrow V = W \overset{\perp}{\oplus} W^\perp$ $\quad \dim W^\perp > 0$

W è f-invariante (essendo somma di spazi invarianti)

$\Rightarrow W^\perp$ sarebbe f-invariante ↯ perché $f|_{W^\perp}: W^\perp \to W^\perp$ è ancora simmetrico (o ~~ortogonale~~ hermitiana su $\mathbb{C}$) e quindi avrebbe almeno un autovettore, ma è assurdo perché tutti gli autovettori sono in W $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim W^\perp = 0 \Rightarrow W = V$

siamo su $\mathbb{C}$ quindi è triangolarizzabile $\Rightarrow$ ha almeno un autovettore

e la scomposizione precedente è equivalente a

$V = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}$ $\quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

□

TEO. SPETTRALE

03/05/2024

(IR) $f: V \to V$ simmetrico $\Rightarrow$ V ha una base ortogonale di autovalori

(C) $f: V \to V$ hermitiano $\Rightarrow$ " " " "
e gli autovalori sono tutti reali

$$\Updownarrow$$

$$V = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_K}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, pr_{V_{\lambda_i}}$$

$$f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, pr_{V_{\lambda_i}}(\underline{v})$$

(viceversa se $V = W_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} W_K$ W_i invariante
$f: V \to V$ $f = \sum \lambda_i \, pr_{W_i}$ è simmetrico)

PER LE MATRICI

(IR) A simmetrica reale, allora $\exists\, O \in O_n$ t.c.
$$O^{-1}AO = {}^tOAO = D \text{ diagonale}$$

(C) A hermitiana $\exists\, U \in U_n$ t.c.
$$U^{-1}AU = U^*AU = D \text{ diagonale, reale}$$

Conseguenza del teorema

$F_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$

è simmetrica rispetto al $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = {}^t\underline{x}\underline{y}$

$${}^t(A\underline{x})\underline{y} = {}^t\underline{x}\,{}^tA\underline{y} = {}^t\underline{x}(A\underline{y})$$

c'è una base ortonormale $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ di autovalori

$$O = [\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_n] \qquad AO = OD \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{{}^tO}}{O^{-1}}AO = D$$

$$U^*AU = D$$

$$(U^*AU)^* = D^* \; ; \quad U^* \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{A^*} \underset{\overset{\shortparallel}{U}}{U^{**}} \Rightarrow D = \underset{\overset{\shortparallel}{{}^t\overline{D}} \overset{\shortparallel}{\overline{D}}}{D^*} \Rightarrow \text{è reale}$$

(H/W teo. per le matrici $\Rightarrow$ teo per gli endomorfismi)

Corollario:

$\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$ prod. scalare

$A = M_B(\varphi)$ è simmetrica

$\iota_+(\varphi)$ = # autoval. positivi (contati con molt. algebriche)

$\iota_-(\varphi)$ = # autoval. negativi (" " " ")

$\iota_0(\varphi)$ = # autoval. zero (con molteplicità)

Ho base ortonormale di autovettori per A: $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V \mid [\underline{v}_i]_B = \underline{x}_i$

$\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$

$\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = {}^t\underline{x}_i A \underline{x}_j = {}^t\underline{x}_i \lambda_j \underline{x}_j = \lambda_j {}^t\underline{x}_i \underline{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}$

$\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \lambda_i$

$\#$ i $\varphi(v_i, v_i)$ è positivo $= \#$ autoval. positivi

TRIANGOLAZIONE (versione forte)

V sp. vett su $\mathbb{C}$ euclideo

$f: V \to V$ endomorfismo

$\exists$ una base a ventaglio ortonormale per f (si dimostra con Gram-Schmidt)

$A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists$ matrice unitaria U t.c. $U^* A U = T$ triangolare
$\overset{\shortparallel}{U^{-1}}$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ con tutti autovalori reali

$\exists\, O \in O_n \mid O^{-1} A O = T$, $O^{-1} = {}^tO$

$U^* M_B(\varphi) U = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

$V/\mathbb{C}$ $f: V \to V$ si dice NORMALE se commuta con l'operatore aggiunto

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

Una matrice è NORMALE se $A \cdot A^* = A^* \cdot A$

A normale $\Rightarrow f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ è normale

f_A normale $\Leftrightarrow$ data $\mathcal{B}$ base ortonormale $M_B(f)$ è ~~ortonormale~~ normale

es. • A hermitiana $A = A^* \Rightarrow AA^* = A^*A$

• A unitaria

• A anti-hermitiana $A = -A^*$

Lemma

T triangolare normale $\Rightarrow T$ diagonale

Dim.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix} \qquad T^* = \begin{bmatrix} \bar{t}_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \bar{t}_{1n} & \cdots & \bar{t}_{nn} \end{bmatrix}$$

• $(TT^*)_{11} = t_{11}\bar{t}_{11} + \dots + t_{1n}\bar{t}_{1n} = |t_{11}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$

$(T^*T)_{11} = \bar{t}_{11} t_{11} = |t_{11}|^2 \Rightarrow t_{12}, \dots, t_{1n}$ devono essere nulli

andando avanti $(TT^*)_{22} = (T^*T)_{22} \Rightarrow t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$

$\vdots$

T diagonale

$\square$

TEO V, φ euclideo su $\mathbb{C}$

$f: V \to V$ è normale $\Leftrightarrow$ V ha base ortonormale di autovett.

Dim. $\mathcal{B}$ base ortonormale di autovettori

$M_{\mathcal{B}}(f) = D$ diagonale è normale $\Rightarrow$ f normale
(D^* è diagonale e le matrici diagonali commutano)

$\mathcal{B}$ base a ventaglio ortonormale

f normale $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(f)$ normale e triangolare $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(f)$ diagonale (per il lemma)

$A \in M_n(\mathbb{C})$ è normale $\Leftrightarrow$ $\exists\, U$ unitaria $\mid U^* A U = D$ diagonale

OSS. $A = A^* \Rightarrow D$ reale (come sopra)

A simmetrica reale ($\Rightarrow$ hermitiana) ha tutti autovalori reali e esiste $O \in O_n \mid O^{-1} A O = D$ (TEO SPETTRALE), $O^{-1} = {}^tO$

$f: V \to V$ simmetrica $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\exists$ base ort. di autovett.

$f: V \to V$ normale $\Leftrightarrow$ $\exists$ base ort. di autovett.

$f: V \to V$ simm reale o hermitiana $\Rightarrow$ $f: V \to V$ normale

ES. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

trovare $O \in O_n \mid O^{-1} A O = D$

Calcolo di autovalori: $(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\mathrm{Span}(\underline{x}_1) \qquad \mathrm{Span}(\underline{x}_2)$$

Per la teoria sono già ortogonali per cui basta normalizzarli

$\underline{v}_1 = \dfrac{\underline{x}_1}{\|\underline{x}_1\|}$ $\quad \underline{v}_2 = \dfrac{\underline{x}_2}{\|\underline{x}_2\|}$ $\quad O = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2]$

$${}^tOAO = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

G gruppo, X insieme

Def. Un'azione di G su X è un'applicazione

$$G \times X \to X : (g, x) \to \underbrace{g.x}_{\text{un altro elemento di } X}$$

tale che:

(i) $e.x = x$ $\quad e$ = identità di G $\quad \forall x \in X$

(ii) $g.(g'.x) = (gg').x$ $\quad \forall g, g' \in G,\ \forall x \in X$

segue

$g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = e.x = x$ cioè $f_g: X \to X$, $x \mapsto g.x$ (g fissato) è invertibile con inversa $f_{g^{-1}}$

$f_g \circ f_{g^{-1}} = f_{g^{-1}} \circ f_g = id$

f_g sono bigezioni di X

ESEMPI: • $X = G$

$G \times G \to G$

$(g, x) \mapsto g \cdot x$ ← operazione nel gruppo

• $G = GL_n(\mathbb{K})$

$X = M_n(\mathbb{K})$

$G \times X \to X$

$(P, A) \mapsto PAP^{-1}$

(oppure $PA\,{}^tP$)

• $M_{m,n}(\mathbb{K})$

$GL_m \left[\underbrace{\quad}_{} \right]^{m} GL_n$

$G = (GL_n \times GL_m)$ (SD-equivalenza)

$X = M_{m,n}(\mathbb{K})$

$((P,Q), A) \mapsto PAQ$

Def. **Orbita** di $x \in X = \{ y = g.x \mid g \in G \}$

relazione $x \sim y \iff \exists\, g \in G \mid g.x = y$ — cioè x è in relazione con $y \iff y$ appartiene all'orbita di x

↓

- riflessiva (basta prendere $g = e$)
- simmetrica (se $g.x = y$, $g^{-1}.y = x$)
- transitiva ($x \sim y$ $y \sim z$

$\Downarrow$ $\quad g.x = y \quad g'.y = z \Rightarrow g'.(g.x) = z \Rightarrow x \sim z$)

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

le classi di equivalenza sono le orbite di questa relazione

$G = O_n \qquad X = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| = 1 \} = S^{n-1} \to$ sfera in $\mathbb{R}^n$ unitaria

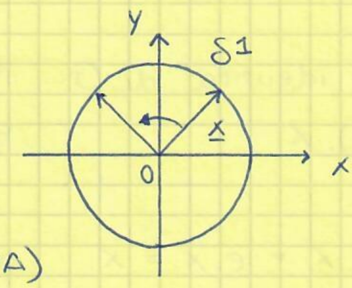
$O \in O_n \quad \underline{x} \to O\underline{x}$ conserva la norma $\|\underline{x}\| \Rightarrow$ manda la sfera in sé stessa

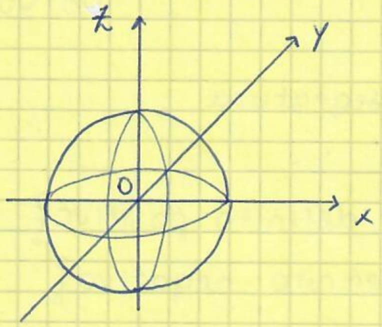
G agisce sulla sfera

$(A, \underline{x}) \to A\underline{x}$

c'è una sola orbita

(in questo caso si dice che l'AZIONE È TRANSITIVA)





$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A, x) \to A\underline{x}$$

SO_2 agisce ruotando attorno all'asse z

La classe di equivalenza di $\underline{x}$ è la circonferenza ottenuta intersecando la sfera e il piano $z = x_z$

$\{g \in G \mid g.x = x\} = Stab_G(\underline{x})$ **stabilizzatore di $\underline{x}$**

È un sottogruppo

- $e \in Stab_G(\underline{x})$
- $g.x = x \Rightarrow g^{-1}.x = g^{-1}.g.x = x$
- $g.x = x,\ h.x = x \Rightarrow g.h.x = h.g.x = x$

Prop. X G-insieme (c'è un'azione di G su X)

$H = Stab_G(x) \quad x \in X$

Orb_x orbita di $x = \{g.x \mid g \in G\}$

Allora esiste una applicazione bigettiva

$$G/H \xrightarrow{\varphi} Orb_x \qquad gH \to g.x$$

↑ insieme di classi laterali

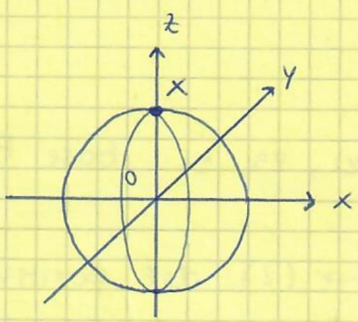
(è un gruppo se H è normale)

$G = O_n$ su S^{n-1}

$x = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$

$Stab_G(x)$ lascia

- $Span(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{n-1})$ invariante



$$Stab(x) \ni A = \left[\begin{array}{c|c} O_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Stab(x) \cong O_{n-1}$$

↓

deve avere ultima colonna $(0 \cdots 0 1)$ e appartenere a O_{n-1} → per mantenere x fisso

08/05/2024

V sp. vett. $/\mathbb{R}$ $\quad \varphi \in PS(V)$, $\dim V = n < \infty$

L' invariante completo per isometria è la segnatura

$$\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), \iota_0(\varphi))$$

- $\iota_+(\varphi) = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ ssp. } : \varphi|_W \text{ definito positivo} \}$
- $\iota_-(\varphi) = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ ssp. } : \varphi|_W \text{ definito negativo} \}$
- $\iota_0(\varphi) = \dim \mathrm{Rad}(\varphi)$
- $\iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) = rg(\varphi)$ $(= \dim V - \dim \mathrm{Rad}(\varphi))$
- $\iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) + \iota_0(\varphi) = \dim V$
- $W \subset V$ ssp. $(W \neq \{0\})$

  $\iota_+(\varphi|_W) \leq \iota_+(\varphi)$

  $\iota_-(\varphi|_W) \leq \iota_-(\varphi)$

"psi"

$V = M_n(\mathbb{R})$ $\quad \varphi(A,B) = tr(A,B)$ $\quad \psi(AB) = tr(A^tB)$

$\sigma(\varphi) = ?$ $\quad \sigma(\psi) = ?$

$\psi(A,A) = tr(A^tA) = \sum a_{ij}^2 = 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall i,j \iff A = 0$

ψ è definito positivo $\sigma(\psi) = (n^2, 0, 0)$

$\varphi|_{S_n(\mathbb{R})} = \psi|_{S_n(\mathbb{R})}$ definito positivo $\Rightarrow \iota_+(\varphi) \geq \frac{n(n+1)}{2}$

$\varphi|_{A_n(\mathbb{R})} = -\psi|_{A_n(\mathbb{R})}$ definito negativo $\Rightarrow \iota_-(\varphi) \geq \frac{n(n-1)}{2}$

$$\underbrace{\iota_+(\varphi)}_{\geq \frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\iota_-(\varphi)}_{\geq \frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\iota_0}_{\geq 0} = n \quad \Rightarrow \quad \iota_+(\varphi) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \iota_-(\varphi) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \iota_0(\varphi) = 0$$

$\dim V = 4$, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ base $\mathcal{B}$ di V, $M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma(\varphi) = ?$

$\varphi|_{Span(\underline{v}_1)} \longrightarrow (2)$ def. positivo $\Rightarrow \iota_+(\varphi) \geq 1$

$\varphi|_{Span(\underline{v}_2)} \longrightarrow (-2)$ def. negativo $\Rightarrow \iota_-(\varphi) \geq 1$

$\varphi|_{Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma(1,1,0)$ non da altre informazioni

$\varphi|_{Span(\underline{v}_1, \underline{v}_4)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ def. positivo $\Rightarrow \iota_+(\varphi) \geq 2$

$\varphi|_{Span(\underline{v}_2, \underline{v}_3)} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ def. negativo $\Rightarrow i_-(\varphi) \geq 2$

allora $\sigma(\varphi) = (2, 2, 0)$

$\Rightarrow \varphi$ non degenere $\Rightarrow \det M \neq 0$

$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M > 0$

Calcolare al variare di α la segnatura di

NB! Non posso dire $\varphi|_{Span(\underline{v}_1)} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow i_0 \geq 1$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$

$\varphi_A|_{Span(\underline{e}_2, \underline{e}_3)} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ def. positivo $\Rightarrow i_+(\varphi_A) \geq 2$

$\varphi_A|_{Span(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Piano iperbolico $\Rightarrow i_-(\varphi_A) \geq 1$

$\sigma(\varphi_A) = (2, 1, 0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi_B|_{Span(e_1, e_3)}$ $\varphi_B|_{Span(e_2, e_3)} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ P.I.

$\sigma = (1, 1, 0)$

$\Rightarrow i_+(\varphi_B) \geq 1 \quad i_-(\varphi_B) \geq 1$

$\sigma(\varphi_B) = \begin{cases} (2, 1, 0) \to B \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} & \text{det. negativo} \\ (1, 2, 0) \to B \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} & \text{det. positivo} \\ (1, 1, 1) \to B \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} & \text{det. nullo} \end{cases}$

$\det B = -3\alpha^2 - 2\alpha + 1$

$\alpha = -1, 1/3 \Rightarrow \det B = 0 \Rightarrow \sigma(\varphi_B) = (1, 1, 1)$

$-1 < \alpha < \frac{1}{3} \Rightarrow \det B > 0 \Rightarrow \sigma(\varphi_B) = (1, 2, 0)$

$\alpha < -1 \vee \alpha > \frac{1}{3} \Rightarrow \det B < 0 \Rightarrow \sigma(\varphi_B) = (2, 1, 0)$

METODO DI JACOBI

$W \subset W' \subset V$ ssp. $\dim W' = \dim W + 1$, $\varphi|_W$ non degenere di segnatura $(p, q, 0)$

$$p + q = \dim W$$

$i_+(\varphi|_{W'}) \geq i_+(\varphi|_W) = p$

$i_-(\varphi|_{W'}) \geq i_-(\varphi|_W) = q$

$$\sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p+1, q, 0) \\ (p, q+1, 0) \\ (p, q, 1) \end{cases}$$

Sia $\mathcal{B}$ base di W e $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$. $\mathcal{B}'$ base di W' e

$A' = M_{B'}(\varphi|_{W'})$

$$A \equiv \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_q \end{array}\right]$$

$\text{sgn}(\det A) = (-1)^q$

$$A' \equiv \begin{cases} \left[\begin{array}{c|c} I_{p+1} & 0 \\ \hline 0 & -I_q \end{array}\right] & \text{sgn}(\det A') = (-1)^q \\ \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{q+1} \end{array}\right] & \text{sgn}(\det A') = (-1)^{q+1} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right] & \det(A') = 0 \end{cases}$$

Se $\dfrac{\det A'}{\det A}$
- $> 0 \Rightarrow \sigma(\varphi|_{W'}) = (p+1, q, 0)$
- $< 0 \Rightarrow \sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q+1, 0)$
- $= 0 \Rightarrow \sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1)$

Sia $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n = V$ bandiera di ssp. ($\dim W_i = i$) $\varphi|_{W_i}$ non degenere $\forall i = 1, \dots, n$

Sia A_i una matrice che rappresenta $\varphi|_{W_i}$

Consideriamo la successione

$1, \det A_1, \det A_2, \dots, \det A_n$ allora

$i_+(\varphi) = \#$ permanente di segno, $i_-(\varphi) = \#$ variazioni di segno

$\uparrow$ permanente $\quad$ $\downarrow$ variazioni

$\varphi|_{W_1} \rightsquigarrow A_1 = (a_1)$
- $a_1 > 0 \to (1,0,0)$ $\xrightarrow{\varphi|_{W_2}}$ $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ ...
- $a_1 < 0 \to (0,1,0)$ $\xrightarrow{\varphi|_{W_2}}$ $(1,1,0)$, $(0,2,0)$

In particolare, $A \in S_n(\mathbb{R})$, M_i = minore principale di ordine i formato dalle prime i righe e colonne di A

A è def. pos. $\Leftrightarrow \det M_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

A è def. neg $\Leftrightarrow \det M_i < 0$ se i è dispari, $\det M_i > 0$ se i è pari

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad \underset{\text{Span}(e_1)}{W_1} \subsetneq \underset{\text{Span}(e_1,e_2)}{W_2} \subsetneq \underset{\text{Span}(e_1,e_2,e_3)}{W_3} = \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(1) = 1 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \quad \det A = 3 \Rightarrow A \text{ definita positiva}$$

$$1, 1, 1, 3$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det(-1) = -1 \quad \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \quad \det(B) = -3$$

$$1, -1, 1, -3 \quad \Rightarrow B \text{ è def. negativa}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{Span}(e_3)}{W_1} \subsetneq \underset{\text{Span}(e_3,e_2)}{W_2} \subsetneq W_3 = \mathbb{R}^3$$

$$\det(2) = 2 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \det C = -10$$

$$1, 2, 1, -10 \Rightarrow \sigma(C) = (2, 1, 0)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nessuna bandiera della base canonica va bene}$$

$$\varphi_D|_{\text{Span}(e_1, e_2)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{P.I.} \quad \sigma = (1, 1, 0)$$

$$\det D = -6 < 0 \Rightarrow \sigma(D) = (2, 1, 0)$$

per cui c'è una permanenza di segno

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \varphi|_{\text{Span}(e_1)} \rightsquigarrow (1) \Rightarrow i_+(\varphi) \geq 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{tutte degeneri, non si prestano al metodo di Jacobi}$$

$$\det E = -16 < 0$$

$$E \equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma = (2, 1, 0)$$

è l'unico modo di completarla per avere det. negativo

OPERATORE TRASPOSTO/AGGIUNTO

V sp. vett. $/\mathbb{K}$ (char $\mathbb{K} \neq 2$), $\varphi \in PS(V)$ non degenere, $f \in \mathcal{L}(V)$

Il trasposto di f rispetto a φ è ${}^t f_{(\varphi)} \in \mathcal{L}(V)$, ${}^t f_{(\varphi)} = \alpha_\varphi^{-1} \circ {}^t f \circ \alpha_\varphi$

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "{}^t f"] & V^* \\ V \arrow[u, "\alpha_\varphi"] \arrow[r, "{}^t f_{(\varphi)}"'] & V \arrow[u, "\alpha_\varphi"'] \end{tikzcd}$$

È l'unico endomorfismo di V tale che

$$\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V \qquad \varphi({}^t f_{(\varphi)}(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$$

$\mathcal{B}$ base di V $\qquad M = M_\mathcal{B}(\varphi), \quad A = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f), \quad A' = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}({}^t f_{(\varphi)})$

$$\Rightarrow A' = M^{-1}\, {}^t A\, M$$

Otteniamo ${}^t_{(\varphi)} : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)$, $f \mapsto {}^t f_{(\varphi)}$ ISOMORFISMO LINEARE

↳ applicazione che associa a ogni endomorfismo il suo trasposto

- ${}^t(f+g)_{(\varphi)} = {}^tf_{(\varphi)} + {}^tg_{(\varphi)} \quad \forall f, g \in \mathcal{L}(V)$
- ${}^t(\lambda f)_{(\varphi)} = \lambda\, {}^tf_{(\varphi)} \quad \forall f \in \mathcal{L}(V),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

- ${}^t(f \circ g)_{(\varphi)} = {}^tg_{(\varphi)} \circ {}^tf_{(\varphi)}$
- ${}^t({}^tf_{(\varphi)})_{(\varphi)} = f \quad \Rightarrow \left(t_{(\varphi)}^2 = id_{\mathcal{L}(V)}\right)$

- ${}^t(id_V)_{(\varphi)} = id_V$
- f invertibile $\Rightarrow$ ${}^tf_{(\varphi)}$ invertibile e $({}^tf_{(\varphi)})^{-1} = {}^t(f^{-1})_{(\varphi)}$

- $\operatorname{Ker} {}^tf_{(\varphi)} = (\operatorname{Im} f)^\perp$ il Ker del trasposto di f è l'ortogonale dell'immagine di f

$\boxed{\subseteq}$ $\underline{w} \in \operatorname{Ker} {}^tf_{(\varphi)}$

$\forall \underline{v} \in V \quad \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, {}^tf_{(\varphi)}(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{0}) = 0$

$\Rightarrow \underline{w} \perp f(\underline{v}) \ \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \operatorname{Ker} {}^tf_{(\varphi)} \subseteq (\operatorname{Im} f)^\perp$

$\boxed{\supseteq}$ $\underline{w} \in (\operatorname{Im} f)^\perp$

$\forall \underline{v} \in V \quad \varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = 0$

$\varphi({}^tf_\varphi(\underline{w}), \underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \in V \Rightarrow {}^tf_{(\varphi)}(\underline{w}) \in \operatorname{Rad}\varphi = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow \underline{w} \in \operatorname{Ker} {}^tf_{(\varphi)}$

- $\operatorname{Im} {}^tf_{(\varphi)} = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ l'immagine del trasposto di f è l'ortogonale del ker di f

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} {}^t({}^tf_{(\varphi)})_{(\varphi)} = (\operatorname{Im} {}^tf_{(\varphi)})^\perp$

$(\operatorname{Ker} f)^\perp = (\operatorname{Im} {}^tf_{(\varphi)})^{\perp\perp} = \operatorname{Im} {}^tf_{(\varphi)} + \underbrace{\operatorname{Rad}\varphi}_{\{\underline{0}\}} = \operatorname{Im} {}^tf_{(\varphi)}$

- $W \subseteq V$ ssp. f-invariante $\Rightarrow$ $W^\perp$ è ${}^tf_{(\varphi)}$-invariante

$\underline{w} \in W^\perp$
$\underline{v} \in W$

$\varphi({}^tf_{(\varphi)}(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underbrace{\underline{w}}_{\in W^\perp}, \underbrace{f(\underline{v})}_{\in W}) = 0 \Rightarrow {}^tf_{(\varphi)}(\underline{w}) \in W^\perp \Rightarrow W^\perp$ è ${}^tf_{(\varphi)}$-inv.

${}^t(\varphi)$ è diagonalizzabile con spettro $\{1,-1\}$ Perché abbiamo osservato che $({}^t(\varphi))^2 = id_{\mathcal{L}(V)}$ $\Rightarrow$ polinomio minimo $(x+1)(x-1)$

- $f \in V_1({}^t(\varphi))$, ${}^tf_{(\varphi)} = f$ si dice SIMMETRICO (o autoaggiunto)
- $f \in V_{-1}({}^t(\varphi))$, ${}^tf_{(\varphi)} = -f$ si dice ANTISIMMETRICO (o antiautoaggiunto)

In termini di matrici in una base B come sopra

f simmetrico $\Leftrightarrow A = A' \Leftrightarrow {}^tAM = MA \Leftrightarrow MA$ è simmetrica $(M = {}^tM)$

$A' = M^{-1}\,{}^tAM$

Se B è una base ortonormale (se esiste, $M_B(\varphi) = I$)

f simmetrico $\Leftrightarrow A$ è simmetrica

$V = \mathbb{R}^3$, $\varphi = \varphi_M$ con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

${}^tf_{(\varphi)}(\underline{e}_1)? = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\forall \underline{v} \in V \quad \varphi(f(\underline{v}), \underline{e}_1) = \varphi(\underline{v}, {}^tf_{(\varphi)}(\underline{e}_1))$ scelgo $\underline{v} = \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

$\underline{v} = \underline{e}_1$

$\varphi(f(\underline{e}_1), \underline{e}_1) = \underbrace{(1,0,0)}_{{}^t\underline{e}_1} \underbrace{M}_{M(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{{}^tf_{(\varphi)}(\underline{e}_1)} = a+b$

$\underline{v} = \underline{e}_2$

$\varphi(f(\underline{e}_2), \underline{e}_1) = \underbrace{(0,1,0)}_{{}^t\underline{e}_2} M \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{{}^tf_{(\varphi)}(\underline{e}_1)} = a-b$

$\underline{v} = \underline{e}_3$

$\varphi(f(\underline{e}_3), \underline{e}_1) = (0\ 0\ 1)\, M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2c$

li impongo uguali a $\varphi(f(\underline{e}_i, \underline{e}_1)$

$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 1 \\ 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0,\ a = -b = 1/2$

$M^{can}_{can}({}^tf_{(\varphi)}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \qquad M^{can}_{can}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

si calcolano come abbiamo fatto per la prima

ES: $\underbrace{M}\underbrace{A'}_{M_B({}^tf_{(\varphi)})} = \underbrace{{}^tA}_{{}^tM_B(f)}M \to$ possibile verifica o modo alternativo di trovare $M_B({}^tf_{(\varphi)})$

$\mathrm{Im}\,{}^tf_{(\varphi)} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_3) \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in (\mathrm{Ker}\, f)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases}$ cioè sse è ortogonale sia ad $\underline{e}_1$ che $\underline{e}_3$

$(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ✓ $= \mathrm{Im}\,{}^tf_{(\varphi)}$

$\mathrm{Ker}\,{}^tf_{(\varphi)} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in (\mathrm{Im} f)^\perp \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$

$(\mathrm{Im} f)^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\,{}^tf_{(\varphi)}$

Teorema spettrale (reale)

V sp. vett. $/\mathbb{R}$, $\varphi \in PS(V)$ definito positivo, $f \in \mathcal{L}(V)$ simmetrico $({}^t f_{(\varphi)} = f)$ $\Rightarrow \exists$ base ortonormale di V di autovettori di f

- f triangolabile $(Sp(f_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R})$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in Sp(f)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V_{\lambda_1}(f) \perp V_{\lambda_2}(f)$
- $W \subset V$ ssp. f invariante $\Rightarrow W^\perp$ è f-invariante
- $V = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in Sp(f)} V_\lambda(f)$

$(V = \mathbb{R}^n,\ \varphi = \langle , \rangle)$

$A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n$: ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$ diagonale

P è la matrice del cambio di base della base $\mathcal{B}$ ortonormale di auto~~valori~~ vettori per A alla base canonica (ortonormale)

$$I = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = {}^tP\, M_{can}(\varphi)\, P = {}^tPP$$

$$A \nearrow f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \qquad (A = M^{can}_{can}(f_A))$$

$$A \searrow \varphi_A \in PS(\mathbb{R}^n) \qquad (A = M_{can}(\varphi_A))$$

- $\sigma(A) = \Big(\sum_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ \lambda > 0}} \mu_g(\lambda),\ \sum_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ \lambda < 0}} \mu_g(\lambda),\ \underset{\dim \ker A}{\overset{\shortparallel}{\mu_g(0)}} \Big)$
- Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono una base ortonormale di autovettori di A, si può scegliere

$$P = \left(\underline{v}_1 \middle| \cdots \middle| \underline{v}_n \right)$$

V sp. vett$/\mathbb{R}$ $\quad \varphi, \psi \in PS(V)$, φ definito positivo

$\exists$ base di V ortonormale per φ e ortogonale per ψ (non servono particolari richieste su ψ)

(diagonalizzazione simultanea di due prodotti scalari)

Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale per φ. $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$, $M_{\mathcal{B}}(\psi) = A$ simmetrica

$\exists P \in O_n$: ${}^tPAP = D$ diagonale

$P \rightarrow$ matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ortogonale per ψ

$M_{\mathcal{B}'}(\psi) = D$ diagonale

$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP \underset{I}{\underset{\shortparallel}{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}} P = {}^tPP = I \Rightarrow \mathcal{B}'$ è base ortonormale per φ

(L' esistenza di P per ψ è data dal teorema spettrale, è importante che $M_B(\varphi) = I$ altrimenti non saprei che ${}^tPM_B(\varphi)P$ è ancora ortonormale)

Radice quadrata definita positiva

$A \in S_n(\mathbb{R})$ definita positiva

$\exists!\ S \in S_n(\mathbb{R})$ definita positiva: $S^2 = A$

se non la prendessi definita positiva non sarebbe più unica (~ come in $\mathbb{R}^+$ prendo sempre la radice > 0)

$\exists P \in O_n \mid \underset{P^{-1}}{{}^tP}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_i \in Sp(A) \Rightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

ESISTENZA:

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad S = PD'{}^tP$$

$(D')^2 = D$ $\qquad S^2 = PD' \overbrace{{}^tPP}^{I} D'{}^tP = P(D')^2\,{}^tP = PD{}^tP = A$

D' è def. positiva $\qquad \Rightarrow S^2 = A$

${}^tS = {}^t(PD'{}^tP) = P{}^tD'{}^tP = PD'P = S$

$S \equiv D' \Rightarrow S$ def. positiva

UNICITÀ:

<u>OSS</u> $\quad S|_{V_\lambda(A)} = \sqrt{\lambda}\, id|_{V_\lambda(A)}$ $\qquad$ (sono entrambe diagonalizzabili dal teo. spettrale)

Sia $S' \in S_n(\mathbb{R})$, def. positiva $\quad (S')^2 = A$

$S'A = (S')^3 = AS' \Rightarrow S', A$ simultaneamente diagonalizzabili ($\Leftarrow$ commutano come abbiamo appena verificato)

$$A \to \begin{bmatrix} \lambda_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I \end{bmatrix} \qquad S' \to \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{bmatrix}$$

$(S')^2 = A \to D_i^2 = \lambda_i I \qquad D_i := \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_u \end{pmatrix} \qquad D_i^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_u^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mu_i^2 = \lambda_i \Rightarrow \mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$

S' def. positiva $\Rightarrow \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$S'|_{V_\lambda(A)} = \sqrt{\lambda}\, id_{V_\lambda(A)} = S|_{V_\lambda(A)}$$

ma $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} V_\lambda(A) \Rightarrow S' = S$

Decomposizione polare

$A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists!$ $S \in S_n(\mathbb{R})$ def. positiva e $P \in O_n$

$$A = PS$$

$$\text{(se } A = PS, \quad {}^tA = S\,{}^tP \Rightarrow {}^tAA = S\underbrace{{}^tPP}_{I}S = S^2)$$

$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^{tt}A = {}^tAA$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad {}^tx\,{}^tAAx = {}^t(Ax)(Ax) = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0 \Big)$$

$\Rightarrow$ ${}^tAA$ simmetrica definita positiva

$\Rightarrow$ S è la radice quadrata def. positiva di ${}^tAA$

$$A = PS \Rightarrow P = AS^{-1} \qquad {}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$$

$$P\,{}^tP = AS^{-1}({}^tS^{-1}\,{}^tA) = A(S^2)^{-1}\,{}^tA = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA =$$

$$= AA^{-1}\,{}^tA^{-1}\,{}^tA = I \cdot I = I$$

$\Rightarrow P \in O_n$

matrice reale invertibile = matrice ortogonale · matrice simmetrica def positiva e tale scrittura È UNICA!

09/5/2024
(Salvetti)

$G \times X \to X$
gruppo insieme

$(g, x) \longmapsto g.x$

i) $e.x = x$

ii) $g.h.x = (gh).x$

Bigezioni $\{\varphi : X \to X\} = S_X$

Gruppo con la composizione $(g \circ f)$

Un'azione di G su X $\iff$ $G \to S_X$
omomorfismo

$g \longmapsto \varphi_g \qquad \varphi_g : X \to X$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto g.x$

L'azione è FEDELE se $g.x = x \quad \forall x \Rightarrow g = e$
elemento neutro di g

Orbita di $x = \{y = g.x \mid g \in G\}$

ES. $G = O_n$ opera su $\mathbb{R}^n$ $\quad (A, \underline{x}) \to A\underline{x}$

orbita di $\underline{x}$ = sfera di raggio $\|\underline{x}\|$ $\quad \|A\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$ (le trasformazioni ortogonali preservano la lunghezza)

Stabilizzatore $Stab_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} \subset G$, è un sottogruppo (in generale non è normale)

Orbita di $x \cong G/_{Stab_G(x)}$
bigezione

$g \to g.x \qquad g.x = h.x \iff h^{-1}g \in Stab(x)$

$G \to Orb(x)$

ESEMPIO

$O_3 \quad \|\underline{x}\| = 1$

Orb di $\underline{x}$ = sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^3 = S_2$

$x = (0, 0, 1)$

$$Stab(x) = \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&0\end{matrix} & 1 \end{array}\right] \qquad A \in O_2 \qquad S_2 = {}^{O_3}/_{O_2}$$

$Stab(x) \cong O_2$

- L'azione è TRANSITIVA se c'è una sola orbita
  Cioè $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G$ t.c. $g.x = y$
- SEMPLICEMENTE TRANSITIVA se tale g è unico
- G opera LIBERAMENTE su X se $Stab(x) = \{e\} \ \forall x \in X$

$Gr_K(\mathbb{R}^n) = \{W \subset \mathbb{R}^n \mid W \text{ ssp. di dim } K\}$
↳ GRASSMANIANA

$Gr_1(\mathbb{K}^n)$ si chiama anche lo SPAZIO PROIETTIVO associato a $\mathbb{K}^n$

$G = Gl_n(\mathbb{K})$

$A : \quad W \to F_A(W) = \{A\underline{x} \mid \underline{x} \in W\}$

<u>ES.</u> Questa azione è transitiva? Sì

<u>ES</u> Identificare lo stabilizzatore di un certo W?

X con azione di G PRINCIPALE se ha azione semplicemente transitiva

<u>def.</u> V sp. vett. su $\mathbb{K}$

Uno SPAZIO AFFINE E su V è un qualunque spazio principale su V

ESEMPIO: $a_n(\mathbb{K})$ $\quad E = \mathbb{K}^n, \quad V = \mathbb{K}^n \quad (P, \underline{v}) \to \underline{v}.P = P + \underline{v}$

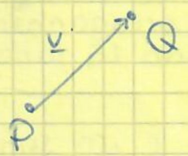
somma in $\mathbb{K}^n$

$P + \underline{0} = P$

$(P + \underline{v}) + \underline{w} = P + (\underline{v} + \underline{w})$

E spazio affine associato a $V/\mathbb{K}$

notazione: $(P, \underline{v}) \to P + \underline{v} = Q$



Fissato un vettore $\underline{v} \in V$ la trasformazione $\begin{array}{l} E \to E \\ P \mapsto P + \underline{v} \end{array}$ è bigettiva

$$\left.\begin{array}{l} P + \underline{v} = Q + \underline{v} \\ (P + \underline{v}) - \underline{v} = (Q + \underline{v}) - \underline{v} \\ P + \underbrace{(\underline{v} - \underline{v})}_{= \underline{0}} = Q + \underbrace{(\underline{v} - \underline{v})}_{= \underline{0}} \\ P = Q \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{assioma i} \\ \text{assioma ii} \\ \text{assioma i} \end{array}$$

$O \in E$ punto fissato

$\begin{array}{l} V \to E \\ \underline{v} \mapsto O + \underline{v} \end{array}$ è bigettiva (si dimostra nuovamente usando gli assiomi)

$O + \underline{v_1} = O + \underline{v_2}$

$\Rightarrow \underline{v_1} = \underline{v_2}$ semplicemente transitiva

$P, \underline{v} \qquad Q = P + \underline{v} \qquad Q - P = \underline{v}$

l'unico vettore tale che $P + \underline{v} = Q$

$O \in E \quad E \to V \qquad (O$ fissato$)$

$P \mapsto P - O$ inversa della trasformazione precedente

$P_1, \dots, P_k \in E$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

$O \in E \qquad P = O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O)$

$\qquad\qquad P' = O' + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O')$

$P = P' \iff O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O) = O' + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O') \iff$

$O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \big((P_i - O) - (P_i - O') \big) = O' \iff O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (O' - O) = O' \iff$

ES
- $-(Q-P) = P - Q$
- $P_1, P_2, P_3 \in E$

  $(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) = P_3 - P_1$

$\iff O' - O = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (O' - O) \iff \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

Chiamo COMBINAZIONE AFFINE dei $P_1, \dots, P_k$

$P = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

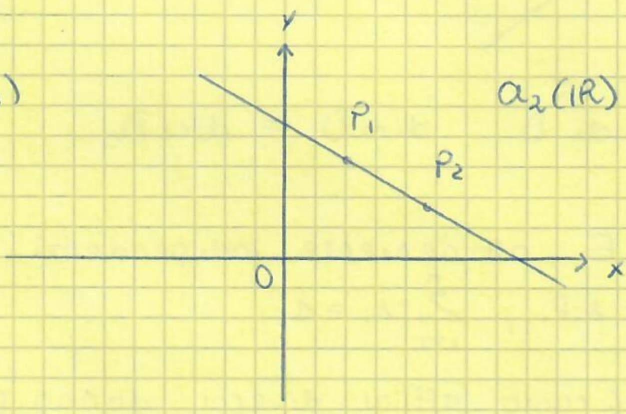
$P_1 \neq P_2$

$\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \Rightarrow$ tutte le combinazioni affini di P_1 e P_2

$P = O + \lambda (P_1 - O) + (1-\lambda)(P_2 - O)$ (indipendente da O)

Prendendo $O = P_1$

$P = P_1 + (1-\lambda)(P_2 - P_1)$

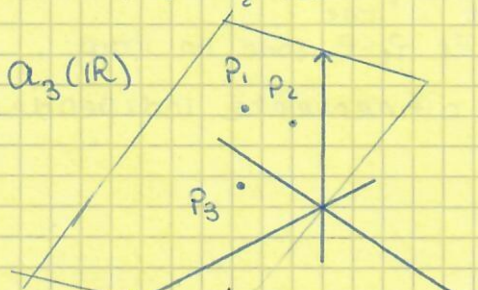


Def. $D \subset E$ ssp. affine

se è chiuso per combinazioni affini

S sottoinsieme di E

$\mathrm{Aff}(S) = \{$ tutte le comb. affini finite di punti di $S \}$



P_1, P_2, P_3 non allineati $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Aff}(P_1, P_2, P_3) =$ piano che contiene P_1, P_2 e P_3

OSS $D \subset E$ ssp. affine $\iff \forall P_0 \in D$ l'insieme $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subset V$ è ssp. vettoriale

$\Rightarrow$ $P_1, \dots, P_n \in D$.

$$P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_0) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\Big) P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = Q \in D$$

$\overset{\shortparallel}{Q - P_0}$ Ma che sta dicendo???

VEDI DISPENSE

$\Leftarrow$ Esercizio

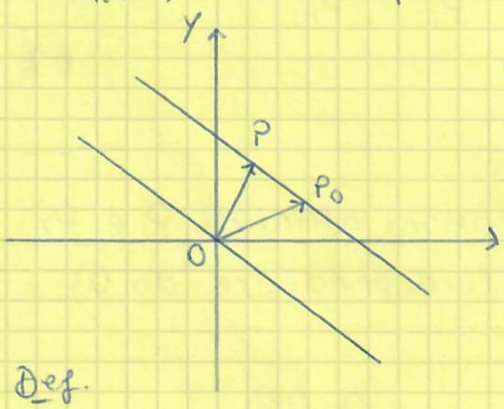
$D \subset E$ ssp. affine

$\rightsquigarrow D_0$ Es: D_0 non dipende da P_0 e $D_0 = \{Q - P \mid P, Q \in D\}$

$\hookrightarrow$ DIREZIONE di D

$P \in D$ $P = O + (P - O) = (O + (P - P_0)) + (P_0 - O)$

$E = a_n(\mathbb{K})$ $D \subset E$ ssp. affine $D_0 \subset V$ sott. vett.



$$P = O + (P - O) = \underbrace{O + (P - P_0)}_{\in D_0} + (P_0 - O)$$

Posso scriverlo $D = D_0 + (P_0 - O)$

Def.

Dimensione di D: $\dim D := \dim D_0$

Def.

$P_1, \dots, P_k \in E$ affinemente indipendenti se $P = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

è unica (comb. affini diversi danno punti diversi)

$P_1, \dots, P_k$ aff. indipendenti $\iff \forall i$, $P_j - P_i$, $i \neq j$ sono linearmente indipendenti

$\iff \exists\, i, j$ $P_j - P_i$, $i \neq j$ sono lin. indipendenti

esiste i tale che $\forall j$ $P_j - P_i$ sono lin. indip.

In $E = a_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$

ci sono al massimo $n+1$ punti affinemente indipendenti

10/05/2024

Spatio affine associato a V sp. vett$/_{\mathbb{K}}$

$E, V \quad \forall P, Q \quad \exists! \ \underline{v} \mid Q = P + \underline{v}$

$(\underline{v}, P) \longmapsto P + \underline{v} \in E \qquad \underline{v} = Q - P$

$a_n(\mathbb{K}) \quad E = \mathbb{K}^n \quad V = \mathbb{K}^n$

$P = \underline{w} \quad \underline{v} \quad \longrightarrow P + \underline{v} = \underline{w} + \underline{v}$

$O \in E \quad V \to E$

$\underline{v} \to O + \underline{v}$ è una bigetione

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O)$$

Non dipende dal punto O se $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

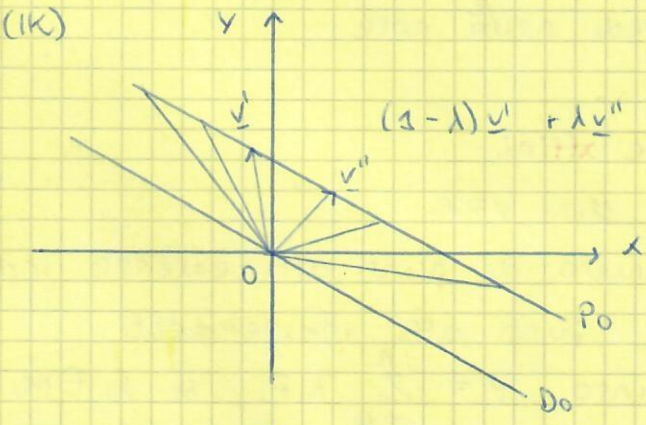
in $a_n(\mathbb{K})$: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + \cancel{(1 - \sum \lambda_i)} O$

una combinatione affine è una combinatione lineare con $\sum \lambda_i = 1$

Sottospatio affine: chiuso rispetto alle combinationi affini

$D = P_0 + D_0 \qquad a_n(\mathbb{K})$

$D_0 \subset V$ ssp.



Punti affinamente indipendenti $P_1, \dots, P_k$

$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \qquad \sum \lambda_i = 1$

l'equatione è unica

Prop. $P_1, \dots, P_k$ affinamente indipendenti $\iff P_j - P_i \quad j \neq i$ sono linearmente indipendenti $\iff \exists i$ t.c. ...

$\iff P_i \notin \mathrm{Aff}(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_k)$

$\cdot \sum \lambda_i = 1$

$$P = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j \iff P_i + (P - P_i) = P_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \lambda_j (P_j - P_i)$$

es $a_2(\mathbb{R})$

ha al max 3 punti affinemente indipendenti

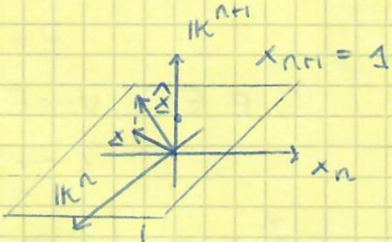
($\iff$ non sono allineati)

in $\mathbb{R}^3$, 3 punti sono affinemente indipendenti se non sono ~~Sttt~~ allineati. Ci sono al max 4 punti aff. indipendenti.

$E = a_n(\mathbb{K})$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in E$ sono affinemente indipendenti $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \hat{\underline{w}}_1, \dots, \hat{\underline{w}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ sono lin. indipendenti

$\mathbb{K}^n \ni \underline{x} \rightsquigarrow \hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$



↳ vettori che hanno ultima coordinata $= 1$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{\underline{w}}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ (dall'ultima coordinata)

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{w}_i = 0$ $\qquad \lambda_1 = -\sum_{j>1} \lambda_j$

$\hookrightarrow -\sum_{j>1} \lambda_j \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 + \dots + \lambda_n \underline{w}_n =$

$= \lambda_2(\underline{w}_2 - \underline{w}_1) + \dots + \lambda_n(\underline{w}_n - \underline{w}_1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Leftarrow$ vedi nelle note

Coordinate affini

$E, V \quad \dim V = n$

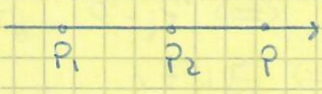
max numero di punti affinemente indipendenti $= n+1$

$P_0, \dots, P_n$ punti aff. indipendenti

ogni punto $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$, se $\lambda_i \in \mathbb{K}$

$(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ coordinate affini rispetto al riferimento affine $(P_0, \dots, P_n)$

$E = \mathbb{R}, V = \mathbb{R} \quad P_1 \neq P_2$



$P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$

$E = a_n(\mathbb{R})$

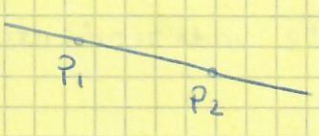
$P_1, \dots, P_k \quad \sum \lambda_i P_i \quad \sum \lambda_i = 1$

si chiama **combinazione convessa** $\quad \lambda_i \geq 0 \ (\Rightarrow \lambda_i \leq 1)$

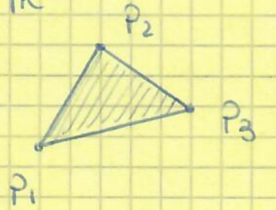
$P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_1 \qquad P = P_1 + (P - P_1) = P_1 + (1-\lambda)(P_2 - P_1)$

$\lambda \in [0,1]$

Baricentro generico $\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$



In $\mathbb{R}^3$



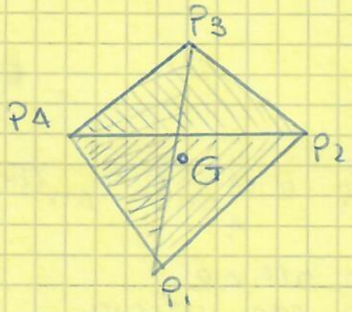
$P_1 + \lambda_2(P_2 - P_1) + \lambda_3(P_3 - P_1)$

$$\begin{cases} \sum \lambda_i P_i \\ \sum \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \in [0,1] \end{cases}$$

INVILUPPO CONVESSO di $P_1, \dots, P_K$ = $\{$comb. convesse dei $P_1, \dots, P_K\}$ <u>Esercizio</u>: è un insieme convesso

$$\underset{\text{baricentro}}{G} = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{2}{3}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2}_{\substack{\text{baricentro} \\ \text{di } P_1 P_2}}\Big) + \frac{1}{3}P_3$$

$\Rightarrow$ mi dice che G è nella mediana P_3 - punto medio di $P_1 P_2$ e la divide in modo che una parte sia il doppio dell'altra



$$G = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} P_i$$

APPLICAZIONI AFFINI

E, V $\qquad E', V'$

$f: E \to E'$ affine se conserva le combinazioni affini

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(P_i)$$

TEO. $f: E \to E'$ affine

$$\exists!\ g: V \to V' \text{ lineare} \mid f(O + \underline{v}) = f(O) + g(\underline{v}) \quad \forall O \in E \ \forall \underline{v} \in V$$

~Dim

$g_O(\underline{v}) = f(O + \underline{v}) - f(O)$

$g_O(\underline{v} + \underline{w}) = f(O + \underline{v} + \underline{w}) - f(O)$

$O + \underline{v} + \underline{w} = (O + \underline{v}) + \underline{w} = (O + \underline{v}) + (O + \underline{w}) - O$

$\Rightarrow f(O + \underline{v} + \underline{w}) = f(O + \underline{v}) + f(O + \underline{w}) - f(O)$

$f(O + \underline{v} + \underline{w}) - f(O) = (f(O + \underline{v}) + f(O + \underline{w}) - f(O)) - f(O) =$

$= (f(O + \underline{v}) - f(O)) + (f(O + \underline{w}) - f(O)) = g_O(\underline{v}) + g_O(\underline{w})$

...

$E = a_n(\mathbb{K}) \qquad E' = a_m(\mathbb{K})$

$f(\underline{x} = \underline{x}_0 + (\underline{x} - \underline{x}_0)) = f(\underline{x}_0) + g(\underline{x} - \underline{x}_0)$

$\underline{x}_0 = \underline{0} \qquad f(\underline{x}) = f(0) + g(\underline{x})$

$E' = E$

def. $f : E \to E$ è una **AFFINITÀ** se è affine e bigettiva

$E = a_n(\mathbb{K}) \qquad f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b} \qquad A \in M_n(\mathbb{K}) \qquad \underline{b} \in \mathbb{K}^n$

Supponiamo esista f^{-1} affine

$$f^{-1}(\underline{x}) = C\underline{x} + \underline{d}$$

$f^{-1}(f(\underline{x})) = C(A\underline{x} + \underline{b}) + \underline{d} = CA\underline{x} + C\underline{b} + \underline{d} = \underline{x} \quad \forall \underline{x}$

$\Rightarrow C = A^{-1}, \; C\underline{b} + \underline{d} = A^{-1}\underline{b} + \underline{d} = \underline{0} \Rightarrow \underline{d} = -A^{-1}\underline{b}$

Chiamiamo **gruppo affine** il gruppo delle affinità di $a_n(\mathbb{K})$

$\{ f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}, \; A \in GL_n(\mathbb{K}), \; \underline{b} \in \mathbb{K}^n \}$

$\overline{x} \longmapsto \hat{\underline{x}}$ (quella di prima)

è una affinità tra $a_n(\mathbb{K}) = \{ x_{n+1} = 0 \}$ e $H_{n+1} \subset a_{n+1}(\mathbb{K})$

↑

ssp. affine

(piano con ultima coordinata $= 1$)

$f : a_n(\mathbb{K}) \to a_n(\mathbb{K})$ affinità

$f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$

$f'(\hat{\underline{x}}) = \widehat{f(\underline{x})}$ è affine di H_{n+1} che si estende a applicat. lineare di $\mathbb{K}^{n+1}$ che preserva il ssp. affine H_{n+1}

$A\underline{x} + b : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$A' = \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$

↳ manda H_{n+1} in sé

- $f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$

$g(\underline{x}) = A'\underline{x} + \underline{b}'$

$g \circ f(\underline{x}) = A'(A\underline{x} + \underline{b}) + \underline{b}'$

$= A'A\underline{x} + A'\underline{b} + \underline{b}'$

$$\left[\begin{array}{c|c} A'A & A'\underline{b} + \underline{b}' \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A' & \underline{b}' \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

TEO E sp. affine di dim. n. $f: E \to E$ affinità

($A(E)$ gruppo delle affinità di E)

1) Se $P_0, \dots, P_K$ sono aff. indipendenti $\Rightarrow f(P_0), \dots, f(P_K)$ sono aff. indipendenti

2) Se $P_0, \dots, P_K$ sono aff. ind. $\Rightarrow \exists!$ affinità f t.c. $f(P_i) = Q_i$

$P_i - P_0$ sono lin. indipendenti $(i>0)$

$f(P_i) = f(P_0) + g(P_i - P_0)$ $\quad f(P_i) - f(P_0) = g(P_i - P_0)$

sono indipendenti perché g è invertibile

$$Q_i = f(P_i) = \underset{\substack{\parallel \\ Q_0}}{f(P_0)} + g(P_i - P_0)$$

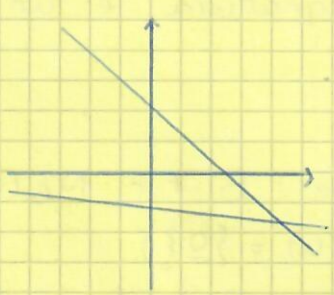
$P_i = P_0 + (P_i - P_0)$

$Q_i - Q_0 = g(P_i - P_0)$

$E = a_2(\mathbb{K})$

posso mandare tramite una affinità una retta in qualsiasi altra retta

$A_2(\mathbb{K})$ agisce transitivamente sull'insieme delle rette affini (ssp. affini di dim 1)



$\underbrace{\ell, \ell'}_{\text{rette}}$ $\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ che manda ℓ in ℓ'

... (?)

V sp. vett. $/\mathbb{C}$ $\quad h: V \times V \to \mathbb{C}$ prodotto hermitiano

15/05/2024
Manfredini

se
- $h(\underline{v}, \circ) \in V^* \quad \forall \underline{v} \in V$
- $h(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{h(\underline{v}, \underline{w})} \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\Rightarrow h(\circ, \underline{w})$ è antilineare $\forall \underline{w} \in V$

ES. su $\mathbb{C}^n$, $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_H = {}^t\underline{x}\,\overline{\underline{y}}$ è il prodotto hermitiano standard

- Hanno senso le nozioni di radicale, non degenere, cono isotropo, ortogonalità
- $\exists$ basi ortogonali
- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base $\mathcal{B}$ di V, $M = M_{\mathcal{B}}(h) = (h(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1,\dots,n}$
  ${}^tM = \overline{M}$ (hermitiana)
  $h(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^T \, M \, \overline{[\underline{w}]_{\mathcal{B}}}$ Cambiando base $M' = \underbrace{{}^t\overline{N}}_{N^*} M N$

  matrice aggiunta di N ($N \in Gl_n(\mathbb{C})$)
- $h(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v} \in V$ per cui hanno senso le nozioni di (semi) definito positivo/negativo e la segnatura.

  Vale il teo di Sylvester e la segnatura è un invariante completo per isometria
- Nel caso definito positivo:
  - $\exists$ basi ortonormali (o unitarie: $\mathcal{B}$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(h) = I$)
  - Gram-Schmidt funziona ($CI(h) = \{\underline{0}\}$)
  - $\forall f \in \mathcal{L}(V)$ $\exists$ base unitaria di V a bandiera per f
- Nel caso non degenere $\exists!$ l'aggiunto f^* di ogni $f \in \mathcal{L}(V)$
  $h(f(\underline{v}), \underline{w}) = h(\underline{v}, f^*(\underline{w})) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad (\overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}^* = M_{\mathcal{B}}(h)\, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*)\, M_{\mathcal{B}}(h)^{-1})$

TEOREMI SPETTRALI

$\boxed{\text{Su } \mathbb{R}}$	$\boxed{\text{Su } \mathbb{C}}$
• $O_n = \{P \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPP = I\}$: ortogonali; isometrie di $\langle , \rangle$; cambi di base tra basi ortonormali	• $U_n = \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid \underbrace{{}^t\overline{U}}_{U^*} U = I\}$: unitarie; isometrie di $\langle , \rangle_H$; cambi di base tra basi unitarie
• Matrici reali diagonalizzabili tramite matrici ortogonali $\Updownarrow$ simmetriche ${}^tA = A$	• Endomorfismi unitariamente diagonalizzabili rispetto a un p. hermitiano definito positivo $\Updownarrow$ normali: $ff^* = f^*f$ (sono più delle hermitiane)

- $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ triangolabile
  $\exists P \in O_n$: ${}^tPAP = P^{-1}AP = T$
  ${}^tP{}^tAP = {}^tT$

A simmetrica $\Rightarrow$ T simmetrica $\Rightarrow$
$\Rightarrow T = D$
(triangolabile)

- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\exists U \in U_n$:
  $U^*AU = U^{-1}AU = T$
  $U^*A^*U = T^*$

A normale $\Rightarrow$ T normale $\Rightarrow T = D$

$A \in GL_n(\mathbb{C}) \quad A^m = A^* \quad$ con $m \geq 2 \Rightarrow A \in U_n$

A è normale?

$AA^* = A \cdot A^m = A^m \cdot A = A^* A$ sì!

$\Rightarrow \exists\, U \subset U_n \mid \quad U^* A U = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$

$\lambda_i \neq 0 \quad (A \in GL_n(\mathbb{C}))$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ U^* A^* U}}{(U^* A U)^*} = D^* = \bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

↳ la stessa base diagonalizza anche A^*

$$A^m = A^* \Rightarrow D^m = \bar{D} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_i^m = \bar{\lambda}_i \quad (*) \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

$|\lambda_i|^m = |\bar{\lambda}_i| = |\lambda_i| \qquad |\lambda_i| \neq 0$

$|\lambda_i|^{m-1} = 1 \Rightarrow |\lambda_i| = 1$

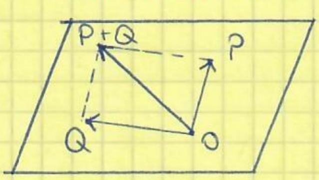
$(*)\quad \lambda_i^{m+1} = \bar{\lambda}_i \cdot \lambda_i = 1 \Rightarrow$ gli autovalori sono radici $(m+1)$-esime dell'unità

$\Rightarrow D^{m+1} = I$

$A^{m+1} = I$

$A \cdot A^* = A \cdot A^m = A^{m+1} = I \quad \Rightarrow A \in U_n$

SPAZI AFFINI



$\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$

$P + \underline{v} = Q$

$\underline{v} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$

La geometria affine modellizza strutture (geometriche) per le quali, fissato un punto, si ha una struttura algebrica di spazio vettoriale.

V sp. vett. $/\mathbb{K}$, $\mathbb{A}$ spazio affine su V se

$\exists \quad + : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}$

$(p, \underline{v}) \longmapsto p + \underline{v}$

: → $(p + \underline{v}) + \underline{w} = p + (\underline{v} + \underline{w}) \quad \forall p \in \mathbb{A}, \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

→ $\forall\, p, q \in \mathbb{A} \quad \exists!\, \underline{v} \in V : Q = P + \underline{v}$

$\underline{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$

(azione di V su $\mathbb{A}$ semplicemente transitiva)

- $P + \underline{0} = P \quad \forall P \in \mathbb{A}$
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{PQ} \quad \forall P, Q \in \mathbb{A}$

- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \underline{0} \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ (idem con più di 3 punti)

$P + \underbrace{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP})}_{= \underline{v}} = Q + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}) = R + \overrightarrow{RP} = P \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

ES $\mathbb{A} = V$, $+ : V \to V$ l'usuale somma (in tal caso $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ è la somma vera di due vettori, non una notazione)

- Fissato $P \in \mathbb{A}$ otteniamo $S_P : V \to \mathbb{A}$, $\underline{v} \mapsto P + \underline{v}$ $\left(S_P = + \big|_{\{P\} \times V} \right)$

biunivoca, con inversa $S_P^{-1} : \mathbb{A} \to V$, $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$, che permette di definire su $\mathbb{A}$ una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ "centrato in P", $\mathbb{A}_P$, tale che S_P sia un isomorfismo:

$Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}$ $\quad Q_1 +_P Q_2 = P + (\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{PQ_2}) =$

$\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad = Q_1 + \overrightarrow{PQ_2} =$

$= Q_2 + \overrightarrow{PQ_1} =$

$=$ " $Q_1 + Q_2 - P$ "

$\lambda_P Q_1 = P + \lambda \overrightarrow{PQ_1} =$ " $\lambda Q_1 + (1-\lambda) P$ "

lo $\underline{0}$ di $\mathbb{A}_P$ è P

- Fissato $\underline{v} \in V$, otteniamo $t_{\underline{v}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $P \mapsto P + \underline{v}$ biunivoca

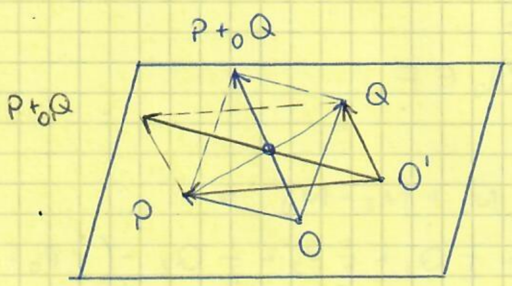
Traslazione del vettore $\underline{v}$ $\quad \left(t_{\underline{v}} = + \big|_{\mathbb{A} \times \{\underline{v}\}} \right)$

- $t_{\underline{0}} = id_{\mathbb{A}}$
- $t_{\underline{v}} \circ t_{\underline{w}} = t_{\underline{v}+\underline{w}} \quad (= t_{\underline{w}} \circ t_{\underline{v}})$
- $(t_{\underline{v}})^{-1} = t_{-\underline{v}}$

Fissato $P \in \mathbb{A}$, $\quad V \xrightarrow{S_P} \mathbb{A} \xrightarrow{t_{\underline{v}}} \mathbb{A}$

$t_{\underline{v}} \circ S_P(\underline{w}) = t_{\underline{v}}(S_P(\underline{w})) = t_{\underline{v}}(P + \underline{w}) = (P + \underline{w}) + \underline{v} = S_{P+\underline{v}}(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in V$

$t_{\underline{v}} \circ S_P = S_{P+\underline{v}} \Rightarrow t_{\underline{v}} = S_{P+\underline{v}} \circ S_P^{-1} : \mathbb{A}_P \to \mathbb{A}_{P+\underline{v}}$ isomorfismo $\forall P \in \mathbb{A}$



Il punto medio di PQ è lo stesso sia per lo spazio centrato in O che in O' (è una COMB. AFFINE di P e Q $\Rightarrow$ rimane fisso in ogni riferimento)

Dati $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{A}$ $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \mid \sum_i \lambda_i = 1$

è ben definita la COMBINAZIONE AFFINE di $Q_1, \dots, Q_K$ con coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_K$

$\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_K Q_K = P_0 + (\lambda_1 \overrightarrow{P_0 Q_1} + \dots + \lambda_K \overrightarrow{P_0 Q_K}) = \lambda_1 \cdot_{P_0} Q_1 +_{P_0} \dots +_{P_0} \lambda_K \cdot_{P_0} Q_K$

(In generale, $\boxed{\lambda_1 \cdot_{P_0} Q_1 +_{P_0} \dots +_{P_0} \lambda_K \cdot_{P_0} Q_K = \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_K Q_K + (1 - \sum_i \lambda_i) P_0}$)

$E \subset \mathbb{A}$ si dice ssp. affine se è chiuso per combinazioni affini dei suoi punti (Anche $E=\emptyset$)

se $E \neq \emptyset$

- E è un ssp. vettoriale di un $\mathbb{A}_{p_0}$ $(p_0 \in E)$
- E è immagine tramite una $S_{p_0}: V \to \mathbb{A}_{p_0}$, $\underline{v} \mapsto p_0 + \underline{v}$ di un sottospazio $W \subset V$ $(p_0 \in E)$

$$E = p_0 + W = \{ p_0 + \underline{w} \mid \underline{w} \in W \}$$

$$W = E_0 = \mathrm{Giac}(E) = \{ \overrightarrow{P_0Q} \mid Q \in E \} \ (= S_{p_0}^{-1}(E),\ \forall p_0 \in E)$$

$\downarrow$ direzione o giacitura di E $\qquad \overset{\shortparallel}{} \{ \overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in E \}$

<u>Esempio</u>

$E, F \subset \mathbb{A}$ ssp. affini non vuoti, poniamo

$M = \{ \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \mid P \in E,\ Q \in F \}$ $\quad M$ è un sottospazio affine

1) M è chiuso per combinazioni affini

$M_1, \dots, M_k \in M \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \quad \sum_i \lambda_i = 1$

$\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k \in M?$

$\downarrow$

$M_i = \frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}Q_i$

$P_i \in E, \quad Q_i \in F$

$$\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k = \frac{1}{2}\underbrace{(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)}_{\in E} + \frac{1}{2}\underbrace{(\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_k Q_k)}_{\in F}$$

$\Rightarrow \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k \in M$

NB! $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = M$ ha senso,
$P + Q = 2M$ NON ha senso,
$2M - Q = P$ ha senso

2) Fissato $M_0 \in M$, M è ssp. di $\mathbb{A}_{M_0}$

$M_0 = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}Q_0 \qquad P_0 \in E,\ Q_0 \in F$

- $M_0 \in M$
- $M_1, M_2 \in M$ $\qquad M_1 +_{M_0} M_2 = M_1 + M_2 - M_0 =$

$M_i = \frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}Q_i$ $\qquad = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}Q_2 - (\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}Q_0) =$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(P_1 + P_2 - P_0)}_{\in E} + \frac{1}{2}\underbrace{(Q_1 + Q_2 - Q_0)}_{\in F}$$

verificare la chiusura per prodotto per scalare per esercizio

$\lambda \cdot_{M_0} M = \lambda M + (1-\lambda)M_0 = \lambda(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q) + (1-\lambda)(\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}Q_0) = \frac{1}{2}(\lambda P + (1-\lambda)P_0) + \frac{1}{2}(\lambda Q + (1-\lambda)Q_0)$

3) $S^{-1}_{M_0}(M)$ è un ssp. di V $\quad$ ($=$ Giac(M)) $\quad M_0 \in M$

$$\{\overrightarrow{M_0M_1} \mid M_1 \in M\} = \text{Giac}(E) + \text{Giac}(F)$$

$\supseteq$ $\quad \underline{v} = \underset{\text{Giac}(E)}{\underset{\cap}{\underline{u}}} + \underset{\text{Giac}(F)}{\underset{\cap}{\underline{w}}} \qquad M_1 = M_0 + \underline{v} \overset{?}{\in} M$

$$M_0 = \tfrac{1}{2} P_0 + \tfrac{1}{2} Q_0$$

$$M_1 = M_0 + \underline{v} = \tfrac{1}{2} P_0 + \tfrac{1}{2} Q_0 + \underline{u} + \underline{w} =$$

faccio vedere che sommando a un elemento di M un vettore di Giac(E)+Giac(F) rimango in M

$$= \tfrac{1}{2}(\underset{E}{\underset{\cap}{P_0}} + 2\underset{\text{Giac}(E)}{\underset{\cap}{\underline{u}}}) + \tfrac{1}{2}(\underset{F}{\underset{\cap}{Q_0}} + 2\underset{\text{Giac}(F)}{\underset{\cap}{\underline{w}}}) \in M \quad (\text{char } \mathbb{K} \neq 2)$$

$\subseteq$ $\quad \overrightarrow{M_0M_1} = M_1 - M_0 = \tfrac{1}{2} P_1 + \tfrac{1}{2} Q_1 - \left(\tfrac{1}{2} P_0 + \tfrac{1}{2} Q_0\right) \overset{*}{=}$

$M_1 \in M$

$$M_1 = \tfrac{1}{2} P_1 + \tfrac{1}{2} Q_1$$

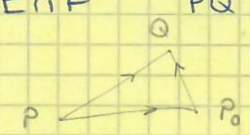
$$\overset{*}{=} \tfrac{1}{2}(P_1 - P_0) + \tfrac{1}{2}(Q_1 - Q_0) \in \text{Giac}(E) + \text{Giac}(F)$$

- $\emptyset \neq E \subset F$ ssp. affini $\Rightarrow$ Giac$(E) \subset$ Giac(F)
- Intersezione di ssp. affini è un ssp. affine
- E, F ssp affini: $E \cap F \neq \emptyset \Rightarrow$ Giac$(E \cap F) =$ Giac$(E) \cap$ Giac(F)
- Giac$(E) =$ Giac(F), $E \cap F \neq \emptyset \iff E = F \neq \emptyset$

$E, F \subset \mathbb{A}$ ssp. affini, $P \in E$, $Q \in F$

$$E \cap F = \emptyset \iff \overrightarrow{PQ} \notin \text{Giac}(E) + \text{Giac}(F)$$

$(\Leftarrow)$ Se $P_0 \in E \cap F$ $\quad \overrightarrow{PQ} = Q - P = \underbrace{\underset{F}{\underset{\cap}{Q}} - \underset{F}{\underset{\cap}{P_0}}}_{\text{Giac}(F)} + \underbrace{\underset{E}{\underset{\cap}{P_0}} - \underset{E}{\underset{\cap}{P}}}_{\text{Giac}(E)}$



$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in \text{Giac}(E) + \text{Giac}(F) \quad \lightning$$

$(\Rightarrow)$ Se $\overrightarrow{PQ} \in$ Giac(E) + Giac(F), $\quad \overrightarrow{PQ} = \underset{\text{Giac}(E)}{\underset{\cap}{\underline{u}}} + \underset{\text{Giac}(F)}{\underset{\cap}{\underline{w}}}$

$Q - P = \underline{u} + \underline{w}$

$F \ni Q - \underline{w} = P + \underline{u} \in E$

$F \cap E \neq \emptyset \quad \lightning$

ultima parte della lezione del 15/05/24 di Manfredini

V, W sp. vett. $/\mathbb{K}$

$\mathbb{A}$ sp. affine su V, $\mathbb{B}$ spazio affine su W

$f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ si dice affine se:

- conserva le combinazioni affini:

  $\forall p_1, \dots, p_k \in \mathbb{A}, \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \mid \sum_i \lambda_i = 1$

  $$\sum \lambda_i f(p_i) = f\left(\sum_i \lambda_i p_i\right)$$

- $p \in \mathbb{A}$, $f: \mathbb{A}_p \xrightarrow{f} \mathbb{B}_{f(p)}$ è lineare

  applicazione lineare associata all'applicazione affine

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_p \arrow[r, "f"] & \mathbb{B}_{f(p)} \\ V \arrow[u, "S_p"] \arrow[r, "g"'] & W \arrow[u, "S_{f(p)}"'] \end{tikzcd}$$

$g = S_{f(p)}^{-1} \circ f \circ S_p$ ($g = df$ DIFFERENZIALE di f)

f lineare $\iff$ g è lineare

$g(\underline{v}) = f(p + \underline{v}) - f(p)$ e non dipende da p

- $\exists\, g \in \mathcal{L}(V, W) \mid f(Q) = f(P) + g(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall\, P, Q \in \mathbb{A}$

$f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ affine

- $E \subset \mathbb{A}$ ssp. affine $\Rightarrow$ $f(E) \subset \mathbb{B}$ ssp. affine e

  $\text{Giac}(f(E)) = df(\text{Giac}(E))$ = la giacitura dell'immagine di E è l'immagine della giacitura di E mediante il differenziale

  $(E = P_0 + W \Rightarrow f(E) = f(P_0) + df(W))$

- $f_1: \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ affine $\Rightarrow$ $f_1 \circ f$ affine e $d(f_1 \circ f) = df_1 \circ df$
- f biunivoca si dice affinità, in tal caso f^{-1} è affine e $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$
- Es: $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affine, $df = id_V \iff f = t_{\underline{v}}$, $\underline{v} \in V$ (cioè f traslazione)

  ($\Leftarrow$) $dt_{\underline{v}}(\underline{w}) = t_{\underline{v}}(P + \underline{w}) - t_{\underline{v}}(P) =$

  $= (P + \underline{w} + \underline{v}) - (P + \underline{v}) = \underline{w} \Rightarrow dt_{\underline{v}} = id_V$

  ($\Rightarrow$) $f(Q) = f(P) + df(\overrightarrow{PQ}) = f(P) + \overrightarrow{PQ} = f(P) + Q - P =$

  $= Q + \underbrace{(f(P) - P)}_{=\underline{v}} \Rightarrow f = t_{\underline{v}}$

Es: $U, W \subset V$ ssp. $\mid V = U \oplus W$

$E \subset \mathbb{A}$ ssp. affine: $\text{Giac}(E) = W$

- La proiezione parallela a U con schermo E è $\pi: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$

  $p \longmapsto (p+U) \cap E$

$\text{Giac}(P+U) = U \qquad (P+U) \cap E \overset{?}{=} \emptyset$

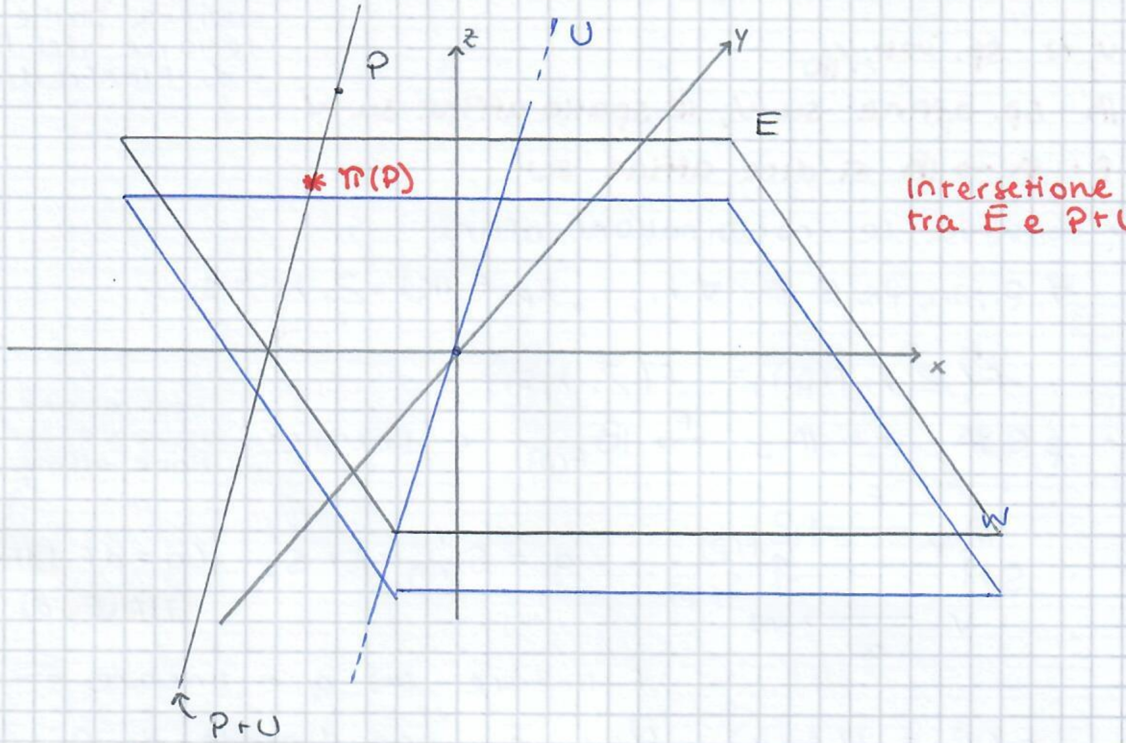
NO

poiché $\text{Giac}(P+U) + \text{Giac}(E) = V$

abbiamo visto prima che $E \cap F = \emptyset \iff \overrightarrow{PQ} \notin \text{Giac}(E) + \text{Giac}(F)$

$\text{Giac}(U) \cap \text{Giac}(E) = U \cap W = \{\underline{0}\}$

$\dim((P+U) \cap E) = 0 \rightsquigarrow (P+U) \cap E$ è un punto



OSS: Fissato $P_0 \in \mathbb{A}$, $Q_0 = \pi(P_0)$

$P \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{P_0P} = \underline{u} + \underline{w}$ con $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$, $\pi(P) = Q_0 + \underline{w}$

$(P = P_0 + \underline{u} + \underline{w})$

$\{Q_0\} = (P_0 + U) \cap E$, $Q_0 \in E$ e

$Q_0 = P_0 + \underline{u}_0 \quad \underline{u}_0 \in U$

$$E \ni \underset{E}{\underset{\cap}{Q_0}} + \underset{Giac(E)}{\underset{\cap}{\underline{w}}} = P_0 + \underline{u}_0 + \underline{w} + \underline{u} - \underline{u} =$$

$$= \underset{P}{\underset{\parallel}{(P_0 + \underline{u} + \underline{w})}} + (\underline{u}_0 - \underline{u}) \in P + U$$

π è affine:

1) CONSERVA LE COMBINAZIONI AFFINI:

$P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $\sum_i \lambda_i = 1$

$\overrightarrow{P_0P_i} = \underset{U}{\underset{\cap}{\underline{u}_i}} + \underset{W}{\underset{\cap}{\underline{w}_i}} \Rightarrow \pi(P_i) = Q_0 + \underline{w}_i$

$$\overrightarrow{P_0, \sum_i \lambda_i P_i} = (\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k) - P_0 = \underline{u}_K + \underline{w}_K$$

$$= \lambda_1(P_1 - P_0) + \lambda_2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda_k(P_k - P_0) =$$

$$= (\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) + (\lambda_1 \underline{w}_1 + \dots + \lambda_k \underline{w}_k)$$

$$\pi(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k) = Q_0 + \lambda_1 \underline{w}_1 + \dots + \lambda_k \underline{w}_k =$$

$$= \lambda_1(Q_0 + \underline{w}_1) + \dots + \lambda_k(Q_0 + \underline{w}_k) = \lambda_1 \pi(P_1) + \dots + \lambda_k \pi(P_k)$$

2) $\pi: \mathbb{A}_{P_0} \to \mathbb{A}_{Q_0}$ È LINEARE: $(\pi(P_0) = Q_0)$

$P_1, P_2 \in \mathbb{A}$

$\overrightarrow{P_0P_i} = \underset{U}{\underset{\cap}{\underline{u}_i}} + \underset{W}{\underset{\cap}{\underline{w}_i}} \qquad \pi(P_1 +_{P_0} P_2) = \pi(P_1 + P_2 - P_0)$

$\pi(P_i) = Q_0 + \underline{w}_i$

$(P_1 + P_2 - P_0) - P_0 = (P_1 - P_0) + (P_2 - P_0) = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 + \underline{u}_2 + \underline{w}_2 =$

$= \underbrace{(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)}_{\in W}$

$\pi(P_1 + P_2 - P_0) = Q_0 + \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = (Q_0 - \underline{w}_1) + (Q_0 - \underline{w}_2) - Q_0 =$

$= \pi(P_1) +_{Q_0} \pi(P_2)$

3) $S_{Q_0}^{-1} \circ \pi \circ S_{P_0}$ $(= d\pi)$ è lineare:

se $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$$\underline{v} \xrightarrow[S_{P_0}]{} P_0 + \underline{v} \xrightarrow[\pi]{} Q_0 + \underline{w} \xrightarrow[S_{Q_0}^{-1}]{} \underline{w}$$

$\boxed{d\pi = P_W}$ lineare!

↳ PROIEZIONE su W

$k \geq 1$ $\quad P_0, \dots, P_k \in \mathbb{A}$ si dicono:

- **affinemente indipendenti** se $P_1, \dots, P_k$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{A}_{P_0}$
  $(\iff \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ sono linearmente indipendenti in $V)$
- **Generatori** di $\mathbb{A}$ $\iff P_1, \dots, P_k$ generatori di $\mathbb{A}_{P_0}$
  $(\iff \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ generatori di $V)$
- Un **riferimento affine** di $\mathbb{A}$ se sono affinemente indipendenti e generano $\mathbb{A}$
  $\iff P_1, \dots, P_k$ base di $\mathbb{A}_{P_0} \iff \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ base di V
  $\iff \forall P \in \mathbb{A}\ \exists!\ \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \mid \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ e
  $P = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k$

- $P_0, \dots, P_k$ riferimento affine di $\mathbb{A}$, $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{B}$
  $\exists!$ applicazione affine $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B} \mid f(P_i) = Q_i \quad i = 0, \dots, n$
- Nel caso degli spazi affini standard, $\mathbb{A} = a_n(\mathbb{K})$ $(= \mathbb{K}^n)$, $\mathbb{B} = a_m(\mathbb{K})$ $(= \mathbb{K}^m)$
  $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ affine $\iff f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$
  con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$
- A e $\underline{b}$ sono unici
  - $A = df: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad (A = M_{cau}^{cau}(df))$
  - $\underline{b} = f(\underline{0})$

ES: $\mathbb{A} = a_2(\mathbb{R})$ $(= \mathbb{R}^2)$, costruire, se esiste, $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affine: $f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

Poniamo $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ scegliamo il primo punto come origine

Allora $P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

danno una base di $\mathbb{R}^2$, quindi P_0, P_1, P_2 sono un riferimento affine e f esiste ed è unica

Scrivendo $f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$ con $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$

(Imponendo le condizioni date si ottiene un sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite da cui si ricavano A e $\underline{b}$)

Ricaviamo A sapendo che $A = df$: $\quad f(P_1) = f(P_0) + A(P_1 - P_0)$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A(P_1 - P_0) = f(P_1) - f(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = A(P_2 - P_0) = f(P_2) - f(P_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora possiamo ricavare $\underline{b}$ sapendo che $\underline{b} = f(\underline{0})$

Scriviamo $\underline{b}$ come combinazione affine di P_0, P_1, P_2:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\sum_i \lambda_i = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 5,\ \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1$$

$$\underline{b} = f(\underline{0}) = 5f(P_0) - 3f(P_1) - f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2$ (oss: f non è un'affinità non è né iniettiva né surgettiva)

ESERCIZIO:

$\mathrm{Im} f$ = retta affine $\Rightarrow$ un multiplo di f e una proiezione //

16/05/2024
Salvetti

$E = \mathcal{a}_n(\mathbb{K})$

AFFINITÀ $\to f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$

$\cup$

TRASLAZIONI $\to f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$

$\downarrow$

Sottogruppo commutativo isomorfo a $\mathbb{K}^n$

$g(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}'$

$(g \circ f)(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t} + \underline{t}'$

È NORMALE?

$\tau(\underline{x}) = \underline{x} + t$

$f^{-1} \tau f(\underline{x}) = f^{-1}(A\underline{x} + \underline{b} + \underline{t}) = A^{-1}(A\underline{x} + \underline{b} + \underline{t}) - A^{-1}\underline{b} = \underline{x} + A^{-1}\underline{t}$ ✓

$f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$ $\qquad \mathcal{a}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathcal{a}_{n+1}(\mathbb{K})$

$\underline{x} \longmapsto \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$A \in GL_n(\mathbb{K})$

$A_2(\mathbb{K})$ da quanti parametri dipende? $n^2 + n$

$n = 2$

$\underline{x} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} a & b & b_1 \\ c & d & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Oss Una affinità manda ssp. affini in ssp. affini della stessa dimensione

$f(W) = A(W) + \underline{b}$

$W = W_0 + \underline{w}_0$

$f(W) = A(W_0) + A\underline{w}_0 + \underline{b}$

Def. Due ssp. affini sono PARALLELI se hanno stessa direzione

Una affinità manda ssp. paralleli in ssp. paralleli

$E = \mathcal{a}_n(\mathbb{K})$

$\{ f \in A_n(\mathbb{K}) \mid f(\underline{0}) = \underline{0} \}$ $\qquad \{ f \in A_n(\mathbb{K}) \mid f(\underline{x}_0) = \underline{x}_0 \}$

$\cong$

$GL_n(\mathbb{K})$ $\qquad A\underline{0} + \underline{b} = \underline{0}$

$f(\underline{x}_0 + \underline{x}) = f(\underline{x}_0) + g(\underline{x}) =$

$= \underline{x}_0 + g(\underline{x})$

$f \cong g$

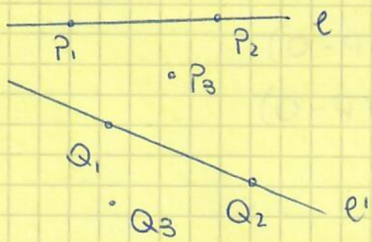
Grassmaniana affine

$Gr_k^{(aff)}(E) = \{$ sottogruppi affini di E di dim $k \}$

- $A_2(\mathbb{K})$ agisce transitivamente su $Gr_1^{(aff)}(a_2(\mathbb{K}))$
  $\forall\, \ell, \ell',\ \exists\, f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c. $f(\ell) = \ell'$

TEO $\ast$
$a_n(\mathbb{K})$ $\quad P_1, \dots, P_{n+1}$ punti aff. indipendenti
$\quad Q_1, \dots, Q_{n+1}$ punti aff. indipendenti
$\Rightarrow \exists!\ f \in A_n(\mathbb{K}) \mid f(P_i) = Q_i$ $\qquad n(n+1)$ parametri

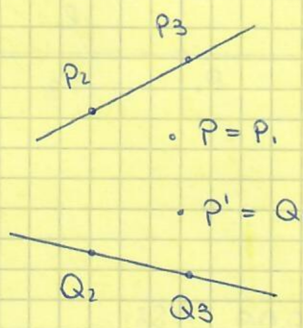
Una affinità manda la retta generata da P e Q nella retta generata da $f(P)$ e $f(Q)$
$\Rightarrow$ devo trovare 2 punti di ℓ che vanno in ℓ'



$P_3 \notin Aff(P_1, P_2)$ $\quad (\overset{es.}{\Longrightarrow} P_1, P_2, P_3$ affinemente indipendenti)

$Q_1, Q_2 \in \ell'$ $\qquad Q_3 \notin \ell'$
Per il TEO $\ast$ esiste una affinità tale che
$f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3$ $\qquad$ (4 parametri)

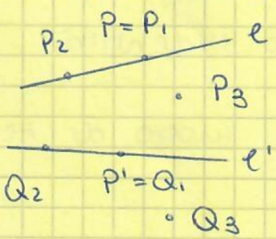
- ℓ, P $\xrightarrow{f?}$ ℓ', P'
  retta, punto $\qquad P' \notin \ell'$
  $P \notin \ell$



Esiste per il TEO

(2 parametri)

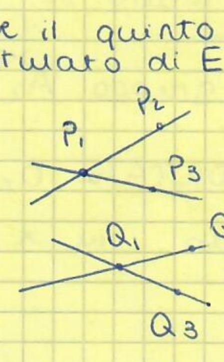
Se invece $P \in \ell$ e $P' \in \ell'$



(3 parametri)

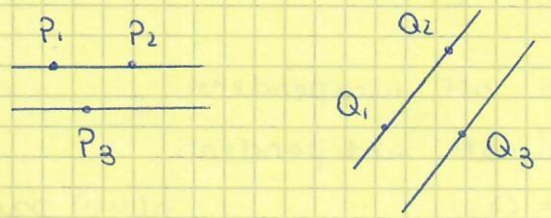
HW
- ℓ_1, ℓ_2 rette in $a_2(\mathbb{K})$
  ℓ_1, ℓ_2 parallele e distinte $\iff \ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ $\qquad$ ("vale il quinto postulato di Euclide")

- ℓ_1, ℓ_2 incidenti
  ℓ_1', ℓ_2' incidenti
  È possibile mandare $\ell_1 \to \ell_1'$, $\ell_2 \to \ell_2'$
  Basta mandare $P_i \to Q_i$ $\quad i = 1, 2, 3$



(2 gradi di libertà)

- $\ell_1, \ell_2 \mid \ell_1 \parallel \ell_2$ e $\ell_1', \ell_2' \mid \ell_1' \parallel \ell_2'$



$F(\ell_1) = \ell_1'$

$F(\ell_2) \parallel F(\ell_1) = \ell_1'$
$\cup$
Q_3

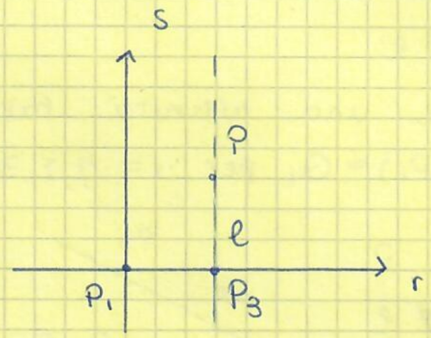
$\exists!$ retta $\parallel$ a ℓ_1' e passante per Q_3

$\ell' \parallel \ell \quad P \in \ell' \cap \ell$
$\downarrow$
ℓ_0 direzione
$\ell' = \ell_0 + (P-O)$
$\ell = \ell_0 + (P-O)$

- ESERCIZIO DI UN COMPITO

$r = \{x = 0\}$
$s = \{y = 0\}$
$P \equiv (2,1)$
$F \in A_2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} F(r) = r \\ F(s) = s \\ F(P) = P \end{cases}$$



$F(r \cap s) = r \cap s$

P_1 e P_2 rimangono fissi
$F(\ell) = \ell$ perchè mantiene il parallelismo
$\Rightarrow P_3$ rimane fisso $\Rightarrow$ va bene solo l'identità

$\boxed{a_n(\mathbb{K})}$ Una CONICA in $a_2(\mathbb{K})$ (x,y) è il luogo di zeri di un polinomio di grado due

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Per alcuni $\mathbb{K}$ posso avere luogo di zeri $= \emptyset$ es: $x^2+y^2+1=0$ in $\mathbb{R}$

Sul gruppo $A_2(\mathbb{K})$ agisce $\underline{x} = F(\underline{x}') \Rightarrow p(\underline{x}) = p'(\underline{x}') = p(F(\underline{x}))$

QUADRICA in $a_n(\mathbb{K})$: luogo di zeri di un polinomio di 2° grado in $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad p(\underline{x}) = p(x_1, \dots, x_n) = \underset{\substack{\uparrow \\ \deg 2}}{p_2(\underline{x})} + \underset{\substack{\uparrow \\ \deg 1}}{p_1(\underline{x})} + \underset{\substack{\uparrow \\ \deg 0}}{p_0(\underline{x})}$

- $p_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad x_i x_j = x_j x_i$

$a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1$

$\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) x_2 x_1$

$\Rightarrow$ posso sempre supporre $a_{ij} = a_{ji}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t\underline{x} A \underline{x} \qquad A$ simmetrica

- $p_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = {}^t b \underline{x}$

$p_1(x_1, \dots, x_n) = 2(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n) = 2\,{}^t b \underline{x} \qquad \mathrm{char}\, \mathbb{K} \neq 2$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$p(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x} + 2\,{}^t\underline{b}\, \underline{x} + c$ → espressione generale di una quadrica

$\underline{x} = M\underline{x}' + \underline{t}$

$$p'(\underline{x}') = p(M\underline{x}' + \underline{t}) = {}^t(M\underline{x}' + \underline{t}) A (M\underline{x}' + \underline{t}) + 2\,{}^t\underline{b}(M\underline{x}' + \underline{t}) + c$$

$$= {}^t\underline{x}'\,{}^tMAM\underline{x}' + \underbrace{{}^t\underline{x}'\,{}^tMA\underline{t} + {}^t\underline{t} AM\underline{x}'}_{\text{sono numeri} \Rightarrow \text{posso trasporli}} + 2\underline{b}M\underline{x}' + {}^t\underline{t}A\underline{t} + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{t} + c =$$

$$= {}^t\underline{x}'\,{}^tMAM\underline{x}' + 2({}^t\underline{t}AM\underline{x}' + {}^t\underline{b}M\underline{x}') + p(\underline{t}) = {}^t\underline{x}' A' \underline{x}' + 2\,{}^t\underline{b}'\underline{x}' + c'$$

$2\,{}^t(A\underline{t} + \underline{b})M\underline{x}'$

$$= {}^t\hat{\underline{x}}' \begin{bmatrix} A' & \underline{b}' \\ {}^t\underline{b}' & c' \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}'$$

$$\begin{cases} A' = {}^tMAM \\ {}^t\underline{b}' = {}^t(A\underline{t} + \underline{b})M \\ c' = p(\underline{t}) \end{cases}$$

si può riscrivere $\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$p(\underline{x}) = {}^t\hat{\underline{x}} \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline {}^t\underline{b} & c \end{array}\right] \hat{\underline{x}}$$

motivo per cui si mette ×2

$f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$

$\updownarrow$

$$\left[\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \hat{M}$$

verificare

$\hat{A}' = {}^t\hat{M}\hat{A}\hat{M}$

es. $f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$

$M = I$

$A' = A$

$\underline{b}' = A\underline{t} + \underline{b}$ $\quad c' = p(t)$

Classificazione affine delle quadriche $\equiv$ (studiare le orbite e individuare in ognuna una forma canonica)

(altre classificazioni: isometrica

$d(P,Q) = \|Q - P\|$

$\|f(\underline{y}) - f(\underline{x})\| = \|\underline{y} - \underline{x}\|$

$f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$

$Iso(a_n(\mathbb{K})) = \{ M\underline{x} + \underline{t} \mid M \in O_n \}$)

(nel caso isometrico non funziona)

C quadrica in $a_n(\mathbb{K})$

C è A CENTRO se $\exists\, \underline{x}_0 \in a_n(\mathbb{K}) \mid p(\underline{x}_0 + \underline{x}) = p(\underline{x}_0 - \underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$

OSS $\underline{0} \in \mathbb{K}^n$ è un centro di simmetria $\iff$ $p(\underline{x})$ non ha termini di grado 1 $\quad (\underline{b} = \underline{0})$

$p(\underline{x}) = p(-\underline{x}) \quad \forall \underline{x}$ $\qquad {}^t\underline{x} \cancel{A\underline{x}} + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} + \cancel{c} = \cancel{{}^t(-\underline{x})A(-\underline{x})} - 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} + \cancel{c}$

$2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} = -2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} \quad \forall \underline{x}$

${}^t b\,\underline{x} = 0 \quad \forall \underline{x} \Rightarrow \underline{b} = \underline{0}$

16/17 maggio 2024 Salvetti

CONICHE: luogo delle soluzioni di un polinomio di 2° grado: $p(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

OSS: il gruppo affine $A_2(\mathbb{K})$ agisce sull'insieme delle coniche: se $f \in A_2(\mathbb{K})$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right)$ allora $p(x', y') = 0$ per qualche polinomio di 2° grado p'.

$A_2(\mathbb{K})$ agisce sui polinomi (di grado d qualunque)

Def. Più in generale una **quadrica** in $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$ è il luogo di zeri di un polinomio di 2° grado $p(x_1, \dots, x_n) = 0$

$$p(x_1, \dots, x_n) = p_2(x_1, \dots, x_n) + p_1(x_1, \dots, x_n) + p_0(x_1, \dots, x_n)$$

con p_i omogeneo di grado i

Quindi p_2 è una FORMA QUADRICA:

$$p_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i \qquad (\text{assumendo } \operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2)$$

Si può rimatrittare supponendo $a_{ij} = a_{ji}$

$$\cancel{((a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = \frac{1}{2} a_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2} a_{ji} x_j x_i} \qquad \overbrace{\tfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})}^{a_{ij}} x_{ij} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})}_{a_{ji}} x_{ji}$$

$$p_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j = {}^t\underline{x} A \underline{x}$$

con $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\qquad A = (a_{ij})$ simmetrica

Inoltre $p_1(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 2\, {}^t\underline{b}\, x \qquad b = {}^t[b_1, \dots, b_n]$ e $p_0(\underline{x}) = c \in \mathbb{K}$

ci metto un 2 che mi servirà dopo

$$\Rightarrow \quad p(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x} + 2\, {}^t b x + c \qquad (1)$$

Se $f \in A_n(\mathbb{K}) \qquad \underbrace{f(\underline{x}')}_{} = M\underline{x}' + \underline{t}$, $f(\underline{x}') = \underline{x}$, $\qquad M \in Gl_n(\mathbb{K}),\ t \in \mathbb{K}^n$

$$p'(\underline{x}') = p(M\underline{x}' + \underline{t}) = {}^t(M\underline{x}' + t) A (M\underline{x}' + \underline{t}) + 2\, {}^t b (M\underline{x}' + t) + c =$$

$$\dots = {}^t\underline{x}'\, {}^tMAM\, \underline{x}' + 2\, {}^t(A\underline{t} + \underline{b}) M \underline{x}' + p(t)$$

Cioè $p(\underline{x})$ si trasforma nel polinomio

$$p'(\underline{x}') = {}^t\underline{x}' A' \underline{x}' + 2\, {}^t\underline{b}' \underline{x}' + c' \qquad (2)$$

↓ diventa una nuova conica

dove:

- $A' = {}^tMAM$
- $b' = {}^tM(A\underline{t} + \underline{b})$
- $c' = p(\underline{t})$

Notazione che usa $\mathbb{A}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{A}_{n+1}(\mathbb{K})$: $\quad \underline{x} \longrightarrow \hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A_n(\mathbb{K}) \cong \left\{ \begin{bmatrix} M & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ M \in Gl_n(\mathbb{K}) \right\},$$

poniamo $\hat{A} = \begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ {}^t\underline{b} & c \end{bmatrix}$; allora

$$p(\underline{x}) = {}^t\hat{\underline{x}}\,\hat{A}\,\hat{\underline{x}} \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} {}^t\underline{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ {}^t\underline{b} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\underline{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\underline{x} + \underline{b} \\ {}^t\underline{b}\underline{x} + c \end{bmatrix} =$$

$$= {}^t\underline{x}A\underline{x} + {}^t\underline{x}\underline{b} + {}^t\underline{b}\underline{x} + c =$$

$$= {}^t\underline{x}A\underline{x} + 2\,{}^t\underline{b}\underline{x} + c$$

Se $f \in A_n(\mathbb{K})$ è data da $f(\underline{x}') = M\underline{x}' + \underline{t}$ allora se

$\hat{M} = \begin{bmatrix} M & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si ha $p'(\underline{x}') = {}^t\hat{\underline{x}}'\,\hat{A}'\,\hat{\underline{x}}'$

con $\hat{A}' = \begin{bmatrix} {}^tMAM & {}^tM(A\underline{t}+\underline{b}) \\ {}^t(A\underline{t}+\underline{b})M & p(t) \end{bmatrix} \qquad (4)$

ESEMPIO:

f traslazione $\rightarrow f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$, allora (2) e (4) diventano

$$p'(x') = {}^t\underline{x}'A\underline{x}' + 2\,{}^t(A\underline{t}+\underline{b})\underline{x}' + p(\underline{t}) =$$

$$= {}^t\hat{\underline{x}}' \begin{bmatrix} A & A\underline{t}+\underline{b} \\ {}^t(A\underline{t}+\underline{b}) & p(\underline{t}) \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}' \qquad (5)$$

Classificazione delle quadriche (affine, isometrica, etc...)

<u>AFFINE</u>: si trova una "forma canonica" nelle orbite del gruppo affine $A_n(\mathbb{K})$

<u>ISOMETRICA</u>: se V è euclideo (con prodotto $\varphi > 0$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), su E si può introdurre la distanza $d(P,Q) = \|Q - P\|$

le isometrie di E sono quelle affinità che preservano la distanza, e formano un gruppo $Iso(E)$. Se $E = a_n(\mathbb{R})$ con prod. canonico, allora $f \in Iso(E) \Longleftrightarrow f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$ $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Infatti $\|\underline{y} - \underline{x}\| = \|f(\underline{y}) - f(\underline{x})\| = \|A\underline{y} + \cancel{\underline{b}} - (A\underline{x} + \cancel{\underline{b}})\| = \|A(\underline{y} - \underline{x})\|$

$\forall \underline{x}, \underline{y} \Longleftrightarrow A \in O_n$

Quindi $ISO(E) \cong \left\{ \begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A \in O_n \right\}$

Nella classificazione isometrica si trovano le forme canoniche nelle orbite rispetto a $Iso(E)$.

Sia $C = \{ \underline{x} \in a_n(\mathbb{K}) \mid p(\underline{x}) = 0 \}$ quadrica

Def. C si dice A CENTRO se $\exists\, x_0 \in a_n(\mathbb{K})$ tale che

$$p(\underline{x}_0 + \underline{x}) = p(\underline{x}_0 - \underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$$

In tal caso x_0 si dirà centro di simmetria

OSS $\underline{0}$ è centro di simmetria di $p(\underline{x}) \iff p(\underline{x}) = p(-\underline{x}) \ \forall \underline{x}$

$$p(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x} + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} + c$$
$$p(-\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x} - 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} + c$$

$p(\underline{x}) = p(-\underline{x}) \iff {}^t\underline{b}\,\underline{x} = -{}^t\underline{b}\,\underline{x} \ \ \forall \underline{x} \iff \underline{b} = \underline{0}$ (char $\mathbb{K} \neq 2$)

OSS Se $\underline{x}_0$ è centro di simmetria, traslando $\underline{x}_0$ nell'origine la nuova quadrica avrà $\underline{0}$ come centro di simmetria

Cioè, se si ha la traslazione

$$\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$$

allora $p'(\underline{x}') = p(\underline{x}' + \underline{x}_0) = p(-\underline{x}' + \underline{x}_0) = p'(-\underline{x}')$

Quindi se rispetto alle coordinate $\underline{x}$ la quadrica che centro $\underline{x}_0$, rispetto alle $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ ha centro $\underline{0}$

C è a centro $\underline{x}_0 \iff$ la traslazione $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0$ annulla i termini di grado 1, cioè la nuova matrice diventa

$$\hat{A}' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$\iff \underline{x}_0$ risolve $A\underline{x}_0 + \underline{b} = \underline{0}$

Corollario: C è a centro $\iff$ è risolubile il sistema

$$A\underline{t} + \underline{b} = \underline{0} \qquad (6)$$

$\iff \underline{b} \in \operatorname{Im} A \iff \operatorname{rg}[A \,\vdots\, \underline{b}] = \operatorname{rg} A$

I centri della quadrica quando ci sono risolvono (6) quindi formano un ssp. affine (di dim $n - \operatorname{rg} A$)

Se A è non singolare, C ha 1 solo centro

Quindi in primo luogo si possono distinguere le quadriche a centro e quelle non a centro.

Restringiamoci ora al caso delle coniche, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$

Osservando che il cambiamento (4) è una congruenza, cerchiamo quali invarianti per l'azione di $A_2(\mathbb{K})$ ci sono.

$\operatorname{rg}(A)$ e $\operatorname{rg}(\hat{A}) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ {}^t\underline{b} & c \end{bmatrix}$ sono invarianti

Def. La conica C si dice NON DEGENERE se $\mathrm{rg}\,\hat{A} = 3$ $(\Leftrightarrow \det \hat{A} \neq 0)$

$\boxed{\text{Caso } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$

① $\mathrm{rg}\,A = 2$: con un'affinità $f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$ con ${}^tMAM = I$, $\underline{t} = -A^{-1}\underline{b}$

la C diventa $x_1^2 + x_2^2 + c' = 0$, $c' = p(\underline{t})$

se $\mathrm{rg}\,\hat{A} = 3$ allora sostituendo $x_i = \sqrt{-c'}\,x_i'$ e dividendo per c' l'equazione diviene

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

se $\mathrm{rg}\,\hat{A} = 2$ (C degenere) allora $c' = 0$ e si ha l'equazione $x_1^2 + x_2^2 = 0$

② $\mathrm{rg}\,A = 1$ si pone $f(\underline{x}) = M\underline{x}$ con ${}^tMAM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M'$

quindi $\hat{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1' \\ 0 & 0 & b_2' \\ b_1' & b_2' & c \end{bmatrix}$ con $\underline{b}' = {}^tM\underline{b}$ (vedi (2))

se $\mathrm{rg}\,\hat{A} = 3$ allora $b_2' \neq 0$. Scegliamo una traslazione $t = -\begin{pmatrix} b_1' \\ 0 \end{pmatrix}$, allora la conica ha matrice

$$\hat{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2' \\ 0 & b_2' & c' \end{bmatrix} \qquad c' = \varphi'(t)$$

Scegliamo un'altra traslazione $\underline{t}' = \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \end{bmatrix}$ tale che $t_2 = -\dfrac{c'}{2b_2'}$ * che annulla il termine noto

l'eq. si riduce a $x_1^2 + 2b_2' x_2 = 0$ e sostituendo $x_2 = \dfrac{-1}{2b_2'} x_2'$

$\Rightarrow x_2 = x_1^2$ (conica non a centro)

* $c'' = \begin{bmatrix} 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & b_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \end{bmatrix} + c' = 2b_2' t_2' + c' = 0$

$\hookrightarrow t_2' = -\dfrac{c'}{2b_2'}$

Se C è degenere $(\mathrm{rg}\,\hat{A} < 3)$ allora $b_2' = 0$

se $\mathrm{rg}\,\hat{A}_3 = 2 \Rightarrow x_1^2 = 1$

se $\mathrm{rg}\,\hat{A}_3 = 1 \Rightarrow x_1^2 = 0$

($\mathrm{rg}\,A \geq 1$ perché qualche termine di 2° grado deve esserci necessariamente)

Qui gli invarianti completi che caratterizzano le orbite sono $\mathrm{rg}\,\hat{A}$, $\mathrm{rg}\,A$

FORMA CANONICA	RG $\hat{A}$	RG A
$x_1^2 + x_2^2 = 1$	3	2
$x_2 = x_1^2$	3	1
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2	2
$x_1^2 = 1$	2	1
$x_1^2 = 0$	1	1

$\boxed{\text{Caso } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$

La segnatura è invariante per congruenza. Moltiplicando per un numero $\alpha \neq 0$ la conica non cambia.

NB! Se moltiplico per $\alpha > 0$ la segnatura non cambia, mentre se $\alpha < 0$ $(i_+, i_-, i_0) \rightsquigarrow (i'_+ = i_-, i'_- = i_+, i_0)$

invariante: $s = |i_+ - i_-|$

Data M una matrice simm. definiamo

$$s(M) = i_+(M) - i_-(M)$$

$\Rightarrow$ $|s(\hat{A})|$ e $|s(A)|$ sono invarianti della conica.

Inoltre, la moltiplicazione per $\alpha < 0$ cambia $\det \hat{A}$ (ordine 3) ma non cambia $\det A$ (ordine 2)

$\Rightarrow$ $\det A$ è invariante della conica

TEO: Ogni conica in $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ è affinemente equivalente a una e una sola conica della tabella seguente

auche rg A è un invariante

	EQ.	F. GEOMETRICA	rg $\hat{A}$	$\lvert s(\hat{A})\rvert$	sgn(det A)	$\lvert s(A)\rvert$
C_1	$x^2+y^2=1$	ellisse	3	1	>0	2
C_2	$x^2-y^2=1$	iperbole	3	1	<0	0
C_3	$x^2-y=0$	parabola	3	1	0	1
C_4	$x^2-y^2=0$	2 rette reali incidenti	2	0	<0	0
C_5	$x^2-1=0$	2 rette // distinte	2	0	0	1
C_6	$x^2=0$	2 rette reali coincidenti	1	1	0	1
C_7	$x^2+y^2+1=0$	ellisse immaginaria	3	3	>0	2
C_8	$x^2+y^2=0$	2 rette complesse coniugate incidenti in un punto reale	2	2	>0	2
C_9	$x^2+1=0$	2 rette complesse coniugate // e distinte	2	2	0	1

Dim. UNICITÀ: due coniche nella tabella hanno almeno un invariante $\neq$, quindi non sono aff. equivalenti

Vediamo ora come qualunque conica C si riduce a una di quelle in tabella

1) Si vede se c'è a centro o no, cioè se è risolubile

$$A\underline{t} = -\underline{b}$$

2) Supponiamo sia a centro, allora con una traslazione $\underline{t}$ che risolve $A\underline{t} = -\underline{b}$ si eliminano i termini di grado 1, riducendosi alla forma

$$^t\underline{x} A \underline{x} + c' = 0$$

$(c' = p(\underline{t}))$

Con un cambiamento lineare $\underline{x} \longrightarrow M\underline{x}$, il coeff. c' rimane lo stesso e possiamo diagonalizzare A, riducendola a una delle forme di Sylvester

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(rg A \geq 1)$

Se $rg \hat{A}' = rg \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} = 3 \quad (\Leftrightarrow rg A = 2,\ p(\underline{t}) \neq 0)$

allora la conica è non degenere a centro.

I e $-I$ sono equivalenti per moltiplicazione per -1, così come la 4ª e la 5ª.

Se ci si riduce a una delle prime due: $x^2 + y^2 + c = 0$

$c < 0 \Rightarrow$ ellisse reale (c_1) (con $x = \sqrt{|c|}\,x'$ $y = \sqrt{|c|}\,y'$

$c > 0 \Rightarrow$ ellisse immaginaria (c_7)

Se $c = 0$, $rg \hat{A} = 2$ (C degenere) e ci si riduce a (c_8)

La 3ª forma di A da entrambe l'iperbole (c_2) se C è non-degenere e la coppia di rette (c_4) se $rg \hat{A} = 2$ (C degenere).

Se $rg A = 1$ si trovano 4ª e 5ª forma di A, equivalenti per moltiplicazione per -1

Le possibilità diventano:

- $x^2 + c = 0$, $rg \hat{A} = 2$
  - $c > 0$ coppia rette // immaginarie
  - $c < 0$ coppia rette //

$x^2 + c = 0$, $rg \hat{A} = 1 \Rightarrow c = 0$

$x^2 = 0$ si trova c_6

Questo esaurisce i casi a centro.

Se $\mathcal{C}$ non è a centro, necessariamente $rg(A) = 1$ e con una congruenza $\underline{x} = M\underline{x}'$ ci si riduce a

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (se fosse $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ si moltiplica per -1)

Allora

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1' \\ 0 & 0 & b_2' \\ b_1' & b_2' & c \end{pmatrix} \qquad b' = {}^tM\underline{b}$$

$\underline{x} \longrightarrow \underline{x} + \underline{t}$ modifica la matrice in

$$\hat{\hat{A}}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 + b_1' \\ 0 & 0 & b_2' \\ t_1 + b_1' & b_2' & c' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$$

$$c' = t_1^2 + 2(b_1' t_1 + b_2' t_2) + c$$

Prendiamo $t = -b_1'$, $b_2' \neq 0$ altrimenti la conica sarebbe a centro. $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ non-degenere

Allora $c' = b_1'^2 + 2(-b_1'^2 + b_2' t_2) + c = -b_1'^2 + 2b_2' t_2 + c$

Scegliamo

$$b_2' = (b_1'^2 - c)/_{2b_2'}$$

da cui $c' = 0$. Ne segue l'eq. $x_1^2 + 2b_2 x_2 = 0$

da cui si trova la parabola $\mathcal{C}_3$ con la trasformazione $x_2 = -\frac{1}{2b_2} x_2'$

$\square$